

СТРОГАНОВА Ольга Сергеевна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
КОНСТРУКЦИЙ И СРЕД СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ**

Специальность 01.02.04 –
«Механика деформируемого твердого тела»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ – 2015

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет» на кафедре строительной механики корабля

Научный руководитель	кандидат технических наук, профессор кафедры строительной механики корабля СПбГМТУ Фрумен Александр Исаакович
Официальные оппоненты	Белостоцкий Александр Михайлович, доктор технических наук, профессор, руководитель научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ)
	Платонов Виктор Викторович, кандидат физико-математических наук, начальник сектора прочности и конструкции корпуса морских транспортных судов ФГУП «Крыловский государственный научный центр»
Ведущая организация	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (ФГАОУ ВО СПбГПУ)

Защита состоится «03» декабря 2015 г. в 16 часов на заседании специализированного диссертационного совета Д. 212.228.02 при Санкт-Петербургском государственном морском техническом университете по адресу: 190008, Санкт-Петербург, ул. Лощманская, д. 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского государственного морского технического университета.

Отзывы по автореферату, заверенные печатью, просим направлять по адресу совета университета.

Автореферат разослан «__» _____ 2015 г.

Ученый секретарь совета
кандидат технических наук,
доцент _____ С.Г. Кадыров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Проблема внешних сил строительной механики корабля, сформулированная еще И.Г. Бубновым в виде задачи определения характера, амплитуды и места приложения силовых воздействий на корабельные конструкции, имеет особенно сложное решение, когда речь идет о нагрузках, вызванных взаимодействием судового корпуса с грунтовой или ледовой средой, вследствие посадки на мель, движения в ледовом канале или столкновения с торосами. Описанные воздействия часто имеют локальный характер, что существенно влияет на местную прочность. Знание эпюр контактной нагрузки с учетом особенностей контактирующей с корпусом среды – залог корректного нормирования прочности и рационального проектирования усиления.

Особенностью сыпучего грунта и разрушенного мелкодисперсного льда в зоне соприкосновения с поверхностью конструкции является поведение, отличное от поведения обычного твердого деформируемого тела. Относительная подвижность частиц среды при этом весьма высока, и требует от расчетчика применять сложные реологические модели, учитывающие и пластичность, и зернистость сред, оставаясь при этом в рамках гипотезы сплошности. Современная механика деформируемого твердого тела допускает несколько путей моделирования указанных сред:

- как высоконелинейных пластичных сред в рамках традиционной теории напряжений Коши с возможным допущением о нарушении сплошности и возникновении множественных межзерновых контактов;

- как вязких жидкостей;

- как особых ротационно-подвижных упруго-пластических сред, с позиций развивающихся с начала XX в. несимметричных теорий упругого континуума, иначе называемых моментными теориями упругости (МТУ).

Решение задачи первым путем происходит с использованием мощных численных методов (МКЭ, МДЭ) и реализующих их компьютерных программ; дополнительный учет местных разрушений среды и появления свободной динамики фрагментов резко усложняет модель и увеличивает требования к вычислительным ресурсам. При этом возникает проблема корректного критерия локальной прочности среды. Второй путь весьма привлекателен, т.к. заменяет задачу контактного взаимодействия задачей о течении в канале (в предположении жесткопластического перехода среды в жидкое состояние сразу в требуемом макрообъеме) и используется уже около 40 лет, однако даёт приемлемые решения только в ограниченных диапазонах скоростей взаимодействия. При этом, как оказывается, модель дает существенное расхождение с экспериментом в части характера эпюр контактных давлений. Путем совершенствования таких моделей является обширный факторный эксперимент.

Модель среды, учитывающей поворотные эффекты и при этом остающейся сплошным деформируемым твердым телом (третий путь) - компромиссный вариант модели пристеночного слоя. Особенностью несимметричных теорий, помимо повышенной математической сложности, является необходимость введения дополнительных реологических параметров среды, далеко не всегда легко определяемых экспериментально. Эти параметры в ряде случаев могут являться независимыми характеристиками свойств среды, а в ряде случаев – быть функциями известных реологических параметров и характерных размеров решаемой задачи.

Одним из современных средств исследования возможностей несимметричной теории упругости, а также получения новых решений сложных задач является метод конечных элементов (МКЭ). Моделирование МКЭ дает возможность легко

Подписано в печать 2015 г. Заказ

Тираж 100 экз. Объем п.л.

Типография

.....

варьировать топологией расчетной области, точностью решения, видом нагружения и закрепления. Это позволяет исследовать диапазоны возможных значений реологических параметров и проще подобрать условия натурального эксперимента для их оценки. Решение обратных (идентификационных) задач позволяет подбирать наборы реологических параметров как варьируемых переменных, исходя из минимизации расхождения расчета и природы, и получать, таким образом, пригодные для практики расчетные модели. Подбор дополнительных реологических параметров для мелкобитого льда или сыпучего грунта в конкретных условиях взаимодействия может уточнить оценки контактных давлений, уровни энергопоглощения при ударах, и при этом - дать экономичную вычислительную модель. Сочетая модели пристеночного слоя и основного массива среды в одну гибридную, возможно решение не только сложных задач контактной механики, но и задач с сингулярностями в особых точках.

На сегодняшний день основным экспериментальным средством верификации гидродинамической модели взаимодействия конструкций со льдом являются тесты типа DBT (Drop Ball Tests), сродни им испытания различными высокоскоростными ударниками иных пластичных поверхностей, например, металлических бронезащитных элементов. Решение указанных задач с помощью высоконелинейных процессоров - ресурсоемко. Однако применение новых методов теории предельного равновесия, в частности, метода вариации псевдоупругих параметров, позволяет, оставаясь в рамках упругих решений, весьма точно оценивать энергоемкость внедрения и максимальные уровни деформаций, а также предельные уровни нагружения, приводящие к предельным скоростям соударения.

Актуальность работы. Таким образом, несмотря на успешное развитие высоконелинейных решателей задач контакта и рост мощностей вычислительной техники, остается насущной потребность в более простых и эффективных расчетных методиках и моделях, позволяющих качественно оценивать влияние параметров среды на уровни контактных нагрузок и управлять им, внося необходимые изменения в конструкцию или в режим ее эксплуатации. Разработка и совершенствование расчетных моделей, сочетающих преимущества численного моделирования на базе метода конечных элементов (МКЭ) с разумными упрощениями, базирующимися на применении новых моделей неразрушающихся тел, в том числе – моделей несимметричной теории упругости, является актуальной задачей. Исходя из сказанного, формулируются цель и задачи диссертационной работы.

Целью работы является получение новых и совершенствование существующих расчетных моделей взаимодействия сред со сложной реологией и жестких тел и конструкций на базе метода конечных элементов с использованием положений традиционной теории упругости и пластичности, несимметричной теории упругости и теории предельного равновесия. Для достижения цели должны быть решены следующие **задачи** механики деформируемого твердого тела:

- исследование возможностей моделирования соударения жестких конструкций со льдом существующими численными методами,
- разработка средств численного (конечно-элементного) решения задач несимметричной теории упругости с различными допущениями,
- разработка способа численной оценки предельной нагрузки вдавливания жесткой конструкции в жестко-пластические среды, в том числе – моментные, на

12. Фрумен А.И., Строганова О.С. Решение плоской контактной задачи с помощью конечных элементов моментной теории упругости // Тезисы докладов XXV Международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых сред и конструкций. Методы граничных и конечных элементов» 23-26 сентября 2013. –СПб, 2013. –с. 219-220

13. Миронов М.Ю., Строганова О.С. Об энергоемкости вдавливания сферического индентора в пластичную среду // Тезисы докладов: Конференция по строительной механике корабля, посвященная памяти академика Ю. А. Шиманского 19-20 декабря 2013 г., ФГУП «Крыловский государственный научный центр». – СПб, 2013. – с.92-94

14. Миронов М.Ю., Строганова О.С. Оценка предельного усилия вдавливания сферы в пластичную среду // Материалы научно-практической конференции, посвященной 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова 20-21 сентября 2013. – СПб. –2013. – с. 68-72

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Строганова О.С. Исследование допущения о стесненности моментной среды на конечно-элементных моделях плоской задачи теории упругости // *Материалы научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов «Балтийский экватор-3»* 14-15 октября 2014 г. – СПб:СПбГМТУ. –2014. – с.87-92
2. Строганова О.С. Конечно-элементное моделирование механизмов локального нагружения сред со сложной реологией // *Тезисы научно-технической конференции по строительной механике корабля, посвященной памяти профессора И.Г. Бубнова и 110-летию со дня образования кафедры строительной механики корабля «Бубновские чтения»* 23 декабря 2014 г. – СПб. –2014. – с.120-121
3. Строганова О.С., Фрумен А.И. Методология применения МКЭ для оценки долговечности элементов бурового оборудования // *Морские Интеллектуальные Технологии.* –2011. – № 4 (спецвыпуск). – с. 76-89
4. Строганова О.С., Фрумен А.И. Оценка НДС по МКЭ элементов бурового оборудования с учетом подвижного контакта в цикле нагружения // *Материалы XXIV Международной конференции VEM&FEM-2011: Тезисы докладов.* – СПб. – 2011. – с. 109-114
5. Строганова О.С., Фрумен А.И. Решение контактных задач с подвижной нагрузкой в системе ANSYS // *Материалы 2-й межвузовской конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов «Балтийский экватор»* 22-23 сентября 2011 г. – СПб. – 2011. – с. 266-278
6. Строганова О.С., Фрумен А.И. Четырехугольный конечный элемент несимметричной теории упругости в задачах о локальном нагружении // *Конференция по строительной механике корабля, посвященная памяти академика Ю. А. Шиманского* 19-20 декабря 2013 г. Тезисы докладов ФГУП «Крыловский государственный научный центр». – СПб. – 2013. – с. 85-87
7. Строганова О.С., Фрумен А.И. Четырехугольный конечный элемент несимметричной теории упругости в задачах о локальном нагружении // *Труды Крыловского государственного научного центра.* – СПб. – 2014. –вып. 82 (366). – с. 99-112
8. Строганова О.С., Фрумен А.И. Численное исследование влияния реологии грунта на параметры долговечности цангового кернорвателя // *Материалы Восьмой общероссийской конференции по морским интеллектуальным технологиям* 18-19 сентября 2011 г «МОРИНТЕХ-2011». – 2011. – № 2 (спецвыпуск). – с. 86-91
9. Строганова О.С., Фрумен А.И., Миронов М.Ю. Применение методов теории предельного равновесия к расчету предельных состояний локально нагруженной моментной среды // *Материалы научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов «Балтийский экватор-3»* 14-15 октября 2014 г. – СПб: СПбГМТУ. – 2014. – с. 77-82
10. Строганова О.С., Фрумен А.И., Миронов М.Ю. Проектирование многослойной цилиндрической оболочки подводного аппарата // *Труды Крыловского государственного научного центра.* – СПб. –2013. –выпуск 75 (359). – с.79-88
11. Строганова О.С., Фрумен А.И. Разработка конечного элемента плоской задачи моментной теории упругости // *Материалы научно-практической конференции, посвященной 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова* 20-21 сентября 2013. – СПб. –2013. – с. 93-101

основе базовых теорем и современных итерационных методов теории предельного равновесия.

Методы исследования определяются спецификой расчетов и математических моделей, включают в себя аналитические методы решения задач теории упругости, метод конечных элементов, матричные методы решения физически и геометрически нелинейных задач, методы теории предельного равновесия на основе экстремальных теорем.

Научная новизна работы состоит:

– в разработке новых конечных элементов плоской задачи несимметричной теории упругости в рамках теорий стесненного континуума («псевдо-Коссера») и нестесненного моментного континуума, а также исследовании их особенностей;

– в предложении гибридных моментно-безмоментных конечно-элементных моделей для решения задач теории упругости с особенностями;

– в разработке численной модели оценки предельных скоростей соударения жестких конструкций с пластичными средами по методам теории предельного равновесия без учета и при учете ротационных и моментных эффектов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным применением математических методов и подтверждается сравнением с известными аналитическими решениями, сопоставительными решениями при различных идеализациях, результатами численных и экспериментальных исследований других авторов.

Практическая ценность работы определяется тем, что полученные результаты позволяют

– исключать автотельные эффекты при численном решении,

– ставить и решать задачи идентификации сыпучих и пористых сред по реологическим параметрам,

– подбирать параметры дискретизации приграничной области при контакте с конструкциями для различных видов ледовых образований и грунтовых пород, а также при решении задач с особыми точками,

– оценивать предельные уровни нагружения и энергопоглощения ледовых или грунтовых массивов при локализованном контактном воздействии конструкции.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научно-технических конференциях: на XXIV Международной конференции «Методы конечных и граничных элементов» VEM&FEM-2011 г., на открытом семинаре кафедры строительной механики корабля СПбГМТУ, посв. 100-летию со дня рождения проф. А.А. Курдюмова, на 2-й межвузовской конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов «Балтийский экватор» в сентябре 2011 г., на конференции по строительной механике корабля памяти проф. П.Ф. Папковича 17-18 декабря 2012 г., научно-практической конференции, посвященной 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова 20-21 сентября 2013 г., на XXV Международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых сред и конструкций. Методы граничных и конечных элементов» 23-26 сентября 2013 г., на конференции по строительной механике корабля памяти акад. Ю.А. Шиманского 19-20 декабря 2013 г., на межвузовской конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов «Балтийский экватор-3» 14-15 октября 2014 г., на конференции по строительной механике корабля, посвященной 110-летию кафедры СМК и памяти проф. И.Г.

Бубнова «Бубновские чтения» 23-24 декабря 2014 г., на научном семинаре кафедры «Строительная механика корабля» СПбГМТУ 03 июля 2015 г., на XXVI Международной конференции «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций» 28-30 сентября 2015 г.

Публикации. По результатам исследований, представленных в диссертационной работе, опубликовано 14 научных работ. 2 работы написаны только автором, а 12 выполнены в соавторстве. 4 публикации выполнено в изданиях Перечня ВАК РФ.

Объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Она содержит 153 страницы машинописного текста, 2 таблицы, 104 рисунка, библиографию из 227 наименований.

На защиту выносятся следующие новые результаты, полученные автором:

- прямоугольный конечный элемент плоской задачи моментной теории упругости в рамках теории стесненного континуума;
- четырехугольный изопараметрический конечный элемент плоской задачи моментной теории упругости в рамках нестесненного континуума;
- гибридные численные моментно-безмоментные модели для решения задач теории упругости с особенностями и задач выдавливания реологически сложных сред;
- способ численной оценки предельной скорости соударения жесткой конструкции с жестко-пластической средой на основе статической экстремальной теоремы.

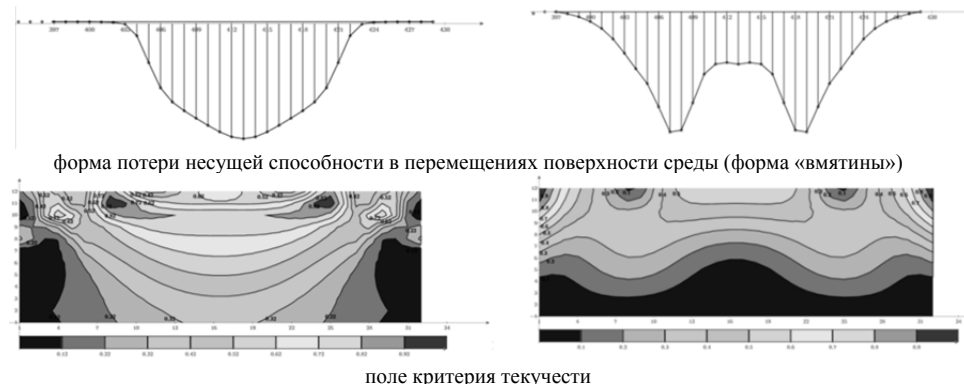


Рис. 24 Решение задачи о предельном надавливании на моментную среду с использованием предельной поверхности Мизеса, $q_0=0.9 \cdot 10^6$ Н/м

Рис. 25. Решение задачи о предельном надавливании на моментную среду с использованием предельной поверхности по Н.Ф. Морозову – А.Ю. Ишлинскому $q_0=3.98 \cdot 10^6$ Н/м

Как видно из сравнения результатов, уровни предельной нагрузки и формы потери несущей способности для разных критериев текучести существенно различны (около 10 МН/м и около 40 МН/м соответственно). Попытка учесть пластические повороты приводит к тому, что в центре пятна нагрузки вертикальная подвижность среды меньше, чем на его края (Рис.25,б), что в какой-то степени соответствует гипотезе о непостоянстве толщины выдавливаемого слоя. Использование критерия Мизеса (из непарных касательных напряжений в нем участвуют большие) для моментной среды привело к форме «вмятины» с более отвесными «стенками» (Рис.24,б), чем для безмоментной. Сходимость МВУ при использовании предельной поверхности только в терминах моментных напряжений хуже, возникают осцилляции. Очевидно, что путь к определению приемлемого вида предельной поверхности лежит в направлении комбинации двух рассмотренных критериев.

Таким образом, на основе уравнений поверхности текучести для сред с «нормально-сдвиговым» и «чисто моментным» критерием получены решения о предельном усилии надавливания, а также о характере поля скоростей пластических деформаций и конфигурации «вмятины». Показано, что воздействием на упругие реологические параметры и выбором того или иного критерия текучести можно добиваться весьма различных конфигураций и глубин внедрения, а также уровней пластической работы, соответствующих широкому диапазону скоростей внедрения.

Основные результаты работы сформулированы в заключении и состоят в следующем:

1. Существующие методики численного расчета упруго-пластического контактного взаимодействия тел и сред на основе МКЭ адаптированы к проблеме соударения инденторов со льдом.
2. Разработаны новые конечные элементы моментной теории упругости для решения задач с различными допущениями о кинематике континуума.
3. Предложена техника гибридного моделирования упругих сред для решения задач с особенностями и задач с разрушающимся периферийным слоем.
4. Предложен способ численной оценки предельной нагрузки жестко-пластической среды на основе статической теоремы предельного равновесия, с учетом моментности и ротационной подвижности.

Переход в полученном алгоритме от классических конечных элементов к моментным позволяет, наряду с упругими реологическими параметрами, подбирать по экспериментальным данным и критерию текучести для моментной среды.

В условиях несимметричной теории сплошной среды сформулировать критерий пластичности с использованием абсолютно всех компонентов напряженного состояния (нормальных, касательных и моментных) в виде квадратичной функции, переводимой в матричную форму с симметричной матрицей, без предварительных исследований не представляется возможным. Можно попытаться использовать лишь часть компонентов напряженного состояния: либо нормальные и касательные, либо моментные. В первом случае пластические деформации будут преимущественно сдвиговыми, во втором – определяться необратимыми поворотами частиц.

Для описания пластичности, обусловленной конечными остаточными поворотами частиц среды, Н.Ф. Морозовым предложен вариант реологических соотношений для изотропной среды:

$$\mu_i = \sigma_T^M \cdot (\kappa_i - \kappa_i^Y) + T \cdot (\kappa_i - \kappa_i^Y) - \quad (9)$$

диаграмма билинейного упруго-пластического поворота, где i – номер компонента моментного напряжения μ_i , σ_T^M имеет смысл моментного предела текучести, T – коэффициента упругости. Уравнение предельной поверхности при этом:

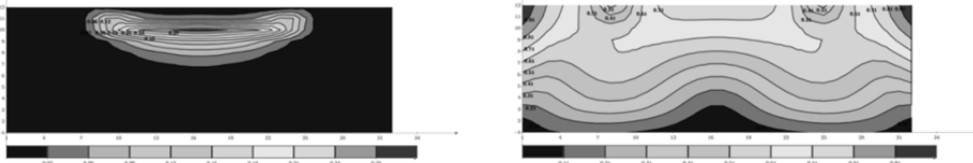
$$\sqrt{(\mu_1 - T \cdot \kappa_1)^2 + (\mu_2 - T \cdot \kappa_2)^2} = \sigma_T^M. \quad (10)$$

Очевидно, что при переходе к нужной для применения ТПР модели жестко-пластического поворота условие текучести упрощается до вида:

$$\sqrt{(\mu_1)^2 + (\mu_2)^2} = \sigma_T^M. \quad (11)$$

Таким образом, если произошло объемное разрушение («озернение») среды, то ее дальнейшее смятие в пределах мелкобитого объема происходит на основе упругого «классического» поведения частиц и неупругого моментного поведения. В первом приближении в качестве новой реологической константы – моментного предела текучести – используем обычный предел текучести. Очевидно, что изменяя этот параметр, а также параметры упругой реологии и вид поверхности текучести, можем в анализе предельных состояний добиваться разных предельных конфигураций среды, в том числе – наблюдаемых в эксперименте, то есть идентифицировать набор реологических констант.

С использованием конечно-элементной модели моментной нестесненной среды, было рассмотрено влияние выбора каждого из 2-х вариантов поверхности текучести (по Мизесу и по Н.Ф. Морозову) на результаты решения задачи о предельном равновесии нестесненной моментной среды. Начальные параметры упругой среды были приняты равными: $E=2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu=0.3$, $B^*=10^{11}$, $\alpha=10^{11}$, предел текучести – $\sigma_T=20$ МПа. Размеры расчетной области – те же, что и при решении задачи Фламана (8 x 3 м). Результаты представлены на рис. 24-25.



картина поля скоростей пластических деформаций (псевдоподатливостей)

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** диссертации отмечается актуальность темы и ставится **цель** исследования - получение новых и совершенствование существующих расчетных моделей взаимодействия сред со сложной реологией и жестких тел и конструкций на базе метода конечных элементов с использованием положений традиционной теории упругости и пластичности, несимметричной теории упругости и теории предельного равновесия, и выделяются практически важные **задачи** механики деформируемого твердого тела, в которых могут быть использованы новые расчетные модели:

– совершенствование и адаптация к проблеме соударения судовых конструкций со льдом существующих методик численного расчета упруго-пластического контактного взаимодействия тел и сред,

– разработка средств численного (конечно-элементного) решения задач несимметричной теории упругости с различными допущениями,

– разработка способа численной оценки предельной скорости соударения жесткой конструкции с жестко-пластической средой на основе теорем предельного равновесия.

В первой главе диссертации, поскольку поставленная задача взаимодействия является комплексной, рассматривается современное состояние расчетных методик на базе МКЭ для решения задач контактного взаимодействия деформируемых тел с сопоставимой и существенно различной жесткостью, состояние вопросов учета сложной реологии сыпучих и пластичных сред.

Анализируются классические и современные работы отечественных и зарубежных исследователей по механике контакта и внедрения Г. Герца, К. Джонсона, В. М. Александрова, И. И. Воровича, Л. А. Галина, Я. Гаслингера, Р. Гловински, Р. В. Гольдштейна, К. Джонсона, Н. Кикучи, Т. А. Ларсена, Ж.-Л. Лионса, Дж. Одена, П. Панагиотопулоса, А. Синьорини, А. А. Спектора, Р. Тремольера, Г. Фикера, И. Я. Штаермана и др., по применению аналитических подходов и МКЭ в задачах динамики и пластичности В.А. Постнова, И.Я. Хархурима, Р. Галлагера, О.К. Зенкевича, Л.А. Розина, К.И. Bathe, Е.Я. Вороненка, К.П. Горбачева, Н.Ф. Ершова, О.М. Палия, А.И. Фрумена и др., по моделированию взаимодействия морских конструкций со льдом В.А. Курдюмова, Д.Е. Хейсина, А.Б. Нестерова, Е.М. Апполонова, Е.Б. Карулина, Varsta, Riska, Jordaan, Timco, Kärnä, П. Куялы и др., по аналитическим и численным решениям задач моментной теории упругости В. Новацкого, В.Д. Купрадзе, В.А. Пальмова, Д. Аллмана, А.М. Белостоцкого, И.М. Сутурина, Ф.Я. Свойского, Н.Ф. Морозова, А.И. Фрумена, А.З. Локшина, В.А. Постнова, М.А. Кулеша, В.В. Лалина и др., а также по теории пластичности и теории предельного равновесия Д.С. Друкера, Р. Шилда, А. Надаи, Р. Хилла, Х. Гринберга, В.Т. Койтера, А.А. Ильюшина, А.Ю. Ишлинского, В.В. Новожилова, Л.М. Качанова, Д.Д. Ивлева, Ю.Н. Работнова, А.А. Гвоздева, А.Р. Ржаницына, В. Прагера, Ф.Г. Ходжа, А.А. Чираса, А.М. Бененсона, Ю.Л. Рутмана, Р.А. Каюмова и др.

Особое внимание уделено численным методам моделирования процессов контактного взаимодействия (внедрения в пластичные среды). Рассмотрены существующие реологические модели ледовых и грунтовых сред при различных скоростях взаимодействия, а также практические модели, предназначенные для решения задачи строительной механики о внешних силах: модели упругого контакта, медленного контакта с учетом ползучести, упругопластического и жесткопластического контакта, гидродинамическая (ГДМ) и модифицированная

гидродинамическая (МГДМ) модели для льда. Отмечается сложность идентификации моделей, одновременно включающих в себя модели упругого контактного взаимодействия, разрушения и динамики отдельных частиц и делается вывод об актуальности разработки и совершенствовании расчетных моделей, сочетающих преимущества численного моделирования на базе метода конечных элементов (МКЭ) с разумными упрощениями, базирующимися на применении новых моделей неразрушающихся тел, в том числе – моделей несимметричной теории упругости. Анализируется состояние вопроса о разработке различных теорий моментного континуума и их применения к решению практических задач. Отмечается сложность аналитических решений задач несимметричной теории упругости и ограниченность сферы их применения. Делается вывод о перспективности привлечения МКЭ в качестве универсального и удобного средства исследования моментных сред и параметризованных конечно-элементных моделей таких сред для идентификации новых реологических параметров по экспериментальным данным. Ставятся задачи диссертационного исследования:

- исследовать возможность моделирования соударения жестких конструкций со льдом существующими численными методами (МКЭ) и идентификации набора реологических параметров среды по результатам динамического эксперимента,
- разработать средства конечно-элементного решения задач несимметричной теории упругости с различными допущениями относительно кинематики среды и исследовать влияние дополнительных реологических параметров на характер деформирования объектов из материалов с моментными свойствами,
- исследовать способ гибридного моделирования тел с особыми точками или слоями с применением традиционных и моментных конечных элементов,
- разработать и программно реализовать итерационный алгоритм численной оценки предельной нагрузки вдавливания жесткой конструкции в жестко-пластические среды, в том числе – моментные, на основе базовых теорем и современных итерационных методов теории предельного равновесия.

Во второй главе рассматривается теория решения контактных упруго-пластических задач по МКЭ, а также современные средства программной реализации в рамках безмоментной теории. В качестве основного средства решения модельных задач внедрения принимается алгоритм на основе шагового метода нагружения с корректировкой мгновенной жесткости методом Ньютона-Рафсона, учитывающий накопление пластических деформаций по теории течения. Для динамических задач принимается неявная условно устойчивая схема интегрирования динамических уравнений Ньюмарка и явная схема метода центральных разностей.

Исследуется физически и геометрически нелинейная задача о проникании сферического индентора в изотропную пластичную среду с малой степенью упрочнения в статической и динамической постановке с использованием неявных и явных схем интегрирования динамических уравнений. На этапе моделирования статического внедрения по имеющимся решениям оцениваются приемлемые параметры расчетной сетки, шага нагружения, числа равновесных итераций, контактной зоны, а также необходимые конечные размеры расчетной области с учетом затухания возмущений НДС на удалении от индентора. Решение статической задачи производится в конечно-элементном комплексе ANSYS.

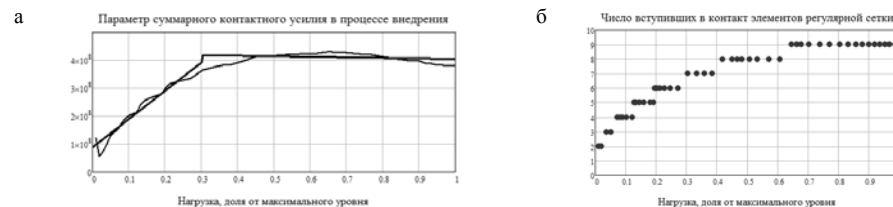


Рис. 19. Упрощение процесса контактного нагружения: а - зависимость параметра суммарной контактной силы от глубины внедрения и ее билинейная аппроксимация, б - зависимость размера зоны контакта от уровня нагрузки

Как установлено далее расчетами при упрощенных эпюрах давления, предельная нагрузка слабо зависит от конфигурации эпюры, и вместо аппроксимационного полинома 3-й степени можно использовать статически эквивалентное равномерное давление, площадь эпюры которого пропорциональна параметру нагружения. Можно, таким образом, заранее создать «библиотеку» эквивалентных прямоугольных нагрузок фиксированной ширины в зависимости от радиуса кривизны поверхности индентора и пластических параметров среды, например, для случая плоской ее границы.

Применение МВУ с использованием в качестве переменных параметров упругости множителей при физических жесткостях элементов расчетной сетки показало хорошее повторение предельной конфигурации границы «вдавленной» среды и уровня соответствующей этой конфигурации нагрузки.

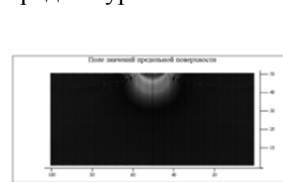


Рис. 20. Поле значений функции предельной поверхности на последней итерации

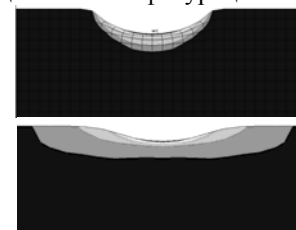


Рис. 21. Форма просадки модели МВУ на последней итерации (фрагмент модели) и действительная пластическая просадка, полученная нелинейным решением с разгрузкой.

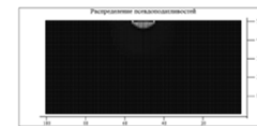


Рис. 22. Поле псевдопластичностей (форма поля скоростей деформаций) на последней итерации

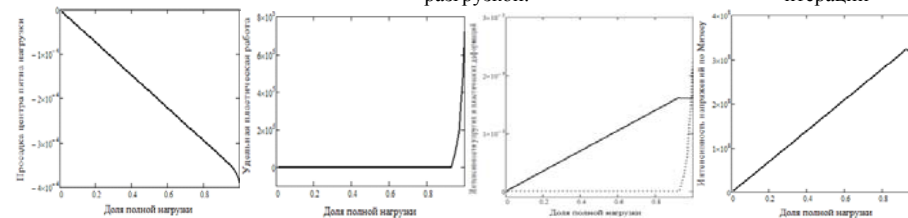


Рис. 23. Деформационные кривые проверочного физически и геометрически нелинейного шагового расчета. Изменение характера совпадает с уровнем предельной нагрузки

Таким образом, пластическую работу индентора можно найти, базирясь на нагрузке, полученной методами теории предельного равновесия. Энергоемкость же достижения предельного состояния контактной системы, очевидно, *дает информацию о предельно допустимых скоростях столкновения* в предположении о переходе большей части кинетической энергии ударяющего тела в пластическую работу.

Перспективным методом оценки предельных уровней нагружения по жесткопластическим моделям является метод вариации упругих параметров (МВУ) Р.А. Каюмова и Ю.Л. Рутмана, который нашел применение не только в механике конструкций, но и в механике грунтов.

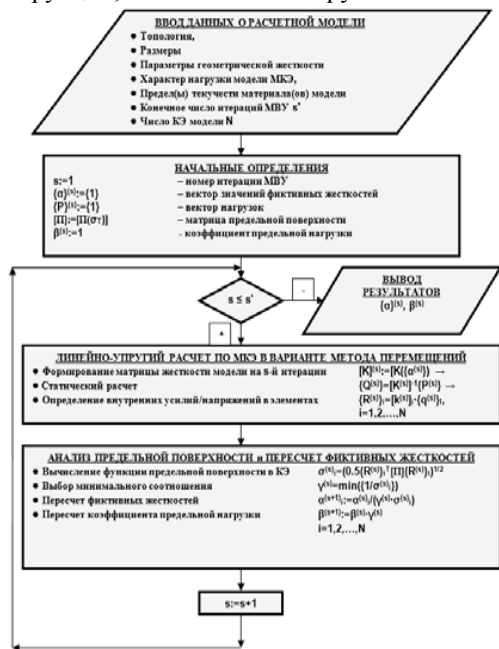


Рис.16 Алгоритм МВУ для дискретизированных систем

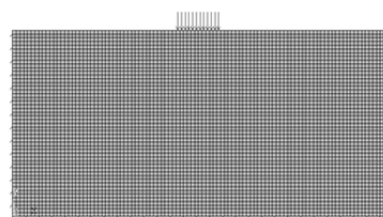


Рис. 17 Расчетная схема задачи с локализованным воздействием. Размеры области – 1 x 0.5 м, квадратных КЭ сетки – 1 см, пятна нагрузки – 12 см (исключает автомодельные эффекты и обеспечивает затухание упругих возмущений на неподвижных границах расчетной области). Модель материала - близкая к прандтлевой билинейная с $\sigma_T=320$ МПа и слабым упрочнением 10^{-3} Па.

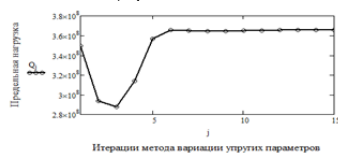


Рис. 18 Сходимость метода псевдоупругих параметров

Так как давления на конструкцию ледовой техники не могут превышать предельных нагрузок, разрушающих лед, то уточнение предельных уровней нагружения при взаимодействии конструкции конкретной конфигурации и льда позволит более точно оценивать расчетные нагрузки и проектировать ледовые усиления на более достоверной основе.

Проблемой непосредственного применения МВУ к задачам контакта жестких тел и сред является их геометрическая нелинейность в общем случае, когда поверхности контактирующих тел имеют разную кривизну. В настоящей главе допущено, что возможно параметрическое описание эпюры контактного давления, позволяющее применить один параметр и для учета возрастания нагрузки, и для учета изменения характера эпюры. Тогда МВУ можно применять как серию линейных решений под нагрузкой с известным характером на каждой итерации. На основе используемых в первой главе моделей с классическими КЭ, здесь получено статическое нелинейное решение о вдавливании сферического индентора в пластичную среду и по кривым деформирования оценен предельный уровень нагрузки (начала периферийного выпучивания среды). При этом получена аппроксимационная эпюра контактных давлений в каждый момент времени и показано, что суммарное контактное усилие до уровня предельного возрастает линейно (Рис. 19, а).

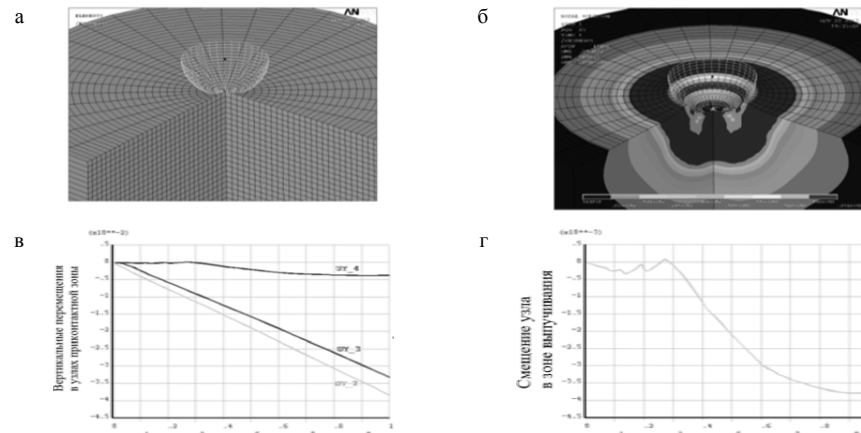


Рис. 1 Модель и результаты решения по МКЭ задачи о внедрении сферического индентора в пластичную среду

Квазистатическое осесимметричное решение доводится до критических и закритических уровней нагрузки (уровня погружения), где потеря несущей способности среды отражается на кривых деформирования «нагрузка – характерное смещение» (Рис.1, в,г) и сопровождается периферийным выпиранием на границе контактной зоны (Рис. 1,б). Рассчитывается соответствующий уровень пластической работы материала, на разных стадиях истории нагружения определяется характер эпюры контактных давлений.

Используются следующие геометрические и физические параметры модели (Рис.1,а): предел текучести материала среды, в которую вдавливается индентор: $\sigma_T=20$ МПа (берется равным пределу прочности льда по Коржавину); модуль упругости среды $E=2$ ГПа, модуль упрочнения билинейной диаграммы $E_T=1$ МПа (что позволяет считать среду практически прандтлевой, при этом обеспечивая устойчивость численного расчета методом Ньютона-Рафсона), коэффициент Пуассона среды принимается довольно низким для пластичного материала ($\mu=0.3$) с учетом того, что пластическое течение локализуется в приконтактной зоне, а основная масса материала деформируется упруго, радиус вдавливаемого сферического индентора – 10 см, размеры участка полупространства достаточно велики, чтобы полагать на его конечных границах напряжения и перемещения существенно затухшими (глубина – 0.5 м, радиус – 1 м). Применяются простейшие четырехузловые плоские конечные элементы PLANE42 (с опцией осесимметричного напряженного состояния), а также парные контактные элементы TARGE169 и CONTA171, причем «целевые» элементы TARGE169 образуют неподатливый контур. Контактная задача решается уравниванием системы на каждом шаге нагружения с определением удовлетворительных усилий взаимодействия в безразмерном контактом слое методом множителей Лагранжа. Нагрузка прикладывается как кинематическое вертикальное смещение центра полусферы, при этом силовое воздействие является реактивным и связано с текущей конфигурацией модели. Добавка активной силовой составляющей в нагрузку ухудшает сходимость решения, не изменяя практически кинематику и НДС контактной зоны. Максимальная величина задаваемого смещения – 45 мм, т.е. практически половина радиуса индентора. Запас по нагрузке взят с

расчетом на обнаружение на кривых перемещений характерных изменений кривизны, соответствующих наступлению предельного состояния.

Рассматривалось несколько вариантов плотности сетки, а также различная дискретизация шагов по нагрузке. Получены устойчивые решения на малом числе инкрементов (до 100).

Из сравнения результатов на разных сетках установлено, что в точках максимального давления (на оси модели) имеет место автомодельность (с ростом плотности сетки уровень напряжений пропорционально растет). Однако интегрально предельное состояние оценивается на разных сетках примерно одинаково. Модель МКЭ позволяет определить уровень энергии, поглощаемой пластическим деформированием. Полная подводимая работа может быть оценена как произведение суммарной вертикальной реакции в опорных границах расчетной области на задаваемое смещение, а пластическая работа в «текущих» элементах – путем поэлементного подсчета.

Так как традиционной проблемой численного контактного решения для сферических и цилиндрических поверхностей является наличие первичного контакта в единственном узле и, как следствие – невозможность уравнивания вертикальной узловой реакции тензором напряжений, использовался прием искусственного первоначального перекрывания контактных поверхностей, чтобы обеспечить вхождение в контакт на начальных стадиях сразу нескольких узлов сетки. Размер необходимого перекрывания составил 0.001 от радиуса сферы. На Рис.1,б представлено поля эквивалентных напряжений контактной системы.

По оси абсцисс на кривых деформирования (Рис.1, в,г) откладывается доля максимального внешнего возмущения (в данном случае – заданного смещения сферы как жесткого целого), 1 на оси аргументов означает 100% приложенной нагрузки. Из кривых видно, что предельное состояние системы в целом наступает при заглублении индентора примерно на 30% от максимума заданной нагрузки, т.е. примерно на 16% от радиуса сферы. Здесь происходит резкий охват текучестью значительной зоны под индентором и «выпучивание» среды на границе контактной и свободной поверхности. В целом статическое решение упругопластической задачи о внедрении дает хорошее согласование с имеющимися решениями других авторов (Джонсон, Шилдс и др).

При подобранных параметрах моделирования упруго-пластического контактного взаимодействия проводится сопоставление с известными экспериментальными результатами, полученными в 70-х – 90-х гг. на т.н. динамических «сферических тестах» (DBT) и опытах по квазистатическому внедрению цилиндрических инденторов в ледовое поле, исследуются пути уточнения математических моделей.

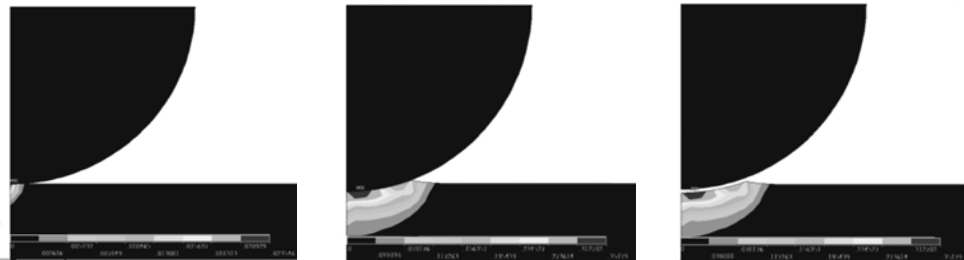


Рис. 2 Поле пластических деформаций по Мизесу в стадиях соударения (невная схема)
а) начальный контакт при скорости 3.14 м/с; б) внедрение в момент времени 0.006 с на синхронизированной оси; в) отскок на финальных шагах по времени

основе экспериментальных данных, используя и непостоянную толщину слоя, а характер эпюры давлений (локализованность, пиковость и т.п.) регулировать реологическими параметрами. Предварительно влияние моментной реологии исследовано на полностью моментных моделях выдавливания полосы (Рис.15).

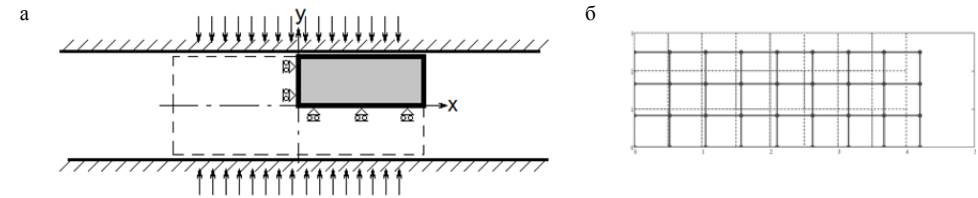


Рис. 15 Расчетная схема задачи о выдавливании полосы и безмоментное решение

Использование моментной стесненной среды, как видно из полученных результатов (Таблица 2), позволяет получить «пиковую» эпюру вертикальных напряжений вблизи смещающейся границы, причем «пиковость» вполне регулируется изгибно-крутильным модулем. Максимальный «всплеск» вертикальных напряжений наблюдается при нулевой моментной реологии. С ростом моментной напряженности среды пик пропадает.

Таблица 2. Влияние изгибного модуля B на перемещения и вертикальные напряжения σ_y вблизи смещающейся границы (стесненный континуум)	
$B = 0$	
$B = 1 \cdot 10^9$	
$B = 1 \cdot 10^{10}$	

Даже в упругой постановке качественный характер полученных расчетом эпюр давления вполне отражает экспериментальную картину. При этом задача, как и в ГДМ, считается квазистатической.

По итогам главы делаются выводы о диапазонах применимости новых моментных и гибридных численных моделей сложных сред и о путях их совершенствования.

В пятой главе отмечается, что при всех преимуществах моментной модели среды в пристеночном слое следует учитывать и пластичность среды. В механике грунтов и в ряде задач механики льда практическую ценность представляют упрощенные жесткопластические модели. Экстремальные теоремы теории предельного равновесия позволяют строить при известных поверхностях скольжения эффективные алгоритмы расчета предельных нагрузок, в т.ч. нагрузок внедрения инденторов в жестко-пластическую среду или нагрузок на откосы.

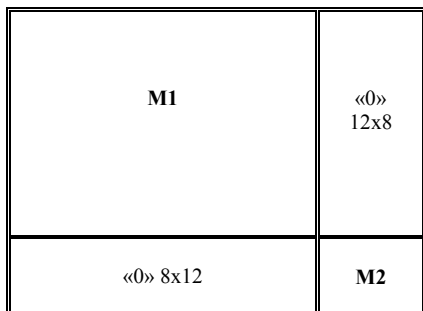


Рис. 13 Структура данных «универсального КЭ»
 Параметризованные матрицы жесткости:
 M1 – моментного КЭ (12x12),
 M2 – безмоментного КЭ (8x8),

Подобной «универсальной» матрицей удобно пользоваться при создании глобальной матрицы жесткости (масс) системы с использованием аппарата матрицы индексов. Каждый элемент, будь то элемент моментного или безмоментного слоя, искусственно имеет матрицу жесткости размерности 20x20, причем столбцы и строки, не соответствующие нужным степеням свободы, заполнены нулями. Увеличение требуемых объемов памяти незначительно сказывается на скорости счета на современных ПЭВМ.

При формировании глобальной матрицы жесткости по матрице индексов используется массив бинарных признаков элементов (0 – безмоментный, 1 – моментный). Узлы сетки, принадлежащие элементам с обоими признаками, формируют границу слоев, на которой задается дополнительное граничное условие: отсутствие поворотов. Матрица индексов формируется в 3 этапа:

- матрица индексов незакрепленной системы в предположении 3 степеней свободы в каждом узле модели,
- матрица индексов с учетом кинематических граничных условий в предположении 3 степеней свободы в узле,
- матрица индексов с учетом кинематических г.у. и удалением 15, 18, 21 и 24-го столбцов.

С использованием гибридных моделей решены тестовые задачи об изгибе консольной балки и выдавливании полосы, получены параметры конечно-элементных моделей, для которых решения достаточно хорошо совпадают с имеющимися аналитическими (Э.А. Буланова).

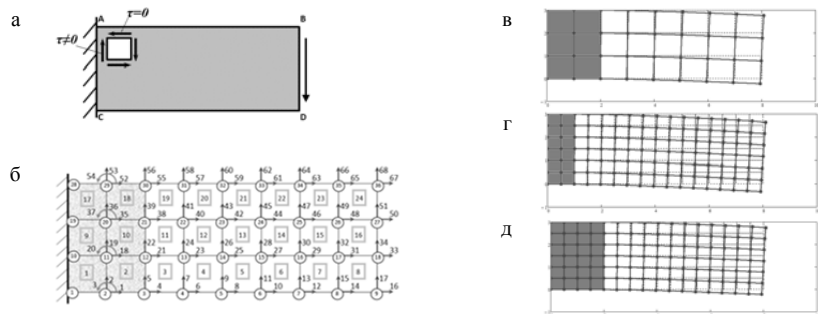


Рис. 14. Слоистая (гибридная) модель прямоугольной области. Решение тестовых задач об изгибе при разных толщинах моментного слоя.

На основе полученных моделей предложен способ определения эпюр локальных давлений в зоне разрушенного и выдавливаемого льда как поперечных компонент напряжений на жестко смещаемой границе моментного слоя, причем включение в «моментный слой» элементов, имитирующих ледовый массив, можно производить на

В качестве базовой информации принимаются опубликованные в открытой печати (работы А.Б. Нестерова и Е.М. Апполонова) данные осциллограмм контактного давления в контрольных точках (Рис.3) и глубин внедрения при DBT. Производится сравнение результатов моделирования по контактным нагрузкам с ГДМ и МГДМ взаимодействия льда и конструкции.

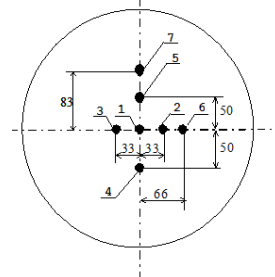


Рис.3 Контрольные точки на проекции контактной зоны

Расчет ведется для полусферического индентора массой 145.5 кг и радиусом 17.5 см, свободно падавшего на ровную поверхность льда с высоты 80 см, приобретая к моменту касания скорость около 3.14 м/с. Используются: динамический процессор программы ANSYS и высоконелинейный динамический решатель LS-DYNA. Принципиальная разница расчетных алгоритмов состоит в использовании неявной (ANSYS) и явной (LS-DYNA) схем интегрирования уравнений динамики. Также отличаются алгоритмы учета контакта. Задача решается в двумерной (осесимметричной) постановке, в обоих случаях контактное трение полагается нулевым, упрочнение среды – малым, критерий текучести формулируется по Мизесу (традиционно используемый в механике грунтов критерий Кулона-Мора дает весьма существенные отличия при локальном нагружении). Динамические свойства среды определялись плотностью плавучего льда (900 кг/м³) и индентора. Конструкция индентора, согласно рассмотренным работам, – полая сфера, частично заполненная металлом, частично использующая пространство для размещения датчиков и креплений. Поэтому используется эффективная (средняя) плотность, определенная массой и радиусом модели. Расчет по LS-DYNA ведется без учета реальной упругости сферы (полагается абсолютно жесткой), по ANSYS – с учетом (модели абсолютно жесткого массивного тела в ANSYS нет, возможна только жесткая граница). Искусственное повышение жесткости, например, заданием модуля Юнга на несколько порядков выше, приводит к существенному расхождению коэффициентов матрицы жесткости всей модели и к ухудшению сходимости.

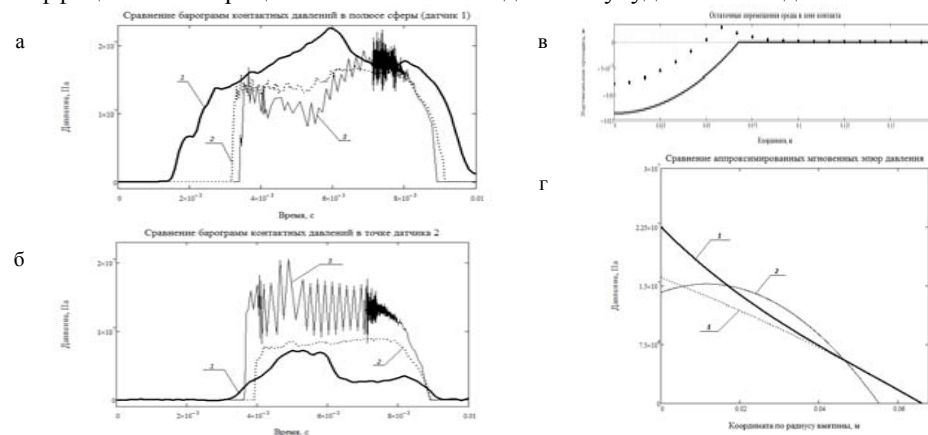


Рис. 4 Графики нестационарных давлений в контрольных точках при динамическом внедрении для явных (2) и неявных (3) решателей (а,б), полей перемещений (в) и эпюр давлений (г). Сравнение с экспериментальными данными DBT (1).

Начальные условия для расчета по LS-DYNA - начальная вертикальная координата и нулевая начальная скорость. При расчете в ANSYS баллистический участок траектории не рассматривается, начальная скорость 3.14 м/с задается для модели с искусственным первичным контактом. Общее время нестационарного расчета равно 0.01 с, что соответствует примерному времени падения до 0 контактных давлений в эксперименте. Модуль Юнга для ледовой среды взят равным 2 ГПа. Поскольку упругие характеристики льда при фиксированной температуре, плотности и солености слабо зависят от скорости нагружения, единственным реологическим параметром расчетной модели, варьированием которого можно пытаться сблизить результаты модели и природы, является динамический предел текучести материала. Произведена серия расчетов в диапазоне изменения $\sigma_T=2.5...7.5$ МПа. На Рис.4 представлены в сравнении: результаты эксперимента, расчета по неявной схеме (ANSYS) и по явной схеме (LS-DYNA) при $\sigma_T=5$ МПа. Отмечены следующие факты.

1) Наилучшее согласование эксперимента с расчетными моделями наблюдается при выборе $\sigma_T=5$ МПа. Повышение предела текучести приводит к появлению высокочастотных колебаний давления и росту их амплитуды, а также к сокращению времени контакта. Снижение предела текучести существенно снижает уровень контактных давлений, а также увеличивает время контакта по сравнению с экспериментом.

2) Размер расчетной области играет более существенную роль по сравнению со статической задачей за счет волновых эффектов, поэтому размеры области приходится увеличивать в динамическом расчете по сравнению со статическим расчетом.

3) При $\sigma_T=5$ МПа выполняется достаточно хорошее совпадение с экспериментом по характеру циклограммы и по амплитуде контактных давлений (расхождение в пределах 10%), правда, не в одинаковые моменты времени.

4) Время контакта точек сферы со средой в расчетных моделях на 20-30% меньше реального, однако, как сказано выше, попытка увеличить его за счет снижения σ_T приводит к существенному падению давления.

5) Размеры «вмятины» в расчетных моделях существенно ниже экспериментальных, расхождение составляет до 50% по глубине внедрения. Несколько выше размеры «вмятины» в расчете, выполненном по явной схеме, за счет более эффективного учета нелинейности и отсутствия потерь на упругие колебания индентора.

6) Отмечаемый в ряде работ «пиковый» характер эпюры контактного давления при динамическом воздействии имеет место в решении по явной схеме (Рис.4,г). Однако выраженность «пика» слабее, чем в экспериментальных исследованиях.

На основании отмеченных фактов делается вывод о диапазонах применимости современных техник численного решения контактных задач внедрения, возможностях и приёмах их совершенствования. В частности, указывается, что моделирование сред со сложной реологией как пластичных изотропных сред классической теории Коши ограничено низкой подвижностью частиц и невозможностью перевода должной части энергии соударения в пластическую работу. Реальное объемное растрескивание льда вызывает относительное вращательное движение частиц и увеличивает объем вытесняемой среды. Одним из путей получения более сопоставимых с действительностью вычислительных моделей представляется переход к новой модели

Расхождение контрольных величин на крупных и мелких сетках невелико, т.е. автомодельность отсутствует и сходные тенденции при изменении реологии можно наблюдать на любых сетках. Повышение модулей дополнительной реологии до величин одного порядка с модулем Юнга приводит к резкому возрастанию влияния моментных напряжений. Как и в случае задачи Фламана, модуль α оказывает большее влияние на максимальное расхождение между безмоментным и моментным решением, нежели модуль β . Отмечены следующие важные факты:

– при снижении моментно-сдвиговой жесткости стабилизация параметров «обычного» НДС в моделях стесненной среды происходит на уровне более высоком, нежели уровень безмоментного решения, а в моделях нестесненной среды – строго на уровне безмоментного решения;

– при повышении моментно-сдвиговой жесткости стабилизация параметров НДС в моделях стесненной среды происходит на уровне, отличном от нуля, тогда как в моделях нестесненной среды параметры «обычного» НДС падают до нуля.

Таким образом, ротационная подвижность среды более высока в стесненном континууме. Объяснить это можно тем, что поскольку повороты элементов в нестесненном континууме – величины, не имеющие линейной геометрической связи с поступательными перемещениями, то для сколько-нибудь заметного их изменения требуется гораздо больший, чем в стесненном континууме, уровень моментных напряжений. Здесь большую роль играют местные кривизны. В реальных сыпучих средах (например, грунтах) моментные напряжения зависят от размеров и формы частиц, существенно влияющих на трение качения, и растут со снижением пористости. Таким образом, качественно можно учитывать пористость снижением моментно-сдвиговой жесткости.

Основная идея гибридного подхода – разделение расчетной области среды на кинематически совместные зоны (слои), которые обладают по отдельности свойствами моментного и безмоментного континуума. В задачах с сингулярностями это позволяет получать корректные решения в точках резкого изменения геометрии или граничных условий (Рис. 14,а), а в задаче о выдавливании слоя льда при динамическом воздействии конструкции на кромку ледового поля – имитировать кинематически более подвижный слой.

Очевидно, что совместность элементов на границе слоев выполняется только по поступательным узловым перемещениям. Поэтому для первого приграничного ряда моментных элементов повороты в узлах границы запрещаются. Это создает более плавный переход между слоями.

Различные порядки аппроксимации также ухудшают совместность. Здесь решения будут менее точными, однако при уменьшении размеров КЭ можно добиться удовлетворительной точности.

Еще одним приемом улучшения совместности может быть использование промежуточного слоя элементов в случае, когда моментный континуум – нестесненный. Здесь можно для моментных по кинематике элементов использовать нулевую моментную реологию.

Способ ансамблирования глобальной матрицы жесткости гибридной модели состоит в создании квазидиагональной матрицы гибридного элемента (Рис. 13):

В прямом смысле это не объединение нескольких элементов конструкции в суперэлемент, а всего лишь вспомогательная процедура по созданию удобной структуры данных.

жесткости в гауссовых точках, число которых может варьироваться. Помимо изгибно-крутильного модуля B , в качестве дополнительного реологического параметра вводится моментно-сдвиговой модуль α (правая часть Таблицы 1). В нормализованной системе координат:

$$[k] = \iint_{-1}^{+1} [B]^T \cdot [G] \cdot [B] \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta, \quad (8)$$

где $[B]$ - матрица соотношений типа Коши, $[G]$ - матрица физического закона, $[J]$ - якобиан отображения пространства (ξ, η) на пространство (x, y) . Преимущество такого КЭ состоит в переменности напряжений по полю элемента, произвольности накладываемой на расчетную область сетки и возможности получения не только моментных, но и безмоментных решений при обнулении соответствующих реологических констант.

Тестирование четырехугольного элемента среды с независимыми ротациями производится на задаче Фламана с ограниченным упругим полупространством. Определяются диапазоны комбинаций новых реологических параметров, дающие решения по безмоментной (классической) теории и по теории стесненного континуума на идентичных сетках.

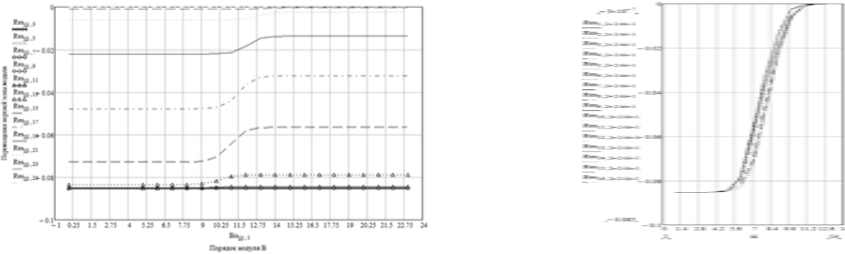
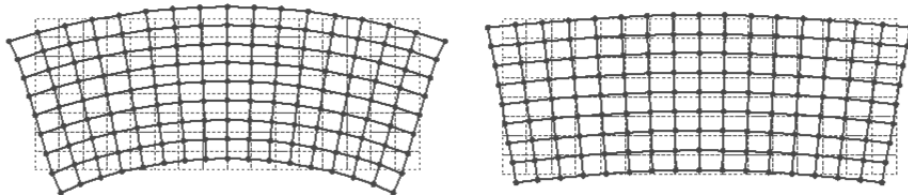


Рис. 11. Графики влияния модулей B и α на параметры НДС нестесненного континуума (задача Фламана). Крайние случаи – полностью безмоментная среда.

Основным выводом по главе является вывод о работоспособности новых КЭ и применимости для решения задач о локальном воздействии на среды со сложной реологией.

Четвертая глава посвящена разработке гибридных моментно-безмоментных моделей.

Элементы моментной среды при решении «классических» задач с известными аналитическими решениями при определенных наборах реологических параметров способны давать решения, существенно отличные от традиционных. Регулируя энергопоглощение дополнительной реологией в моментной (например, нестесненной) среде, можно акцентировать деформацию того или иного вида, например, усиливая или уменьшая сдвиговое влияние (Рис. 12).



$$\alpha=10^{-2}, B=10^{13}, w_{\max}-w_{\min}=0.7121276$$

$$\alpha=10^{13}, B=10^{-2}, w_{\max}-w_{\min}=0.2604192$$

Рис. 12 Влияние параметров моментной реологии на характер чистого изгиба балки-стенки

сплошной среды, а именно – ротационно-подвижному моментному или слабомоментному континууму.

Третья глава посвящена разработке и тестированию конечных элементов несимметричной теории упругости. Рассматриваемые модели среды являются разновидностями континуума, равновесие частиц которого определяется с учетом интенсивностей внутренних моментных усилий (Рис. 5). Соответственно, кинематика среды в плоской постановке допускает не только поступательные перемещения, но и местные искривления континуума.

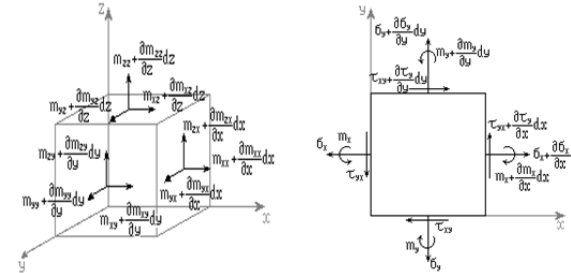


Рис. 5 Направления действия нормальных, касательных и моментных напряжений на элементе среды, пространственная и плоская задачи

Предполагается, что такие модели среды способны учесть наблюдаемые в эксперименте, но не отражаемые классическими моделями эффекты, в частности, стабилизацию возмущений при локальных нагружениях, при несоблюдении закона парности касательных напряжений в силовых граничных условиях, ротационное поглощение энергии в средах с вихревыми свойствами,

пористых средах и в сыпучих средах с возможностью относительного качения частиц.

Таблица 1. Используемые математические модели (системы ур-й) плоской задачи для стесненного (слева) и нестесненного моментного континуума

Уравнения равновесия (1)	
$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$
$\tau_{xy} - \tau_{yx} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}$	$\tau_{xy} - \tau_{yx} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}$
Геометрические соотношения (2)	
$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$	$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$
$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \kappa_{zx} = \frac{\partial \omega_z}{\partial x}; \quad \kappa_{zy} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y}$	$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z; \quad \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} - \omega_z$
	$\kappa_{zx} = \frac{\partial \omega_z}{\partial x}; \quad \kappa_{zy} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y}$
Закон Гука (3)	
$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y]$	$\sigma_x = \lambda' (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G \varepsilon_x$
$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x]$	$\sigma_y = \lambda' (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G \varepsilon_y$
$\gamma_{xy} = \frac{1}{2G} (\tau_{xy} + \tau_{yx})$	$\tau_{xy} = (G + \alpha) \gamma_{xy} + (G - \alpha) \gamma_{yx}$
$\kappa_x = \frac{m_x}{B^*}; \quad \kappa_y = \frac{m_y}{B^*}$	$\tau_{yx} = (G + \alpha) \gamma_{yx} + (G - \alpha) \gamma_{xy}$
	$\mu_{zx} = B \cdot \kappa_{zx}$
	$\mu_{zy} = B \cdot \kappa_{zy}$

Ряд таких задач успешно решен аналитически, однако, далеко не всегда имеется возможность опытным путем оценить дополнительные параметры реологии новой среды. В этой связи предлагается использовать МКЭ не столько как средство получения новых решений, сколько как средство численного эксперимента для выработки условий эксперимента натурального.

В рамках модели среды с наличием однозначной связи жестких поворотов с производными от поступательных перемещений в точке строится прямоугольный 12-степенной конечный элемент плоской задачи. Возможны различные частные случаи стесненного несимметричного континуума с локальными кривизмами и без них (теории Малинина, Пальмова, Буланова), допускающие наличие и исключение из реологической модели изгибно-крутильного модуля. Как наиболее часто встречающаяся выбрана модель «псевдо-Коссера» (левая часть Таблицы 1). Задействован один дополнительный реологический параметр моментной среды – изгибно-крутильный модуль B^* . Использован традиционный подход для построения конечного элемента на основе принципа возможных перемещений, задаваясь полиномиальной аппроксимацией перемещений (4) и вводя дополнительные поворотные степени свободы в узлах элемента.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y^2 \\ v(x, y) &= b_1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot y + b_4 \cdot x \cdot y + b_5 \cdot x^2 + b_6 \cdot y^2 + b_7 \cdot x^2 \cdot y^2 \\ \theta(x, y) &= \left(\frac{b_2}{2} - \frac{a_3}{2}\right) + \left(b_5 - \frac{a_4}{2}\right) \cdot x + \left(\frac{b_6}{2} - a_6\right) \cdot y + x^2 \cdot y \cdot (-a_7) + x \cdot y^2 \cdot b_7 \end{aligned} \quad (4)$$

Выбрана прямоугольная форма КЭ, позволяющая совместить общую и местную системы координат, и задействован прием статической конденсации, повышающий порядок аппроксимации при сохранении малого числа обобщенных перемещений.

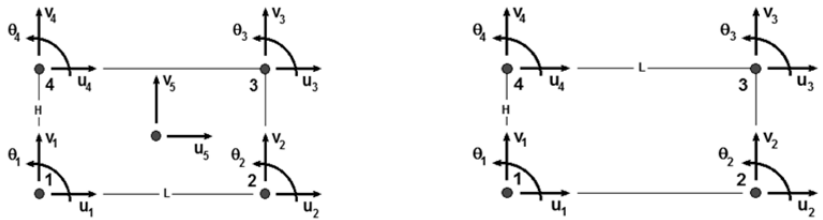


Рис. 6. Схемы конечных элементов плоской задачи для стесненного континуума (до и после для конденсации)

Тестирование прямоугольного конечного элемента проводится путем сопоставления с аналитическим решением в специальных функциях на примере задачи Фламанат (Рис.7-9).

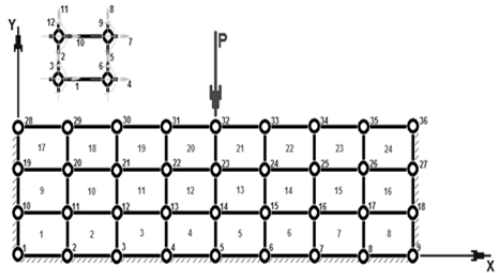


Рис. 7. Общая расчетная схема для исследования задачи Фламана на регулярной сетке из безмоментных и моментных КЭ

реологического параметра «изгибно-крутильный модуль» на стабилизацию напряжений (Рис. 9). Показана идентичность влияний сгущения сетки и повышения изгибного модуля свыше некоторого критического значения на энергопоглощение модели.

Предварительно с использованием традиционных КЭ разного порядка аппроксимации проведено исследование автомодельности задач с особыми точками на примерах задач Фламана и Буссинеска, где на сетках различной плотности определяются границы области существенной зависимости напряжений под силой от размера элемента.

С помощью вновь разработанного элемента производится оценка влияния

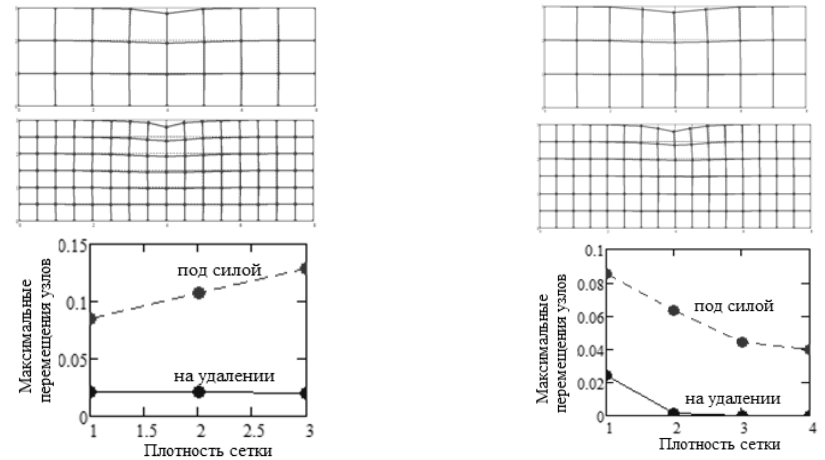


Рис. 8. Максимальные перемещения в безмоментной модели (8-степенной КЭ).

Рис. 9. Максимальные перемещения в моментной модели (12-степенной КЭ).

Полученные эффекты стабилизации перемещений при локальном воздействии как при нулевой, так и при бесконечной поворотной жесткости, а также повторение этих эффектов при варьировании плотностью сетки свидетельствует о том, что качественно элемент отражает свойства стесненной моментной среды.

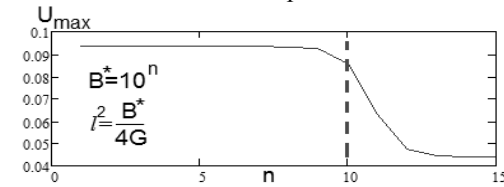


Рис. 9. Влияние дополнительных реологических параметров на параметры НДС в широком диапазоне изменения (от $-\infty$ до $+\infty$)

В рамках модели **нестесненного континуума**, где повороты частиц среды считаются независимыми от поступательных перемещений их точек, строится изопараметрический четырехугольный элемент плоской задачи с прямолинейными кромками (Рис. 10).

В рамках этой теории А.М. Белостоцким и И.М. Сутуриным был построен треугольный элемент на основе L-координат, с использованием дифференцирования функционала энергии.

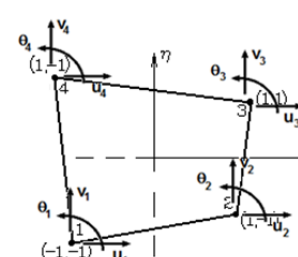


Рис. 10. Схема изопараметрического элемента

Новый элемент использует линейные аппроксимации поступательных перемещений и узловых поворотов

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) \cdot u_i; \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) \cdot v_i; \\ \theta(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) \cdot \theta_i, \end{aligned} \quad (5)$$

совпадающие по виду с функциями преобразования координат

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) \cdot \tilde{x}_i; \quad \tilde{y} = \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) \cdot \tilde{y}_i, \quad (6)$$

т.е. является изопараметрическим. Функции формы, аппроксимирующие перемещения в поле элемента, вводятся в наиболее простом виде:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta); \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta); \quad N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta); \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \quad (7)$$

Матрица жесткости элемента $[k]$ получается на основе принципа Лагранжа, численным интегрированием, которое заменяется суммированием значений