

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

На правах рукописи



УДК 539.3

СТРОГАНОВА Ольга Сергеевна

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
КОНСТРУКЦИЙ И СРЕД СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
кандидат технических наук,
доцент А.И. ФРУМЕН

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2015

Оглавление

Введение	4
Глава 1 Современные вычислительные модели для решения задач взаимодействия тел и сред со сложной реологией	9
1.1 Гидродинамические и комплексные модели взаимодействия твердых тел со льдом	9
1.2 . Современное состояние численных методов решения нелинейных динамических контактных задач МДТТ с учетом пластичности контактирующих сред на основе МКЭ	26
1.3 Модели сплошной среды с учетом моментности напряженного состояния и ротационной свободы частиц. Применение МКЭ в задачах моментной теории упругости.	36
1.4 Выводы	42
Глава 2 . Подходы к применению традиционных численных моделей механики деформируемого твердого тела в задачах контактного взаимодействия жестких тел с грунтовыми и ледовыми средами	43
2.1 . Обзор известных решений задач о статическом внедрении инденторов простой формы в пластичные среды.....	43
2.2 . Решение задачи о проникании сферического индентора в пластичную среду методом конечных элементов в статической постановке.....	54
2.3 Моделирование динамического внедрения сферы с помощью неявных и явных схем	63
2.4 . Выводы.....	71
Глава 3 Разработка и тестирование конечных элементов для решения плоской задачи несимметричной теории упругости	72
3.1 Прямоугольный конечный элемент моментной теории упругости для варианта стесненного континуума	72
3.2 Четырехугольный изопараметрический элемент моментной теории упругости для варианта нестесненного континуума.....	81
3.3 Исследование стабилизации напряженно-деформированного состояния в задачах о локальном нагружении упругой моментной полуплоскости для различных значений дополнительных реологических параметров	86
3.4 . Выводы	89
Глава 4 Моментные и гибридные модели упругой среды в условиях изгиба, наличия концентраторов и выдавливания	90
4.1 . Задача о чистом изгибе плоской области	90
4.2 . Гибридное моделирование в задачах с невыполнением закона парности на уровне силовых граничных условий	95
4.3 Задача об упругом выдавливании ротационно-свободной полосы сближающимися границами	102

4.4 Гибридное моделирование сжатия неоднородной структуры	107
4.5 Выводы	111
Глава 5 Оценка предельных усилий локального нагружения среды методом теории предельного равновесия	112
5.1 Метод вариации параметров упругости как универсальный численный метод теории предельного равновесия идеальных упруго-пластических тел	114
5.2 Решение задач о локальном нагружении полуплоскости и оценка энергоемкости по пластической работе.....	121
5.3 Подход к решению задачи о предельной нагрузке внедрения индентора	125
5.4 Адаптация метода вариации упругих параметров к оценке предельных нагрузок на моментный континуум	128
5.5 Выводы	137
Заключение	138
Источники	139

Введение

Проблема внешних сил строительной механики корабля, как задача как можно более точного определения характера, амплитуды и места приложения силовых воздействий на корабельные конструкции, имеет особенно сложное решение, когда речь идет о нагрузках, вызванных взаимодействием судового корпуса с грунтовой или ледовой средой, вследствие посадки на мель, движения в ледовом канале или столкновения с торосами. Описанные воздействия часто имеют локальный характер, что существенно влияет на местную прочность. Знание эпюр контактной нагрузки с учетом особенностей контактирующей с корпусом среды – залог корректного нормирования прочности и рационального проектирования усилений.

Особенностью сыпучего грунта и разрушенного мелкодисперсного льда в зоне соприкосновения с поверхностью конструкции является поведение, отличное от поведения обычного твердого деформируемого тела. Относительная подвижность частиц среды при этом весьма высока, и требует сложных реологических моделей, учитывающих и пластичность, и зернистость сред, оставаясь при этом в рамках гипотезы сплошности. Современная механика деформируемого твердого тела допускает несколько путей моделирования указанных сред:

- как высоконелинейных пластичных сред в рамках традиционной теории напряжений Коши с возможным допущением о нарушении сплошности и возникновении множественных межзерновых контактов;

- как вязких жидкостей;

- как особых ротационно-подвижных упруго-пластических сред, описываемых с позиций несимметричных теорий континуума, иначе называемых *моментными теориями упругости* (МТУ).

Решение задачи первым путем происходит с использованием мощных численных методов (МКЭ, метода дискретных элементов (МДЭ)) и реализующих их компьютерных программ; дополнительный учет местных разрушений среды и появления свободной динамики фрагментов резко усложняет модель и увеличивает требования к вычислительным ресурсам. При этом возникают проблемы корректного критерия локальной прочности среды и удовлетворительного размера конечных элементов.

Второй путь более привлекателен, т.к. заменяет задачу контактного взаимодействия задачей о течении в канале (в предположении жесткопластического перехода среды в жидкое состояние сразу в требуемом макрообъеме) и используется уже около 40 лет, однако даёт приемлемые решения только в ограниченных диапазонах скоростей взаимодействия. При этом, как оказывается (см. Гл. 1), модель дает существенное расхождение с экспериментом в части характера эпюр контактных давлений. Путем совершенствования таких моделей является обширный факторный эксперимент.

Модель среды, учитывающей поворотные эффекты и при этом остающейся сплошным деформируемым твердым телом (третий путь) – компромиссный вариант модели пристеночного слоя. Особенностью несимметричных теорий, помимо повышенной математической сложности, является необходимость введения дополнительных реологических параметров среды, далеко не всегда легко определяемых экспериментально. Эти параметры в ряде случаев могут являться независимыми характеристиками свойств среды, а в ряде случаев – быть функциями известных реологических параметров и характерных размеров решаемой задачи.

Одним из современных средств исследования возможностей несимметричной теории упругости, а также получения новых решений сложных задач является метод конечных элементов (МКЭ). Моделирование МКЭ дает возможность легко варьировать топологией расчетной области, точностью решения, видом нагружения и закрепления. Это позволяет исследовать диапазоны возможных значений реологических параметров и проще подобрать условия натурального эксперимента для их оценки. Решение обратных (идентификационных) задач позволяет подбирать наборы реологических параметров как варьируемых переменных, исходя из минимизации расхождения расчета и натуре, и получать, таким образом, пригодные для практики расчетные модели. Подбор дополнительных реологических параметров для мелкобитого льда или сыпучего грунта в конкретных условиях взаимодействия может уточнить оценки контактных давлений, уровни энергопоглощения при ударах, и при этом – дать экономичную вычислительную модель. Сочетая модели пристеночного слоя и основного массива среды в одну гибридную, возможно решение не только сложных задач контактной механики, но и задач с сингулярностями в особых точках.

На сегодняшний день основным экспериментальным средством верификации гидродинамической модели взаимодействия конструкций со льдом являются тесты типа DBT (Drop Ball Tests), сродни им испытания различными высокоскоростными ударниками иных пластичных поверхностей, например, металлических бронезащитных элементов. Решение указанных задач с помощью высоконелинейных процессоров - ресурсоемко. Однако применение новых методов теории предельного равновесия позволяет, оставаясь в рамках упругих решений, весьма точно оценивать энергоемкость внедрения и максимальные уровни деформаций, а также предельные уровни нагружения, приводящие к предельным скоростям соударения.

Актуальность работы. Таким образом, несмотря на успешное развитие высоконелинейных решателей задач контакта и рост мощностей вычислительной техники, остается насущной потребность в более простых и эффективных расчетных методиках и моделях, позволяющих качественно оценивать влияние параметров среды на уровни контактных нагрузок и управлять им, внося необходимые изменения в конструкцию или в режим ее

эксплуатации. Разработка и совершенствование расчетных моделей, сочетающих преимущества численного моделирования на базе метода конечных элементов (МКЭ) с разумными упрощениями, базирующимися на применении новых моделей неразрушающихся тел, в том числе – моделей несимметричной теории упругости, является актуальной задачей. Исходя из сказанного, формулируются цель и задачи диссертационной работы.

Целью работы является получение новых и совершенствование существующих расчетных моделей взаимодействия сред со сложной реологией и жестких тел и конструкций на базе метода конечных элементов с использованием положений традиционной теории упругости и пластичности, несимметричной теории упругости и теории предельного равновесия. Для достижения цели должны быть решены следующие **задачи механики деформируемого твердого тела**:

- исследование возможностей моделирования соударения жестких конструкций со льдом существующими численными методами,
- разработка средств численного (конечно-элементного) решения задач несимметричной теории упругости с различными допущениями,
- разработка способа численной оценки предельной скорости соударения жесткой конструкции с жестко-пластической средой на основе теорем предельного равновесия.

Методы исследования определяются спецификой расчетов и математических моделей, включают в себя аналитические методы решения задач теории упругости, метод конечных элементов, матричные методы решения физически и геометрически нелинейных задач, методы теории предельного равновесия на основе экстремальных теорем.

Научная новизна работы состоит:

- в разработке новых конечных элементов плоской задачи несимметричной теории упругости в рамках теорий стесненного континуума, нестесненного моментного континуума, и в исследовании их особенностей;
- в предложении гибридных моментно-безмоментных конечно-элементных моделей для решения задач теории упругости с особенностями;
- в разработке численной модели оценки предельных скоростей соударения жестких конструкций с пластичными средами по методам теории предельного равновесия без учета и при учете ротационных и моментных эффектов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным применением математических методов и подтверждается сравнением с известными аналитическими решениями, сопоставительными решениями при различных идеализациях, результатами численных и экспериментальных исследований других авторов.

Практическая ценность работы определяется тем, что полученные результаты позволяют

- исключать автомодельные эффекты при линейном численном решении,

- ставить и решать задачи идентификации сыпучих сред по реологическим параметрам,
- подбирать параметры дискретизации приграничной области при контакте с конструкциями для различных видов ледовых образований и грунтовых пород,
- оценивать предельные уровни нагружения и энергопоглощения ледовых или грунтовых массивов при локализованном контактном воздействии конструкции.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научно-технических конференциях: на XXIV Международной конференции «Методы конечных и граничных элементов» ВЕМ&FEM-2011 г., на открытом семинаре кафедры строительной механики корабля СПбГМТУ, посв. 100-летию со дня рождения проф. А.А. Курдюмова, на 2-й межвузовской конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов «Балтийский экватор» в сентябре 2011 г., на конференции по строительной механике корабля памяти проф. П.Ф. Папковича 17-18 декабря 2012 г., научно-практической конференции, посвященной 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова 20-21 сентября 2013 г., на XXV Международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых сред и конструкций. Методы граничных и конечных элементов» 23-26 сентября 2013 г., на конференции по строительной механике корабля памяти акад. Ю.А. Шиманского 19-20 декабря 2013 г., на межвузовской конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов «Балтийский экватор-3», 2014 г., на конференции по строительной механике корабля, посвященной 110-летию кафедры СМК и памяти проф. И.Г. Бубнова «Бубновские чтения» 23-24 декабря 2014 г.

Публикации. По результатам исследований, представленных в диссертационной работе, опубликовано 14 научных работ [148, 149, 193-204, 219]. 2 работы написаны только автором, а 12 выполнены в соавторстве. 4 публикации выполнены в изданиях Перечня ВАК РФ.

Объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Она содержит 153 страниц машинописного текста, 2 таблицы, 104 рисунка, библиографию из 227 наименований.

На защиту выносятся следующие новые результаты, полученные автором:

- прямоугольный конечный элемент плоской задачи моментной теории упругости в рамках теории стесненного континуума;
- четырехугольный изопараметрический конечный элемент плоской задачи моментной теории упругости в рамках нестесненного континуума;
- гибридные численные моментно-безмоментные модели для решения задач теории упругости с особенностями и задач выдавливания реологически сложных сред;

- способ численной оценки предельной нагрузки внедрения жесткой конструкции в пластическую среду на основе статической экстремальной теоремы и упрощенных эпюр нагрузки; подход к идентификации реологии сложных сред по формам предельного разрушения.

Глава 1 Современные вычислительные модели для решения задач взаимодействия тел и сред со сложной реологией

Эксплуатация судов в замерзающих и арктических морях сопровождается регулярными силовыми контактами корпуса со льдом. Нагрузка в зоне контакта, воспринимаемая корпусными конструкциями, не может превышать усилий, разрушающих ледовый покров [167]. Поэтому методология назначения расчетных ледовых нагрузок, регламентирующих уровень ледовой прочности корпуса, основывается на рассмотрении механизмов разрушения льда. Процесс разрушения льда может носить как статический, так и динамический характер. Согласно современным представлениям уровень ледовых нагрузок при статическом взаимодействии (сжатие судна во льдах) заметно ниже, чем при динамическом, реализуемом в случае удара корпуса судна о лед. При ударе в процессе внедрения корпуса в лед всегда имеет место разрушение (местное смятие) ледовой кромки непосредственно в зоне контакта. Механизм динамического разрушения льда в зоне контакта с корпусом и последующего вытеснения раздробленного льда за пределы зоны контакта *имеет чрезвычайно сложную природу и не описан с помощью единой общепризнанной модели.*

В настоящей главе делается попытка обзора состояния современных вычислительных моделей и методов для решения нестационарных нелинейных контактных задач взаимодействия твердых тел и сред со сложной реологией, к которым, в первую очередь, мы относим лед.

1.1 Гидродинамические и комплексные модели взаимодействия твердых тел со льдом

В настоящее время все модели ледовых нагрузок получены путем исследования взаимодействия тел со льдом и разрушения льда.

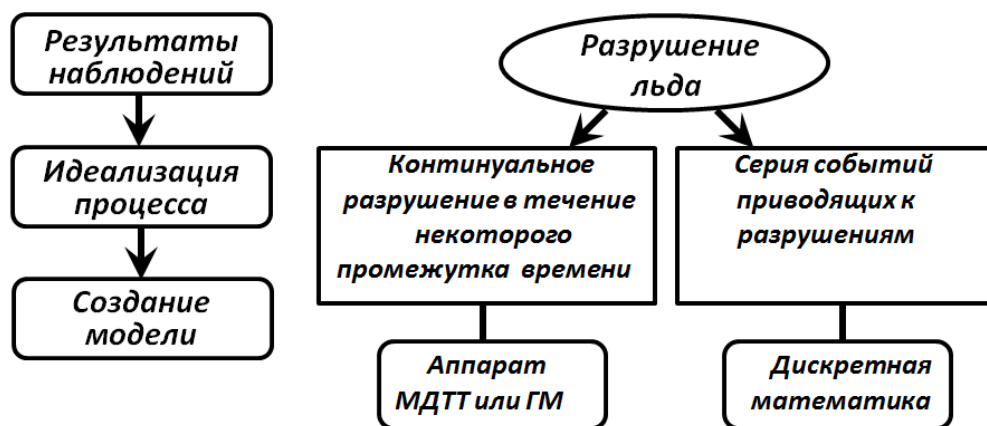


Рис. 1.1.1 Процесс разработки, предпосылки и математический аппарат моделей ледовых нагрузок

Под термином «*модель ледовых нагрузок*» понимаем ту часть описания взаимодействия, которая определяет взаимные усилия как наиболее важный для практического применения продукт использования той или иной идеализации сложного процесса разрушения льда, использующей методы

механики сплошной среды. Процесс создания модели ледовых нагрузок изображен на Рис. 1.1.1.

Первоначальные работы, связанные с решением проблемы внешних сил для судов ледового плавания, связаны с именами Ю.А. Шиманского, П.Ф. Папковича, К.Н. Коржавина, Д.Е. Хейсина и других отечественных ученых [94, 114, 127, 129, 225, 164, 167, 118, 221].

Поскольку вопросам взаимодействия инженерных сооружений со льдом (и не только в области кораблестроения) посвящена весьма обширная литература, то ниже выполним обзор лишь основных моделей динамического разрушения льда при местном смятии, используемых в современной отечественной и мировой практике судостроения, а также перспективы их совершенствования. Так как получить максимально адекватную действительности модель нагрузки на конструкцию от льда или грунта невозможно без максимально адекватного описания самой ледовой или грунтовой среды, то вектор развития объективно направлен в сторону выявления истинной природы деформации и разрушения этой среды, независимо от того, будет это полезно само по себе или только в контексте оценки силовых воздействий.

Континуальные модели ледовых нагрузок. Основной чертой всех этих моделей является то, что поведение твердого тела рассматривается как постоянное (*с сохраняющейся реологией*). Статистическая механика принимает допущения, которые «устраняют» несущественные события в процессе разрушения, при этом основные эффекты процесса разрушения рассматриваются как пределы, в которых является действительным континуальное решение [15].

Гидродинамическая модель удара твердого тела о лед (модель В.А.Курдюмова-Д.Е.Хейсина). Первая достоверная модель ледовых нагрузок была разработана Хейсиным, Курдюмовым и Лихомановым в 1975 году [125, 129]. Она основывалась на экспериментах по удару о лед, которые показали, что внедрение твердого тела в лед происходит за счет местного раздробления поверхности льда. Исследовался процесс удара о поверхность ледяного покрова стальных полусферических отливок массой 156 и 300 кг в диапазоне скоростей 1 – 6 м/с. Продолжительность удара составляла около 10^{-2} с. Считалось, что пластические деформации при этом в массиве льда не успевают развиваться, упругие деформации также были незначительны. В ходе экспериментов было выявлено, что в каждый момент процесса внедрения между поверхностью внедряющегося тела и массой неразрушенного льда образуется сравнительно тонкий промежуточный слой мелкодисперсного строения. Граница между раздробленным веществом слоя и основной массой крупнокристаллического льда достаточно четкая, без переходных областей. При внедрении ударника раздробленный лед из промежуточного слоя вытесняется на свободную поверхность. В раздробленном материале под давлением присутствует также некоторое количество воды.

В зависимости от количества жидкой фазы промежуточный слой можно представить как пастообразное или порошкообразное вещество. Такое

вещество может обладать как вязкими, так и пластическими свойствами, что позволяет воспользоваться системой уравнений Генки для вязко-пластического тела [109]. В случае осесимметричной задачи в цилиндрических координатах (Рис. 1.1.2) эта система имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} = (\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + 2\dot{\varepsilon}_r \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \dot{\gamma} \frac{\partial \lambda}{\partial z}; \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = (\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + 2\dot{\varepsilon}_z \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \dot{\gamma} \frac{\partial \lambda}{\partial r}; \quad (1.1.2)$$

$$\lambda = \frac{2k}{\sqrt{3}} [2(\dot{\varepsilon}_r^2 + \dot{\varepsilon}_t^2 + \dot{\varepsilon}_z^2)]^{-\frac{1}{2}}; \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (1.1.4)$$

где u — радиальная компонента скорости; w — вертикальная компонента скорости; μ — коэффициент внутреннего трения в слое; k — пластическая константа;

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \dot{\varepsilon}_t = \frac{u}{r}; \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (1.1.5)$$

Качественная наблюдаемая картина такова. В начальной стадии удара контакт твердого тела со льдом является упругим. Затем происходит местное раздробление поверхности льда и образование промежуточного слоя. Дальнейшее внедрение происходит при наличии развитого промежуточного слоя. При достаточно интенсивных ударах *эта стадия является доминирующей*, так что при описании процесса соударения можно пренебречь начальной и конечной упругими фазами. Преимущественно неупругий характер удара подтверждается данными экспериментов по величине коэффициента восстановления ε_0 , быстро убывающего при увеличении начальной скорости удара v .

Аналитическое решение нелинейной системы (1.1.1) - (1.1.5) было получено для внедряемого сферического тела в принятии промежуточного слоя тонким. Такое допущение хорошо согласуется с экспериментальными данными. Вводился параметр малости $\xi = \frac{h}{r_0}$, где h — толщина слоя; r_0 — радиус отпечатка.

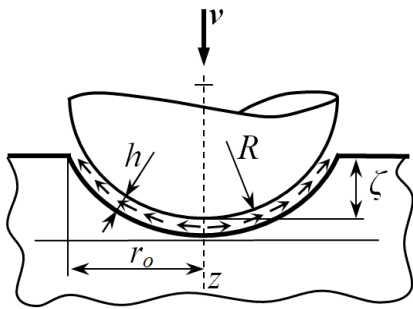


Рис. 1.1.2 Внедрение полусферической отливки в лед

Рассмотрим осесимметричную задачу в системе координат, связанной с твердым телом, внедряющимся в лед со скоростью v . Из кинематической совместности частиц среды и тела на пограничной поверхности следует пропорциональность $w \sim v$, а условие несжимаемости (1.1.4) дает оценку

$$u \sim \frac{w}{2\xi} \sim \frac{v}{2\xi}. \quad (1.1.6)$$

Из уравнения (1.1.3), используя оценку (1.1.6) и опуская члены высшего порядка малости, получено:

$$\lambda = \frac{2k}{\sqrt{3}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^{-1}. \quad (1.1.7)$$

Учитывая в правой части уравнения (1.1.1) параметр малости ξ , получим:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (1.1.8)$$

Слагаемые уравнения (1.1.2) с множителем μ оказываются на порядок меньше правой части уравнения (1.1.8), т.е. вертикальные компоненты скорости существенно ниже радиальных. Пластические компоненты будут иметь такой же порядок, если $\mu \approx \lambda = \frac{4kr_0\xi^2}{3v}$.

При ударах с умеренными скоростями $v \sim 100$ см/сек. В проведенных экспериментах радиус отпечатка был $r_0 \sim 10$ см, а толщина промежуточного слоя h — порядка 1 см, т.е. $\xi \sim 0.1$. Экспериментальное значение коэффициента внутреннего трения составляло $\mu \sim 1 - 0.1$ кг·сек/см². Таким образом, численная оценка пластической константы k дает порядок $10^2 - 10^3$ кг/см². Такие значения константы k характерны для металлов, а не для раздробленного льда.

После линеаризации уравнения (1.1.2) получим

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (1.1.9)$$

Следовательно, наличие пластических свойств у вещества тонкого промежуточного слоя не оказывает влияния на распределение давлений в слое. Уравнение неразрывности приближенно записывается так:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (1.1.10)$$

Уравнения (1.1.8), (1.1.9) и (1.1.10) представляют собой упрощенную систему Рейнольдса для квазистатического выжимания тонкого слоя вязкой жидкости между двумя твердыми поверхностями. Одной из них является поверхность внедряющегося тела, а другой — поверхность разрушения. Инерционные силы при этом не учитываются.

На поверхности внедряющегося тела выполняется очевидное кинематическое условие равенства вертикальных компонент скорости

$$w|_{z=0} = v. \quad (1.1.11)$$

Вследствие перехода в тепло работы сил граничного трения и таяния льда на поверхности твердого тела образуется слой жидкой смазки. В этом случае здесь должны равняться нулю касательные напряжения:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.1.12)$$

Поскольку $\frac{\partial u}{\partial z} \gg \frac{\partial w}{\partial r}$, то, очевидно, $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$.

Более сложно определить граничные условия на поверхности разрушения, которую можно считать движущимся контактным разрывом. При движении такого разрыва в твердом теле возбуждаются упругие колебания, уносящие некоторую часть энергии удара. Приближенную оценку

этой части можно произвести, рассматривая удар абсолютно твердой сферы об упругое полупространство. Скорость звука во льду $c = 3000 - 3500$ м/с. В рассматриваемом диапазоне скоростей удара $v = 1 - 6$ м/с доля упруго-излученной энергии в общем энергетическом балансе не превосходит 2 – 3%, и упругими деформациями льда можно пренебречь.

Если на поверхности разрушения $z = z_s$ имеется скачок плотности от ρ_0 до ρ_1 , то из закона сохранения импульса имеем

$$\frac{dz_s}{dt} = \frac{\rho_1 w_1 - \rho_0 w_0}{\rho_1 - \rho_0}, \quad (1.1.13)$$

т.е. скорость движения самой поверхности разрушения определяется разницей удельных импульсов. Здесь w_1 и w_0 — скорости движения частиц слева и справа от поверхности при $z \rightarrow z_s$.

Пренебрегая упругими деформациями льда, положим $w_0 = 0$. Если плотность льда при измельчении не меняется, то, чтобы скорость изменения координаты z_s оставалась конечной, надо полагать абсолютную скорость движения частиц вблизи поверхности разрушения равной нулю. Тогда

$$w|_{z=h} = 0. \quad (1.1.14)$$

Это подтверждает сделанное выше допущение *рассматривать поверхность разрушения в каждый данный момент времени как твердую стенку*. При этом, естественно, не будет и скачка давлений.

Поверхность разрушения здесь не является тангенциальным разрывом. Поэтому в качестве второго г.у. на поверхности разрушения естественно считать равной нулю касательную компоненту скорости частиц в слое $u|_{z=h} = 0$.

Решением упрощенной системы уравнений движения (1.1.8) - (1.1.10) с граничными условиями (1.1.11) - (1.1.14) получено уравнение, связывающее две неизвестные величины — давление p и толщину слоя h :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + 3 \frac{dp}{dr} \frac{dh}{dr} h^2 = -\frac{3}{2} \mu v. \quad (1.1.15)$$

В предположении $h = const$ из (1.1.15) получается известное решение для тонкого слоя, где давление обратно пропорционально кубу толщины слоя. Допущение $h = const$ не соответствует фактической картине, поэтому для определения неизвестных p и h надо привлечь дополнительное условие. С этой целью *можно было бы использовать какой-либо феноменологический критерий разрушения, выполняющийся на поверхности разрушения. Такой критерий для льда в настоящее время окончательно не установлен*. Поэтому в качестве *дополнительного условия* принимают линейное соотношение

$$p - p_0 = k_p h. \quad (1.1.16)$$

Это выражение (1.1.16) получается, если полагать *смещение поверхности разрушения пропорциональным давлению* в данной точке. Аналогичная гипотеза была использована, например, И. Я. Штаерманом [91] для учета местных поверхностных деформаций в контактной задаче теории упругости.

Величина $p_0 = const$ соответствует статическому давлению при отсутствии промежуточного слоя в начальной стадии удара. Это давление

можно идентифицировать с пределом прочности льда на местное смятие. При развитом промежуточном слое следует полагать $p_0 = 0$, так как нет непосредственного контакта твердого тела с нераздробленным льдом. Эмпирический коэффициент k_p зависит от физико-механических свойств льда и в достаточно узком диапазоне скоростей соударения может считаться постоянным.

Подставляя выражение (1.1.16) в формулу (1.1.15), получим дифференциальное уравнение относительно h , решение которого с учетом осевой симметрии имеет вид

$$h = \left(\frac{3\mu v}{k_p} \right)^{\frac{1}{4}} (C_1 - r^2)^{\frac{1}{4}}, \quad (1.1.17)$$

где C_1 – константа интегрирования. Отсюда, при известном распределении $h(r)$, эпюра давления такова:

$$p = v^{\frac{1}{4}} (3\mu k_p^3)^{\frac{1}{4}} (C_1 - r^2)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.1.18)$$

На краях зоны контакта при $r = r_0$ имеем $p = 0$, так что $C_1 = r_0^2$. Определим касательные напряжения на поверхности разрушения:

$$\tau = \frac{1}{2} v^{\frac{1}{2}} (3\mu k_p)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{r_0^2 - r^2}. \quad (1.1.19)$$

Касательные напряжения неограниченно возрастают при $r \rightarrow r_0$. Фактически края зоны контакта *скалываются*, так что эта зависимость будет справедлива лишь в области

$$r \leq \frac{r_0}{\alpha}, \quad (1.1.20)$$

где коэффициент $\alpha > 1$ учитывает сколы на краю зоны смятия.

Обозначив $\bar{r} = \alpha \frac{r}{r_0}$, получим

$$p = v^{\frac{1}{4}} (3\mu k_p^3)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (\alpha^2 - r^2)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.1.21)$$

Сколы обычно невелики. Поэтому можно принять $\alpha = const$. По предварительным оценкам, $\alpha = 1,05 - 1,08$ [125].

Полученные теоретические зависимости согласуются с результатами натуральных экспериментов по удару твердого тела о лед.

Рассмотрим внедрение твердой полусферы массой M в лед с начальной скоростью v_0 . Максимальная глубина внедрения ζ_{max} в эксперименте значительно меньше радиуса отливки R , что позволяет пренебречь кривизной промежуточного слоя и решать задачу в цилиндрических координатах. Уравнение движения массы в процессе удара с учетом (1.1.21) имеет вид:

$$Mv \frac{dv}{d\zeta} = - \int_F p dF = -v^{\frac{1}{4}} (3\mu k_p^3)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{r_0}{\alpha} \right)^{\frac{5}{2}} \pi \int_0^1 (\alpha^2 - x)^{\frac{1}{4}} dx, \quad (1.1.22)$$

где F – площадь зоны контакта.

Из условия $\zeta_{max} \ll R$ следует $r_0 \approx \sqrt{2R\zeta}$. Тогда, решая уравнение (1.1.22) с учетом начальных условий и полагая $\alpha = 1,06$, получим для максимальной глубины внедрения в конце удара выражение

$$\zeta_{max} = 0.71 \frac{v_0^{\frac{7}{9}} M^{\frac{4}{9}}}{(2R)^{\frac{5}{9}} (3\mu k_p^3)^{\frac{1}{9}}}, \quad (1.1.23)$$

и для времени удара выражение

$$T = \frac{\zeta_{max}}{v_0} \left[\int_0^1 \frac{d\bar{\zeta}}{\left(1 - \bar{\zeta}^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{4}{7}}} \right], \quad (1.1.24)$$

где $\bar{\zeta} = \frac{\zeta}{\zeta_{max}}$.

Контактное давление p в середине зоны контакта достигает наибольшего значения при $t = t_1 < T$ и определяется формулой

$$p_{max} = 0.79 p v_0^{\frac{4}{9}} M^{\frac{1}{9}} (3\mu k_p^3)^{\frac{2}{9}} (2R)^{\frac{1}{9}}. \quad (1.1.25)$$

Суммарное контактное усилие P достигает максимума при $t = t_2$ ($t_1 < t_2 < T$)

$$P_{max} = 1.18 v_0^{\frac{11}{9}} M^{\frac{5}{9}} (3\mu k_p^3)^{\frac{1}{9}} (2R)^{\frac{5}{9}}. \quad (1.1.26)$$

Множитель $3\mu k_p^3$, входящий во все расчетные формулы, зависит от физико-механических свойств льда и может быть определен из эксперимента. Для сопоставления экспериментальных и теоретических результатов целесообразно привести все выражения к безразмерному виду. С этой целью вводят безразмерные скорость внедрения, давление и суммарную силу:

$$\bar{v} = \frac{v}{v_0} = \left(1 - \bar{\zeta}^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{4}{7}}; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_{max}} = 1.19 \left(1 - \bar{\zeta}^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{7}} \bar{\zeta}^{\frac{1}{4}}; \quad (1.1.27)$$

$$\bar{P} = \frac{P}{P_{max}} = 1.42 \left(1 - \bar{\zeta}^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{7}} \bar{\zeta}^{\frac{5}{4}}.$$

Учитывая, что

$$t = \frac{\zeta_{max}}{v_0} \int_0^{\bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta}}{\left(1 - \bar{\zeta}^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{4}{7}}}, \quad (1.1.28)$$

можем получить зависимость безразмерной глубины внедрения $\bar{\zeta}$ от безразмерного времени $\bar{t} = t/T$. Тогда можно построить значения \bar{v} , \bar{p} и \bar{P} в функции от безразмерных параметров $\bar{\zeta}$ или \bar{t} .

На Рис. 1.1.3 сплошными линиями представлены теоретические зависимости $\bar{v}(\bar{t})$ и $\bar{P}(\bar{t})$, а экспериментальные данные нанесены точками. Следует отметить хорошее совпадение экспериментальных и теоретических данных. Кривая скорости $\bar{v}(\bar{t})$ имеет перегиб в конце удара, который описывается теорией, а также отмечается экспериментально. Физически это

соответствует «дожиманию» раздробленного вещества, когда разрушения льда уже практически не происходит.

Важной характеристикой удара является величина удельной энергии разрушения

$$\varepsilon_V = \frac{Mv_0^2}{2V}, \quad (1.1.29)$$

где V – объем образовавшейся лунки. Рассматривая лунку как сегмент параболоида вращения, имеем

$$V = \pi \zeta_{max}^2 R. \quad (1.1.30)$$

Используя формулы (1.1.23) и (1.1.29), получим линейное соотношение между удельной энергией разрушения и максимальным контактным давлением, осредненным по всей площади контакта: $\varepsilon_V = 0.926 \bar{p}_{MAX}$. Величина коэффициента пропорциональности между ε_V и \bar{p}_{MAX} хорошо согласуется с экспериментальными значениями коэффициента регрессии r по ε_V .

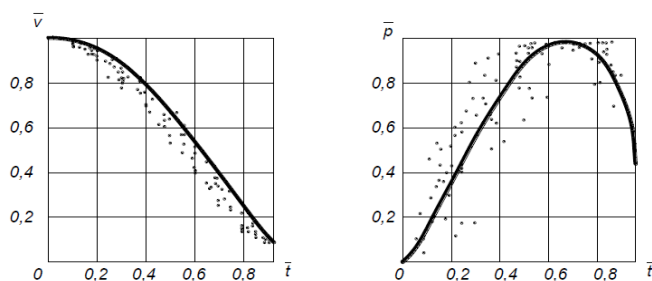


Рис. 1.1.3 Сравнение зависимостей $\bar{v}(\bar{r})$ и $\bar{p}(\bar{r})$ с экспериментальными данными

Разработанная модель удара о лед с внедрением Курдюмова-Хейсина удачно описывала экспериментальные данные конкретного эксперимента, но не носила универсального характера. Тем не менее, при ударах с образованием тонкого

промежуточного раздробленного слоя такое феноменологическое представление приводит к результатам, которые могут быть использованы при решении различных технических задач. К их числу относятся удары льдин о гидротехнические сооружения, сбрасывание грузов на лед и т. д. Полученная модель была названа *гидродинамической моделью* (ГДМ). Основанная на модели методология определения локальных ледовых нагрузок на корпус судна была реализована в требованиях Правил Регистра [172].

Эмпирическая модель «давление-площадь». ГДМ даёт достаточно пологую эпюру распределения давлений в зоне контакта со льдом. Проведенные в 80-е – 90-е годы в Канаде эксперименты по сбрасыванию полусферических грузов на лед, получившие названия Drop Ball Tests (DBT) [52, 61, 220], позволили поставить под сомнение достоверность ГДМ. В рамках данных экспериментов проводились замеры давлений в нескольких точках полусферы, впервые показавшие, что эпюра давлений имеет не пологую, а выраженную *пиковую форму*. В дальнейшем эти результаты были подтверждены в серии экспериментов по внедрению в лед среднemasштабных инденторов [6], а также натурных испытаний во льдах судов, оснащенных специальной системой для построения эпюры давлений в зоне контакта корпуса со льдом.

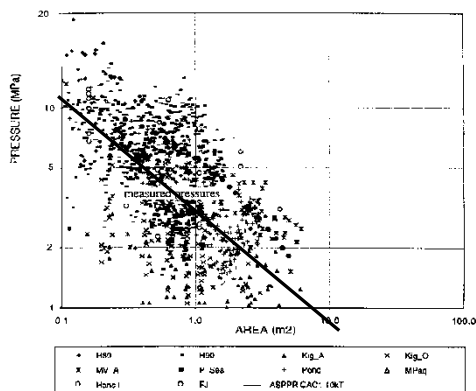


Рис. 1.1.4 Зависимость "давление-площадь" эмпирической модели «Pressure – Area Curve» ($p_0=8$ МПа, $\alpha=0.5$) и результаты экспериментов по местному смятию льда, проводившихся в Канаде

недостаткам PAC следует отнести принципиальную невозможность описания влияния формы внедряемого в лед тела и параметров удара (прежде всего скорости) на величину давлений в зоне контакта.

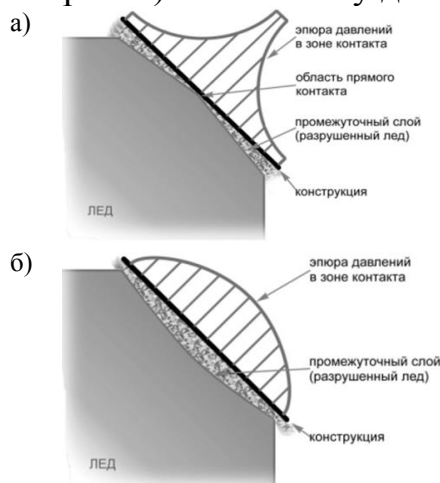


Рис. 1.1.5 Физическая картина разрушения льда при местном смятии: а) эксперимент, б) ГДМ

пределах области вытеснения разрушенного льда (Рис. 1.1.5,а).

Согласно изложенной физической картине, *максимальные давления реализуются в области, где промежуточный слой отсутствует, а с увеличением толщины промежуточного слоя давления уменьшаются*. В рамках ГДМ имеет место обратная ситуация: максимальные давления возникают в области максимальной толщины промежуточного слоя (Рис. 1.1.5,б).

Отмеченные факты потребовали совершенствования ГДМ.

Модель влажного/сухого взаимодействия Varsta. В 1983 году Varsta [15] исследовал динамическое раздробление заготовок из льда, некоторые из опытов сопровождались смачиванием зоны контакта водой. Такие «влажные» эксперименты проводились с целью поиска более совершенной модели ледовых нагрузок и, действительно, обуславливали более значительные контактные давления. Varsta сделал предположение, согласно которому взаимодействие корпуса судна со льдом есть суперпозиция

На основании обработки всей совокупности проведенных экспериментов по разрушению льда при местном смятии была предложена [61] эмпирическая модель, получившая название Pressure-Area Curve (PAC). В ее рамках устанавливается зависимость среднего давления в пределах зоны контакта от площади зоны контакта (Рис. 1.1.4)

$$p = p_0 \cdot A^\alpha, \quad (1.1.31)$$

где p_0 , α – эмпирические коэффициенты; A – площадь зоны контакта, м.

Анализ результатов экспериментов [61, 220], положенных в основу PAC, позволил установить следующую качественную картину разрушения льда при местном смятии. Вдоль продольной оси симметрии вытянутой зоны контакта располагается относительно небольшая по ширине область прямого контакта внедряемого тела со льдом. По обе стороны от области прямого контакта располагаются области разрушенного (мелкодисперсного) льда, вытеснявшегося в процессе внедрения тела в лед. Давления в зоне контакта имеют четко выраженный пик в области прямого контакта и быстро убывают в

прямого контакта корпуса с твердым льдом («сухой» контакт) и контакта корпуса с твердым льдом через промежуточный слой раздробленного льда («влажный» контакт) (Рис. 1.1.6).

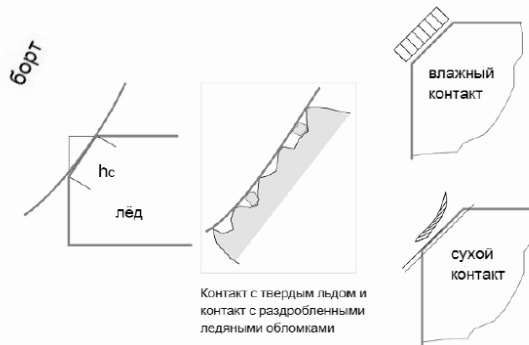


Рис. 1.1.6 Подход Varsta

Данная интерпретация позволила объяснить расхождения в величинах давлений, полученных для разных типов контакта. «Влажный» контакт по существу соответствовал ГДМ удара о лед, тогда как «сухой» контакт требовал разработки новой модели. Для моделирования «сухого» контакта Varsta (по-

видимому, впервые для подобных задач) использовал *конечно-элементный анализ, совмещенный с критерием разрушения Tsai-Wu* [4].

Важным аспектом модели явилось то, что часть всего взаимодействия была представлена прямым контактом с твердым льдом, обуславливавшим существование зарегистрированных пиков давления.

Модель динамического разрушения льда и модифицированная ГДМ. Для полного учета изложенных экспериментальных данных была предложена *модель динамического разрушения льда* [6, 61]. В ее рамках учитывался комплексный характер разрушения льда при местном смятии, включающий 2 параллельных процесса:

- смятие льда как *твердого тела в области прямого контакта;*
- *вытеснение разрушенного мелкодисперсного льда.*

Область прямого контакта тела со льдом, расположенная в центре зоны контакта, описывается путем задания ее размера b_0 и *среднего давления* p_m . Параметры p_m и b_0 , характеризующие несущую способность льда как твердого тела при местном смятии, рассматриваются как физические константы, определяемые свойствами льда (температура, соленость, возраст и т.д.) и не зависящие от параметров удара (скорость внедрения, масса тела и т.д.).

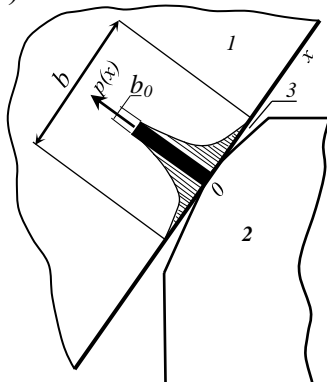


Рис. 1.1.7 Модель динамического разрушения льда (зона контакта вытянута в одном (продольном) направлении). 1 – твердое тело, 2 – ледовое поле, 3 – промежуточный слой разрушенного мелкодисперсного льда.

Процесс вытеснения описывает уравнение ГДМ (1.1.15). Дополнительное условие (1.1.16), противоречащее экспериментальным данным о распределении толщины раздробленного слоя, заменяется системой условий, отвечающих наблюдаемой физической картине (Рис. 1.1.7), связанных с «прямым» контактом. В области разрушенного льда вводится допущение о конфигурации промежуточного слоя $h = h(x, y)$, которое вместе с общим уравнением ГДМ (1.1.15) позволяет описать процесс вытеснения частиц льда за пределы зоны контакта. Применительно к вытянутой зоне контакта может

рассматриваться возрастание толщины промежуточного слоя по закону $h = Kx^\alpha$.

Обоснованность данного допущения и возможности рассмотрения коэффициентов K и α в качестве физических констант может проверяться с помощью прямых замеров толщины разрушенного льда в области вытеснения. На первом этапе развития модели можно принимать $\alpha = 1$. Математическая запись дополнительных условий имеет вид:

$$h = Kx \quad b_0 \ll b; \quad (1.1.32)$$

$$\begin{aligned} p(x) &= p_m \text{ при } x \leq 0.5b_0; \\ p(x) &< p_m \text{ при } 0.5b_0 < x \leq 0.5b; \end{aligned} \quad (1.1.33)$$

где K, b_0, p_m – физические константы, определяемые на основании экспериментальных данных и анализа опыта эксплуатации судов во льдах;

K – коэффициент конфигурации промежуточного слоя;

b_0, b – поперечные размеры области прямого контакта и зоны контакта;

p_m – среднее давление в области прямого контакта.

Подстановка дополнительного условия (1.1.32) в дифференциальное уравнение (1.1.15), описывающее вытеснение промежуточного слоя, позволяет получить дифференциальное уравнение для мгновенного распределения давлений по вытянутой в продольном направлении зоне контакта:

$$\frac{x^3 d^2 p}{dx^2} + 3x^2 \frac{dp}{dx} = -\frac{3\mu}{K^3}. \quad (1.1.34)$$

Величина $A_p = \frac{3\mu}{K^3}$, аналогично величине k_p в ГДМ, может рассматриваться в качестве *параметра динамической прочности льда*.

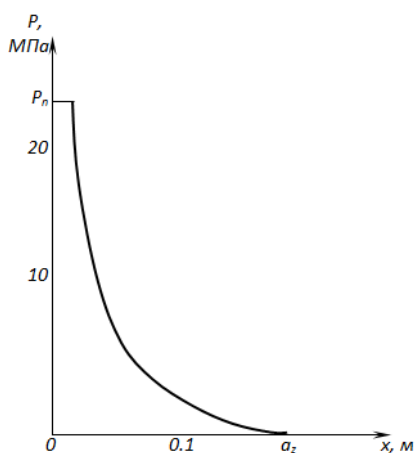


Рис. 1.1.8 Распределение давлений по ширине зоны контакта согласно модели динамического разрушения льда.

$K = 0.2$; $\frac{b_0}{b} = 0.1$; $\mu = 1.27 \cdot 10^{-3}$ МПа·с;
 $v = 1.2$ м/с; $p_m = 24$ МПа; $b = 0.4$ м

Интегрирование уравнения (1.1.34) позволяет получить соотношение для эпюры давлений в зоне контакта. Вид эпюры давлений при характерных величинах физических констант ($p_m = 24$ МПа, $b_0 = 0.1b$, $K = 0.2$, $\mu = 1.27 \cdot 10^{-3}$ МПа·с) и мгновенных параметров удара ($v = 1.2$ м/с, $b = 0.4$ м) представлен на Рис. 1.1.8. Пиковый характер эпюры давлений соответствует наблюдаемому в экспериментах.

В целом принятая система дополнительных условий и основанная на ней модель динамического разрушения льда с одной стороны сохраняют определенную преемственность с хорошо апробированной в отечественном ледовом судостроении ГДМ, а с другой стороны – снимают ее противоречивость в отношении эффекта пиковости эпюры давлений и позволяют описать наблюдаемую в экспериментах физическую картину местного разрушения льда, частично отраженную в эмпирической модели РАС. Однако для

практического использования разработанной модели необходимо проведение комплекса экспериментальных исследований, направленных на уточнение величин физических констант.

Отмеченные трудности внедрения модели динамического разрушения льда в практику проектирования корпусов судов ледового плавания определили целесообразность модификации ГДМ с целью ее согласования с экспериментальными данными. В модифицированной гидродинамической модели (МГДМ) наличие действительного пикового характера эпюры давлений предлагается учитывать путем введения *эффективной площади контакта*, в пределах которой давления считаются постоянными, а вне ее — равными нулю (Рис. 1.1.9). Переход к эффективной площади контакта осуществляется с помощью *параметра пиковости* α , равного отношению эффективного и фактического размеров зоны контакта. Для случая сферического тела параметр пиковости равняется отношению радиусов эффективной ($r_{эф}$) и фактической (r_0) зон контакта ($\alpha_{эф} = r_{эф}/r_0$), а для зоны контакта, вытянутой в одном (продольном) направлении — отношению поперечных размеров ($\alpha_{пр} = b_{эф}/b_0$). Характер зависимости параметров нагрузки от коэффициента пиковости для вытянутой зоны контакта представлен на Рис. 1.1.9. Учет эффекта пиковости с помощью МГДМ приводит к увеличению максимального давления и продолжительности удара, снижению полной силы и погонной нагрузки [61].

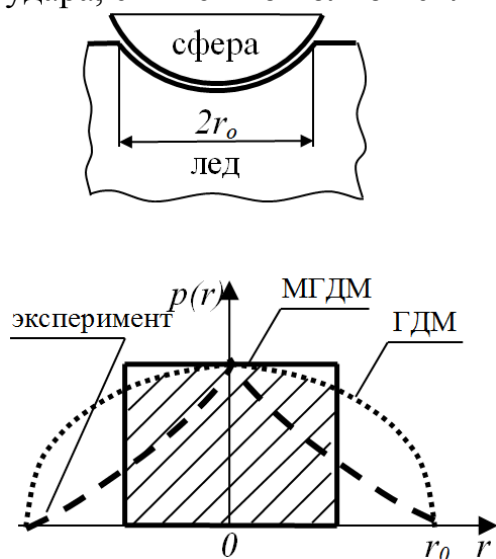


Рис. 1.1.9 Учет пиковости в МГДМ при взаимодействии сферы со льдом

Параметр пиковости, наряду с параметром динамической прочности льда, рассматривается как физическая константа. Модифицированная гидродинамическая модель, прошедшая предварительную экспериментальную проверку, уже на настоящем этапе может использоваться при расчетах ледовой прочности судов. Так, с использованием МГДМ выполнен анализ, позволивший учесть эффект локализации и уточнить ледовые нагрузки на рамные связи бортовых перекрытий. Дальнейшее совершенствование методологии регламентации ледовых нагрузок возможно на базе развития модели динамического

разрушения льда при условии уточнения входящих в нее констант на базе представительных модельных и натурных экспериментов.

Континуальные модели, представляющие ледовую среду исключительно в виде твердого тела. Приведем теперь несколько моделей, которые отходят от необходимости полного или частичного представления вытесняемого льда как жидкости, оставаясь в рамках его представления как твердого тела. Отметим *особенность*: для всех приводимых континуальных моделей считается, что лед содержит в себе многочисленные малые трещины, которые способствуют снижению его эффективной жесткости.

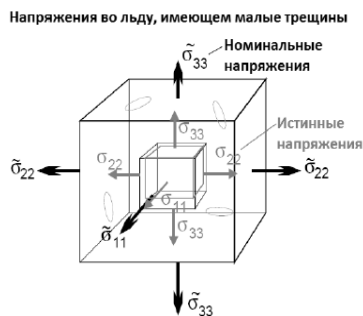


Рис. 1.1.10 Модель континуального разрушения твердого тела

На Рис. 1.1.10 иллюстрируется идея объемного разрушения твердого тела. *Истинные* местные напряжения σ , действуют на бесконечно малый элемент не имеющего трещин льда, а *номинальные* напряжения $\tilde{\sigma}$ действуют на элемент такого же льда, но имеющего трещины. Указанные тензоры напряжений предполагают, что влияние достаточно малых трещин может быть усреднено в пространстве.

Модель номинального давления Riska. В 1987 году Riska представил новый метод оценки ледовых нагрузок [15], основанный на понятии номинальных давлений разрушения льда. Геометрия зоны контакта моделировалась с применением МКЭ и использовалась для расчета напряженного состояния в каждой точке, которое обуславливалось приложенным в зоне контакта единичным давлением. Для каждой точки Riska определил так называемое «количество разрушения», т.е. долю разрушения льда, соответствующую заданному напряженному состоянию.



Рис. 1.1.11 Подход Riska

Описание поверхности разрушения производилось согласно критерию разрушения Tsai-Wu [4]. На Рис. 1.1.11 приведен пример, для которого «количество разрушения» λ_{max} составляет 0.088, т.е. при принятой величине давления в 1.0 МПа в точке с

наихудшим напряженным состоянием происходит разрушение 8.8% льда по площади зоны контакта. Переходя к номинальному давлению разрушения льда, можно получить $p_{nom} = 11.3$ МПа. Riska сумел показать хорошую согласованность между рассчитанными значениями номинальных давлений разрушения льда и значениями давлений в области малых площадей зон контакта, измеренными в процессе проведения как лабораторных испытаний по раздроблению льда, так и испытаний крупнотоннажного судна в ледовых условиях. Значения p_{nom} находятся в зависимости от характеристик объемного разрушения льда и геометрических параметров взаимодействия. В подходе Riska не давалось объяснения относительно результатов расчета давлений и площадей зон контакта, что является его основным недостатком.

Модель разрушения и крошения льда Timco. Следующее значительное исследование основывалось на экспериментальных данных, полученных в 1986 году Timco во время проведения испытаний по внедрению (вдавливанию) твердого тела в ровный лед [53]. Timco, совместно с Jordaap (1987 г.) и Sanderson (1988 г.) обнаружил существование области непосредственно перед индентором, в которой лед, по-видимому, сначала подвергался монотонному нагружению с сохранением сплошности, а затем хрупко интенсивно крошился. Подход Timco иллюстрируется на Рис. 1.1.12. По мере внедрения твердого тела напряжения во льду линейно нарастают и в

итоге приводят к т.н. кумулятивному (накопленному) разрушению льда. На определенном критическом этапе разрушения лед практически мгновенно крошится, вызывая при этом стремительное уменьшение (обвал) контактной силы. Фактически имеет место *потеря несущей способности среды* в макрообъеме. Затем происходит вытеснение (выдавливание) измельченного льда из зоны контакта за счет перехода части высвободившейся потенциальной энергии в кинетическую, по завершении выдавливания начинает возрастать давление, и весь цикл повторяется снова. *Для создания математической модели рассматриваемого взаимодействия необходимо описать процесс развития (роста) разрушения в зависимости от времени и напряжения, установить критический уровень разрушения, вызывающий измельчение (крошение) льда, и задать реологические свойства (характеристики вытеснения) гранулированной среды.* Модель Тимсо является вариантом эволюции гидродинамической модели Хейсина и модели динамического разрушения льда, заключающим в себе дополнительные положения о развитии разрушения и мгновенном измельчении льда. Модель приобрела широкую поддержку. Для ее развития требуется совершенствование моделей разрушающихся и гранулированных сред.

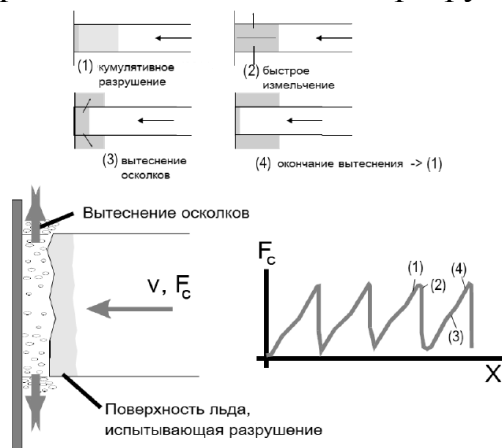


Рис. 1.1.12 Подход Тимсо

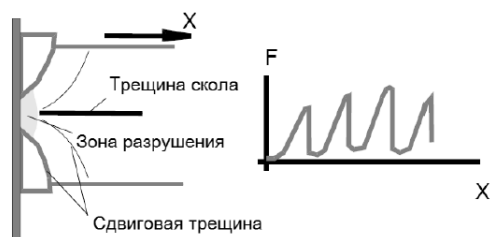


Рис. 1.1.13 Подход Kärnä

Модели с частичным или полным учетом дискретности разрушений. Объективно наблюдаемые в экспериментах разрушения при низких скоростях взаимодействия не всегда связаны с измельчением льда до мелкодисперсной среды. Сложное, с точки зрения интегральных внутренних силовых факторов, напряженное состояние способно вызвать хрупкую утрату сплошности в виде трещин. Поэтому часть моделей отступает от концепции непрерывного разрушения как снижения эффективной жесткости среды, а рассматривает разрушение «как есть».

Смешанная (гибридная) модель конечного измельчения Kärnä (Рис. 1.1.13). В основе смешанной (гибридной) модели конечного измельчения, предложенной в 1993 году Kärnä [29], лежат результаты многочисленных серийных испытаний по статическому внедрению (вдавливанию) твердого тела в ровный лед, проведенных в Финском Центре Технических Исследований (VTT) при содействии Хельсинкского Технологического Университета. Модель объединяет в себе принцип непрерывного разрушения льда и описание образования крупных сдвиговых трещин.

Карта разрушений Timco. Идея учета различных режимов разрушения льда всесторонне исследовалась и Timco в 1986 году. В процессе наблюдений Timco рассматривал следующие механизмы разрушения льда: смятие кромки; образование кольцевых трещин; образование радиальных трещин; образование микротрещин; образование трещин скола; растрескивание вследствие горизонтального сдвига (Рис. 1.1.14).

Экспериментальным путем им было установлено, что режимы разрушения льда находятся в непосредственной зависимости от скорости внедрения в лед твердого тела и от соотношения геометрических размеров сторон зоны контакта (Рис. 1.1.15). Прочность льда определяется с учетом множества механизмов разрушения, которые имеют место в данной ситуации. Недостаток представленного вида карты в том, что различные методы зависят от фиксированных внешних параметров (соотношения геометрических характеристик и относительной скорости).

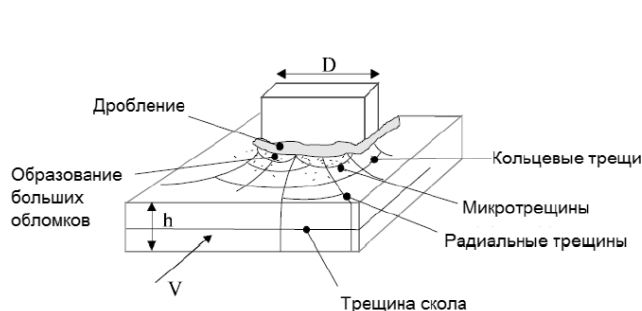


Рис. 1.1.14. Механизмы разрушения льда согласно Timco

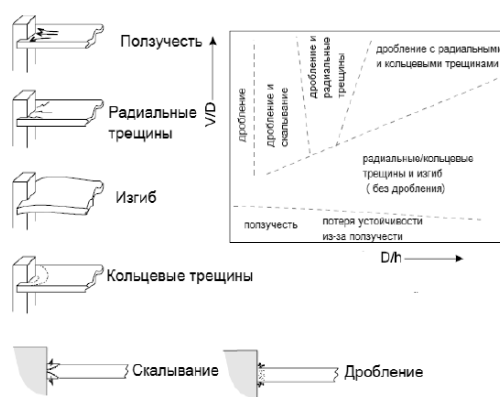


Рис. 1.1.15 Карта разрушений Timco

Модель Matlock. В основе дискретной модели ледовых нагрузок, разработанной в 1969-1971 годах Matlock, Dawkins и Panak [15], лежат данные, полученные в 1966 при наблюдениях за разрушением льда у опор ледостойких платформ. Поведение льда представлялось как последовательность появления хрупких разрушений (трещин), описываемая как серия *независимых* разрушений эквивалентных консольных балок. Подход Matlock иллюстрируется на Рис. 1.1.16. Модель позволила объяснить причину динамического возбуждения конструкции при определенных скоростях льда, однако не обеспечила возможность эффективного прогнозирования уровней ледовых нагрузок, вследствие чего ее дальнейшее развитие было приостановлено.

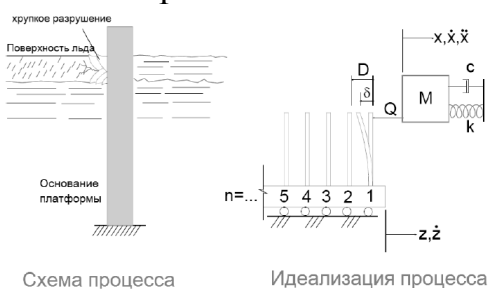


Рис. 1.1.16. Подход Matlock

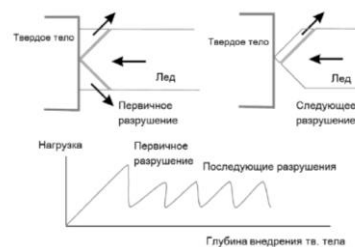


Рис. 1.1.17. Подход Croasdale

Модель пластических границ разрушения Croasdale. В 1977 году Croasdale, Morgenstern и Nuttall представили модель ледовых нагрузок [15], основанную на сдвиговом разрушении (Рис. 1.1.17). Предполагалось, что образование плоскостей скольжения происходит на основе критерия пластичности Треска. В 1980 году Croasdale дополнил и доработал модель [15]. Задавалась последовательность параллельных плоскостей сдвигового разрушения, при этом автор приводил расчет ледовых нагрузок только для первичного разрушения. Таким образом, модель Croasdale, основанная на свойствах неповрежденного материала, позволяет находить только максимальное квазистатическое значение нагрузки, которое может быть использовано при проектировании конструкции.

Модели Joensuu-Riska и Daley. В 1988-1989 годах Joensuu и Riska [15] были выполнены многочисленные лабораторные испытания по смятию блоков из льда. Часть блоков дробилась с использованием стального листа, оборудованного датчиками давления, другая часть разрушалась с использованием стеклянной плиты, через стекло производилась видеосъемка. Особенность графического отображения процесса изменения силы во времени, определенного в результате проведения конкретного испытания (Рис. 1.1.18), состояла в том, что визуализированная картина процесса носила регулярный характер, а функция контактного усилия от времени имела форму пилообразной кривой, каждый ее «зубец» также имел вид «пилы». Данная форма оказалась типичной применительно ко всем процессам изменения силы во времени, полученным экспериментальным путем. При изучении видеозаписей отмечалось, что непосредственное касание индентора и ледяного блока осуществляется по тонкой неустойчивой линии, расположенной у самой границы контакта.

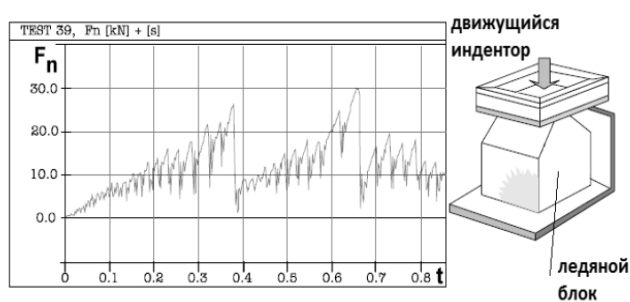


Рис. 1.1.18 Лабораторные испытания Joensuu и Riska



Рис. 1.1.19 Подход Daley

Поиски качественной интерпретации результатов испытаний, выполненных Joensuu и Riska, привели в конечном итоге к разработке в 1990-1991 годах Daley *дискретной модели разрушения льда* на основе подхода, близкого модели Croasdale, но с иным характером образования плоскостей скольжения. Наличие фиксируемых резких падений силы позволило предположить, что на процесс ее изменения во времени оказывали влияние внезапные явления разрушения льда. На основании детального просмотра и анализа видеозаписей испытаний Daley выдвинул гипотезу, согласно которой внезапные явления разрушения льда были обусловлены его растрескиванием, в основном, вследствие *горизонтального сдвига*. Подход Daley

иллюстрируется на Рис. 1.1.19. По мере внедрения индентора напряжения во льду возрастали до явного формирования сдвиговой трещины. Нагрузка, вызывавшая такое растрескивание льда, совпадала с локальным пиком. При проведении первичной апробации данной модели для каждого положения индентора, перемещаемого с малым шагом, многократно проверялись все возможные плоскости разрушения. Для построения поверхностей разрушения использовался критерий Кулона. Последовательность формирования сдвиговых трещин и процесс изменения силы во времени приводятся на Рис. 1.1.20.

Модель обнаружила хорошее сходство с экспериментом. Кроме того, она позволила обосновать ряд вопросов, касающихся соотношения давления и площади зоны контакта; прямого контакта по тонкой линии; распределения размеров ледяных обломков; случайного характера ледовых нагрузок и т.д.

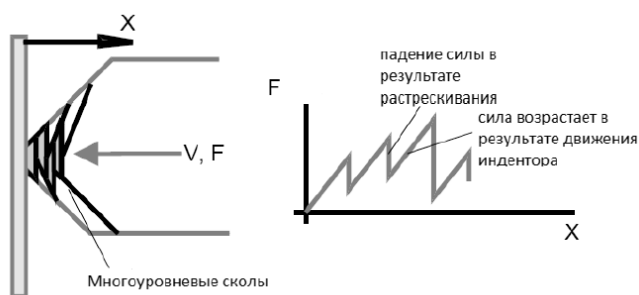


Рис. 1.1.20 Процесс изменения силы во времени применительно к модели Daley

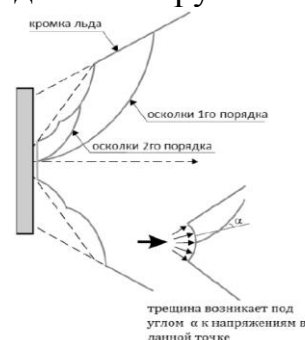


Рис. 1.1.21 Подход Kujala

Модель Kujala. В 1991 году Fransson [19] сообщил о проведении испытаний, подобных испытаниям Joensuu и Riska. Изучая результаты испытаний, они, независимо от Daley, пришли к тем же заключениям, что были положены в основу контактной модели разрушения льда и усовершенствовали ее. Был принят во внимание наклон индентора, изменяющий картину разрушения льда. Предусматривалась возможность образования трещин перпендикулярно к контактной плоскости индентора и продольного раскалывания ледяного блока. В 1993 году Kujala, основываясь на модели Daley, разработал т.н. *модель хаотичного растрескивания льда* с целью исследования ледовых нагрузок на борт судна, статически сжатого во льдах. Модель включала в себя новые характерные особенности: учитывалось скопление ледяных обломков выше и ниже неразрушенного льда, допускалось разрушение льда изгибом, обусловленное вертикальной неуравновешенностью ледяных обломков и эксцентриситетом нагрузки, действующей в горизонтальной плоскости. Kujala впервые ввел в рассмотрение криволинейные сдвиговые трещины, сделав вполне корректные допущения, что направление главных напряжений – по радиусу, а возникающая трещина распространяется под постоянным углом к направлению местных напряжений. Kujala получил спиралеобразную форму сдвиговой трещины. Подход Kujala иллюстрируется на Рис. 1.1.21.

Развитие рассмотренных моделей с применением МКЭ выполнено в работах [39, 28, 29].

Рассмотренные континуальные модели определения ледовых нагрузок как результатов местного разрушения льда говорят о том, что очень сложно подобрать модель сплошной среды, которая в широком диапазоне скоростей, зон рассмотрения и температур ведет себя подобно и жидкости, и хрупкому, и пластичному твердому телу. Тем не менее, как представляется на основе рассмотренных моделей, твердотельные идеализации льда более перспективны по причине более высокой адекватности действительности, нежели гидродинамические.

1.2. Современное состояние численных методов решения нелинейных динамических контактных задач МДТТ с учетом пластичности контактирующих сред на основе МКЭ

Особенности рассматриваемых задач. Задачи локального взаимодействия жестких тел или конструкций с грунтовыми или ледовыми массивами – наиболее сложные задачи механики деформируемого твердого тела, так как они объединяют в себе практически все виды нелинейностей.

Во-первых, это, в общем случае, – динамические нестационарные задачи, хотя и, в ряде случаев, сводимые к квазистатическим. Влияние инерции среды может быть весьма существенным.

Во-вторых, это контактные задачи, то есть, задачи о поведении систем с односторонними связями, причем контактные области могут быть разрывными в пространстве и меняться со временем.

В-третьих, это, как правило, задачи об однократном высокоинтенсивном нагружении, в результате которого возникают большие остаточные деформации, то есть, задачи о физически нелинейном поведении среды.

В-четвертых, в процессе деформирования указанных сред вследствие высокой энергоемкости процесса могут происходить фазовые превращения, то есть существенные изменения реологии среды, а также возможно нарушение сплошности (объемное растрескивание, крошение), приводящее к резкой смене осредненных в макрообъеме реологических параметров.

Совершенно очевидно, что прямое, с учетом всех указанных особенностей, моделирование задач локального взаимодействия, возможно только с применением численных методов.

Метод конечных элементов в нестационарных динамических задачах. Огромную роль в развитии МДТТ и, в частности, строительной механики, механики грунтов, теории упругости сыграло применение вычислительных методов, позволяющих решать сложнейшие и трудоемкие математические задачи прочностных вычислений. К таким методам относится, в частности, метод конечных элементов (МКЭ). Математические основы метода были заложены выдающимся математиком польского происхождения Рихардом Курантом (1888-1972) [14], профессором Гёттингенского (с 1920г.) и Нью-Йоркского (с 1934г.) университетов США, почетным членом Академии наук СССР (1966). Работая над решением

сложных краевых задач математической физики, Курант предложил оригинальные вариационно-разностные методы, описание которых опубликовал в журнале американского математического общества. Методом конечных элементов могут быть сформулированы и решены практически все задачи МДТТ, как прямые, так и обратные.

Метод конечных элементов – это метод, основанный на вариационных методах Ритца и Бубнова-Галеркина. В его основе, при решении в общем случае динамических задач, заложен принцип Гамильтона о поиске стационарного состояния системы. Принцип подразумевает, что все естественные движения в природе происходят при минимальных энергозатратах. Поиск этого экстремального состояния лежит в основе вариационных методов. Уравнения теории упругости записываются в вариационной постановке в соответствии с принципом возможных перемещений, необходимым и достаточным условием которого является равенство работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях. Известно, что в задачах динамики помимо сил упругости должны быть учтены силы инерции, распределенные по объему тела. В соответствии с этим, можно записать уравнение динамического поведения упругого тела объемом Ω в виде:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\omega = \int_{\Omega} \delta u^T f_{\Omega} d\omega + \int_{S_1} \delta u^T f_S dS + \delta u_L f_L - \int_{\Omega} \delta u^T \rho \ddot{u} d\omega - \int_{\Omega} \delta u^T \chi \dot{u} d\omega, \quad (1.2.1)$$

где $\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\omega$ – работа внутренних усилий (компонент тензора напряжений) на возможных изменениях компонента тензора деформаций; $\int_{\Omega} \delta u^T f_{\Omega} d\omega$ – работа объемных сил на возможных перемещениях внутренних точек тела; $\int_{S_1} \delta u^T f_S dS$ – работа поверхностных сил на возможных перемещениях точек поверхности; $\delta u_L f_L$ – работа сосредоточенных сил на возможных перемещениях точек их приложения; $\int_{\Omega} \delta u^T \rho \ddot{u} d\omega$ – работа сил инерции на возможных перемещениях внутренних точек; $\int_{\Omega} \delta u^T \chi \dot{u} d\omega$ – работа сил сопротивления на возможных перемещениях внутренних точек.

После преобразований по МКЭ получим матричное уравнение вида:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = p \quad (1.2.2)$$

где M – матрица масс; C – матрица сопротивления; K – матрица жесткости системы; q, \dot{q}, \ddot{q} – вектора узловых перемещений, скоростей и ускорений соответственно; p – вектор узловых внешних сил.

Система дифференциальных уравнений второго порядка (1.2.2) для описания процессов деформирования с учетом пластичности является существенно нелинейной, причем нелинейность вызывается большими перемещениями (геометрическая нелинейность) и деформациями за пределом текучести материала (физическая нелинейность). В этих условиях использование стандартных процедур решения системы уравнений не приведет к положительному результату.

Так использование традиционных методов численного интегрирования по времени дифференциальных уравнений (1.2.2), которые относятся к группе неявных методов интегрирования, приводит к решению на каждом шаге интегрирования нелинейных алгебраических уравнений. А это во многих случаях может оказаться непреодолимым препятствием на пути получения решения при ограниченности вычислительных ресурсов и временных возможностях. Процедура обращения обобщенной матрицы жесткости системы является весьма трудоемкой операцией, а ее необходимо проводить на каждом шаге интегрирования по времени, и количество таких шагов для требуемой точности должно быть достаточно большим.

Метод конечных элементов в подавляющем большинстве расчетных случаев реализуется в форме перемещений. История, математические основы, классификация и критерии выбора конечных элементов, применение МКЭ в различных отраслях техники, библиография приведены в работах [157, 186]. Использование МКЭ в задачах механики деформируемого твердого тела подробно изложено в монографиях В.А. Постнова, И.Я. Хархурима [170], Р. Галлагера [79], О.К. Зенкевича [104], Л.А. Розина [177], К.Л. Bathe [7] и многих других. Большой вклад в развитие МКЭ и его применение в динамических расчетах внесли работы Е.Я. Вороненка [78], К.П. Горбачева [87], Н.Ф. Ершова [99], О.М. Паляя [191] и др. На основе МКЭ созданы и эксплуатируются мощные программные комплексы: ABAQUS [1], ANSYS [4], NASTRAN [226], позволяющие решать самые разнообразные статические и динамические, линейные и нелинейные задачи.

Если решение проблемы получения частот и форм свободных колебаний рассмотрено в МКЭ весьма подробно, то по вопросам нестационарных расчетов работ меньше. Решение нестационарных задач методом главных колебаний возможно только для ряда простейших конструкций и видов нагружения [171]. Можно выделить 2 основные тенденции в решении задач нестационарного расчета сложных конструкций с помощью МКЭ:

- разработка специальных пространственно-временных КЭ;
- использование шаговых процедур разностного интегрирования нестационарных уравнений МКЭ по времени.

Введение Зенкевичем [105] пространственно-временной конечно-элементной аппроксимации в практических реализациях весьма затруднительно из-за больших объемов получающихся разрешающих систем, хотя они и обладают преимуществом в смысле точности и устойчивости результата. Объемы памяти, сравнимые с необходимыми для решения статических задач, делают в случае сложных моделей с большим числом степеней свободы более привлекательными методы 2-й группы. Поэтому практически сразу после интенсивного внедрения в расчетную практику МКЭ в «статической» постановке появился ряд работ о сочетании МКЭ и МКР в решении нестационарных динамических задач, причем различные конечно-разностные схемы предполагались для решения во времени, а МКЭ – собственно для определения НДС в текущий момент времени [171, 168, 98].

С практическим применением конечно-разностных шаговых схем связан ряд проблем точности и устойчивости. В зависимости от продолжительности процесса нестационарного движения, «слоистости» схем, а также от нелинейности модели оказались более предпочтительными те или иные схемы. Это вызвало, начиная с конца 80-х гг., ряд исследований применения таких схем в расчетах нестационарной динамики судовых конструкций: работы [102] предлагают различные модификации метода Вильсона и трапеций для расчета КЭ-моделей, для повышения устойчивости предлагается использовать алгоритм с предикцией. В настоящее время продолжаются исследования различных шаговых процедур: Кранка-Николсона [116], Ньюмарка и Рунге-Кутта [100], исследуется влияние на точность и устойчивость этих схем типов КЭ, плотности конечно-элементной сетки. Следует отметить, что большинство рассматриваемых с помощью нестационарного МКЭ задач [77, 26, 159] относятся к расчету непрерывных деформируемых тел. Расчету динамики МКЭ сложных пространственных многоэлементных конструкций посвящено меньшее количество работ, среди которых касаются импульсного воздействия работы [159, 208]. Несмотря на то, что в современных конечно-элементных пакетах реализованы шаговые процедуры типа Вильсона и Ньюмарка (ANSYS, NASTRAN), а на базе «явных» элементов разработаны высоконелинейные пакеты (LS-Dyna, Mark, SuperForge), позволяющие производить нестационарные расчеты для моделей практически любой сложности, остаются открытыми вопросы по точности и устойчивости этих схем, что в значительной мере определяет их качество.

В последнее время наиболее популярны *явные* методы [171, 36] для решения уравнений типа (1.2.2). Привлекательной особенностью явного метода является рекуррентные соотношения, которые выражают перемещения, скорости и ускорения на данном шаге времени через их значения на предшествующих шагах.

Устойчивость конечно-разностной процедуры, равно как и точность решения, связана с наличием ошибок в связи с приближенным представлением скоростей и ускорений в уравнении динамики. Это, очевидно, приводит на каждом шаге к погрешности численного решения по отношению к точному. В зависимости от используемой процедуры ошибка от шага к шагу может расти, уменьшаться, оставаться постоянной величиной. В том случае, если ошибка приближенного решения растет от шага к шагу, конечно-разностная процедура считается неустойчивой. Например, метод центральных разностей оказывается устойчивым при выполнении определенных условий. Такие схемы называются условно устойчивыми.

Следует также отметить, что требуемая из условия устойчивости метода центральных разностей величина шага по времени обратно пропорциональна максимальной собственной частоте системы. С увеличением числа степеней свободы максимальная частота системы резко возрастает, что приводит к необходимости уменьшать шаг по времени, а значит, к увеличению трудоемкости расчетов.

МКЭ в решениях контактных задач. Задачи определения контактного взаимодействия между деформируемыми телами или частями одного тела с неизвестной заранее зоной контакта имеют широкую область приложений в строительстве, машиностроении и других областях инженерной деятельности. Связи, действующие между контактирующими поверхностями взаимодействующих тел, принято называть односторонними. Односторонние связи делятся на *идеальные* (без учета трения и других усложняющих факторов) и *неидеальные* (при наличии трения, начальной напряженности и др.). Условия, налагаемые на перемещения и усилия в зоне односторонних связей, задаются неравенствами. С изменением состояния контакта в процессе нагружения существенно меняется жесткость системы, то есть, эти задачи являются *конструктивно нелинейными* (разновидность геометрической нелинейности). При этом конфигурация зон контакта или отрыва заранее неизвестна и определяется только в процессе решения задачи.

Основы для современных исследований задач с односторонними связями заложены в работах В. М. Александрова, И. И. Воровича, Л. А. Галина, Я. Гаслингера, Р. Гловински, Р. В. Гольдштейна, К. Джонсона, Н. Кикучи, Т. А. Ларсена, Ж.-Л. Лионса, Дж. Одена, П. Панагиотопулоса, А. Синьорини, А. А. Спектора, Р. Тремольера, Г. Фикера, И. Я. Штаермана и других ученых [142, 175, 82, 91, 86, 30, 83, 158, 49, 163, 227].

Численное решение контактных задач сегодня осуществляется, в основном, по различным схемам МКЭ. Континуальные задачи контакта тел сводятся к конечномерным задачам с дискретными односторонними связями. Разработке различных численных методов расчета таких систем посвящены работы А. В. Вовкушевского, П. Вригерса, Р. Галлагера, В. Н. Гордеева, Р. Гудмена, О. Зенкевича, Н. Кикучи, А. С. Кравчука, Т. А. Ларсена, Дж. Одена, А. В. Перельмутера, Л. А. Розина, Н. Н. Шапошникова, Б. А. Шойхета, М.Б. Орлова и многих других [76, 165, 57, 79, 88, 30, 224].

Для моделирования односторонних связей могут применяться специальные контактные конечные элементы. Они вводятся в модель на участках возможного контакта/разрыва, идеализируя тонкий слой, фиктивный или реально существующий между контактирующими поверхностями (люфты, шероховатости, зоны фазовых переходов, смазка). Контактный «слой» объединяет взаимодействующие тела в единую систему и, благодаря приданным ему особым свойствам, учитываемым посредством численного анализа, может удовлетворять необходимым условиям контакта. Такой подход позволяет конструктивную нелинейность, то есть задачи с односторонними связями и трением Кулона, свести к рассмотрению самого нелинейного дискретного контактного слоя. Различные численные схемы с использованием контактных элементов использовались в работах П. П. Гонтаровского, Т. Грота, Р. Гудмена, М. В. Зернина, Б. Н. Киркача, Е. М. Морозова, Г. П. Никишкова, А. Н. Подгорного, Б. Фридрикса и других [101, 166, 20, 151].

Для решения нелинейных задач с дискретными односторонними связями применялись *прямые* итерационные методы, в частности те или иные

разновидности так называемых *алгоритмов мгновенного переключения состояния связей* (В. П. Аленин, А. М. Белостоцкий, Е. Вилсон, Б. Парсонс, И. М. Рабинович, В. М. Фридман, В. С. Чернина, Н. Н. Шапошников и др. [72, 174, 58, 215, 224]). Вследствие простоты методы переключения широко распространены, но не всегда надежно сходятся. Необходимость многократного перебора состояния связей и, соответственно, многократного изменения структуры матрицы и решения системы уравнений требует больших затрат машинного времени.

При использовании *методов последовательного нагружения* (когда решение зависит от истории нагружения) заданная нагрузка прикладывается не сразу, а пошагово, вплоть до достижения своего окончательного значения. Решение контактной задачи при этом можно получить на любой ступени нагружения. Пошаговые методы исследовались и применялись в работах О. С. Зенкевича, В.А. Постнова, И. М. Рабиновича, А.И. Голованова и других авторов [104, 171, 174, 84]. Методы шагового решения задач с геометрической и физической нелинейностью рассмотрены ниже (см. Главу 2).

Исследование вариационных постановок задач с односторонними связями впервые было проведено А. Синьорини [49] и в дальнейшем продолжено в работах А. В. Вовкушевского, И. Гловачека, Р. Гловински, Ж.-Л. Лионса, Л. А. Розина, Р. Тремольера, П. Панагиотопулоса, А. А. Спектора, Б. А. Шойхета и другими [76, 83, 82, 139, 177, 163]. Это создало теоретическую базу для построения вариационных методов, в основе которых – сведение исходной задачи с односторонними связями к задаче минимизации некоторого функционала с ограничениями в виде неравенств (задаче математического программирования). Задача с *идеальными* односторонними связями сводится к задаче квадратичного программирования, для решения которой могут быть применены соответствующие процедуры (градиентного спуска, возможных направлений, множителей Лагранжа, перехода к двойственной задаче и др.). В случае *неидеальных* односторонних связей свести решение контактной задачи к проблеме минимизации соответствующего функционала в общем случае не предоставляется возможным. Кроме того, затруднено исследование свойств таких задач, связанное с доказательством существования и единственности решения. В общем случае решение односторонних контактных задач с трением можно свести к последовательности вспомогательных задач с идеальными односторонними связями.

Помимо решения статических (квазистатических) контактных задач, в которых не учитываются эффекты инерции, требуется учитывать и динамические воздействия на контактирующие тела (например, удары). Численное решение динамических задач с односторонними связями производится путем дискретизации по времени, при этом для каждого временного шага решается соответствующая контактная задача с использованием подходящего численного метода. Отметим здесь работы Б. Д. Аннина, А. М. Белостоцкого, П. Вригерса, Ю. Б. Гольдштейна, В. М.

Садовского, Н. Н. Шапошникова, Н.Ф. Ершова, А.Н. Попова [60, 72, 57, 99, 224, 85].

Отдельно выделим пока редкие работы по использованию МКЭ в решении задач контакта тел и конструкций со льдом [131, 28, 29, 183, 130, 96, 189].

МКЭ в решении задач о пластическом деформировании. Свойство пластичности проявляется, когда действующие в материале напряжения превышают предел упругости. В экспериментах на простое растяжение зависимость между напряжениями и деформациями становится нелинейной, и этот закон является базой при построении теорий пластичности. В случае сложного нагружения зависимость между нагрузками и перемещениями перестает быть однозначной (как в случае т.н. «простого нагружения») и зависит от порядка приложения нагрузок. При этом учет всех возможных форм деформирования приводит к трудноразрешимым математическим задачам. Для упрощения материалу приписывается ряд свойств, которые в той или иной степени соответствуют реальности.

Пластические свойства материалов изучались еще Ш.О. Кулоном в XVIII веке [74]. Первые систематические исследования пластического течения металлов провел А.Э. Треска в 1869 г. Теоретические основы описания пластичности были заложены в работах Б. Сен-Венана и М. Леви в 1871 г. Условие текучести, базирующееся на постоянстве интенсивности девиатора напряжений, было предложено М. Губером в 1904 г. Позднее Р. Мизес в 1913 г. переоткрыл модель жесткопластической среды и вывел ассоциированный закон пластического течения. Получившая широкое распространение модель упругопластической среды была предложена Л. Прандтлем в 1924 г. и в более общем виде сформулирована А. Рейссом в 1930 г. Дальнейшее развитие теория пластичности получила в середине и второй половине XX века за рубежом в работах Д.С. Друкера, Р. Шилда, В. Прагера, Ф.Г. Ходжа, А. Надаи, Р. Хилла, Х. Гринберга, В.Т. Койтера и др., а также в отечественных работах А.А. Ильюшина, А.Ю. Ишлинского, В.В. Новожилова, Л.М. Качанова, Д.Д. Ивлева, Ю.Н. Работнова и ряда других ученых [95, 24, 108, 109, 111, 113].

По сравнению с другими разделами механики сплошной среды, теория пластичности находится в несколько особом положении, поскольку математически приводит к *краевым задачам для нелинейных уравнений в областях с неизвестными границами* (границы пластических зон должны определяться в процессе решения). Общие математические методы решения таких задач были разработаны лишь сравнительно недавно, в 60-70-х годах XX века. До этого времени наибольшие успехи в практическом применении теории пластичности были получены в рамках *теории предельного равновесия* (ТПР).

Высокая стоимость и сложность интерпретации результатов натуральных экспериментов по пластическому деформированию вызывают необходимость широкого использования вычислительного (компьютерного) эксперимента (моделирования) наряду с реальным экспериментом. Основными проблемами

вычислительного эксперимента являются: приближенность модели и натуры, экономия вычислительных ресурсов. Существует ряд основных теоретических схем численного решения упругопластических задач (безотносительно к методу дискретизации).

Наибольшее распространение в инженерных приложениях получили *деформационная теория пластичности* и *теория пластического течения*. Первая была разработана А.А. Ильюшиным [109]. В ней деформации представляются в виде сумм упругих и пластических составляющих. Упругие подчиняются закону Гука, а компоненты тензора пластических деформаций пропорциональны компонентам девиатора напряжений. При этом зависимость эквивалентных напряжений от эквивалентных деформаций принимается такой же, как и для закона деформирования материала при одноосном нагружении. Указанные формальные соотношения логически вытекают из теоремы Ильюшина о простом нагружении: внешние нагрузки возрастают пропорционально одному параметру. Для того, чтобы выполнялось простое нагружение, материал должен быть несжимаем, а зависимость между эквивалентными напряжениями и деформациями – степенной. При нагружении, близком к простому, деформационная теория пластичности может давать результаты, согласующиеся с экспериментом. Однако в реальной практике условия пропорционального нагружения могут не выполняться, поэтому большее применение при построении вычислительных схем получила *теория течения*.

Для построения математической модели теории течения упрочняющихся тел весьма плодотворной оказалась модель *поверхности нагружения*, а уравнение этой поверхности принято называть *функцией нагружения*. Если поверхность представляет собой геометрическое место пределов текучести при всевозможных путях нагружения, то ее называют *поверхностью текучести*. Друкер сформулировал *постулат о неотрицательности приращения работы пластической деформации* в процессе дополнительного нагружения [16], из которого следует свойство выпуклости ("невогнутости") поверхности текучести.

Основные положения теории следующие:

- приращение полной девиаторной энергии de_{ij} представляется в виде суммы упругой de_{ij}^e и пластической de_{ij}^p компонент;
- упругие компоненты подчинены закону Гука;
- из постулата Друкера следует *принцип градиентности*, в соответствии с которым пластическое течение при активном нагружении развивается по нормали к поверхности текучести.

Принцип градиентности описывается уравнением:

$$de_{ij}^e = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.2.3)$$

где $d\lambda$ – бесконечно малый неотрицательный скалярный множитель, в общем случае зависящий от деформационного упрочнения и истории нагружения: σ_{ij} , $d\sigma_{ij}$, e_{ij} .

Поверхность текучести для металлов, например, чаще всего описывается цилиндром Мизеса:

$$F(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} - \sigma_T^2 = 0, \quad (1.2.4)$$

где S_{ij} – девиаторные напряжения; σ_T – мгновенный предел текучести. Тогда

$$de_{ij}^p = d\lambda \cdot S_{ij}, \quad (1.2.5)$$

при записи этого и предыдущего выражений применено правило суммирования по повторяющимся индексам.

По характеру трансформации поверхностей нагружения при упругопластическом деформировании материала судят о закономерностях его деформационного упрочнения. Если свойства материала не зависят от времени, а процесс деформирования изотермический, то считается, что при произвольной системе напряжений возможны следующие *виды упрочнения: изотропное, трансляционное (кинематическое), комбинированное.*

При разгрузке (пассивное деформирование) пластическая деформация сохраняется, а упругая исчезает. Зависимость напряжений от деформаций при разгрузке будет линейной с углом наклона, определяемым модулем упругости E . Если продолжить разгрузку с переходом через ноль, то предел текучести обратного знака снижается настолько, насколько увеличился предел текучести при активном деформировании. Это явление, обратное "наклепу", известно как эффект Баушингера и описывается моделью кинематического упрочнения. Для металлов эффект кинематического упрочнения преобладает на начальной стадии деформирования ($\varepsilon_p < 2\%$), а при дальнейшем нагружении основное значение приобретает изотропное упрочнение.

В действительности поведение реальных материалов может существенно отклоняться от рассмотренных идеальных моделей, что затрудняет построение адекватных расчетных схем в практике инженерных расчетов.

В механике таких сред как грунтовые и ледовые, как правило, разгрузочной стадией можно пренебречь.

Нелинейность физического закона приводит к значительным математическим трудностям при решении задач пластичности аналитическими методами. При этом упрощения относятся прежде всего к закону деформирования (идеально пластическое или жесткопластическое тело). Круг аналитически решенных задач ограничен двумерными случаями и каноническими формами областей.

Учитывая универсальность МКЭ и его широкое распространение в виде промышленных вычислительных пакетов, необходимо обратить внимание на фундаментальные монографии, посвященные численной реализации МКЭ в задачах пластичности. В большинстве работ алгоритмы МКЭ построены на основе теории пластического течения [24, 205, 190, 148, 145, 89]. Хотя эта теория в математическом отношении более сложная, но не имеет ограничений, налагаемых теоремой о простом нагружении [108].

В настоящее время широко используются два принципиально разных подхода к использованию МКЭ для задач пластичности в условиях теории течения:

1) Решение в перемещениях с использованием шаговых итерационных методов учета нелинейностей (с итерационным вычислением истинных приращений напряжений и деформаций) (реализуется в универсальных промышленных КЭ-пакетах, например, в ANSYS). При этом производится корректировка глобальной матрицы «жесткости» модели деформируемого тела на каждом идеализированно-упругом шаге и выполняется необходимое количество её обращений.

Преимущество такого подхода состоит в том, что он применим для упруго-пластических задач как в статической, так и в динамической постановке, позволяет решать задачи как для малых, так и для достаточно глубоких пластических деформаций, применим и для упругих геометрически нелинейных задач, т.е. является универсальным. Недостатком подхода является значительное количество матричных вычислений, необходимость корректировки шага нагружения, слабая устойчивость решений, потребность в специфической организации КЭ-сетки. Можно условно назвать такой подход подбором не противоречащих условиям нулевых невязок по внутренним и внешним усилиям и перемещениям состояний всего тела для конечных долей нагрузки, в соответствии с принятой моделью поведения материала. При этом далеко не всегда можно утверждать, что найденные промежуточные состояния точно отражают процесс развития пластических деформаций, т.е. равновесная кривая может не являться реальной.

2) Решение в узловых скоростях (приращениях) в предположении работы материала подобно движущейся жидкости, с применением различных (лагранжевых, эйлеровых, смешанных) сеток (реализуется в специфических КЭ-пакетах SuperForge, LS-DYNA, AUTODYN и т.п.) [36, 210, 8].

Преимущества: метод позволяет решать высоконелинейные нестационарные задачи без значительных вычислительных затрат, позволяет достаточно просто учесть влияние скорости деформаций. Недостаток: подход сложен для решения упругопластических задач при сопоставимых уровнях упругих и пластических деформаций, весьма трудно учесть разгрузку. Применяется для анализа глубокой вытяжки, проката металла и т.п. процессов. Совершенствование метода основано на учете нелинейных членов в приращениях деформаций и напряжений [213, 214, 211, 212], вычисляемых для каждого конечного элемента. На достаточно малых шагах нагружения вычисляются производные от усилий по координатам, приращения координат равны приращениям перемещений. Интегрирование производится в Лагранжевых координатах с последующим определением текущих напряжений в Эйлеровых координатах (*каждое текущее состояние является исходным*). Вычисление точных приращений деформаций в элементах не требует корректировки глобальной матрицы жесткости на промежуточных шагах нагружения, что значительно сокращает число вычислительных операций, одновременно позволяя получать близкие к реальности

результаты. Использование классического преобразования координат для изопараметрических элементов на каждом шаге позволяет строить эффективные конечно-элементные алгоритмы.

Модель физического поведения материала, применяемая в расчетах по МКЭ однократных нагружений пластических сред, состоит, как правило, из *критерия текучести, закона течения и закона упрочнения*.

В качестве инженерной модели пластического деформирования наиболее часто применяется модель билинейного/мультилинейного упрочнения [113]. В ней используется: критерий текучести Мизеса, где сравнивается значение предела текучести при статическом растяжении со значением эквивалентного напряжения по Мизесу:

$$\sigma_S = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad (1.2.6)$$

ассоциированный закон течения Прандтля – Рейсса:

$$\{d\varepsilon^{пл}\} = \lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}, \quad (1.2.7)$$

где λ – пластический коэффициент, определяющий собственно величину пластической деформации, Q – функция напряжений, представляющая пластический потенциал (определяет направление пластической деформации), и закон упрочнения, описывающий изменение поверхности течения с его развитием. Предел текучести и тангенциальный модуль упрочнения/закон его изменения экспериментально установлены для многих материалов.

Для разрешения конечно-элементной модели с учетом вышеприведенных нелинейностей используется линеаризация процесса нагружения – процесс, при котором нагружение разбивается на ряд шагов; на протяжении одного шага жесткость системы, зависящая в общем случае от геометрической и от физической нелинейностей, остается постоянной. Предполагается, что сохранение процесса на реальной кривой "усилие-смещение" в соответствии с нелинейной жесткостью будет полностью обеспечиваться итерационным методом Ньютона-Рафсона (или иным) [171, 191, 4].

1.3 Модели сплошной среды с учетом моментности напряженного состояния и ротационной свободы частиц. Применение МКЭ в задачах моментной теории упругости.

Предпосылки к созданию моментных теорий. Для развития механики твердых деформируемых тел за последние годы характерна тенденция к пересмотру основных, исходных для механики, представлений [110]. Этот пересмотр затрагивает фундаментальные понятия механики, относящиеся к силовым и кинематическим характеристикам, к параметрам состояния среды, к структуре исходного континуума.

Усилившееся внимание исследователей к построению феноменологических теорий на новой основе, требующей введения дополнительных параметров состояния, обусловлено, в частности, тем, что

некоторые экспериментальные факты, например влияние больших градиентов деформаций и концентраторов напряжений на усталость, хрупкое разрушение и начало пластической деформации, не удается удовлетворительно описать в рамках классических теорий [31, 143].

С другой стороны, для учета структурной неоднородности материалов в рамках феноменологических теорий также необходимо введение новых параметров, тем или иным способом учитывающих имеющиеся структурные неоднородности [108, 109, 188]. Напряженное состояние поликристаллических тел, например, характеризуется тензором напряжений и еще некоторой совокупностью параметров. При статическом подходе к исследованию процессов деформирования структурно-неоднородных сред такими дополнительными параметрами являются моменты тензоров напряжений и деформаций различных порядков [119, 134, 136, 137, 135, 133, 162]; дополнительными параметрами, определяющими состояние среды, могут быть различные *конфигурационные тензоры*, связанные с тензорами напряжений, деформаций и другими определяющими параметрами, в частности их градиентами по пространственным координатам [109]. Преимущественно по этому пути и шло создание и развитие моментных теорий и их различных обобщений в МДТТ.

В работе Коссера [13] впервые было дано систематическое развитие механики сплошной среды, движение которой определяется полем перемещений и *независимым* от него полем вращения. Каждая точка континуума здесь имеет шесть степеней свободы, в отличие от трех поступательных степеней в классических теориях. Отличительным свойством теории Коссера явилось появление, наряду с обычными силовыми, дополнительных моментных напряжений. Ими были заложены основы теории, получившей в настоящее время название *моментной теории упругости*. Идеи и работы Е. и Ф. Коссера нашли отражение в ряде изданий [33, 126], однако не вызвали в то время должного внимания и не получили дальнейшего развития.

Близки к представлениям Коссера были выводы Фойхта, который ранее из других соображений ввел моментные напряжения и получил статические уравнения теории упругости с учетом моментных напряжений [55].

К понятию моментных напряжений приводит и другой путь обобщения классической теории деформируемых сред – учет зависимости энергии деформаций от высших градиентов вектора перемещений, на целесообразность которого указал Лёру [110]. Вопросы теории, учитывающей в уравнениях состояния вторые градиенты перемещений долгое время не получали развития.

На работу Коссера вновь обратили внимание [33, 110] в связи с развитием континуальной теории дислокаций, а также в связи с обобщающими работами по теории пластин и оболочек [110] и по классической теории поля [54]. Появились работы, посвященные развитию указанного выше второго пути обобщения классической теории [21, 63].

В последующие годы число работ по моментным теориям в механике твердых деформируемых тел стало расти, причем в их внедрении в механику большую роль сыграли работы Миндлина [143] и Койтера [31, 115].

Моментная теория упругости со стесненным вращением. К настоящему времени наибольшее развитие получила моментная теория упругости, в которой движение среды полностью определяется одним полем поступательных перемещений, а энергия деформации определяется тензором деформаций и градиентом вектора вращения, определяющего поворот элементарного объема тела и выражаемого через вектор перемещения обычным образом. Согласно предложению Тупина [54], она названа *теорией Коссера со стесненным вращением* или *просто моментной теорией упругости (МТУ)*.

Общие вопросы этой теории рассматривались во многих работах [31, 21, 63, 54]. Получены определяющие уравнения для малых и конечных деформаций, доказаны теорема единственности [31, 110], минимальные принципы [31] и установлены аналоги других предложений классической теории упругости. В постановке моментной теории упругости рассмотрены некоторые задачи о деформации полуплоскости, плоские задачи о концентрации напряжений вокруг отверстий [180, 154, 155] и около включений, об изгибе пластин и оболочек [31, 110, 59] и некоторые другие [143, 144, 150, 209].

На краевую задачу МТУ распространяются основные методы решения задач классической теории упругости. Для нее дано представление решения в форме, аналогичной решению Папковича-Нейбера [110, 42] и через тензор Грина [110]. Для плоской задачи введены функции напряжений, дано приведение задач к задачам теории функций комплексного переменного [143, 150, 180], использовался метод преобразования Фурье.

Вместе с тем краевая задача стесненной моментной теории упругости имеет ряд специфических особенностей, делающих ее в математическом отношении принципиально отличной от задачи классической теории. Наличие в реологических соотношениях параметра l , определяемого свойствами среды и имеющего размерность длины, делает возможным построение асимптотических решений и обуславливает ряд новых, по сравнению с классической теорией, механических эффектов.

Учет моментных напряжений необходим, например, в задачах, в которых имеется малый характерный линейный размер. К числу таких задач можно отнести, например, задачи о кручении тонких проволок, об изгибе очень тонких пластин и оболочек, о концентрации напряжений вблизи концентраторов малого размера или большой кривизны, задачи о высокочастотных колебаниях упругих тел и т. п. При этом обнаруживаются новые (по сравнению с классической теорией) механические эффекты, в частности, явление пограничного слоя. По отношению к характеристикам, определяемым соотношениями классической теории упругости (значения эффективных модулей упругости, предельных моментов и т. д.), наблюдается масштабный эффект. Наличие моментных напряжений приводит к

изменению, обычно к снижению, коэффициентов концентрации напряжений, а также к дисперсии волн и некоторым другим динамическим эффектам, отсутствующим в классической теории.

Описываемая моментная теория упругости (теория Коссера со стесненным вращением или «псевдо-Коссера») допускает естественное обобщение, дающее описание процессов деформирования произвольных твердых деформируемых тел с учетом их пластических и реономных свойств. При этом статические и геометрические соотношения остаются по-прежнему в силе, и изменяются лишь зависимости между характеристиками напряженного и деформированного состояний [156].

Простейший вариант моментной теории пластичности, соответствующий деформационной теории [109], получается, исходя из того, что σ_{ij} и m_{ij} являются функциями тензоров деформаций и кривизн κ_{ij} при активном процессе деформации и при определенном условии разгрузки. Рассматривались также некоторые вопросы моментной теории пластичности типа теории течения [150]. Линейная моментная теория вязкоупругости рассматривалась в [150, 138]. Для краевой задачи моментной теории доказана теорема единственности, установлен вариационный принцип, получены решения задач о кручении бруса и цилиндрическом изгибе пластинки, дающие возможность экспериментального построения ядер, определяющих релаксационные свойства среды по отношению к моментным напряжениям [138].

На сегодняшний день рассмотрены обобщения моментных теорий, основанные на классических кинематических представлениях, т.е. в которых принимается, что движение среды полностью определяется полем вектора перемещений. Достаточно общей в указанном смысле теорией рассматриваемого типа является теория, в которой энергия деформации зависит от градиентов вектора перемещений до порядка N включительно. Соответствующий материал Тупин назвал материалом класса N [110]. Наибольший интерес представляет материал второго класса, причем теория упругости второго класса эквивалентна теории, в которой энергия деформации является функцией тензора деформаций и градиента тензора деформаций [54]. Вопросы этой теории рассматривались в работах [54, 110]. Для соответствующей краевой задачи доказана теорема единственности, установлен принцип минимума потенциальной энергии [134, 136, 137, 135, 133], дано решение некоторых задач [134, 136, 137, 135, 133, 54]. Рассмотрены также теории, в которых энергия деформации зависит от тензора деформаций и градиентов тензора деформаций первых двух порядков [110], теории, основанные на введении дополнительных степеней свободы, определяющих движение сплошной среды. Таким образом, теория континуума со стесненными вращениями разработана довольно полно.

Моментные теории с нестесненным вращением. Дальнейшему развитию исходной теории Коссера (с независимыми полями перемещений и вращений) посвящены работы [63, 42, 160]. Помимо трехмерного

рассматривались также двухмерный и одномерный континуумы Коссера [47, 110].

Континуум Коссера можно представить, как совокупность ориентированных точек; ориентация точек определяется ортогональным триэдром, жесткое вращение которого независимо от поля перемещений. Составляющие этого триэдра Эриксен и Трусделл назвали направляющими ориентированной среды; они дали обобщение среды Коссера, введя деформируемые направляющие (способные удлиняться и поворачиваться друг относительно друга) [110]. Миндлин рассмотрел механику упругой среды с микроструктурой, предполагая, что каждая точка рассматриваемого континуума, в свою очередь, представляет собой деформируемую среду. В частности, если каждая «микросреда» имеет однородную деформацию, то среда переходит в анизотропную среду с деформируемыми направляющими Эриксена и Трусделла.

Есть и другие варианты теорий структурированных сред, построение которых основано на представлениях о полях перемещений и напряжений, отличных от классических [103, 110, 150].

Возможность сочетания моментных и классических представлений. Рассмотренные выше теории базируются на введении различного рода дополнительных параметров: новых степеней свободы (при описании движения континуума), дополнительных силовых характеристик (для описания сил взаимодействия частиц тела), дополнительных параметров состояния и т.д. Вместе с тем, есть основания считать, что движение сплошной среды, в том числе и структурированной, может быть описано одним полем перемещений, а взаимодействие между частицами тела – обычными силовыми взаимодействиями. Наличие структурных неоднородностей материала приводит при этом к тому, что поля перемещений и напряжений являются нерегулярными, пульсирующими функциями координат. При введении операций осреднения определенного типа средние поля перемещений и напряжений становятся плавными функциями координат, но при этом возникают дополнительные параметры, так или иначе характеризующие флуктуации этих полей. Такая процедура также приводит к появлению моментных напряжений и дает возможность построения теорий рассмотренного выше типа.

Так, одной из последних работ в этом направлении является монография Э.А. Буланова [75], вышедшая в 2012 г. Особенностью моментной теории, предлагаемой в этой работе, является гипотеза о возникновении под действием моментных напряжений лишь дополнительных сдвигов. Повороты частиц среды являются зависимыми от поступательных перемещений (стесненный континуум), а отсутствие кривизн позволяет однозначно выразить реологические константы моментного континуума через параметры безмоментной теории и характерные размеры задачи. Решен ряд задач, в которых с помощью предложенной теории учтены особенности, не учитываемые классическими

решениями. Возможности такой теории по отношению к средам с высокой ротационной подвижностью, вообще говоря, ограничены.

Численные методы и новые исследования в моментной теории упругости. Работ, посвященных получению численных решений для несимметричных теорий, до недавнего времени было немного. Ниже (Глава 3) приводится краткий обзор работ, посвященных разработке конечных элементов с поворотными степенями свободы – фиктивными, для улучшения свойств численных решений в особых областях и реальными, связанными с положениями того или иного варианта моментного континуума. Для ряда отечественных работ [92, 132, 68, 69,70, 71, 93] отправной точкой явилась работа Аллмана [3].

К числу современных работ по численному моделированию поведения моментных сред можно отнести работы специалистов Сибирского отделения РАН, основанные на модельном представлении о среде как о плотной упаковке ансамбля шарообразных частиц одинакового радиуса [182]. При этом, чтобы исключить или минимизировать масштабные эффекты, размеры расчетных ячеек (частиц) принимаются весьма малыми. Очевидно, что такой подход требует больших вычислительных ресурсов и реализуется с использованием параллельных вычислений на суперкомпьютерах. Как и недавние работы [128, 122, 161, 80, 97], упомянутое исследование ориентировано на решение задач волновой динамики нетрадиционных сред, поскольку современная экспериментальная техника позволяет наблюдать ряд волновых эффектов в микрообъектах и с помощью таких экспериментов возможно определение новых реологических констант, затруднительное для задач статики и динамики макрообъемов.

Остаются актуальными работы по получению новых и уточненных аналитических решений моментной теории упругости: [121]. В свою очередь, эти работы являются средством верификации новых конечно-элементных моделей [117, 40], где также, как и в упомянутых выше работах, на основе функционала полной энергии строятся треугольные КЭ с квадратичной аппроксимацией перемещений.

Примечательно, что в строительной механике корабля внимание к моментной теории упругости возникло уже в конце 70-х гг XX в., в связи с появлением большого числа прикладных задач из области механики трещин и свойственной элементам конструкций судового корпуса малоциклового усталости. Положения моментной теории в варианте стесненного континуума вошли в 1982 г. в известный Справочник [191].

1.4 Выводы

По результатам выполненного в 1-й Главе обзора можно сделать следующие выводы:

1. Существующие модели определения усилий взаимодействия при динамическом столкновении жестких конструкций со льдом не универсальны и пригодны для ограниченных диапазонов скоростей взаимодействия.

2. Имеется тенденция дополнения гидродинамических моделей вытеснения моделями контактного взаимодействия со льдом как с твердым деформируемым и разрушающимся (хрупко или пластично) телом.

3. Для реализации вычислительных моделей взаимодействия расширяется использование численных методов на основе МКЭ; возможности современных методов решения нелинейных динамических задач с учетом контакта существенно возросли, однако для задач о локальном динамическом взаимодействии конструкций со льдом эти методы применяются не часто, особенности их использования мало исследованы.

4. Большое количество эффектов, наблюдаемых при деформировании сред со сложной реологией, в том числе сыпучих, пористых и объемно разрушающихся, возможно учесть переходом к новым континуальным теориям, а именно моментным.

5. Число работ, применяющих численное моделирование по МКЭ в решении задач несимметричной теории упругости, относительно невелико и ограничено достаточно простыми моделями, а также использованием треугольных элементов.

6. Свойства модели нестесненного моментного континуума исследованы в меньшей степени, нежели среды «псевдо-Коссера».

7. Вопрос применимости моментных моделей связан с идентификацией их реологии по экспериментальным данным, для чего МКЭ является перспективным инструментом. Преимущество реологических параметров моментных теорий перед комплексными реологическими параметрами моделей ледовых нагрузок состоит в инвариантности первых к виду расчетной модели и условиям взаимодействия.

Глава 2 . Подходы к применению традиционных численных моделей механики деформируемого твердого тела в задачах контактного взаимодействия жестких тел с грунтовыми и ледовыми средами

Сформулированные в Главе 1 задачи контактного нестационарного однократного взаимодействия жестких конструкций со льдом или грунтом наиболее близки по постановке и особенностям к задачам о внедрении. Это совершенно особый вид неупругого контакта, связанный с взаимодействием тел с существенно различной жесткостью, где внедряемое тело (индентор) может считаться не только упругим, но и абсолютно жестким. Ряд таких задач исторически возник вследствие необходимости исследования поверхностных слоев конструкционных материалов на твердость [17, 18, 25, 35, 41, 44, 45, 46, 91]. Здесь деформация считалась квазистатической. На сегодня задачи о внедрении решаются уже в динамической постановке, причем учитывается существенная зависимость пластических свойств от скорости деформации. Это задачи о высокоскоростной (импульсной) технологической обработке металлов давлением [62, 120, 64], а также задачи о пробивании [210, 181].

2.1. Обзор известных решений задач о статическом внедрении инденторов простой формы в пластичные среды

Как показано в монографии К. Джонсона [91], контактная нагрузка, при которой начинается пластическое течение в условиях сложного напряженного состояния двух контактирующих тел, определяется *пределом текучести более мягкого материала*. Состояние текучести большинства пластических материалов обычно описывается либо критерием Мизеса:

$$J = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = k^2 = \frac{Y^2}{3}, \quad (2.1.1)$$

либо критерием максимального касательного напряжения Треска

$$\max[|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|] = 2k = Y, \quad (2.1.2)$$

где σ_1 , σ_2 и σ_3 – главные напряжения в сложном напряженном состоянии, а k и Y – значения пределов текучести материала при простом сдвиге и простом растяжении (или сжатии) соответственно.

Для изотропных металлов экспериментально подтверждена справедливость критерия текучести Мизеса [113, 24]. Различие критериев (2.1.1) и (2.1.2) невелико и при учете анизотропии и изменчивости значений k или Y для большинства материалов. Третий распространенный критерий – *критерий максимального приведенного напряжения*, выражается формулой

$$\max[|\sigma_1 - \sigma|, |\sigma_2 - \sigma|, |\sigma_3 - \sigma|] = k = \frac{2Y}{3}, \quad (2.1.3)$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – гидростатическое давление. Для устойчивого пластического материала критерий Треска и критерий (2.1.3) образуют диапазон поиска истинного критерия текучести [91].

В результате решения упругих задач [140, 207] найдены контактные давления на поверхностях инденторов «канонической» формы – тупых клина и конуса, вдавливаемых в плоскую поверхность упругого полупространства. Показано, что давления в вершине *теоретически бесконечны*. Несмотря на это, пластическое течение при небольших нагрузках в этой зоне возникают не всегда.

В случае *несжимаемого* материала, при вдавливании *без трения* двумерного клина напряжение σ_x на границе контакта равно нормальному давлению p . Если принять коэффициент Пуассона $\nu = 0.5$, то напряжение σ_z для выполнения условий плоской деформации также должно быть равно p . То есть, на поверхности контакта реализуется гидростатическое напряженное состояние. Вершина является *особой точкой*.

Направим ось x в радиальном, ось z – в осевом направлении. Анализируя изменение разности главных напряжений $|\sigma_x - \sigma_z|$ вдоль оси z , показано [91], что эта разность достигает максимального, но *конечного* значения $(2E^*/\pi)ctg\alpha$ в вершине. Тогда, в соответствии с критерием текучести (2.1.2) течение инициируется в вершине при условии:

$$ctg\alpha \geq (\pi k/E^*). \quad (2.1.4)$$

Аналогичный вывод справедлив и для тупого конуса при $\nu = 0.5$. В вершине конуса развивается бесконечное гидростатическое давление, но разность главных напряжений $|\sigma_x - \sigma_z|$ на оси z конечна и имеет максимальное значение в вершине, равное $E^*ctg\alpha$. В этом случае два главных напряжения равны, так что критерии Треска и Мизеса, выраженные через предел текучести Y , идентичны. Таким образом, пластическое течение зарождается в вершине при выполнении неравенства

$$ctg\alpha \geq Y/E^*, \quad (2.1.5)$$

где E^* - приведенный модуль упругости для контактирующих тел.

Грунт, мелкодисперсный лед, иные сыпучие среды обладают пористостью, и их деформация обусловлена изменением плотности, т.е. *сжимаемостью* [90]. Для сжимаемых материалов полученные выше результаты неверны. В этом случае предсказываемое упругим решением бесконечное давление в вершине обуславливает теоретически бесконечные значения разности главных напряжений, что вызывает пластическое течение даже при сравнительно малых углах клина и конуса. *Однако развивающиеся пластические деформации в действительности очень малы и локализуются в малой окрестности вершины*.

В случае клина напряжение σ_y меньше, чем равные между собой напряжения σ_x и σ_z , так что только незначительная часть пластических деформаций развивается в плоскости yz . В условиях плоской деформации течение в этой плоскости будет вызывать сжимающие остаточные напряжения в направлении оси y до тех пор, пока не установится состояние гидростатического сжатия. Пластическое течение при этом прекращается. Аналогичное поведение имеет место в случае конуса. Поэтому представляется оправданным пренебречь наличием малых пластических деформаций, развивающихся в окрестности вершины, и считать неравенства

(2.1.4) и (2.1.5) приемлемыми для оценки начала пластического течения в случаях соответственно клина и конуса и для сжимаемых материалов.

Даже когда пределы упругости, определяемые приведенными выше соотношениями, превышены и началось течение, пластическая зона полностью окружена материалом, находящимся *в чисто упругом состоянии*. Это подтверждается экспериментом [91] по методу фотоупругости.

При внедрении тел, имеющих гладкие профили, например цилиндров или шаров, зона пластического состояния лежит *под поверхностью* контакта, тогда как для клина или конуса она примыкает к вершине [91]. Следовательно, *пластические деформации ограничены по величине уровнем упругих деформаций*, а усилением нагрузки на цилиндр или шар, так же как и увеличением углов клина или конуса, можно прийти лишь к слабому отличию глубины внедрения, площади области контакта и распределения давления от соответствующих параметров, полученных в рамках теории упругости. По этой причине предложение Герца [23] рассматривать возникновение пластического течения при вдавливании жесткого шарика в качестве разумной меры твердости материала считается непрактичным.

Точка зарождения течения расположена под поверхностью, и ее наличие фактически оказывает незначительное влияние на измеряемые величины, такие, как среднее контактное давление. При развитом пластическом течении, которое, очевидно, лучше описывает поведение льда в зоне контакта, пластические деформации велики по сравнению с упругими и последними можно пренебречь, как и упрочнением. Тогда материал можно идеализировать как *жестко-пластическую среду*, которая подвержена течению практически при постоянном напряжении k (при сдвиге) или Y (при растяжении или сжатии) (собственно, критерий прочности льда, используемый в [118, 220], соответствует именно жестко-пластической модели). Теория плоской деформации таких сред хорошо разработана [91, 24].

Нагруженное тело из жестко-пластического материала содержит области, где происходит течение, и абсолютно жесткие области, где деформации отсутствуют. Задача решается кинематическим методом [147]. Напряженное состояние в областях течения описывается с помощью *поля линий скольжения* [176]. Линии скольжения, согласно критерию Треска, проходят параллельно направлению *главных касательных напряжений* в каждой точке поля, т. е. под углом 45° к направлениям *главных нормальных напряжений*. Таким образом, они образуют криволинейную сеть так называемых α -линий и β -линий [176], взаимно ортогональных в каждой точке. Фрагмент поля линий скольжения показан на Рис. 2.1.1 (а).

Поскольку упругая сжимаемость не учитывается, главное напряжение, действующее перпендикулярно плоскости деформации, равно

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad (2.1.6)$$

где σ_1 и σ_2 — главные напряжения в плоскости деформации. В этих условиях критерии пластического течения Треска и Мизеса сводятся к равенству

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = 2k, \quad (2.1.7)$$

где $k = Y/2$ для критерия Треска и $k = Y/\sqrt{3}$ для критерия Мизеса.

Итак, напряженное состояние в пластической зоне включает переменное гидростатическое давление $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$, обозначаемое через σ , а также постоянное сдвиговое напряжение k в плоскости деформации. Это напряженное состояние в пластической зоне представляется кругом Мора постоянного радиуса k , положение центра которого определяется значением σ в рассматриваемой точке, как показано на Рис. 2.1.1 (б). Рассматривая равновесие элемента тела, показанного на Рис. 2.1.1 (а), получаем в направлении α -линии

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} - 2k \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0, \quad (2.1.8, \text{ а})$$

и в направлении β -линии

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \beta} + 2k \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0, \quad (2.1.8, \text{ б})$$

откуда

$$\sigma - 2k\varphi = \text{const} \quad \text{вдоль } \alpha\text{-линии}, \quad (2.1.9, \text{ а})$$

$$\sigma + 2k\varphi = \text{const} \quad \text{вдоль } \beta\text{-линии}. \quad (2.1.9, \text{ б})$$

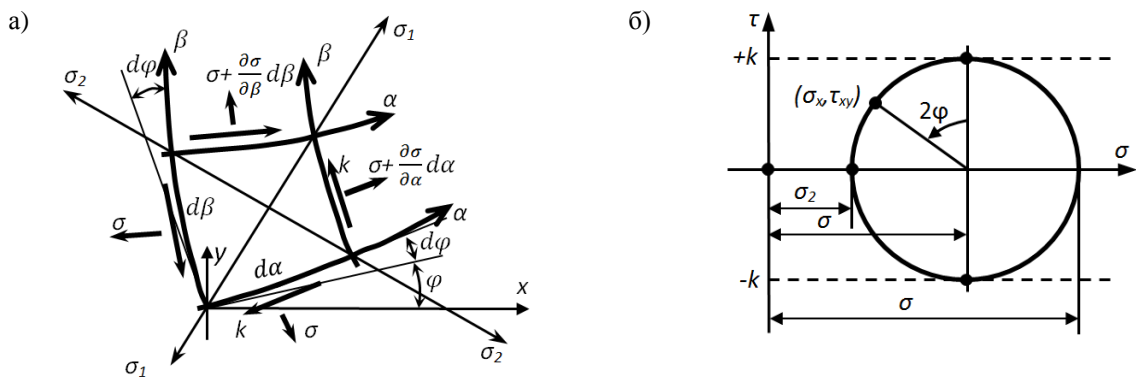


Рис. 2.1.1 а) Напряжения, действующие на элемент, ограниченный линиями скольжения; б) круг Мора; σ_1 — максимальное главное напряжение, σ_2 — минимальное главное напряжение.

Уравнения (2.1.9,а) позволяют, начиная от точек на свободной поверхности тела, напряжения в которых известны, определить изменение гидростатического давления вдоль линий скольжения в любой точке поля.

Уравнения для пластически деформируемых тел связывают напряжения с приращениями деформаций. Принимается, что приращения деформаций и перемещений возникают за промежуток времени dt и все выкладки проводятся в терминах *скоростей деформаций* и *скоростей перемещений* вместо приращений деформаций и перемещений.

Непрерывное формоизменение элемента материала, показанного на Рис. 2.1.1 (а), состоит из растяжения вдоль направления максимального главного напряжения и сжатия вдоль направления минимального главного напряжения. При сохранении объема скорости главных деформаций соотносятся как $\dot{\epsilon}_2 = -\dot{\epsilon}_1$. Это означает *неизменность длины вдоль направлений линий скольжения*, так что *пластическое формоизменение*

может рассматриваться как деформация «сетки» нерастяжимых нитей, служащих линиями скольжения.

Какой-либо единой методики построения поля линий скольжения при решении конкретных задач *нет*; оно находится методом проб [91]. Поле линий скольжения должно быть согласовано с полем скоростей, и оба этих поля должны удовлетворять граничным условиям задачи. Необходимо также, чтобы жесткие области обеспечивали несущую способность тела без нарушения условия текучести (чтобы поле напряжений было *допустимым*). Если все эти условия выполнены, то поля линий скольжения и напряжения, найденные из уравнений (2.1.9) – *единственны* (согласно экстремальным теоремам ТПР), однако относительно ассоциированного поля скоростей этого сказать нельзя.

Осесимметричные задачи, вообще говоря, не поддаются решению с помощью метода линий скольжения, как это имеет место в случае плоской деформации. Тем не менее, Шилд [48] показал, что в некоторых случаях для материала, находящегося в состоянии пластического течения согласно критерию Треска, можно построить поле линий скольжения, определяющее напряженное состояние. Такое поле должно быть согласовано с полем скоростей для осесимметричной деформации. В качестве примера Шилд определил напряжения в жесткопластическом полупространстве при вдавливании в него без трения цилиндрического штампа с плоским торцом. Следуя методу Шилда, в [37] построено поле линий скольжения в задаче внедрения гладкого жесткого конуса.

При вдавливании в жесткопластическое тело индентора, имеющего сложный профиль, *геометрическое подобие не имеет места*. Интенсивность деформаций возрастает с увеличением внедрения. Линии скольжения криволинейны, и возникают трудности анализа, связанные с изменемостью формы свободной поверхности. А. Ю. Ишлинский [112] *в предположении, что свободная поверхность остается плоской*, построил поле линий скольжения для вдавливания без трения жесткого шара в жесткопластическое полупространство. На стадии внедрения, когда отношение радиуса площадки контакта к радиусу шара $\alpha/R = 0.376$, среднее контактное давление найдено равным $5.32k$. Впоследствии было показано [91], что предложенное А. Ю. Ишлинским поле линий скольжения не совместно с ассоциированным полем скоростей, поскольку существуют области, в которых пластическая работа неположительна. Его результат, таким образом, следует рассматривать как приближенный.

Ричмонд с соавторами [45] получили *точное* решение задачи вдавливания жесткого шара в идеально пластическое полупространство при условии сцепления (отсутствия проскальзывания) по поверхности контакта. Установлено, что среднее контактное давление почти не зависит от глубины внедрения и изменяется от $6.04k$ при $\alpha/R = 0.07$ до $5.91k$ при $\alpha/R = 0.30$. Профиль индентора влияет только на контактное давление, вызывая незначительные изменения формы свободной поверхности вне зоны контакта.

Решения А.Ю. Ишлинского и Ричмонда можно использовать для тестирования конечно-элементных упруго-пластических решений. В рамках теории жесткопластических сред нельзя определить положение упруго-пластической границы, однако некоторые *грубые оценки применительно к плоской деформации можно получить из распределения упругих напряжений в полупространстве при действии на его поверхности равномерного давления.*

Метод продолжения поля линий скольжения внутрь жесткой области описан Бишопом [9]. Он продолжил поле, возникающее вокруг двумерного штампа с плоским основанием (угол клина $\alpha = 90^\circ$) до границы с нулевыми напряжениями. Предполагая, что эти границы целиком лежат внутри свободных поверхностей нагруженного тела, можно заключить, что жесткая область способна выдержать напряжения, определяемые полем линий скольжения в области деформации без пластического разрушения. Подробное обсуждение этих вопросов имеется у Хилла [25]. С помощью техники продолжения поля линий скольжения под цилиндрическим штампом с плоским основанием, определенного Шилдом [48], можно показать, что жесткопластическое тело должно иметь минимальную высоту 3.4α и минимальный радиус, измеряемый от оси симметрии внедряемого штампа, равный 3.2α .

При учете деформационного упрочнения упругопластическая граница распространяется в тело более глубоко, чем это предсказывается теорией идеальной пластичности. Таким образом, для того, чтобы размеры блока из деформационно-упрочняющегося материала не оказывали влияния на картину формоизменения при вдавливании в него штампа, он должен иметь большие критические геометрические параметры, чем для идеально-пластической среды.

Упругие свойства реальных тел играют важную роль в процессах пластического вдавливания. При первом превышении предела упругости зона пластичности мала и полностью охватывается материалом, находящимся в чисто упругом состоянии, так что пластические деформации имеют одинаковый порядок величины с упругими деформациями. В этом случае вытеснение материала индентором компенсируется упругими смещениями окружающей среды. Если глубина внедрения увеличивается за счет увеличения нагрузки, когда индентор имеет криволинейный профиль, либо за счет уменьшения угла при вершине клиновидного или конического индентора, то *для обеспечения необходимого расширения материала требуется повышение давления под индентором.* В конечном итоге *пластическая зона выходит на свободную поверхность и вытесненный материал может свободно пластически течь по краям индентора.* Это так называемая мода нестесненного формоизменения, рассмотренная в рамках теории жесткопластических тел. Следует ожидать, что пластическая зона выйдет на внешнюю поверхность и станет возможной модой нестесненной деформации, когда среднее давление под индентором достигнет величины, определяемой теорией жесткопластических сред:

$$p_m = cY, \quad (2.1.10)$$

где значение c зависит от геометрии индентора, а также трения на поверхности контакта и примерно равно 1...3. Существует интервал промежуточных значений среднего контактного давления (от Y до $3Y$), для которых пластическое течение сдерживается окружающим упругим материалом, а деформация осуществляется за счет радиального расширения среды. С точки зрения инженерных приложений представляют интерес три стадии нагружения: чисто упругая и упругопластическая (стесненная), а также полностью пластическая (нестесненная).

Деформирование идеальных упруго-пластических материалов (прандтлевых), описывается уравнениями Рейсса [24]. В принципе контактные напряжения, возникающие при вдавливании штампа в упругопластическую среду при малых деформациях, можно вычислить. Но уже при малых величинах пластических деформаций это связано со значительными трудностями, обусловленными тем, что *форма и размеры упругопластической границы заранее неизвестны*. Перспективным в монографии [91] назван подход, основанный на замене сплошной среды сеткой конечных элементов, *однако концентрация напряжений затрудняет получение уточненной картины напряженного состояния в зоне контакта*.

Впервые МКЭ был применен к исследованию осесимметричного поля напряжений при вдавливании цилиндрического штампа в работе [2]. Более полный численный анализ внедрения цилиндра и шара в упруго-идеально-пластическое полупространство дан в работах [22, 35, 50, 91]. В этих работах прослеживалось развитие пластической зоны при возрастании нагрузки. Вычислительные трудности возникали при подходе к полностью пластическому состоянию, и вследствие этого расчеты проводились для нагрузок $P < 100P_Y$, где P_Y — нагрузка, при которой впервые наступает состояние течения. Упомянутые трудности были преодолены Фоллансби и Синклером [17] при исследовании внедрения шара в упрочняющееся тело, *полностью охваченное пластической деформацией* (предварительно созданной). В работе Харди с соавторами [22] получены распределения контактных давлений. Как и следовало ожидать, пластическое течение приводит к «более плоскому», нежели при упругом контакте, распределению давлений, пиковое значение которого при высоких нагрузках смещается к краю области контакта. Контуры пластической зоны примерно совпадают с линиями уровня интенсивности напряжений и для исследованного диапазона нагрузок *почти целиком располагаются под областью контакта*.

Альтернативный подход к исследованию упругопластического внедрения, свободный от сложностей численного конечно-элементного анализа, вытекает из давнего предложения Бишопа, Хилла и Мотта [10], развитого Маршем [38] и Джонсоном [27]. Этот подход основан *на наблюдениях* [41, 46] *за смещениями поверхностных слоев*, вызванными внедрением тупого индентора (конуса, шара или пирамиды). Из этих наблюдений следует, что смещения под поверхностью *примерно радиальны*

по отношению к точке начального контакта, а поверхности равных деформаций *всегда* имеют примерно полусферическую форму (Рис. 2.1.2).



Рис. 2.1.2 Экспериментально определенные линии уровня пластической деформации при внедрении: а) шарового индентора (шарик Бринелля), $\alpha/R = 0.51$; б) пирамидального индентора, используемого для определения твердости по Виккерсу.

В рамках этой упрощенной модели упругопластического внедрения полагают, что поверхность контакта охвачена полусферическим «ядром» радиуса α (Рис. 2.1.3).

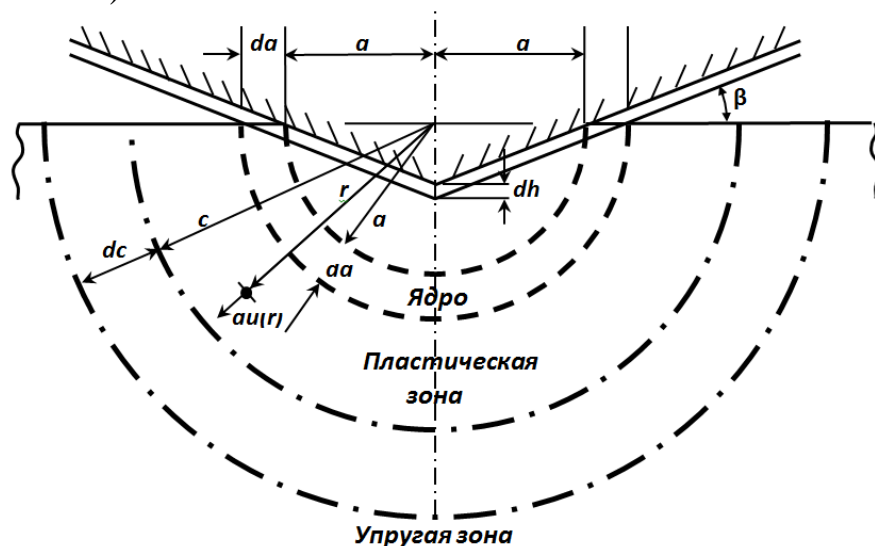


Рис. 2.1.3 Модель с шаровым ядром для анализа внедрения конуса в упруго-пластическую среду

Внутри ядра предполагается *гидростатическое напряженное состояние интенсивностью p* . Считается, что вне ядра напряжения и перемещения обладают радиальной симметрией и совпадают с напряжениями и перемещениями в неограниченном упруго-идеально-пластическом теле со сферической полостью, где действует давление p . Упругопластическая граница определяется радиусом c , где $c > \alpha$. На поверхности раздела ядра и пластической зоны: а) гидростатическое давление в ядре равно радиальной компоненте напряжения во внешности; б) радиальное смещение частиц, лежащих на границе $r = \alpha$, при приращении глубины внедрения dh должно компенсироваться материалом, вытесняемым индентором (сжимаемость ядра не учитывается).

Напряжения в пластической зоне $\alpha \leq r \leq c$ равны [24]

$$\frac{\sigma_r}{Y} = -2 \ln \left(\frac{c}{r} \right) - \frac{2}{3}, \quad (2.1.11 \text{ ,a})$$

$$\frac{\sigma_\theta}{Y} = -2 \ln \left(\frac{c}{r} \right) + \frac{1}{3}. \quad (2.1.11 \text{ ,б})$$

В упругой зоне $r \geq \alpha$

$$\frac{\sigma_r}{Y} = -\frac{2}{3} \left(\frac{c}{r} \right)^3, \quad \frac{\sigma_\theta}{Y} = \frac{1}{3} \left(\frac{c}{r} \right)^3. \quad (2.1.12)$$

Давление в ядре и радиальное напряжение на границе ядра равны

$$\frac{\bar{p}}{Y} = -\frac{\sigma_r}{Y} \Big|_{r=\alpha} = \frac{2}{3} + 2 \ln \frac{c}{\alpha}. \quad (2.1.13)$$

Радиальные деформации равны [24]

$$\frac{du(r)}{dr} = \frac{Y}{E} \left[3(1-\nu) \left(\frac{c}{r} \right)^2 - 2(1-2\nu) \frac{r}{c} \right]. \quad (2.1.14)$$

Из условия несжимаемости ядра следует

$$2\pi\alpha^2 du(\alpha) = \pi\alpha^2 dh = \pi\alpha^2 tg\beta d\alpha \quad (2.1.15)$$

где β — угол между образующей конуса и поверхностью основания ($\beta = \pi/2 - \alpha$). Если положить $r = a$ в (2.1.14) и заметить, что из условия геометрического подобия при непрерывном внедрении конуса следует соотношение $dc/da = c/a = const$, то уравнения (2.1.14) и (2.1.15) определяют положение упругопластической границы:

$$6(1-\nu) \left(\frac{c}{\alpha} \right)^3 - 4(1-2\nu) = \frac{E tg\beta}{Y}. \quad (2.1.16)$$

Подставляя найденное из этого уравнения выражение для c/a в (2.1.13), получим давление в ядре. В случае несжимаемого материала имеем простое выражение

$$\frac{\bar{p}}{Y} = \frac{2}{3} \left[1 + \ln \left(\frac{1}{3} \frac{E tg\beta}{Y} \right) \right]. \quad (2.1.17)$$

Разумеется, напряженное состояние материала под индентором не является чисто гидростатическим. Если через \bar{p} обозначить гидростатическую составляющую, то нормальное напряжение будет иметь значение $\sigma_z \approx -(\bar{p} + 2Y/3)$, а радиальная компонента $\sigma_r \approx -(\bar{p} - Y/3)$. Следовательно, верхняя оценка давления внедрения p_m в рамках модели с шаровым ядром дается величиной $\bar{p} + 2Y/3$. Аналогичный анализ может быть выполнен в случае вдавливания плоского жесткого клина [27].

Из выражения (2.1.17) видно, что гидростатическое давление в ядре под индентором является функцией единственной безразмерной переменной $E tg\beta/Y$, которую можно интерпретировать как отношение заданной формой индентора деформации ($tg\beta$) к упругой деформируемости материала (Y/E).

Давление внедрения в условиях чисто упругого, упругопластического и полностью пластического состояний можно представить в виде графика зависимости безразмерной величины p_m/Y от $E^* tg\beta/Y$, где β — угол (считающийся малым) наклона профиля индентора к недеформированной поверхности основания на краю области контакта (Рис. 2.1.4). В случае сферического индентора принимаем $tg\beta \approx \sin\beta = \alpha/R$; величина этого отношения изменяется при внедрении. Интегрирование уравнений (2.1.14) и

(2.1.15) при условии $c/\alpha = 1$, что соответствует точке зарождения течения ($p_m = 1.1Y$), приводит к уравнению (2.1.17) с аддитивной константой (≈ 0.19) в правой части. В случае алмазной пирамиды Виккерса в качестве угла β принимается угол конуса (19.7°) с сохранением объема. Состояние течения наступает в случае сферического индентора при среднем контактном давлении $p_m \approx 1.1Y$, а для конического индентора — при $p_m \approx 0.5Y$. Наступление состояния полной пластичности дает верхний предел для давления внедрения $\sim 3Y$, которое достигается при $E^* \operatorname{tg}\beta/Y \approx 40$ для конуса и $E^* \alpha/(YR) \approx 30$ для шара.

На Рис. 2.1.4 представлены средние давления внедрения осесимметричных инденторов произвольного профиля в упругопластические среды, для которых известны кривые «напряжение — деформация» при одноосном сжатии. Эти кривые дают, в частности, связь между твердостью и напряжением течения при одноосном сжатии. Так, для твердости H_V , определяемой по методу Виккерса, имеем

$$H_V = 0.93p_m \approx 2.8Y_R, \quad (2.1.18)$$

где Y_R — напряжение течения при одноосном сжатии, соответствующее деформации около 0.08.

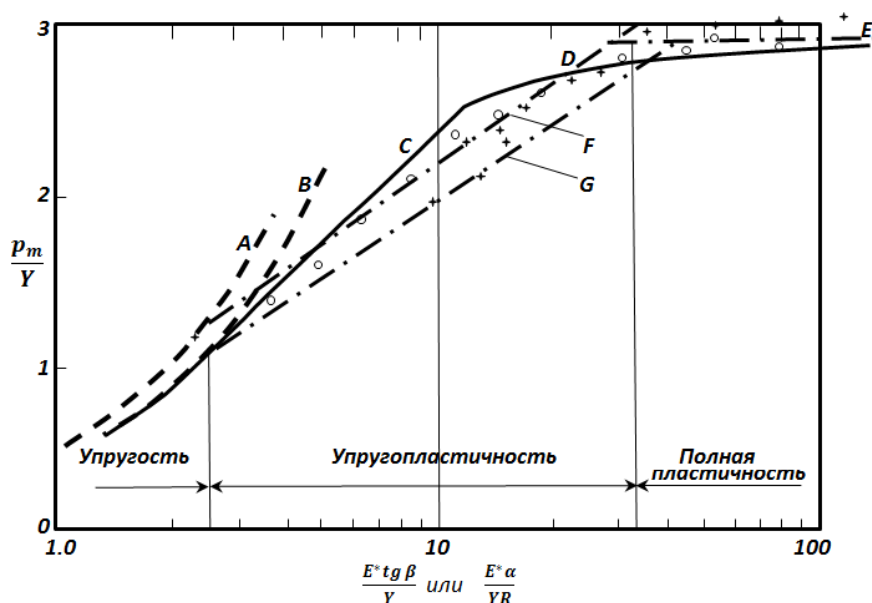


Рис. 2.1.4 Внедрение шаров и конусов в упругопластическое полупространство. Штриховые кривые — упругие решения: А — конус, В — шар; сплошные линии — конечно-элементные численные решения: С по [22], D по [17]; штрихпунктирные линии — модель с шаровым ядром: F — конус, G — шар; кривая E — жесткопластическое решение для шара [45]. Экспериментальные данные: крестики — для пирамиды [38], кружки — для шаров [51]

В работе [18] проанализированы экспериментальные данные по внедрению сферических инденторов в различные материалы и установлена хорошая корреляция этих данных в терминах введенных выше переменных. Согласованность результатов жесткопластического и конечно-элементного анализа в целом хорошая, особенно если учесть, что последние были получены для упрочняющегося материала. Сцепление материала с поверхностью штампа приводит к локализации максимальных значений напряжений под поверхность контакта. Этот эффект проявляется и в

результатах расчетов методом конечных элементов. Полное пластическое течение в рамках модели с шаровым ядром имеет место при $p_m/Y = 3$, $E * tg \beta / Y = 40$; в соответствии с уравнением (2.1.16) положение упругопластической границы определяется соотношением $c/\alpha \approx 2.3$. Напряжения при этом определяются выражениями (2.1.11, а) и (2.1.12). Эпюры напряжений вдоль оси z имеют такой же профиль, как и рассчитанные по методу конечных элементов, однако величины напряжений занижены.

На поверхности контакта модель со сферическим ядром предсказывает растягивающие окружные и сжимающие радиальные усилия при $r > 2a$. В случае чисто упругого состояния, наоборот, радиальные напряжения являются растягивающими. Расчеты по методу конечных элементов также дают растягивающие окружные напряжения, но меньшей величины. Теория жесткопластичности дает $\sigma_\theta = \sigma_z = 0$ (условие Хаара — Кармана) как результат использования критерия текучести Треска.

Переход от радиального растяжения в чисто упругом состоянии к растяжению в окружном направлении в упругопластическом состоянии существенно предопределяет изменение формы разрушения при внедрении от образования кольцевой трещины для хрупких материалов, таких, как стекло, к развитию радиальных трещин в полухрупких материалах, таких, как плексиглас [44]. *Иначе ведут себя пористые материалы. При внедрении индентора они раздробливаются, а давление внедрения примерно равно Y , где Y – прочность на сжатие при одноосном нагружении [56].*

Помимо контактных давлений, представляет интерес также *глубина внедрения индентора*. Теоретическое определение этой величины связано с затруднениями, обусловленными *неизвестным выпучиванием материала по краям лунки при внедрении [91]:*

- в случае жесткопластического тела вытесняемый индентором материал перемещается в зону бокового поднятия по краям лунки.

- в случае упругопластического тела большая часть объема вытесняемого материала, если не весь, смещается в радиальном направлении за счет расширения окружающей среды, находящейся в упругом состоянии. Это проявляется *в незначительном увеличении внешних размеров тела, в которое вдавливаются индентор.*

На боковое поднятие оказывают также влияние характеристики упрочнения материала. Большая деформируемость упрочняющегося материала приводит к смещению пластической зоны вглубь тела и тем самым *уменьшает выпучивание вблизи индентора.*

График зависимости внедрения δ от вдавливающего усилия P обычно называется *кривой податливости*. Для описания внедрения сферического индентора целесообразно использовать следующие безразмерные переменные:

$$\frac{\delta}{\delta_Y} = \frac{0.148 \delta E^{*2}}{R Y^2}, \quad (2.1.19 \text{ ,a})$$

$$\frac{P}{P_Y} = \frac{0.043PE^{*2}}{R^2Y^3}, \quad (2.1.19 \text{ б})$$

где P_Y — внешнее усилие, при котором возникает течение, определяемое выражением (2.1.2), а δ_Y — глубина внедрения, соответствующая нагрузке P_Y . Состояние полной пластичности достигается при $E^*\alpha/(RY) \approx 40$, т. е. когда $P/P_Y \approx 650$. Если допустить, что в условиях, когда во всей области происходит пластическое течение, материал по краям лунки не поднимается и не опускается, то глубина внедрения приближенно равна 1)

$$\delta = \alpha^2/(2R). \quad (2.1.20)$$

Рассмотренные в обзоре аналитические и численные решения используем в дальнейшем для «настройки» собственных моделей МКЭ.

2.2. Решение задачи о проникании сферического индентора в пластичную среду методом конечных элементов в статической постановке

На сегодняшний день основным экспериментальным средством верификации моделей взаимодействия конструкций со льдом являются тесты типа DBT (Drop Ball Tests) [5, 61]. Если в упругой постановке задача о статическом внедрении жесткого штампа решена аналитически для многих форм штампа [91], то при переходе к упруго-пластической или жесткопластической среде, а также к динамической постановке решение становится весьма сложным, и для его получения применяются численные методы (конечных разностей, конечных элементов).

Как показывают опыты по внедрению в лед (Глава 1), образование выемок в среде есть следствие вытеснения разрушенного материала. Безусловно, в рамках идеализации льда неразрушающимся твердым деформируемым телом обеспечить такой уровень вытеснения невозможно. Можно лишь приблизиться к наблюдаемым эффектам, заменяя модели разрушения и вытеснения моделями пластического течения. При этом, безусловно, упрочнение среды можно считать отсутствующим, что отчасти должно учесть вытеснение.

На первом этапе работы с помощью физически и геометрически нелинейного конечно-элементного решения оценивался уровень предельного статического вдавливания жесткой сферы в полупространство с малой степенью упрочнения и рассчитывался соответствующий уровень пластической работы материала, на разных стадиях истории нагружения определялся характер эпюры контактных давлений. Моделирование производилось в конечно-элементном комплексе ANSYS [4], определялись приемлемые параметры сетки, шага нагружения, числа равновесных итераций на каждом шаге, приводящие к устойчивому решению.

Теоретические основы решения упруго-пластической задачи по МКЭ. Приращение пластической деформации в численной реализации конечно-элементного пакета ANSYS вычисляется следующим образом [4, 171, 170]. Согласно закону упрочнения совместно с кинематическим

(трансляционным) упрочнением происходит изменение предела текучести. Подставляя закон упрочнения в выражение предельной поверхности, получаем:

$$F(\{\sigma\}, A_{\text{пл}}, \{a\}) = 0, \quad (2.2.1)$$

где $A_{\text{пл}}$ – пластическая работа (работа пластической деформации), $\{a\}$ – смещение поверхности текучести; эти характеристики называются *внутренними переменными*. Работа пластической деформации представляет собой интегральную сумму пластических работ на всем пути нагружения:

$$A_{\text{пл}} = \int \{\sigma\}^T [M] \{d\varepsilon^{\text{пл}}\}, \quad (2.2.2)$$

где $[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Трансляция (смещение) поверхности текучести также зависит от истории нагружения и задается как

$$\{a\} = \int C \{d\varepsilon^{\text{пл}}\}, \quad (2.2.3)$$

где C – параметр материала.

Дифференцируя уравнение (2.2.1), получаем условие совместности в виде:

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [M] \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial A_{\text{пл}}} \{\sigma\}^T [M] \{d\varepsilon^{\text{пл}}\} + C \left\{ \frac{\partial F}{\partial a} \right\}^T [M] \{d\varepsilon^{\text{пл}}\} = 0. \quad (2.2.4)$$

Инкремент напряжений вычисляется из соотношения, подобного упругому:

$$\{d\sigma\} = [D] \{d\varepsilon^{\text{упр}}\}, \quad (2.2.5)$$

где $[D]$ – матрица «упругопластических характеристик» (в линейном случае – упругая матрица), причем

$$\{d\varepsilon^{\text{упр}}\} = \{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^{\text{пл}}\}, \quad (2.2.6)$$

$\{d\varepsilon\}$ – полная деформация.

Подставляя уравнение (2.2.6) в уравнение (2.2.5) и комбинируя уравнения (2.2.4), (2.2.5), (1.2.7), получим:

$$\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [M] [D] \{d\varepsilon\}}{-\frac{\partial F}{\partial A_{\text{пл}}} \{\sigma\}^T [M] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - C \left\{ \frac{\partial F}{\partial a} \right\}^T [M] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [M] [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}}. \quad (2.2.7)$$

Таким образом, величина приращения пластической деформации зависит от полного приращения деформации, текущего напряженного состояния, закона течения и вида потенциала. Зная пластический множитель λ , приращение пластической деформации нетрудно вычислить из приводимого ранее уравнения (1.2.7):

$$\{d\varepsilon^{\text{пл}}\} = \lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}. \quad (2.2.8)$$

Для решения уравнения неразрывности (2.2.4) используется обратная схема Эйлера. Она гарантирует нахождение вновь получаемых напряжений, деформаций и внутренних переменных на поверхности текучести. Алгоритм вычислений следующий:

1) На данном шаге по времени в зависимости от актуальной температуры (если она есть) определяется предел текучести.

2) Вычисляются текущие напряжения, исходя из "пробных" деформаций $\{\varepsilon^{pp}\}$, которые равны полным минус пластические на предыдущем временном шаге: $\{\varepsilon^{pp}\} = \{\varepsilon_n\} - \{\varepsilon_{n-1}^{пл}\}$, т.к. все выражения записываются для текущей временной точки, то нижний индекс можно опустить. Итак, "пробные" напряжения равны: $\{\sigma^{pp}\} = [D]\{\varepsilon^{pp}\}$.

3) При этом уровне напряжений вычисляется эквивалентное напряжение (в нашем случае – интенсивность по Мизесу), если оно меньше предела текучести, материал считается в данной точке времени упругим и приращения пластических деформаций не вычисляются. Если эквивалентное напряжение больше предела текучести, пластический коэффициент λ определяется в локальной итерационной процедуре Ньютона-Рафсона.

4) Приращение пластических деформаций $\{\Delta\varepsilon^{пл}\}$ вычисляется согласно уравнению (2.2.8).

5) Текущие пластические деформации вычисляются суммированием: $\{\varepsilon_n^{пл}\} = \{\varepsilon_{n-1}^{пл}\} + \{\Delta\varepsilon^{пл}\}$, где $\{\varepsilon_n^{пл}\}$ – выходная величина для дальнейших расчетов, а упругая составляющая вычисляется как $\{\varepsilon^{упр}\} = \{\varepsilon^{pp}\} - \{\Delta\varepsilon^{пл}\}$. Вектор напряжений окончательно определяется как $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{упр}\}$.

6) Приращение пластической работы $\Delta A_{пл}$ и смещение центра поверхности текучести $\{\Delta a\}$ определяются из уравнений (2.2.2) и (2.2.3). Текущие значения этих величин равны соответственно: $A_{пл}^n = A_{пл}^{n-1} + \Delta A_{пл}$ и $\{a_n\} = \{a_{n-1}\} + \{\Delta a\}$. Индекс $n - 1$ указывает значение на предыдущем шаге по времени.

На каждом шаге вычисляются: интенсивности пластических деформаций (эквивалентные пластические деформации) $\hat{\varepsilon}^{пл}$, эквивалентный инкремент пластических деформаций (максимальный шаг пластической деформации) $\Delta\hat{\varepsilon}^{пл}$, эквивалентное напряжение $\hat{\sigma}_B^{пл}$ и отношение напряжений N . Отношение напряжений задается формулой: $N = \frac{\sigma_B}{\sigma_s}$, где σ_B получается с использованием "пробных" напряжений. Таким образом, N больше или равно 1, если возникло пластическое течение, и меньше 1, если НДС упругое. Эквивалентный инкремент пластических деформаций задается следующим образом:

$$\Delta\hat{\varepsilon}^{пл} = \sqrt{\frac{2}{3}\{\Delta\varepsilon^{пл}\}^T[M]\{\Delta\varepsilon^{пл}\}}. \quad (2.2.9)$$

Эквивалентные пластические деформации и эквивалентные напряжения вычисляются в зависимости от выбранной модели пластичности.

Касательная или упругопластическая напряженно-деформированная матрица выводится из локальной итерационной схемы Ньютона-Рафсона.

Если закон течения – не ассоциированный, то матрица несимметрична. Для сохранения симметрии матрицы в случае анализа неассоциированного закона течения (Друкера-Прагера) она вычисляется путем *осреднения* отдельно вычисленных матриц только для F и только для Q .

В случае модели классического билинейного кинематического упрочнения эквивалентное напряжение (интенсивность) в матричном виде имеет вид:

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{3}{2} (\{s\} - \{a\})^T [M] (\{s\} - \{a\})}, \quad (2.2.10)$$

где $\{s\}$ – вектор девиаторных напряжений,

$$\{s\} = \{\sigma\} - \sigma_m [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (2.2.11)$$

где, в свою очередь,

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (2.2.12)$$

σ_m – "гидростатическое" напряжение, $\{a\}$ – приводимый выше вектор перемещения поверхности текучести в пространстве напряжений.

Уравнение (2.2.10) зависит от девиаторных напряжений и не зависит от уровня гидростатических. Критерий текучести приобретает вид:

$$F = \sqrt{\frac{3}{2} (\{s\} - \{a\})^T [M] (\{s\} - \{a\})} - \sigma_S = 0. \quad (2.2.13)$$

Ассоциированный закон течения дает:

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \frac{3}{2\sigma_B} (\{s\} - \{a\}), \quad (2.2.14)$$

то есть приращение пластической деформации нормально к поверхности текучести. Ассоциированный закон течения с критерием текучести Мизеса известен как уравнение течения Прандтля – Рейсса. Перемещение поверхности текучести определяется следующим образом:

$$\{a\} = 2G \{\varepsilon^{сдв}\}, \quad (2.2.15)$$

где G – модуль сдвига.

Сдвиговая деформация вычисляется из уравнения:

$$\{\varepsilon_n^{сдв}\} = \{\varepsilon_{n-1}^{сдв}\} + \{\Delta\varepsilon^{сдв}\}, \quad (2.2.16)$$

где

$$\{\Delta\varepsilon^{сдв}\} = \frac{C}{2G} \{\Delta\varepsilon^{пл}\}, \quad C = \frac{2}{3} \frac{EE_T}{E - E_T}, \quad (2.2.17)$$

где E – модуль Юнга, E_T – касательный модуль из одноосной диаграммы модели билинейного упрочнения.

Перемещение поверхности текучести $\{\varepsilon^{сдв}\}$ изначально нулевое и изменяется вследствие пластического деформирования. Эквивалентная пластическая деформация зависит от истории нагружения и определяется следующим образом:

$$\hat{\varepsilon}_n^{пл} = \hat{\varepsilon}_{n-1}^{пл} + \Delta\varepsilon^{пл}. \quad (2.2.18)$$

Эквивалентное напряжение на данном шаге определяется следующим образом:

$$\hat{\sigma}_в^{пл} = \sigma_s + \frac{EE_T}{E - E_T} \hat{\varepsilon}_n^{пл}. \quad (2.2.19)$$

Заметим, что если на этом шаге нет пластических деформаций ($\hat{\varepsilon}^{пл} = 0$), то эквивалентное напряжение равно пределу текучести. Если после нагружения до состояния пластического течения нагрузка уменьшается, но пластические деформации остаются ненулевыми, то эквивалентное напряжение остается большим, чем предел текучести.

Итерационное решение нелинейной задачи на шаге нагружения может производиться, в частности, методом Ньютона-Рафсона. Процесс конечно-элементной дискретизации дает на конкретном шаге нагружения СЛАУ вида:

$$[K]\{u\} = \{F^a\}, \quad (2.2.20)$$

где $[K]$ – матрица коэффициентов, $\{u\}$ – вектор неизвестных перемещений, $\{F^a\}$ – вектор приложенных нагрузок. Если матрица коэффициентов сама по себе является функцией перемещений или их производных (присутствует переменная системная жесткость), то матричное уравнение (2.2.20) – нелинейное. Метод Ньютона-Рафсона – это итерационный процесс решения системы нелинейных уравнений и может быть записан в виде следующих выражений:

$$[K_i^T]\{\Delta u_i\} = \{F^a\} - \{F_i^{nr}\}, \quad (2.2.21)$$

где $[K_i^T]$ – матрица касательной жесткости; i – номер итерации, $\{F_i^{nr}\}$ – вектор противодействующих нагрузок, соответствующих внутренним усилиям в элементе.

Правая часть уравнения (2.2.21) – невязка, или показатель неуравновешенности системы на данной итерации.

Как правило, для получения удовлетворительного решения требуется более одной итерации. Алгоритм процедуры Ньютона-Рафсона следующий:

1) Получить "нулевое приближение" $\{u_0\}$. Обычно это сходящееся решение на предыдущем шаге по времени (или по нагрузке). На первом шаге по времени все перемещения принимаются нулевыми.

2) Вычислить при имеющемся векторе $\{u_i\}$ новую касательную матрицу $[K_i^T]$ и соответствующий вектор $\{F_i^{nr}\}$.

3) Определить приращение $\{\Delta u_i\}$.

4) Получить следующую аппроксимацию $\{\Delta u_{i+1}\}$.

5) Продолжать шаги 2-4 до выполнения критерия сходимости решения.

Решение получено окончательно, когда вектор внутренних усилий $\{F_i^{nr}\}$, получаемый по текущему НДС, приблизится с требуемой точностью к вектору приложенных нагрузок. В случае наличия нелинейностей, зависящих от истории нагружения (например, пластичность), процесс требует, чтобы подшаги, на которые разбивается шаг нагружения, были корректны по отношению к пути нагружения. Это особенно эффективно при инкрементальном приложении нагрузки. Таким образом, более подробно можно записать:

$$[K_{n,i}^T]\{\Delta u_i\} = \{F_n^a\} - \{F_{n,i}^{nr}\}, \quad (2.2.22)$$

где $[K_{n,i}^T]$ – касательная матрица n -го шага по времени на i -й итерации; $\{F_n^a\}$ – полный вектор приложенных усилий на n -м шаге по времени; $\{F_{n,i}^{nr}\}$ – вектор вычисленных внутренних усилий на n -м шаге по времени, i -й итерации.

Процедура Ньютона-Рафсона гарантирует сходимость решения тогда и только тогда, когда решение на произвольной итерации $\{\Delta u_i\}$ достаточно близко к точному. Поэтому необходимо, чтобы путь инкрементального нагружения был достаточно гладким, без разрывов и изломов, что обеспечивается, в частности, уменьшением размера инкремента.

Если матрица жесткости обновляется на каждой итерации, процесс носит название *полной* процедуры Ньютона-Рафсона. В рассматриваемой задаче применяется именно этот вид процедуры. Возможно также применение *модифицированной* процедуры Ньютона-Рафсона, так называемого метода начальных жесткостей. Его преимущество в том, что обновление матрицы жесткости происходит только в ходе 1-й или 2-й итерации на каждом шаге по времени и экономит время счета и ресурсы памяти ЭВМ. Недостаток метода – в ухудшенной сходимости решения.

Итерационный процесс, описанный выше, продолжается до достижения сходимости. Максимальное число итераций, необходимых для достижения сходимости, может быть ограничено.

Сходимость решения достигнута, если выполняется условие:

$$\|\{R\}\| < \varepsilon_R R_{ref}, \quad (2.2.23)$$

называемое равновесной сходимостью (сходимость по усилиям) и/или:

$$\|\{\Delta u_i\}\| < \varepsilon_u u_{ref}, \quad (2.2.24)$$

называемое сходимостью по перемещениям, где $\|\{R\}\|$ – норма вектора невязки:

$$\{R\} = \{F^a\} - \{F^{nr}\}, \quad (2.2.25)$$

взятый из правой части уравнения Ньютона-Рафсона. $\{\Delta u_i\}$ – вектор приращений перемещений; ε_R и ε_u – параметры точности, R_{ref} и u_{ref} – относительные значения. Определение нормы (скалярной меры величины вектора) в данной задаче используем в виде нормы Евклида:

$$\|\{R\}\| = \sqrt{\sum R_i^2}. \quad (2.2.26)$$

Сходимость, т.о., достигается, если размер невязки меньше, чем текущий допуск на значение усилия и/или если размер приращения перемещения меньше допустимого на данный момент значения.

Значение R_{ref} принимаем на каждом шаге равным $\|\{F^a\}\|$. Для улучшения сходимости используются следующие методы: метод предиктор-корректор; метод линейного поиска; метод дуг и др.

Результаты решения модельной задачи о статическом внедрении.

Использовались следующие параметры модели (Рис. 2.2.1):

- предел текучести материала среды, в которую вдавливаются индентор: $\sigma_T = 20$ МПа (брался равным пределу прочности по Коржавину [167]),
- модуль упругости среды $E = 2$ ГПа,

- модуль упрочнения билинейной диаграммы $E_T = 1$ МПа (что позволяло считать среду практически прандтлевой, при этом обеспечивая устойчивость численного расчета методом Ньютона-Рафсона),

- коэффициент Пуассона среды принимался довольно низким для пластичного материала ($\mu = 0.3$) с учетом того, что пластическое течение локализуется в приконтактной зоне, а основная масса материала деформируется упруго,

- радиус вдавливаемого сферического индентора – 10 см,

- размеры участка полупространства достаточно велики, чтобы полагать на его конечных границах напряжения и перемещения существенно затухшими (глубина – 0.5 м, радиус – 1 м).

Применялись простейшие плоские конечные элементы PLANE42 (с опцией осесимметричного напряженного состояния), а также парные контактные элементы TARGE169 и CONTA171 [4], причем «целевые» элементы TARGE169 образуют неподатливый контур. Контактная задача решалась уравниванием системы на каждом шаге нагружения с определением удовлетворительных усилий взаимодействия в безразмерном контактном слое методом множителей Лагранжа.

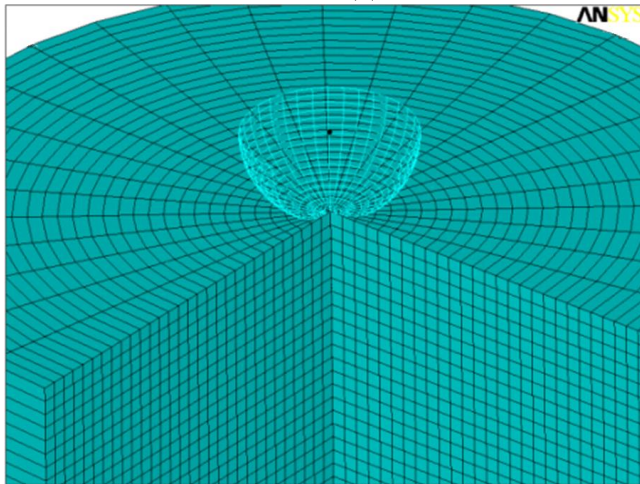


Рис. 2.2.1 Конечно-элементная модель индентора и полупространства (осесимметричная задача)

Нагрузка прикладывалась как кинематическое вертикальное смещение центра полусферы, при этом силовое воздействие является реактивным и связано с текущей конфигурацией модели. Добавка активной силовой составляющей в нагрузку ухудшает сходимость решения, не изменяя практически кинематику и НДС контактной зоны. Максимальная величина задаваемого смещения – 45 мм, т.е. практически половина радиуса

индентора. Запас по нагрузке брался с расчетом на обнаружение на кривых перемещений характерных изменений кривизны, соответствующих наступлению предельного состояния. Рассматривалось несколько вариантов плотности сетки, а также различная дискретизация шагов по нагрузке. Получены довольно устойчивые решения на малом числе инкрементов (до 100). Так как традиционной проблемой численного контактного решения для сферических и цилиндрических поверхностей является наличие первичного контакта в единственном узле и, как следствие – невозможность уравнивания вертикальной узловой реакции тензором напряжений, использовался прием *искусственного первоначального перекрытия* контактных поверхностей, чтобы обеспечить вхождение в контакт на начальных стадиях сразу нескольких узлов сетки. Размер необходимого перекрытия составил 0.001 от радиуса сферы. На Рис. 2.2.2 и Рис. 2.2.3 представлены поля параметров НДС контактной системы.

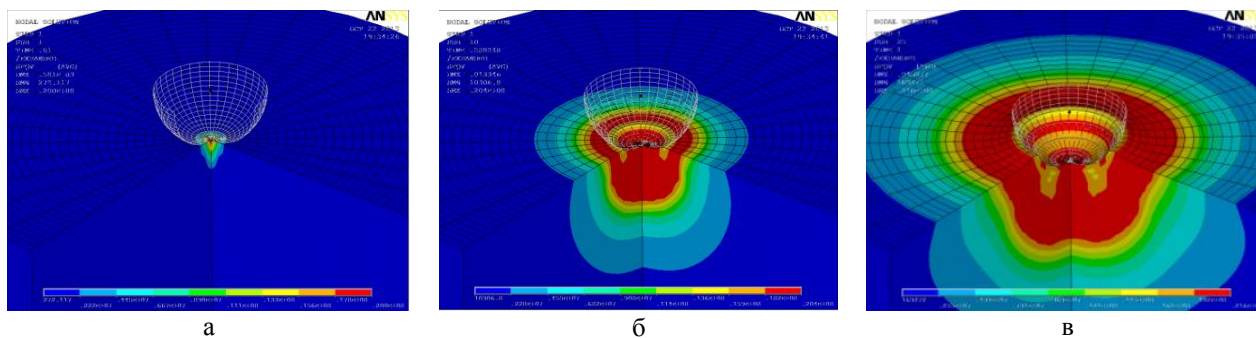


Рис. 2.2.2 Стадии статического внедрения индентора в полупространство (поле напряжений Мизеса), а – начальная стадия, б – стадия появления пластических деформаций, в – конечная стадия

Как видно из Рис. 2.2.3, затухание возмущений параметров деформированного состояния на границе расчетной области происходит практически полностью (показано сечение осесимметричной модели).

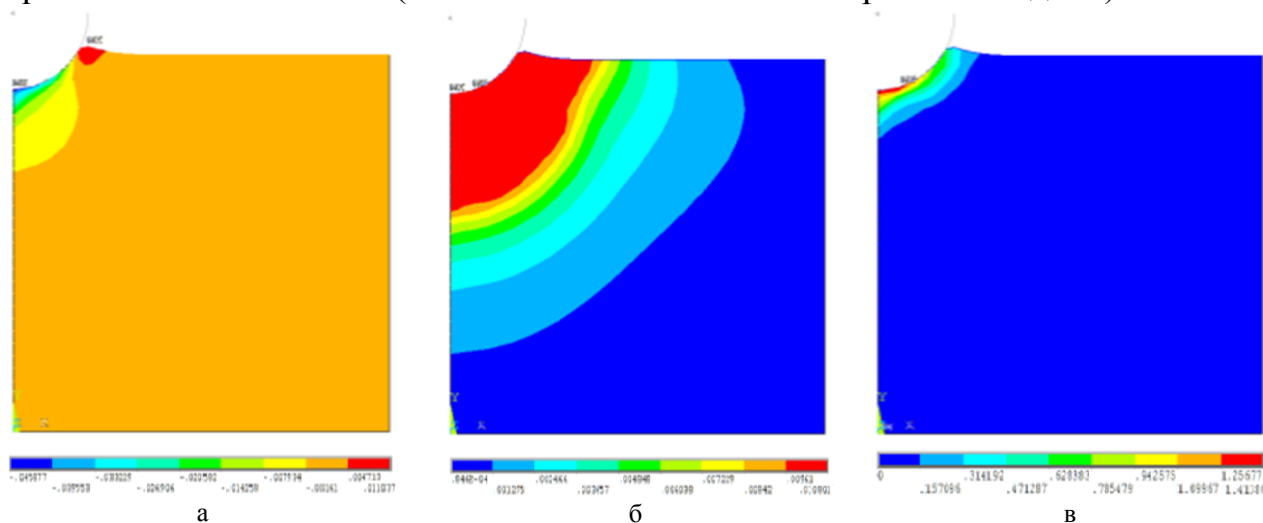


Рис. 2.2.3 Поля параметров деформированного состояния в финальной стадии, а – вертикальные перемещения, б – упругие деформации, в – пластические деформации

По оси абсцисс на этих графиках откладывается доля максимального внешнего возмущения (в данном случае – заданного смещения сферы как жесткого целого), 1 на оси аргументов означает 100% приложенной нагрузки.

Из кривых перемещений (и на крупной, и на мелкой сетке, Рис. 2.2.4 и Рис. 2.2.5) видно, что предельное состояние системы в целом наступает при заглублении индентора примерно на 30% от максимума заданной нагрузки, т.е. примерно на 15 мм, или примерно на 16% от радиуса сферы. При этом начинается резкий охват пластичностью значительной области под поверхностью индентора и «выпучивание» среды на границе контактной и свободной поверхности. На Рис. 2.2.5, б показано отдельно поведение точки среды в этой зоне.

Из сравнения результатов на разных сетках установлено, что в точках максимального давления (на оси модели) имеет место автомодельность (с ростом плотности сетки уровень напряжений растет). Однако интегрально предельное состояние оценивается на разных сетках примерно одинаково.

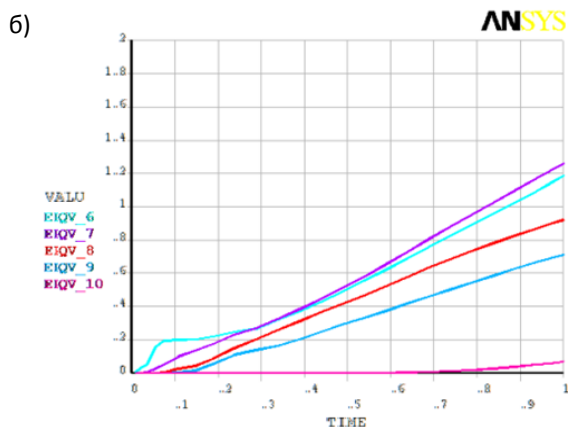
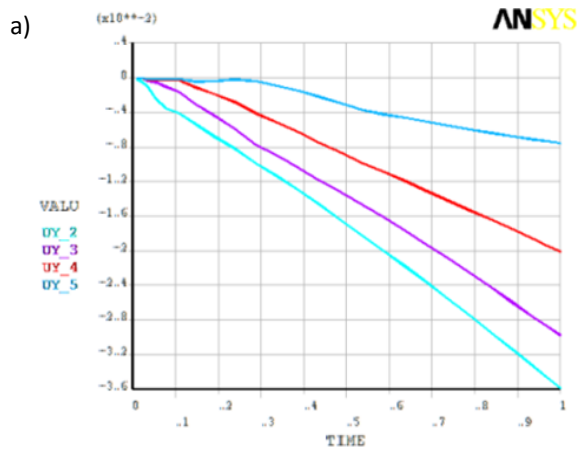


Рис. 2.2.4 Кривые деформирования, полученные на крупной сетке, а) вертикальные перемещения в узлах приконтактной зоны, б) пластические деформации

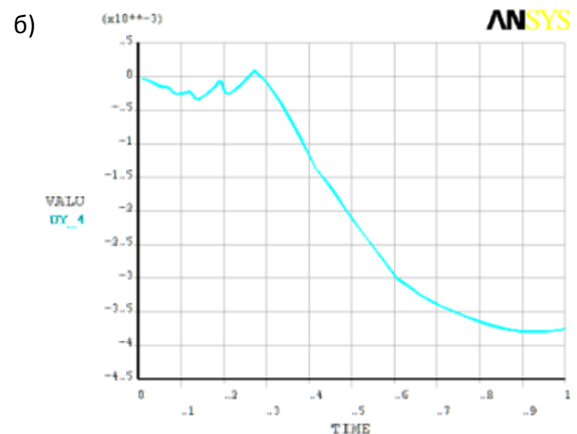
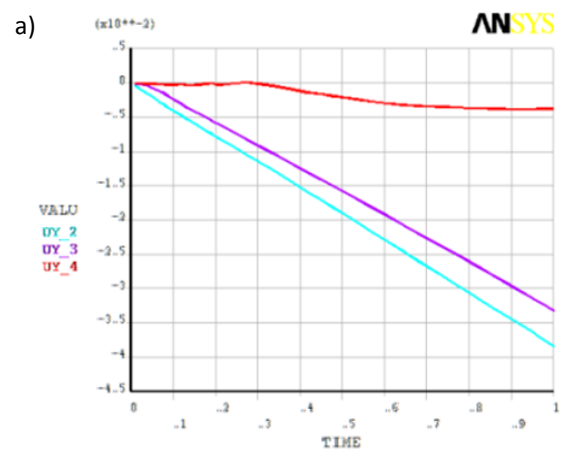


Рис. 2.2.5 Кривые деформирования, полученные на измельченной сетке, а) вертикальные перемещения в узлах приконтактной зоны, б) смещение узла в зоне выпучивания

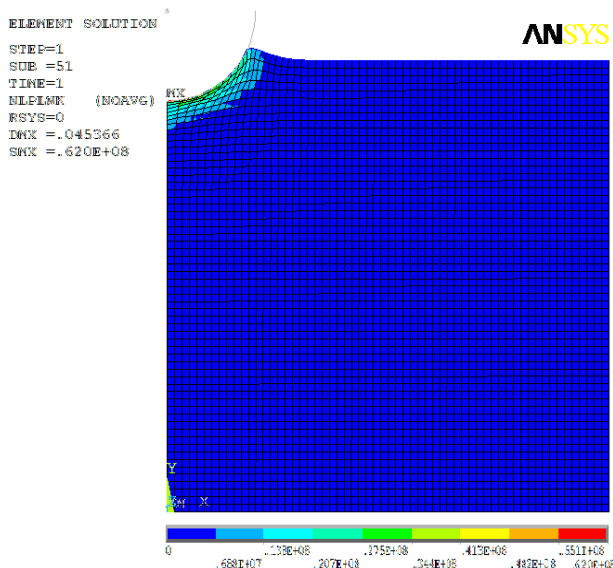


Рис. 2.2.6 Поле удельной пластической работы в модели

внедрении дает хорошее согласование с имеющимися решениями других авторов, описанными в п. 2.1.

Конечно-элементная модель позволяет оценить уровень энергии, поглощаемой пластическим деформированием. Полная подводимая работа может быть оценена как произведение суммарной вертикальной реакции в опорных границах расчетной области на задаваемое смещение, а пластическая работа в «текущих» элементах – путем поэлементного подсчета. На Рис. 2.2.6 представлено поле удельной (отнесенной к объему элемента) пластической работы.

В целом статическое решение упругопластической задачи о

2.3 Моделирование динамического внедрения сферы с помощью неявных и явных схем

С учетом особенностей отработанной в статическом решении контактной модели, моделировалось падение сферы в пластичную среду, имитирующую в первом приближении морской лед. В работе [5] опубликованы результаты серии экспериментов по проекту ARCDREV, выполненной весной 1998 г. Данные этих экспериментов легли в основу т.н. *модифицированной гидродинамической модели* (МГДМ) [6, 61].

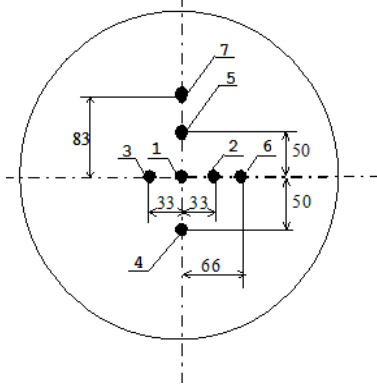


Рис. 2.3.1 Размещение регистраторов контактного давления в окрестности полюса сферы по [5]

Для проекта ARCDREV [32, 34] в ЦНИИ им.акад. А.Н.Крылова была [61] спроектирована и изготовлена экспериментальная установка для проведения DBT в полевых условиях. Сбрасываемые полусферы были оснащены 7-ю датчиками давлений и акселерометром. Было выполнено более 100 бросков. Варьировались: радиус сферы, вес сферы, высота сбрасывания. Для каждого броска на основании сопоставления теоретических, согласно МГДМ, и экспериментальных величин максимальных

давлений (p_m), ускорения (a_m) и внедрения (ξ_m), а также полного времени удара (T_t).

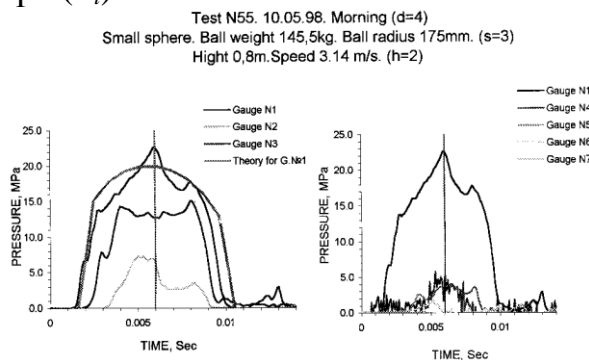


Рис. 2.3.2 Опубликованные результаты тестов DBT (осциллограммы контактных давлений в полюсе модельной сферы и в отдалении)

Полные данные (осциллограммы) опубликованы в открытой печати [5] лишь для одного типоразмера индентора: массой 145 кг, радиусом 17.5 см, сбрасываемого с высоты 80 см. Они представлены на Рис. 2.3.2 и были оцифрованы с помощью сканера. Именно этот индентор и моделировался по МКЭ. Основными параметрами, которые можно сверять с результатами на

виртуальных моделях, являются, как видно, нестационарные контактные давления в полюсе сферы и в точках, несколько удаленных от него (Рис. 2.3.1), а также параметры остаточной вмятины – глубина и периферийный диаметр.

Теоретические основы решения динамической задачи по МКЭ (неявная схема). После выполнения процедуры пространственной дискретизации задачи динамики конструкции получаем систему дифференциальных уравнений:

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{P(t)\}, \quad (2.3.1)$$

при известных начальных условиях

$$t = 0 : \{q\} = \{q_0\}, \{\dot{q}\} = \{\dot{q}_0\}, \quad (2.3.2)$$

где $[M], [C], [K]$ – соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости; $\{q(t)\}, \{\dot{q}(t)\}, \{\ddot{q}(t)\}$ – соответственно вектора перемещений, скоростей и ускорений; $\{P(t)\}$ – вектор внешних сил. Если возмущающая сила в основном возбуждает низкочастотные формы упругих колебаний системы, то решение системы уравнений (2.3.1) проще всего получить путем использования метода главных координат. Однако в случае систем с большим числом степеней свободы, волновых или нелинейных систем использование такого подхода оказывается весьма трудоёмким. В этом случае целесообразно прибегнуть к использованию шаговых методов прямого интегрирования уравнения (2.3.1).

Основным принципом для всех конечно-разностных (или же шаговых) процедур является замена производных от перемещений в уравнении линейными комбинациями (конечными разностями) непосредственно перемещений в различные моменты времени

Известно, что некоторые шаговые операторы интегрирования устойчивы при любом выборе шага интегрирования Δt (абсолютно устойчивые операторы) [171]. Другие, так называемые условно устойчивые операторы, устойчивы до определенных значений Δt . Рациональный выбор шаговой процедуры связан с анализом ее устойчивости по отношению к изменению параметров интегрирования [169]. Под устойчивостью процедуры понимается ограниченность последовательности решений на каждом шаге по времени для произвольного рассматриваемого временного интервала.

В современных расчетных конечно-элементных пакетах наибольшую популярность приобрел метод обобщенных ускорений или метод Ньюмарка [171]. Этот метод может быть определен как обобщение метода линейных ускорений, в котором ускорения на каждом шаге по времени изменяются по линейному закону.

Основные соотношения в этой процедуре базируются на зависимостях, предложенных Ньюмарком:

$$\begin{aligned} \{\dot{q}(t_k + \tau)\} &= \{\dot{q}(t_k)\} + \tau\{\ddot{q}(t_k)\} + \delta\tau^2\{\dddot{q}(t_k)\}, \\ \{q(t_k + \tau)\} &= \{q(t_k)\} + \tau\{\dot{q}(t_k)\} + \frac{\tau^2}{2}\{\ddot{q}(t_k)\} + \alpha\tau^3\{\dddot{q}(t_k)\}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Заметим, что записанные выражения полностью совпадают с разложением в точке t_k в ряд Тейлора в окрестности τ . Этот ряд мы можем получить, если принять в (2.3.3) $\alpha = 1/6, \delta = 1/2$. И еще одно дополнительное замечание: второе выражение (2.3.3) содержит слагаемое (последнее в правой части) 3-го порядка малости. Ясно, что этот член не может внести значительного вклада в результат численного расчета.

Для численного аналога третьей производной при шаге аргумента Δt может быть использована формула обычной «правой» разности (первого порядка точности):

$$\{\ddot{q}(t_k)\} = \frac{1}{\Delta t} (\{\ddot{q}(t_k + \Delta t)\} - \{\ddot{q}(t_k)\}). \quad (2.3.4)$$

Подставляя (2.5.4.) в (2.5.3.) при $\tau = \Delta t$, получим:

$$\begin{aligned} \{\dot{q}\}_{k+1} &= \{\dot{q}\}_k + [(1 - \delta)\{\ddot{q}\}_k + \delta\{\ddot{q}\}_{k+1}]\Delta t, \\ \{q\}_{k+1} &= \{q\}_k + \{\dot{q}\}_k \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{q}\}_k + \alpha \{\ddot{q}\}_{k+1} \right] \Delta t^2, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Из 2-го уравнения (2.3.5) можем получить $\{\ddot{q}\}_{k+1}$:

$$\{\ddot{q}\}_{k+1} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} [\{q\}_{k+1} - \{q\}_k] - \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{q}\}_k + \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) \{\ddot{q}\}_k. \quad (2.3.6)$$

Подстановка последнего равенства в первое уравнение (2.3.5) дает

$$\{\dot{q}\}_{k+1} = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} [\{q\}_{k+1} - \{q\}_k] + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \{\dot{q}\}_k + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \{\ddot{q}\}_k \Delta t. \quad (2.3.7)$$

В уравнении движения (2.3.1), записанного для момента времени t_{k+1} , исключим $\{\ddot{q}\}_{k+1}$ и $\{\dot{q}\}_{k+1}$ с использованием зависимостей (2.3.6) и (2.3.7) соответственно.

В итоге шаговый оператор метода Ньюмарка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [M] + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} [C] + [K] \right) \{q\}_{k+1} &= \\ &= \{P\}_{k+1} + \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} [M] + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} [C] \right) \{q\}_k + \frac{1}{\alpha \Delta t} [M] - \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) [C] \{\dot{q}\}_k - \\ &- \left(\left(1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) [M] + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) [C] \right) \{\ddot{q}\}_k + O(\Delta t)^2, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

где α и δ – параметры интегрирования. Их численные значения, найденные из условия получения наименьшей погрешности шаговой схемы, равны $\alpha = 0.25$, $\delta = 0.5$. При этих значениях параметров данная схема будет обладать абсолютной устойчивостью.

Для производства первого временного шага ($k = 0$) из начальных условий должны быть известны величины начального перемещения $\{q_0\}$ и начальной скорости $\{\dot{q}_0\}$. Значение ускорения $\{\ddot{q}_0\}$ определяется непосредственно из уравнения (2.3.1) при $t = 0$.

Теоретические основы решения динамической задачи по МКЭ (явная схема). Исходную матрицу масс всей системы (2.3.1) M , которая обычно является согласованной и разреженной, можно аппроксимировать диагональной матрицей («расщепленной»). Обращение такой матрицы не требует больших вычислительных затрат и реализуется достаточно просто. Объемы вычислений на одной итерации по времени могут быть снижены путем замены процедуры триангуляции матриц с решениями при переменных уравновешивающих нагрузках на матричные умножения. Явный метод ориентирован на использование малых шагов по времени и мелкую разбивку на конечные элементы. Это необходимо для достоверной аппроксимации заданного распределения массовых характеристик системы с помощью диагональной матрицы [36].

Достоинством явных методов является возможность за счет малого шага по времени выявить все особенности динамического поведения системы. Поэтому явные методы применяются преимущественно для анализа *быстропротекающих* процессов.

При явном интегрировании применяется метод центральных разностей, когда ускорение полагается постоянным в пределах шага. Для трех

последовательных моментов времени принимается квадратичная аппроксимация вектора перемещений.

Рассмотрим особенности метода центральных разностей применительно к системе уравнений (2.3.1) и начальным условиям (2.3.2).

Имеем три соседних момента времени $t_{k-1} = t - \Delta t$, $t_k = t$, $t_{k+1} = t + \Delta t$, ($\{q\}_t = \{q\}_k$, $\{q\}_{t-\Delta t} = \{q\}_{k-1}$, $\{q\}_{t+\Delta t} = \{q\}_{k+1}$). Распишем $\{q\}_{t-\Delta t}$, $\{q\}_{t+\Delta t}$ в виде ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} \{q\}_{t+\Delta t} &= \{q\}_t + \{\dot{q}\}_t \Delta t + \{\ddot{q}\}_t \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3), \\ \{q\}_{t-\Delta t} &= \{q\}_t - \{\dot{q}\}_t \Delta t + \{\ddot{q}\}_t \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Рассмотрим сумму и разность первого и второго уравнения (2.3.9):

$$\begin{aligned} \{q\}_{k+1} + \{q\}_{k-1} &= 2\{q\}_k + \{\ddot{q}\}_k \Delta t^2 + O(\Delta t^3), \\ \{q\}_{k+1} - \{q\}_{k-1} &= 2\{\dot{q}\}_k \Delta t + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Из (2.3.10), пренебрегая слагаемыми порядка малости Δt^3 , получаем

$$\begin{aligned} \{\ddot{q}\}_k &= \frac{\{q\}_{k+1} - 2\{q\}_k + \{q\}_{k-1}}{\Delta t^2}, \\ \{\dot{q}\}_k &= \frac{\{q\}_{k+1} - \{q\}_{k-1}}{2\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Таким образом, мы выразили ускорение и скорость в конкретный момент времени через перемещения в этот же и соседние моменты времени. Подставим теперь полученные выражения в уравнение (2.3.1), записанное для t_k :

$$[M]\{\ddot{q}\}_k + [C]\{\dot{q}\}_k + [K]\{q\}_k = \{P(t_k)\}, \quad (2.3.12)$$

$$\frac{[M]}{\Delta t^2} (\{q\}_{k+1} - 2\{q\}_k + \{q\}_{k-1}) + \frac{[C]}{2\Delta t} (\{q\}_{k+1} - \{q\}_{k-1}) + [K]\{q\}_k = \{P(t_k)\}, \quad (2.3.13)$$

Соберем множители при $\{q\}_{k-1}$, $\{q\}_k$, $\{q\}_{k+1}$:

$$\left\langle \frac{[M]}{\Delta t^2} + \frac{[C]}{2\Delta t} \right\rangle \{q\}_{k+1} + \left\langle -\frac{2[M]}{\Delta t^2} + [K] \right\rangle \{q\}_k + \left\langle \frac{[M]}{\Delta t^2} - \frac{[C]}{2\Delta t} \right\rangle \{q\}_{k-1} = \{P(t_k)\}, \Rightarrow \quad (2.3.14)$$

$$\left\langle \frac{[M]}{\Delta t^2} + \frac{[C]}{2\Delta t} \right\rangle \{q\}_{k+1} = \{P(t_k)\} - \left\langle -\frac{2[M]}{\Delta t^2} + [K] \right\rangle \{q\}_k - \left\langle \frac{[M]}{\Delta t^2} - \frac{[C]}{2\Delta t} \right\rangle \{q\}_{k-1}, \quad (2.3.15)$$

Уравнение (2.3.15) является рабочим уравнением метода центральных разностей.

Таким образом, при известных перемещениях конструкции на двух шагах могут быть определены перемещения в новый момент времени и так далее. При этом перемещения в нулевой и первый моменты времени легко определяются при известных начальных перемещениях и скоростях: $\{q_0\}$ и $\{\dot{q}_0\}$:

$$\begin{aligned} \{q\}_0 &= \{q_0\}, \\ \{q\}_1 &= \{q_0\} + \{\dot{q}_0\} \Delta t. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Для решения системы (2.3.15) относительно $\{q\}_{k+1}$ на каждом шаге необходимо обращать матрицу $\left\langle \frac{[M]}{\Delta t^2} + \frac{[C]}{2\Delta t} \right\rangle$. В том случае, когда шаг по времени принимается постоянным, такое обращение можно произвести лишь один раз, что значительно снизит вычислительные затраты.

Вместо центральных разностей можно использовать и односторонние. Так, рассмотрим левую разность для определения первой производной.

$$\{\dot{q}\}_k = \frac{\{q\}_k - \{q\}_{k-1}}{\Delta t}. \quad (2.3.17)$$

Тогда уравнение (2.3.1) в момент t_k запишется

$$\frac{[M]}{\Delta t^2} (\{q\}_{k+1} - 2\{q\}_k + \{q\}_{k-1}) + \frac{[C]}{\Delta t} (\{q\}_k - \{q\}_{k-1}) + [K]\{q\}_k = \{P(t_k)\}, \quad (2.3.18)$$

а уравнение относительно $\{q\}_{k+1}$ примет вид:

$$\left\langle \frac{[M]}{\Delta t^2} \right\rangle \{q\}_{k+1} = \{P(t_k)\} - \left\langle -\frac{2[M]}{\Delta t^2} + \frac{[C]}{\Delta t} + [K] \right\rangle \{q\}_k - \left\langle \frac{[M]}{\Delta t^2} - \frac{[C]}{\Delta t} \right\rangle \{q\}_{k-1}, \quad (2.3.19)$$

Две важных проблемы конечно-разностных процедур – вопросы точности и устойчивости. Вопросы точности связаны с наличием ошибок в связи с приближенным представлением ускорений и скоростей. В случае устойчивой процедуры точность численного решения в первую очередь зависит от отношения $\frac{\Delta t}{T}$, где Δt – шаг по времени, принятый при расчете и T – период основной гармонической составляющей внешней нагрузки. Проведение расчетов в случае действия высокочастотных нагрузок или использование шаговых процедур с низкой численной устойчивостью требуют ориентироваться на высокочастотные (с малыми периодами) колебания конструкции и, следовательно, значительно уменьшать Δt , что в свою очередь приводит к существенному повышению трудоемкости.

Говоря о проблеме устойчивости, следует четко разделять устойчивость (неустойчивость) непосредственно системы дифференциальных уравнений и устойчивость (неустойчивость) конечно-разностной процедуры. Неустойчивость решения системы дифференциальных уравнений связана с вполне конкретными физическими процессами, имеющими место при рассмотрении геометрически и физически нелинейных задач (например, при учете больших перемещений и пластичности) или же в задачах устойчивости конструкций.

Результаты решения задач о динамическом внедрении. Расчет производился для полусферического индентора массой 145.5 кг и радиусом 17.5 см, свободно падавшего на ровную поверхность пластического полупространства с высоты 80 см, приобретая к моменту касания скорость около 3.14 м/с. Использовались: динамический процессор программы ANSYS и высоконелинейный динамический решатель LS-DYNA [36]. Принципиальная разница расчетных алгоритмов состоит в использовании неявной (ANSYS) и явной (LS-DYNA) схем интегрирования уравнений динамики. Также несколько отличаются алгоритмы учета контакта.

Задача решалась в двумерной (осесимметричной) постановке, в обоих случаях контактное трение полагалось нулевым, упрочнение среды – малым, критерий текучести формулировался по Мизесу. Динамические свойства среды определялись плотностью плавучего льда (900 кг/м^3) и индентора. Конструкция индентора, согласно [5] – полая сфера, частично заполненная металлом (сталь), частично использующая пространство для размещения датчиков и креплений. Поэтому использовалась эффективная (средняя)

плотность, определенная массой и радиусом модели. Расчет по LS-DYNA велся без учета реальной упругости сферы (полагалась абсолютно жесткой), по ANSYS – с учетом (модели абсолютно жесткого массивного тела в ANSYS нет, возможна только жесткая граница). Искусственное повышение жесткости, например, заданием модуля Юнга на несколько порядков выше, приводит к существенному относительному расхождению коэффициентов матрицы жесткости всей модели и, как следствие – к ухудшению сходимости.

Основными конечными элементами решения осесимметричной задачи были четырехузловые плоские элементы PLANE42 (ANSYS) и PLANE162 (LS-DYNA). Узловые степени свободы «явных» КЭ представляют собой скорости.

Начальными условиями для расчета по LS-DYNA были начальная вертикальная координата и нулевая начальная скорость. При расчете в ANSYS баллистический участок траектории не рассматривался, начальная скорость 3.14 м/с задавалась для модели с искусственным первичным контактом, поэтому временные оси двух расчетных процессов синхронизировались с учетом времени падения. Общее время нестационарного расчета бралось равным 0.01 с, что примерно соответствовало времени падения до 0 контактных давлений в эксперименте (Рис. 2.3.2). Как видно, экспериментальная кривая записана с некоторым отставанием (отсутствует часть временной оси слева, соответствующая начальному моменту падения; начало контакта должно совпадать на всех 3-х графиках). Анализа кривых, в том числе – по времени контакта, это не затрудняет. Модуль Юнга для ледовой среды, как и в статическом расчете, брался равным 2 ГПа.

Упругие характеристики льда, во-первых, при фиксированной температуре, плотности и солености слабо зависят от скорости нагружения. Во-вторых, искусственное снижение модуля Юнга модели приводит, очевидно, к переводу большей доли кинетической энергии в упругие, а не в пластические деформации. Искусственное повышение модуля упругости приводит к достижению напряжений предела текучести при более низких уровнях деформации. В обоих случаях остаточная «вмятина» уменьшается. Таким образом, использовать упругие параметры как варьируемые в задаче идентификации классической среды – нецелесообразно.

В итоге единственным реологическим параметром расчетной модели, варьированием которого можно пытаться сблизить результаты модели и природы, являлся *динамический предел текучести* материала. В металлах известен эффект повышения предела текучести с ростом скорости деформаций («динамический наклеп») [64]. Для льда характерна та же тенденция, если отождествить предел прочности с пределом текучести [167]. Однако первые динамические расчеты даже с использованием предела прочности льда при статическом нагружении, как предела текучести [167], показали, что результаты совершенно несопоставимы с экспериментом. Если учесть, впрочем, мелкодисперсное разрушение льда в пристеночном слое, то

средняя величина предела текучести этого слоя и неразрушенного массива льда, очевидно, становится существенно ниже.

В силу сказанного выше была произведена серия расчетов в диапазоне изменения $\sigma_T = 2.5 \dots 7.5$ МПа. На Рис. 2.3.3-Рис. 2.3.6 представлены в сравнении оцифрованные результаты эксперимента, расчета по неявной схеме (ANSYS) и по явной схеме (LS-DYNA) при $\sigma_T = 5$ МПа.

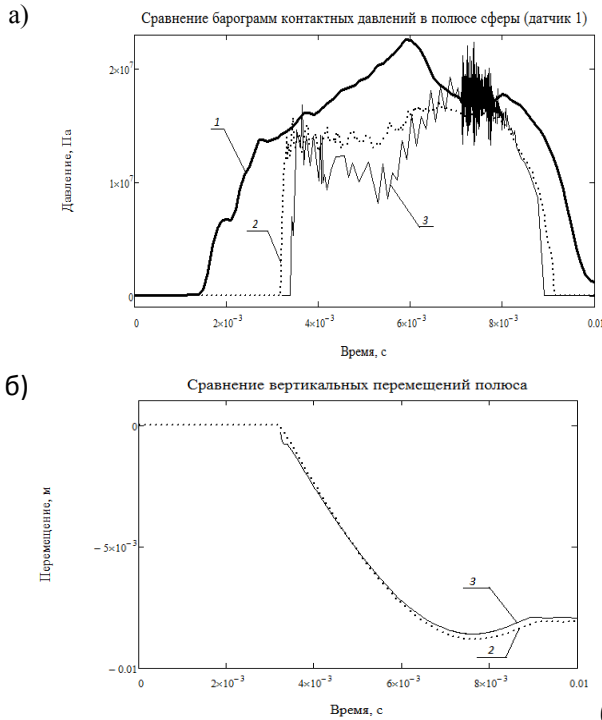


Рис. 2.3.3 Зависимость от времени при $\sigma_T = 5$ МПа (1 – эксперимент, 2 – расчет по неявной схеме, 3 – расчет по явной схеме):
 а) давления в полюсе (точка 1, рис.8)
 б) вертикального перемещения среды в полюсе



Рис. 2.3.5 Стадия максимального внедрения при расчетах по МКЭ (пунктир). Сплошная линия – результат DBT.

На Рис. 2.3.7 представлены стадии пластического динамического внедрения и отскока сферы за счет накопленной в упругой части среды потенциальной энергии. Достигнутый максимальный уровень эквивалентных пластических деформаций составил 35%.

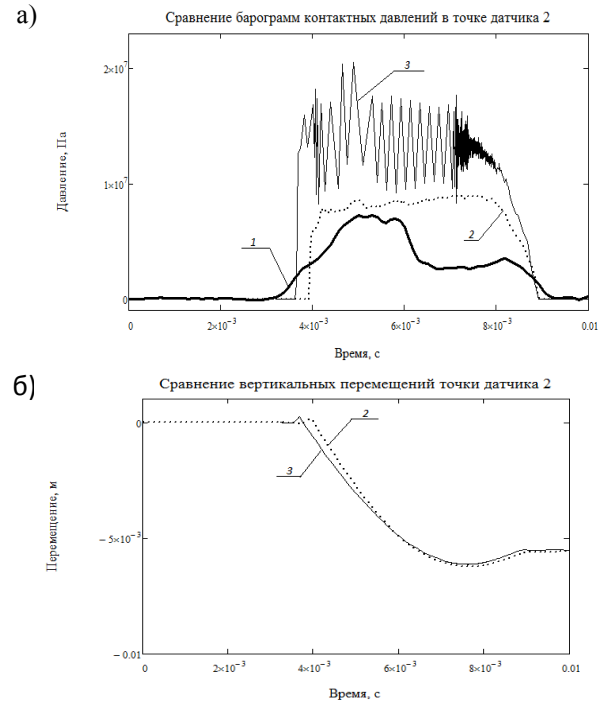


Рис. 2.3.4 Зависимость от времени при $\sigma_T = 5$ МПа (1 – эксперимент, 2 – расчет по неявной схеме, 3 – расчет по явной схеме):
 а) давления в точке 2
 б) вертикального перемещения среды в точке датчика 2

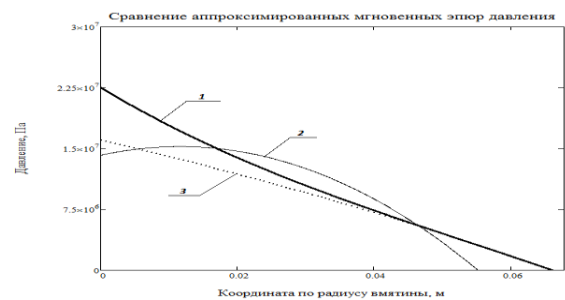


Рис. 2.3.6 Сравнение аппроксимированных регрессионными кривыми мгновенных эпюр контактного давления при $t=6$ мс (1 – эксперимент, 2 – расчет по неявной схеме, 3 – расчет по явной схеме)

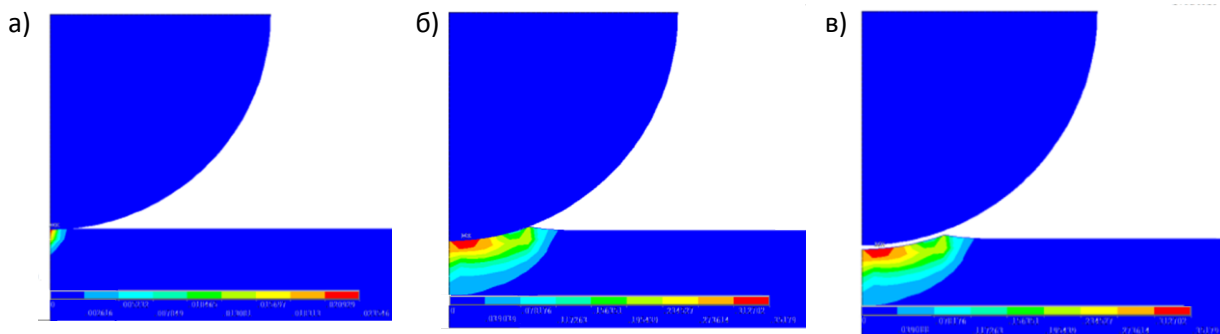


Рис. 2.3.7 Поле пластических деформаций по Мизесу в стадиях соударения (неявная схема)
 а) начальный контакт при скорости 3.14 м/с; б) внедрение в момент времени 0.006 с на синхронизированной оси; в) отскок на финальных шагах по времени

Анализируя результаты, можно отметить следующие факты.

1) Наилучшее согласование эксперимента с расчетными моделями наблюдается при выборе $\sigma_T = 5$ МПа. *Повышение* предела текучести приводит к появлению высокочастотных колебаний давления и росту их амплитуды, а также к сокращению времени контакта. *Снижение* предела текучести существенно снижает уровень контактных давлений, а также увеличивает время контакта по сравнению с экспериментом.

2) Размер расчетной области играет более существенную роль по сравнению со статической задачей за счет волновых эффектов, поэтому размеры области приходится увеличивать в динамическом расчете по сравнению со статическим расчетом.

3) При $\sigma_T = 5$ МПа выполняется достаточно хорошее совпадение с экспериментом по характеру циклограммы и по амплитуде контактных давлений (расхождение в пределах 10%), правда, не в одинаковые моменты времени и за счет упругих осцилляций.

4) Время контакта точек сферы со средой в расчетных моделях на 20-30% меньше реального, однако, как сказано выше, попытка увеличить его за счет снижения σ_T приводит к существенному падению давления.

5) Размеры «вмятины» в расчетных моделях существенно ниже экспериментальных, расхождение составляет до 40% по глубине внедрения. Несколько выше размеры «вмятины» в расчете, выполненном по явной схеме, за счет более эффективного учета нелинейности и отсутствия потерь на упругие колебания индентора.

6) Отмечаемый в [61] «пиковый» характер эпюры контактного давления при динамическом воздействии имеет место в решении по явной схеме (Рис. 2.3.6) и практически отсутствует при решении по неявной схеме. Однако выраженность «пика» существенно слабее, чем в экспериментальных исследованиях.

2.4. Выводы

По результатам 2-й Главы можно сделать ряд выводов о диапазонах применимости построенных моделей.

1. Традиционные вычислительные модели на базе конечных элементов классической теории упругости, во избежание появления не наблюдаемых в эксперименте эффектов, требуют применения высоконелинейного решателя на основе явной схемы, мелкой сетки и очень ресурсоемки.

2. Моделирование сред со сложной реологией как пластичных изотропных сред классической теории Коши ограничено низкой подвижностью частиц и невозможностью перевода должной части энергии соударения в пластическую работу. Допустимо использование таких моделей для оценок внешних локальных нагрузок от соударений со льдом или грунтом с учетом *ошибки в опасную сторону*.

3. Реальное объемное растрескивание льда вызывает относительное вращательное движение частиц и появление пористости. Одним из путей получения более сопоставимых с действительностью вычислительных моделей представляется переход к новой модели сплошной среды, а именно – ротационно-подвижному моментному континууму.

Глава 3 Разработка и тестирование конечных элементов для решения плоской задачи несимметричной теории упругости

Рассматриваемые модели среды являются разновидностями континуума, равновесие частиц которого определяется с учетом интенсивностей внутренних моментных усилий (Рис. 3.1.1.). Соответственно, кинематика среды в плоской постановке допускает не только поступательные перемещения, но и местные искривления континуума. Предполагается, что такие модели среды способны учесть наблюдаемые в эксперименте, но не отражаемые классическими моделями эффекты, в частности, стабилизацию возмущений при локальных нагружениях, при несоблюдении закона парности касательных напряжений в силовых граничных условиях, ротационное поглощение энергии в средах с вихревыми свойствами, пористых средах и в сыпучих средах с возможностью относительного качения частиц. Ряд таких задач успешно решен аналитически, однако далеко не всегда имеется возможность опытным путем оценить дополнительные параметры реологии новой среды. В этой связи предлагается использовать МКЭ не столько как средство получения новых решений, сколько как средство численного эксперимента для выработки условий эксперимента натурного.

3.1 Прямоугольный конечный элемент моментной теории упругости для варианта стесненного континуума

Основные положения и уравнения МТУ в варианте стесненного континуума. Возможны различные частные случаи стесненного несимметричного континуума с локальными кривизнами и без них [152, 65, 75], допускающие наличие и исключение из реологической плоской изотропной модели изгибно-крутильного модуля.

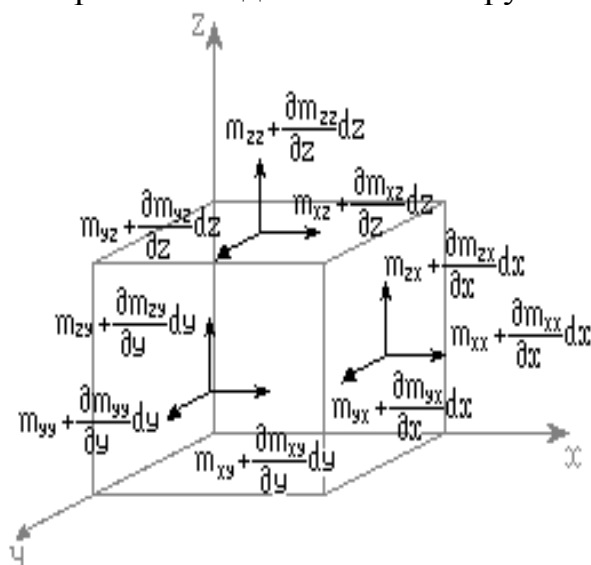


Рис. 3.1.1 Моментные напряжения

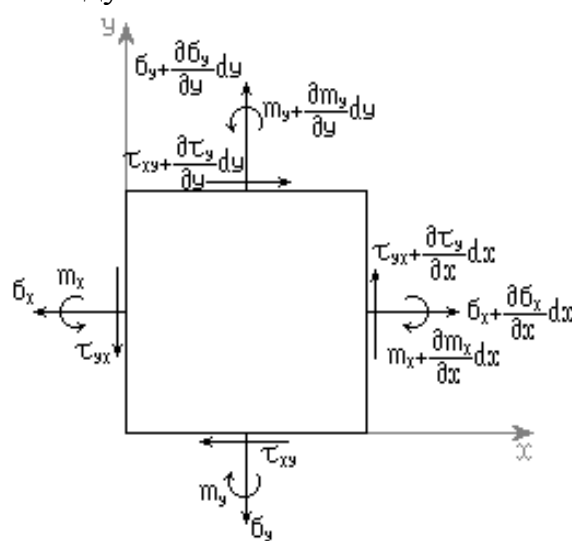


Рис. 3.1.2 Напряжения в плоской задаче

Как наиболее часто встречающаяся, вначале была выбрана модель «псевдо-Коссера».

Приведем без вывода систему уравнений плоской задачи (Рис. 3.1.2) такой моментной теории упругости [65]. Уравнения равновесия дополняются условием уравнивания непарных касательных напряжений за счет моментных интенсивностей:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (3.1.1)$$

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}. \quad (3.1.2)$$

Геометрических уравнений при такой постановке будет не три, а шесть, с учетом введения кривизн граней элементарного параллелепипеда:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \theta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right); & \kappa_x &= \frac{\partial \theta}{\partial x}; & \kappa_y &= \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.3)$$

где $\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}$ – суммарная сдвиговая деформация, κ_x и κ_y – кривизны граней, параллельных осям координат, θ – так называемый (в обычной теории упругости) жесткий поворот элемента.

Обобщенный закон Гука связывает как нормальные и касательные, так и моментные напряжения, для чего вводятся дополнительные физические константы (т.н. изгибно-крутильные модули B^*):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x] \end{aligned} \right\} \quad (3.1.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2G} (\tau_{xy} + \tau_{yx}), \quad (3.1.5)$$

$$\kappa_x = \frac{m_x}{B^*}; \quad \kappa_y = \frac{m_y}{B^*}, \quad (3.1.6)$$

где, в силу несимметричности тензора напряжений, суммарная сдвиговая деформация связывается с суммой касательных напряжений, а также можно заменить изгибно-крутильный модуль другой физической константой:

$$l^2 = \frac{B^*}{4G}. \quad (3.1.7)$$

Условия совместности деформаций Сен-Венана преобразуются к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \kappa_x}{\partial y} &= \frac{\partial \kappa_y}{\partial x} \\ \kappa_x &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}; & \kappa_y &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \end{aligned} \right\}. \quad (3.1.8)$$

Подобно функциям напряжений в безмоментной теории упругости (сведение задачи к решению в напряжениях Бельтрами-Митчелла), таковые

вводятся и для моментной теории, но вместо одной функции для плоской задачи здесь их будет две [65, 216]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}; & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; & \tau_{yx} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; \\ m_x &= \frac{\partial \psi}{\partial x}; & m_y &= \frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.9)$$

При этом функции напряжений должны удовлетворять уравнениям:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (3.1.10)$$

$$\nabla^2 \psi - l^2 \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0. \quad (3.1.11)$$

Решение задачи (3.1.10)-(3.1.11) при заданных граничных условиях осуществляется, например, в специальных функциях для ограниченного набора задач [216, 156].

Особенностью конечных элементов-солидов для МТУ является наличие вращательных степеней свободы θ_z , в варианте стесненной среды – $\theta_z = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right)$. Фактически эти степени должны отражать в узлах элемента жесткий поворот элементарного параллелепипеда из уравнений (3.1.3). Использовать вращательную степень свободы θ_z (с фиктивной жесткостью) впервые было предложено в [104], чтобы избежать плохой обусловленности для расчетных моделей, имеющих сходящиеся в узле треугольные КЭ, близкие к компланарному расположению. В работах [217] для треугольного КЭ и в [185] – для прямоугольного – выведены матрицы жесткости (МЖ) с реальным включением угла поворота θ_z в число обобщенных степеней свободы, что повышает степень аппроксимирующих поле перемещений полиномов. Полученные КЭ являются *несовместными*, но, согласно предложенному в [192] «методу кусочного тестирования», решение при измельчении сетки КЭ сходится к точному. Дальнейшее развитие КЭ с вращательными степенями свободы получили для расчета оболочек с большими перемещениями. Указанные КЭ имеют лучшую согласованность изгибных перемещений с перемещениями срединной плоскости, что улучшает и сходимость результатов при измельчении сетки КЭ. Эти вопросы подробно рассмотрены в работе [184]. Заметим, что речь в указанных работах еще не шла о моментной теории.

В работах А.З. Локшина, А.И. Фрумена и В.А. Постнова [217, 132, 218], рассмотрено построение уже действительно *моментного* элемента с 9 степенями свободы в 3-х узлах. Можно здесь привести также работу [68], где МЖ треугольных КЭ получены на основе зависимостей МТУ для тонкой изгибной оболочки.

Для ряда практически важных задач необходимо, во-первых, повысить точность решения, а во-вторых, иметь возможность автоматизировать перестроение регулярных сеток. Этим требованиям может удовлетворить

четырёхугольный, в первом приближении – прямоугольный, элемент моментной теории.

Вывод матрицы жесткости элемента стесненного континуума.

Естественным представляется ввести в качестве обобщенных перемещений в 4-х узлах элемента по 3 степени свободы и построить 12-степенной элемент. Для простоты считаем на данном этапе работы систему координат элемента совпадающей с общей системой координат модели тела. В качестве перемещений прямоугольного элемента размером $L \times H$ используем линейные перемещения u, v и «жесткие повороты» или «плоские кручения» в узлах (Рис. 3.1.3).

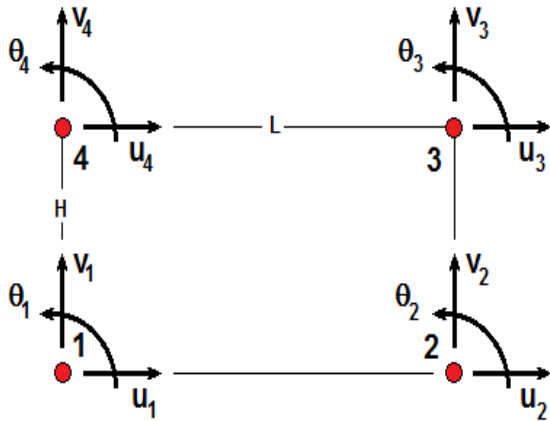


Рис. 3.1.3 Схема 12-степенного элемента

Воспользуемся подходом к построению аппроксимаций, указанному в книге В.А. Постнова, И.Я. Хархурима [170]. Исходим из задания закона изменения напряженного состояния по площади КЭ. Три степени свободы элемента связаны с его перемещениями как абсолютно жесткого тела. Степеней предполагается 12, значит, 9 степеней отвечают за деформированное состояние.

Отсюда выражения для напряжений (нормальных, касательных и моментных) должны содержать 9 произвольных параметров. Независимых компонентов напряжений – 5 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} + \tau_{yx}, m_x, m_y$). Касательные напряжения на соседних гранях связаны уравнением равновесия моментной теории, поэтому за независимый компонент напряжений берем их сумму. Уравнения равновесия имеют вид (3.1.1), (3.1.2). Напряженное состояние должно удовлетворять этим дифференциальным уравнениям. Пусть нормальные напряжения линейно зависят от одной из координат:

$$\sigma_x = a_1 + a_2 \cdot y; \quad \sigma_y = a_3 + a_4 \cdot x, \quad (3.1.12)$$

а касательные – линейно переменны и содержат одинаковую составляющую:

$$\tau_{xy} = a_5 + a_6 \cdot y; \quad \tau_{yx} = a_5 - a_7 \cdot x, \quad (3.1.13)$$

что вполне соответствует их интерпретации как отвечающей закону парности «сдвигающей» полусуммы и «поворачивающей» полуразности [75, 65]. В этом случае уравнения равновесия (3.1.1) удовлетворяются автоматически. Остаются неиспользованными 2 коэффициента a_8, a_9 , которыми необходимо распорядиться так, чтобы удовлетворялось последнее уравнение равновесия (3.1.2):

$$m_x = a_6 \cdot x \cdot y + a_8; \quad m_y = a_7 \cdot x \cdot y + a_9. \quad (3.1.14)$$

Перейдем от аппроксимации напряжений к аппроксимации деформаций и далее, путем интегрирования геометрических соотношений – к аппроксимации перемещений. Согласно (3.1.3):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [a_1 + a_2 \cdot y - \mu \cdot (a_3 + a_4 \cdot x)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [a_3 + a_4 \cdot x - \mu \cdot (a_1 + a_2 \cdot y)] \end{aligned} \right\} \quad (3.1.15)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2G} (2 \cdot a_5 + a_6 \cdot y - a_7 \cdot x) \quad (3.1.16)$$

$$\kappa_x = \frac{a_6 \cdot x \cdot y + a_8}{B^*}; \quad \kappa_y = \frac{a_7 \cdot x \cdot y + a_9}{B^*}. \quad (3.1.17)$$

При корректном интегрировании геометрических соотношений (3.1.15) - (3.1.17) должны появиться 3 независимые константы, которые и «замкнут» аппроксимационный набор коэффициентов. Судя по (3.1.17) и определению $\theta(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv}{dx} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, зависимость поворота должна быть вида:

$$\theta(x, y) = \alpha_1 + \dots + \alpha_2 \cdot x^2 \cdot y + \alpha_3 \cdot x \cdot y^2. \quad (3.1.18)$$

Но тогда в выражениях для u и v должны быть члены с произведением $x^2 \cdot y^2$! Если набор слагаемых в полиномах удовлетворяет условию полноты, то приходим к парадоксальному выводу: неизвестных постоянных в аппроксимациях должно быть больше, чем 12. Действительно, при выборе аппроксимаций вида

$$u(x, y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2, \quad (3.1.19)$$

$$v(x, y) = b_1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot y + b_4 \cdot x \cdot y + b_5 \cdot x^2 + b_6 \cdot y^2, \quad (3.1.20)$$

аппроксимация поворотных перемещений примет вид:

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2} \cdot [-a_3 + b_2 + (-a_4 + 2 \cdot b_5) \cdot x + (-2 \cdot a_6 + b_4) \cdot y], \quad (3.1.21)$$

что не соответствует (3.1.18).

Попытка принять гипотезу о линейном распределении поворотов (3.1.16) по полю КЭ и сохранить аппроксимации (3.1.19) – (3.1.20) наталкивается на *вырожденный характер матрицы связи коэффициентов {a} и обобщенных степеней свободы*. Таким образом, напрямую ввести аппроксимацию с 12-ю неизвестными константами не удаётся.

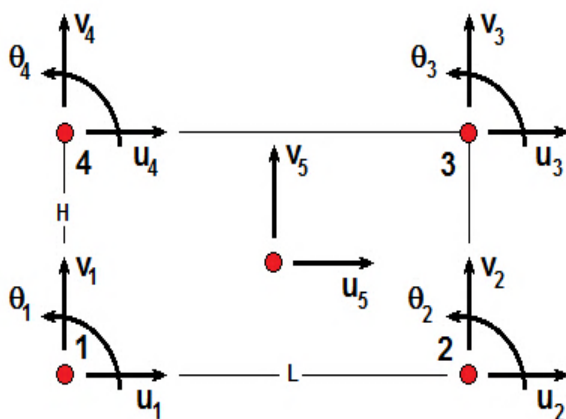


Рис. 3.1.4 Схема 14-степенного элемента

Для обхода этого препятствия вводится дополнительный узел, и МЖ нового КЭ сначала строится для пятиузлового КЭ (Рис. 3.1.4). Пятый узел, имеющий только поступательные перемещения (u, v), находится в центре КЭ и из окончательной МЖ может быть исключен с помощью процедуры статически эквивалентного уплотнения (*конденсации*).

Воспользуемся полиномиальной аппроксимацией линейных перемещений вида:

$$u(x, y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y^2 \quad (3.1.22)$$

$$v(x, y) = b_1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot y + b_4 \cdot x \cdot y + b_5 \cdot x^2 + b_6 \cdot y^2 + b_7 \cdot x^2 \cdot y^2 \quad (3.1.23)$$

$$\theta(x, y) = \left(\frac{b_2}{2} - \frac{a_3}{2}\right) + \left(b_5 - \frac{a_4}{2}\right) \cdot x + \left(\frac{b_a}{2} - a_6\right) \cdot y + x^2 \cdot y \cdot (-a_7) + x \cdot y^2 \cdot b_7 \quad (3.1.24)$$

Обобщенными перемещениями элемента будем считать вектор из 14 узловых параметров

$$\{q\} = \{u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2, u_3, v_3, \theta_3, u_4, v_4, \theta_4, u_5, v_5\}^T. \quad (3.1.25)$$

Установим связь между вектором $\{a\} = \{a_1 - a_7, b_1 - b_7\}^T$ и вектором $\{q\}$, т.е. найдем функции формы. Используем граничные условия:

$$\begin{cases} q_1 = u_1 = u(0,0), & q_2 = v_1 = v(0,0), & q_3 = \theta_1 = \theta(0,0), \\ q_4 = u_2 = u(L,0), & q_5 = v_2 = v(L,0), & q_6 = \theta_2 = \theta(L,0), \\ q_7 = u_3 = u(L,H), & q_8 = v_3 = v(L,H), & q_9 = \theta_3 = \theta(L,H), \\ q_{10} = u_4 = u(0,H), & q_{11} = v_4 = v(0,H), & q_{12} = \theta_4 = \theta(0,H), \\ & q_{13} = u_5 = u\left(\frac{L}{2}, \frac{H}{2}\right), & q_{14} = v_5 = v\left(\frac{L}{2}, \frac{H}{2}\right). \end{cases} \quad (3.1.26)$$

Матрица преобразования аппроксимаций в соответствии с выражением

$$\{q\} = [A(L, H)] \cdot \{a\} \quad (3.1.27)$$

является неособенной, т.е. принятый вид аппроксимации вполне удовлетворительный.

Решая (3.1.27), подставляя полученные выражения для коэффициентов $\{a(\{q\})\}$ в (3.1.22) – (3.1.24) и приводя подобные при узловых перемещениях, приведем аппроксимации к виду:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^{14} \mathcal{E}(x, y)_{i,1} \cdot q_i, \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^{14} \mathcal{E}(x, y)_{i,2} \cdot q_i, \\ \theta(x, y) &= \sum_{i=1}^{14} \mathcal{E}(x, y)_{i,3} \cdot q_i, \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

где $[\mathcal{E}(x, y)]$ – прямоугольная матрица функций формы размером $[14 \times 3]$.

Все указанные преобразования весьма громоздки, поэтому выполняются с помощью символьного процессора системы компьютерной алгебры *PTC MathCAD* [141]. Дополнительно к матрице $[\mathcal{E}(x, y)]$ получены матрицы частных координатных производных $[\partial \mathcal{E}(x, y) / \partial x]$, $[\partial \mathcal{E}(x, y) / \partial y]$, необходимые в дальнейшем. Матрица закона Гука имеет вид:

$$G(E, \nu, B^*) = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E \cdot \nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E \cdot \nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B^* \end{bmatrix}, \quad (3.1.29)$$

а матричный оператор геометрических соотношений, вытекающий из уравнений (3.1.3) (без учета связи поворотных и поступательных перемещений), строится дифференцированием функций формы:

$$B1(x, y, H, L) = \left[dL \left([\varepsilon(x, y, H, L)], \left[\frac{\partial \varepsilon(x, y, H, L)}{\partial x} \right], \left[\frac{\partial \varepsilon(x, y, H, L)}{\partial y} \right] \right) \right]. \quad (3.1.30)$$

Для получения матрицы жесткости элемента вычисляется интеграл:

$$k(H, L) = \int B1(x, y, H, L)^T \cdot G(E, \nu, B^*) \cdot B1(x, y, H, L) dF, \quad (3.1.31)$$

где F – площадь КЭ.

От интеграла по площади можно перейти к двойному интегралу по $dx dy$. Так как область прямоугольная, то возможно точное интегрирование. В итоге с помощью указанного выше символьного процессора для каждого элемента матрицы жесткости было получено аналитическое выражение от параметров L, H, E, ν, B^* (или l), что существенно ускоряет счет.

Процедура конденсации – частный случай процедуры построения матриц суперэлемента. Разобьем имеющуюся матрицу $[14 \times 14]$ на блоки:

$$K = \begin{bmatrix} K11(12,12) & K12(12,2) \\ K21(2,12) & K22(2,2) \end{bmatrix}. \quad (3.1.32)$$

Аналогично разобьем на блоки (подвекторы) векторы узловых перемещений и узловых нагрузок элемента:

$$q = \begin{pmatrix} q1(12) \\ q2(2) \end{pmatrix} \text{ и } R = \begin{pmatrix} R1(12) \\ R2(2) \end{pmatrix}. \quad (3.1.33)$$

Уравнения равновесия элемента $K \cdot q = R$ примут вид:

$$\begin{pmatrix} K11(12,12) & K12(12,2) \\ K21(2,12) & K22(2,2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q1(12) \\ q2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R1(12) \\ R2(2) \end{pmatrix}. \quad (3.1.34)$$

Из второй строки уравнения (3.1.34) можно выразить вектор «неудобных» перемещений:

$$q2(2) = K22(2,2)^{-1} \cdot (R2(2) - K21(2,12) \cdot q1(12)). \quad (3.1.35)$$

Тогда из первой строки уравнения (3.1.29) следует:

$$(K11(12,12) - K12(12,2) \cdot K22(2,2)^{-1} \cdot K21(2,12)) \cdot q1(12) == R1(12) - K12(12,2) \cdot K22(2,2)^{-1} \cdot R2(2). \quad (3.1.36)$$

Полагая, что обобщенные узловые усилия в центральном узле элемента не рассматриваются, окончательно получим:

$$Knew(12,12) \cdot q1(12) = R1(12), \quad (3.1.37)$$

где $Knew(12,12) = K11(12,12) - K12(12,2) \cdot K22(2,2)^{-1} \cdot K21(2,12)$ – приведенная («новая») матрица жесткости порядка $[12 \times 12]$.

Полученная таким образом матрица жесткости соответствует 12-степенному КЭ (Рис. 3.1.3), не нагруженному сосредоточенными усилиями в геометрическом центре. С помощью этой матрицы можно вести расчет в перемещениях.

Определение напряжений в элементе. Исходная аппроксимация перемещений требует 14 узловых параметров, матрица Коши имеет размер $[5 \times 14]$. Поэтому для каждого КЭ необходима процедура, обратная конденсации: отыскание перемещений в 5-м, центральном узле. Из уравнения (3.1.34) можно выразить вектор "неудобных" перемещений $\{q13, q14\}^T (q2)$:

$$q2(2) = K22(2,2)^{-1} \cdot (R2(2) - K21(2,12) \cdot q1(12)), \quad (3.1.38)$$

распределив предварительно найденный вектор обобщенных перемещений всей модели $\{Q\}$ по векторам обобщенных перемещений элементов $\{q1\}$ с помощью матрицы индексов [170]. Найдя $\{q2\}$, объединяем его с вектором $\{q1\}$ для каждого элемента и умножаем полученный четырнадцатикомпонентный вектор $\{q_new\}$ слева на матрицу Коши для каждого КЭ в каждом узле (координаты $(0,0), (L, 0), (L, H), (0, H)$). Получаем набор подвекторов узловых деформаций для каждого КЭ. Умножая их на матрицу закона Гука, получим наборы подвекторов напряжений. Нормальные и моментные напряжения будут при этом получены сразу, а для получения касательных необходимо будет воспользоваться уравнением равновесия моментной теории (3-е уравнение (3.1.13)). Из него мы получим разность $(\tau_{xy} - \tau_{yx})$, а из непосредственного умножения вектора деформаций на матрицу Гука – сумму $(\tau_{xy} + \tau_{yx})$. Складывая и вычитая полученные уравнения, найдем отдельно τ_{xy} и τ_{yx} . Для нахождения производных от моментных напряжений используем матрицу соотношений Коши, предварительно получив в вышеупомянутом символьном процессоре производные от неё. Так как m_x и m_y – 4-й и 5-й компоненты вектора независимых компонентов напряжений $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} + \tau_{yx}, m_x, m_y)$, то:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} = \left\{ [G(E, \mu, B^*)] \left[\frac{\partial B1(x, y, H, L)}{\partial x} \right] \{q_new\} \right\}_4, \quad (3.1.39)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} = \left\{ [G(E, \mu, B^*)] \left[\frac{\partial B1(x, y, H, L)}{\partial y} \right] \{q_new\} \right\}_5. \quad (3.1.40)$$

Тестовые задачи о локальном нагружении области. Построенный 12-ти-степенной КЭ используется для получения новых решений. Пример работы моментного элемента – нагружение на границе области сосредоточенным моментом (Рис. 3.1.5). Искривление границы имеет характерный вид изогнутой балки.

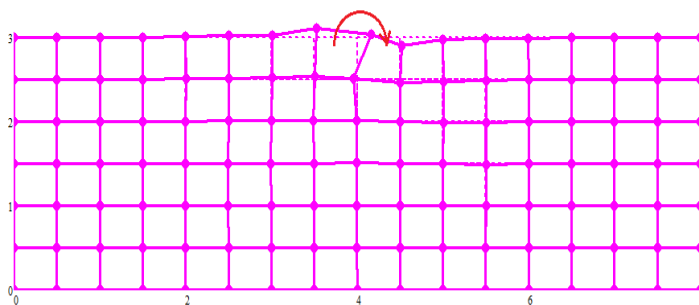


Рис. 3.1.5 Пример работы элемента моментной теории при нагружении узла области сосредоточенным моментом

Видя, что элемент достаточно правильно отражает кинематику, тестируем его на модели задачи Фламана (Рис. 3.1.6). Для сравнения ведем параллельный расчет обычными (безмоментными) КЭ с линейной аппроксимацией перемещений. Рассматриваем только решение в перемещениях. На Рис. 3.1.7 – Рис. 3.1.8 представлены деформированные сетки разной густоты.

Геометрические и физические параметры тестовой модели: $L = 8 \text{ м}, H = 3 \text{ м}, E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \nu = 0.3, P = 1 \text{ МН}$.

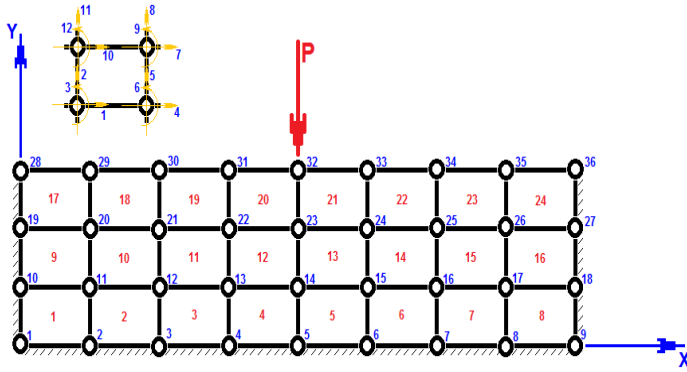


Рис. 3.1.6 Общая расчетная схема для исследования задачи Фламана на регулярной сетке из безмоментных и моментных КЭ

Ниже на тех же рисунках изображены графики зависимости контрольных перемещений от степени сгущения сетки. По оси ординат отложены перемещения в узле, нагруженном силой (верхний график) и в узле, удаленном от нагруженного на условное расстояние 1 м по x и по y .

Для безмоментной задачи перемещения нагруженного узла по y пропорциональны густоте сетки, т.е. чем мельче КЭ, тем выше перемещения, вплоть до бесконечности. Это свойство – *автомодельность* [187]. В моментной же модели с изменением размера элемента наблюдается стабилизация перемещения, что имеет место в реальных экспериментах. Для перемещений в «удаленном узле» в безмоментном решении практически нет изменений. В моментном же решении с ростом плотности сетки (и повышением поворотной жесткости) перемещения на удалении от нагруженного узла пропадают. Заметим, автомодельность по перемещениям наблюдается только в узлах, весьма близких к точке приложения силы. В узлах, достаточно удаленных от этой точки, на различных сетках результаты отличаются слабо.

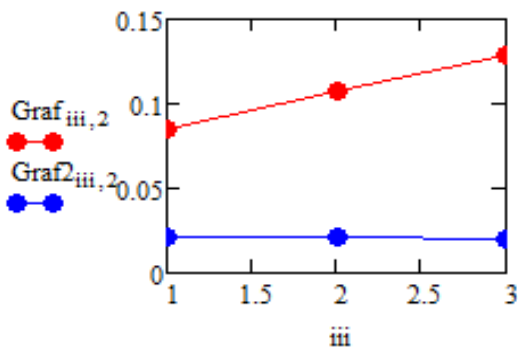
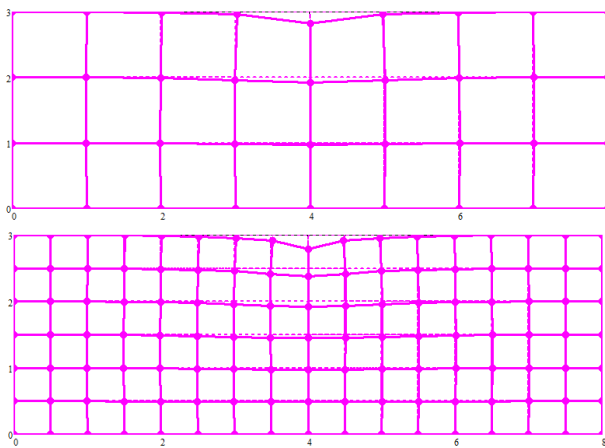


Рис. 3.1.7 Максимальные перемещения в безмоментной модели (8-степенной КЭ).

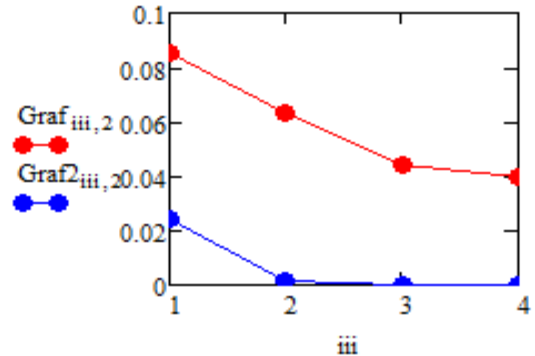
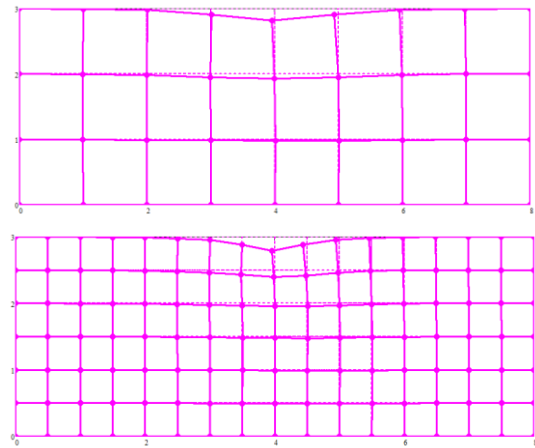


Рис. 3.1.8 Максимальные перемещения в моментной модели (12-степенной КЭ).

Аналогичной стабилизации можно добиться в моментной модели, меняя не плотность сетки, а изгибный модуль материала B^* (сохраняя E и ν). На Рис. 3.1.9 показана зависимость перемещения под силой от логарифма этого модуля. Для нашей модели видно, что если $B^* < 10^{10}$, то перемещения стабилизируются на уровне примерно 0.094, а если $B^* > 10^{10}$, то на уровне примерно 0.044. Когда $B^* = 10^{10}$, решение на грубой сетке 8×3 совпадает с безмоментным (примерно 0.085). Полученные результаты качественно отражают предполагаемые явления: при низком изгибном модуле моментные напряжения близки к нулю, и в среде возникают повороты частиц, стабилизируемые «основным» тензором; при высоком изгибном модуле работа упругих сил содержит существенную долю от моментных напряжений. В обоих случаях наблюдается энергопоглощение, которое в безмоментной теории упругости можно учесть только введением нелинейной модели материала и допущением больших перемещений и поворотов.

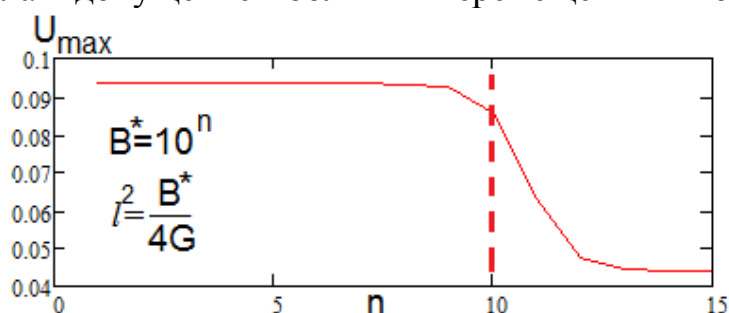


Рис. 3.1.9 Влияние порядка модуля B^* на максимальное перемещение при моментном решении на крупной сетке

Поэтому можно считать, что моментный элемент, пусть и с недостатками, но получен. Так, например, при отсутствии внешних моментов, чисто силовое воздействие вызывает при малых величинах B^* небольшие «паразитные» повороты (это видно на крупной сетке). Дальнейшие исследования возможностей элемента ведутся путем решения вспомогательных задач и сравнением с результатами для элементов нестесненного континуума.

3.2 Четырехугольный изопараметрический элемент моментной теории упругости для варианта нестесненного континуума

Основные положения и уравнения МТУ в варианте нестесненного континуума. В настоящем параграфе рассматриваем модель нестесненного континуума («Новацкого»), где повороты частиц среды считаются независимыми от поступательных перемещений их точек. Основные соотношения такой моментной теории упругости [156, 68, 69] для ПНС представлены ниже:

Уравнения равновесия сохраняют свой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial \mu_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mu_{zy}}{\partial y} + \tau_{yx} - \tau_{xy} = 0.$$

Выражения для деформаций записываются в виде, где «жесткий поворот» ω_z определяет искривления, а к сдвигам – добавляется, обеспечивая несимметричность тензора основных деформаций.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \omega_z, & \gamma_{yx} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} - \omega_z, \\ \kappa_{zx} &= \frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \\ \kappa_{zy} &= \frac{\partial \omega_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Закон Гука принимает вид [124, 156]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda'(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \lambda'(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_y, \\ \tau_{xy} &= (G + \alpha)\gamma_{xy} + (G - \alpha)\gamma_{yx}, \\ \tau_{yx} &= (G + \alpha)\gamma_{yx} + (G - \alpha)\gamma_{xy}, \\ \mu_{zx} &= B \cdot \kappa_{zx}, \\ \mu_{zy} &= B \cdot \kappa_{zy}. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Здесь u_x, u_y, ω_z – линейные и вращательные перемещения в плоскости КЭ, ε_x и ε_y – деформации растяжения-сжатия, γ_{xy} и γ_{yx} – деформации сдвига, не равные для моментной теории упругости в варианте нестесненного континуума, κ_{zx} и κ_{zy} – кривизны, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ – нормальные и касательные напряжения, μ_{zy} и μ_{zx} – изгибные моментные напряжения (см. рисунок), $\lambda' = 2\lambda G / (\lambda + 2G)$, λ, G – упругие постоянные Ламе, α и B – постоянные моментной теории упругости (помимо *изгибно-крутильного модуля* B , в качестве дополнительного реологического параметра вводится *моментно-сдвиговой модуль* α).

Вывод матрицы жесткости элемента стесненного континуума.

Построим четырехугольный элемент плоской задачи, соответствующий описанной теории. Ранее в рамках этой теории И.М. Сутуриным и А.М. Белостоцким [68] был построен треугольный элемент на основе L-координат, с использованием дифференцирования функционала энергии.

Проблема, связанная с вырожденностью матрицы связи коэффициентов аппроксимирующих полиномов и обобщенными перемещениями, отсутствует, если все обобщенные перемещения независимы. Поэтому целесообразно элемент нестесненного континуума строить в традиционной технике, принятой в современных конечно-элементных программах, а именно – как *изопараметрический*.

Пусть в местной системе координат (ξ, η) выражения для компонентов перемещений (по направлениям осей \tilde{x} и \tilde{y} , а также поворотных) следующие:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) \cdot u_i; \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) \cdot v_i; \\ \theta(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) \cdot \theta_i; \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

где M – число функций формы N , равное числу узлов элемента и числу узловых перемещений вдоль одной из местных осей. Для четырехузлового КЭ, например, $M = 4$, для восьмиузлового $M = 8$.

Для установления связи между координатами местной (ξ, η) и общей (\tilde{x}, \tilde{y}) систем удобно использовать те же функции формы $N_i(\xi, \eta)$, введенные выше для аппроксимации искомых компонентов перемещений (действительно, малые приращения координат и перемещений совпадают):

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) \cdot \tilde{x}_i; \\ \tilde{y} &= \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) \cdot \tilde{y}_i; \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

где \tilde{x}_i и \tilde{y}_i – координаты i -ой узловой точки многоугольника в общей системе координат. Получаемые при использовании такого преобразования координат элементы и называются *изопараметрическими*.

Основная проблема использования изопараметрических элементов – достаточно простое и точное получение геометрических матриц и их производных. Деформации местной системы координат относительно общей учитываются отображением.

Используя зависимости типа Коши (3.2.2), выражения для перемещений (3.2.4), а также формулы (3.2.5) для преобразования координат, можно получить необходимые выражения для определения компонентов деформаций, напряжений, матрицы жесткости в общей системе координат. Матрица жесткости элемента в нормализованной системе координат:

$$[k] = \iint_{-1}^{+1} [B]^T \cdot [G] \cdot [B] \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta, \quad (3.2.6)$$

где $[B]$ – матрица соотношений типа Коши, $[G]$ – матрица физического закона, $\det[J]$ – якобиан отображения пространства (ξ, η) на (\tilde{x}, \tilde{y}) [191]. Хотя пределы интегрирования простые, подынтегральное выражение в (3.2.1) очень сложное. Поэтому точное интегрирование производить затруднительно, и приходится прибегать к численному интегрированию.

Интегрирование производится суммированием значений функции в гауссовых точках с весовыми коэффициентами [104].

Строим четырёхугольный изопараметрический элемент (Рис. 3.2.1) с прямолинейными кромками. Матрицу жесткости получаем на основе принципа Лагранжа. Пусть система координат (ξ, η) – нормализованная, система координат (\tilde{x}, \tilde{y}) – пространственная.

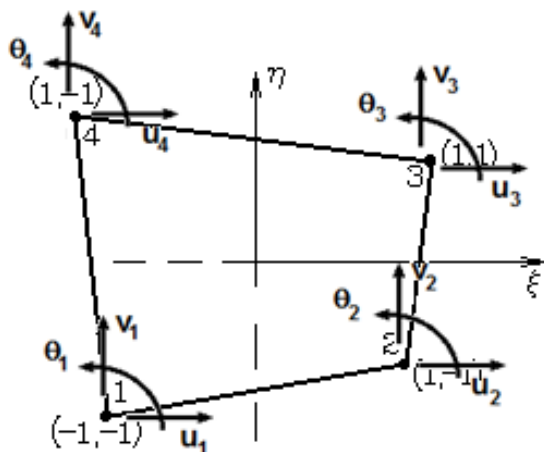


Рис. 3.2.1 Элемент в нормализованной («отвлеченной») системе координат

Совсем не обязательно, чтобы система координат (ξ, η) была прямоугольной, она может быть косоугольной и даже криволинейной. Это позволяет изменять ориентацию сторон четырёхугольника относительно общей системы координат \tilde{x}, \tilde{y} . Началу координат соответствует точка пересечения двух линий, делящих пополам противоположные стороны элемента.

Функции формы, аппроксимирующие перемещения в поле элемента, введем в наиболее

простом, линейном виде:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta); \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta); \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta); \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta); \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

матрицу закона Гука – в виде:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} + \alpha & \frac{E}{2(1+\nu)} - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} - \alpha & \frac{E}{2(1+\nu)} + \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \end{bmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Матрица $[B]$ в этом элементе приняла вид:

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & -N_1 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_1 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 & -N_2 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + 0 \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & -N_3 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_4 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_4 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_4 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_4 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_4 & -N_4 & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_4 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right)_4 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right)_4 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

где $\left(\frac{\partial N}{\partial \xi}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\eta \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\eta \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\eta \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\eta \end{pmatrix}$, $\left(\frac{\partial N}{\partial \eta}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\xi \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\xi \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi \end{pmatrix}$. Использовались следующие массивы местных координат гауссовых точек:

при использовании 4 точек $\xi_1 = -0.57735$, $\xi_2 = 0.57735$, $\eta_1 = -0.57735$, $\eta_2 = 0.57735$; при использовании 9 точек – $\xi_1 = -0.77459$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0.77459$, $\eta_1 = -0.77459$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0.77459$. Весовые квадратурные коэффициенты [104]: при использовании 4 точек $N_1 = 1$, $N_2 = 1$; при использовании 9 точек – $N_1 = 0.55555$, $N_2 = 0.88888$, $N_3 = 0.55555$;

3.3 Исследование стабилизации напряженно-деформированного состояния в задачах о локальном нагружении упругой моментной полуплоскости для различных значений дополнительных реологических параметров

Тестирование четырехугольного изопараметрического элемента несстесненного континуума производится на той же задаче Фламана (Рис. 3.1.6), что и в п. 3.1., с ограниченным упругим полупространством, при тех же геометрических и физических параметрах. Определяются диапазоны комбинаций новых реологических параметров, дающие решения по безмоментной (классической) теории и по теории стесненного континуума на идентичных сетках.

Отмеченный выше эффект стабилизации перемещений при локальном воздействии исследовался относительно изменений уже 2-х новых реологических параметров. Качественно (Рис. 3.3.1 – Рис. 3.3.3) стабилизация наступает как при слишком низкой, так и при слишком высокой изгибно-крутильной жесткости, подобно п. 3.1. Однако, как видно из Рис. 3.3.1, при фиксированном уровне модуля α (от 0 до ∞) стабилизация перемещений при изменении B происходит на существенно разных уровнях.

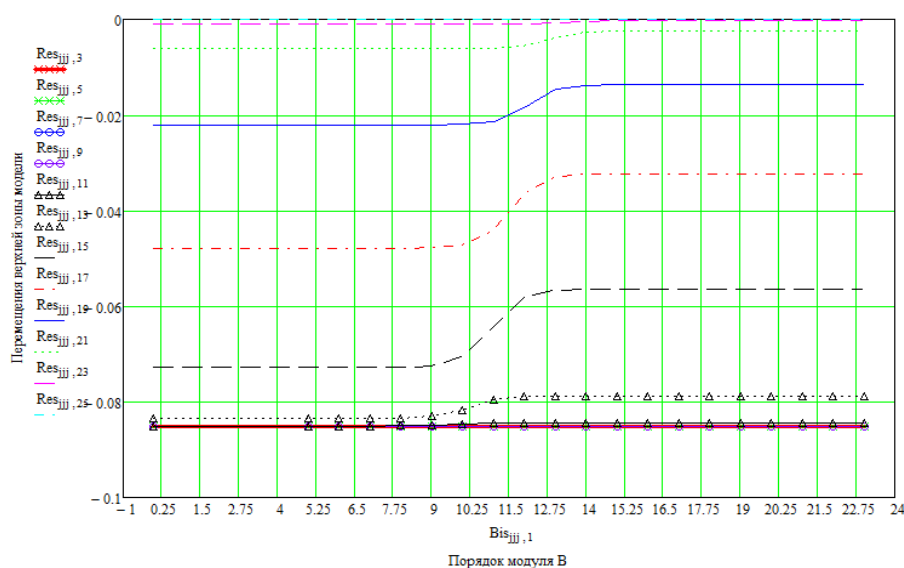


Рис. 3.3.1 Исследование влияния порядка модуля B на перемещения верхней зоны модели при фиксированных α

Фиксация модуля B с изменением реологической константы α приводит к зависимостям Рис. 3.3.2. Из них можно заключить, что изгибно-крутильная жесткость *в меньшей степени* определяет моментные свойства среды, нежели дополнительные сдвиговые. В связи с этим следует ожидать при построении деформированного состояния моделей с увеличенным модулем B более ярко выраженных сдвигов.

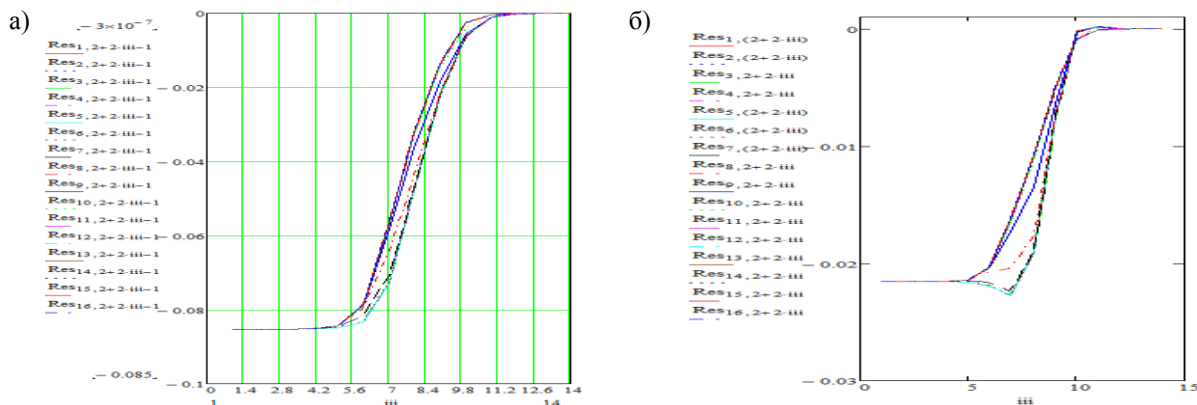


Рис. 3.3.2 Влияние модуля α на перемещения нагруженной зоны при фиксированных значениях B : а) в точке под силой; б) в отдаленной точке

Как видно из Рис. 3.3.3, идентифицировать тот или иной вариант нестесненной изотропной моментно-ротационной среды с помощью двух реологических констант можно в гораздо более широком диапазоне, чем в случае стесненного континуума.

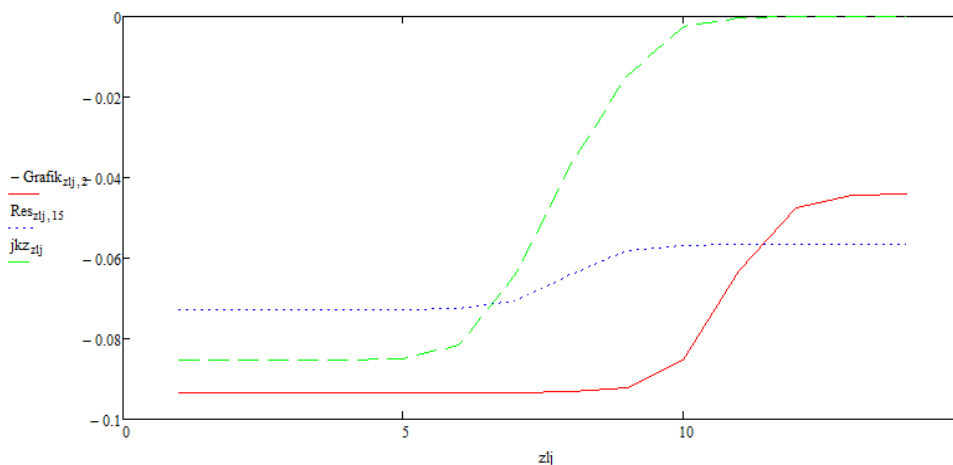


Рис. 3.3.3 Сравнение моментных сред в вариантах стесненного (красный график) и нестесненного континуума

Приведем в сравнении некоторые результаты решения задачи Фламана для ограниченной полуплоскости, а именно эпюры вертикальных перемещений и напряжений по горизонтальным сечениям расчетной области при нагружении единичной силой (Рис. 3.3.4-Рис. 3.3.5). Используем для этого 2 сетки различной плотности.

На Рис. 3.3.4-Рис. 3.3.5 обозначено: а – модель стесненного континуума ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, $B^* = 10^{11}$), б – модель нестесненного континуума ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, $B^* = 10^{11}$, $\alpha = 10^{11}$) расчетная область имеет размеры 8×3 м, границы неподвижны, нагружение производилось единичной силой.

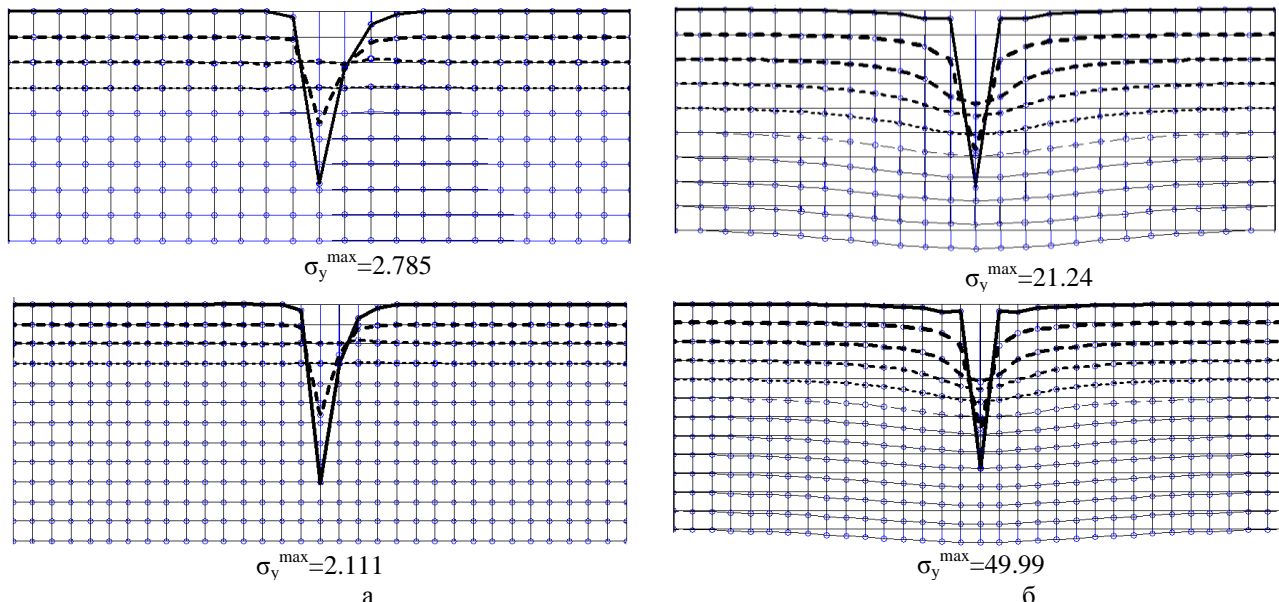


Рис. 3.3.4 Эпюры вертикальных напряжений для различных моделей моментной среды (сетки 24x9 и 32x12)

Как видно из результатов, стабильный результат и по перемещениям, и по напряжениям при сгущении сетки более свойствен стесненному континууму. В нестесненной среде равные модули B и α дают автомодельность по напряжениям (перемещения стабильны), требуется комбинировать «моментные» параметры реологии, чтобы пользоваться любой сеткой со стабильным результатом.

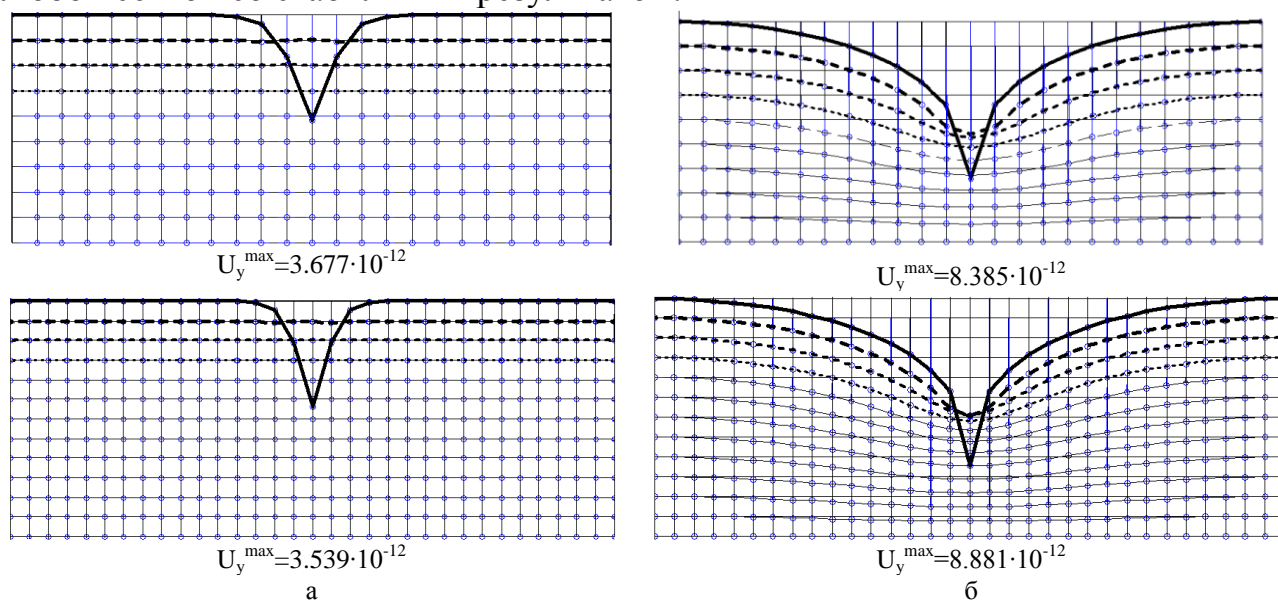


Рис. 3.3.5 Эпюры вертикальных перемещений для различных моделей моментной среды (сетки 24x9 и 32x12)

Из Рис. 3.3.4,б и Рис. 3.3.5,б видно, что одна и та же работа внешней силы на перемещениях нестесненной моментной среды может переходить, в зависимости от дискретизации пространства, в большую или меньшую работу моментных напряжений (действительно, *поворотная подвижность крупных и мелких частиц различна*). Таким образом, модель нестесненной среды более сложна в идентификации, но позволяет учесть большее количество наблюдаемых эффектов.

3.4. Выводы

По результатам 3-й Главы можно сделать следующие выводы:

1. Построены и внедрены в оригинальный конечно-элементный программный продукт новые элементы несимметричной теории упругости, позволяющие численно получать решения сложных задач.

2. Моментная среда уже на уровне упругой модели позволяет локализовать возмущения за счет дополнительного поглощения энергии дополнительными сдвигами и поворотами среды. Можно влиять на степень локализации реологическими параметрами, идентифицируя модель с результатами экспериментальных измерений.

3. Идентифицировать тот или иной вариант нестесненной изотропной моментно-ротационной среды с помощью двух реологических констант можно в гораздо более широком диапазоне, чем в случае стесненного континуума.

Глава 4 Моментные и гибридные модели упругой среды в условиях изгиба, наличия концентраторов и выдавливания

Глава посвящена разработке гибридных моментно-безмоментных моделей. Основная идея подхода – разделение расчетной области среды на кинематически частично совместные зоны, которые обладают по отдельности свойствами моментного и безмоментного континуума. В задачах с сингулярностями это позволит получать корректные решения в точках резкого изменения геометрии или граничных условий, а в задаче о выдавливании слоя среды при динамическом воздействии конструкции на кромку поля – имитировать кинематически более энергоемкий слой. Исследуем полученные численные модели среды на простых задачах.

4.1. Задача о чистом изгибе плоской области

Точное решение задачи о чистом изгибе плоской области в напряжениях сводится к функции напряжений Эри в виде двухчленного полинома 3 порядка [191] и может, согласно полуобратному методу Сен-Венана, быть получено из упрощенной, «балочной» теории, если изгибающий момент на границах области формируется поверхностными нагрузками, в точности повторяющими эпюры изгибных напряжений.

Для конечно-элементных моделей моментной среды задача об изгибе является, как и задача Фламана, хорошим средством тестирования. Так, в работе [68] на задаче о чистом изгибе тестируется треугольный элемент нестесненного континуума, в работе [93] – треугольные элементы стесненного моментного континуума. Дело в том, что в такой задаче отсутствуют точки, в которых численные модели ведут себя автотельно. При рассмотрении моделей с особыми точками имеют место высокие градиенты нормальных и касательных напряжений, приводящие к повышенным величинам напряжений моментных без изменения реологии и не всегда позволяющие делать выводы о «чистом» влиянии реологии.

Исследуем влияние моментной реологии на результаты решения задачи о чистом изгибе с учетом размеров элементов. Используем, в основном, полученный в Главе 3 изопараметрический 4-угольный элемент нестесненного континуума. Сравнение результатов производим как с точным безмоментным решением, так и с приближенным безмоментным решением по МКЭ с использованием «традиционных» изопараметрических элементов.

Расчетная схема прямоугольной области изображена на Рис. 4.1.1

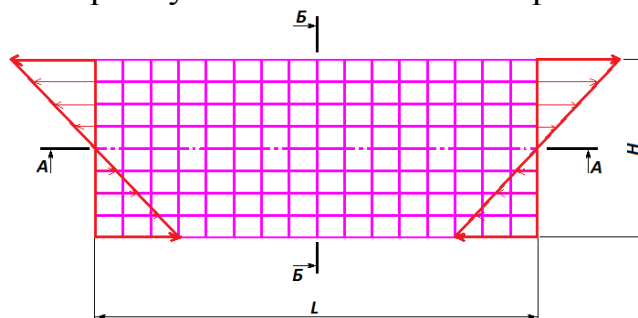


Рис. 4.1.1 Конечно-элементная модель чистого изгиба

Особенностью моделирования чистого изгиба является безопорность модели, т.е. отсутствие нулевой кинематики на границах модели. Использование четверти прямоугольной области, как в [68], не совсем корректно.

Используем следующие дополнительные условия, чтобы матрица общей системы разрешающих уравнений МКЭ не была вырожденной:

1) Условие общей несмещаемости модели как жесткого целого:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot u_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N \beta_i \cdot v_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N \gamma_i \cdot \theta_i = 0 \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

где $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 1$; u_i, v_i, θ_i – обобщенные узловые перемещения модели, N – число узлов. В нашем случае вполне достаточно задать это условие только для узлов нейтральной оси (А-А), причем использовать только первые 2 уравнения (4.1.1).

2) Закрепление в горизонтальном направлении узлов срединного сечения (Б-Б), заменяющее третье уравнение (4.1.1).

Для улучшения процедуры обращения матрицы стандартными подпрограммами целесообразно коэффициенты при перемещениях задать равными не 1, а величинам того же порядка, что и коэффициенты матрицы жесткости.

Распределение внешней нагрузки крайних сечений по высоте $p_{xx}(z)$ задаем линейным, так, чтобы продольное сечение А-А было нейтральной осью. Используем следующие параметры модели: $L = 8$ м, $H = 3$ м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, изгибающий момент $M = 375$ Н·м. Для простоты моделирования используем сетку с четным числом элементов в обоих направлениях. Для сохранения постоянства изгибающего момента на различных сетках максимальное (фибровое) узловое усилие определяем как

$$p_{xx}^{max} = \frac{M \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2}{H \cdot \sum_{i=1}^{n/2} i^2}, \quad (4.1.2)$$

где n – число участков регулярной сетки по вертикали.

Не накладывая на модель условий жесткого поворота нагружаемых сечений, в угловых узлах получаем завышенные величины продольных напряжений, однако на большей части модели постоянство эпюры напряжений в любом сечении выполняется (Рис. 4.1.2).

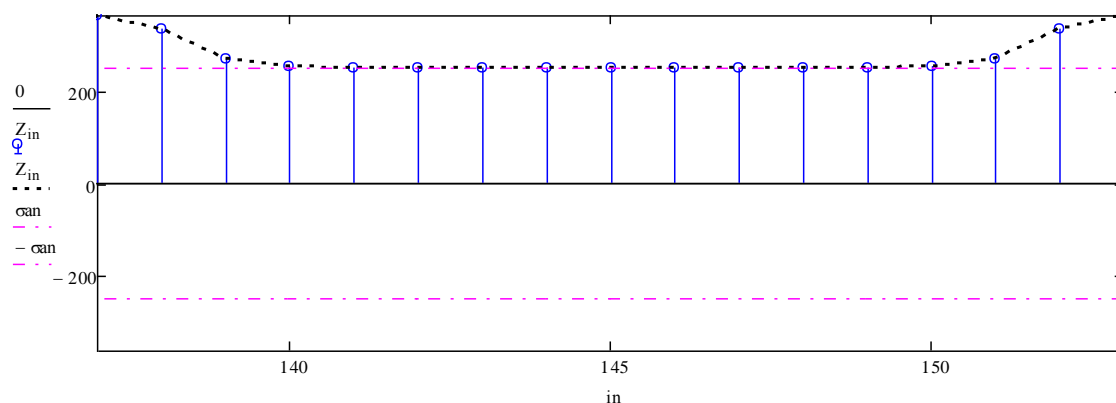


Рис. 4.1.2 Эпюра продольных напряжений в фибровом сечении расчетной модели (штрих-пунктирная линия – аналитическое решение)

На Рис. 4.1.3 изображено деформированное состояние моделей на эквивалентных сетках из безмоментных элементов (а), а также из моментных элементов нестесненного (б) и стесненного (в) континуума при близких к нулевым параметрах моментной реологии ($B = \alpha = 0.01$).

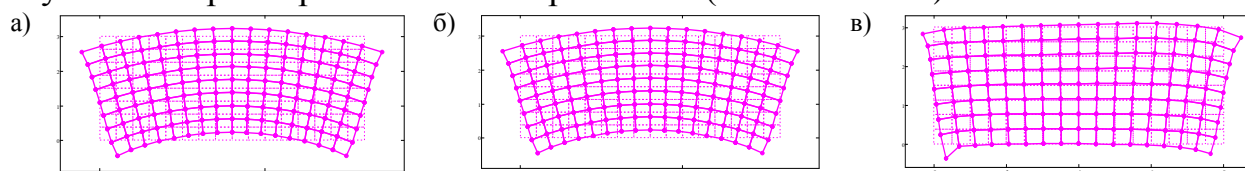


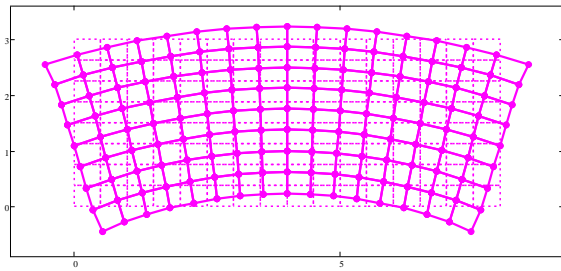
Рис. 4.1.3 Деформированное состояние при анализе чистого изгиба:

а) безмоментная модель, б) моментный нестесненный континуум, в) моментный стесненный континуум

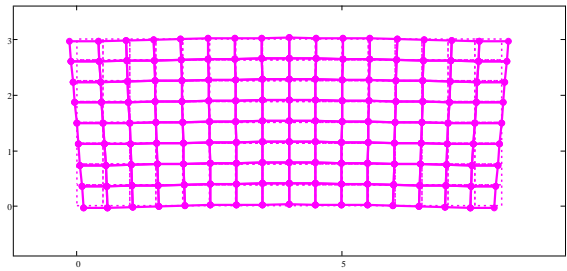
Элемент нестесненного континуума дает решение, практически совпадающее с аналитическим безмоментным.

В силу особенностей элемента стесненного континуума, отмеченных в Главе 3, состояние чистого изгиба комбинируется с жестким поворотом, что приводит даже в безмоментном состоянии к стабилизации, не соответствующей точному безмоментному решению. Поэтому такой элемент целесообразно применять только в местах больших градиентов напряжений, для решения задач безмоментной теории он оказывается непригодным.

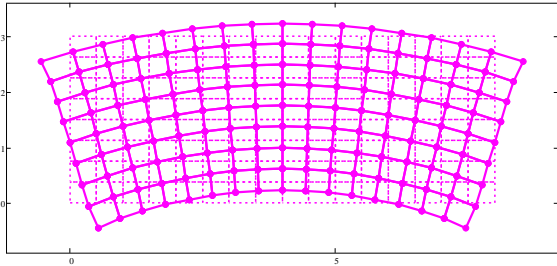
Рассмотрим влияние изгибно-крутильного и дополнительного сдвигового модулей нестесненной моментной среды на характер деформированного состояния «чистого изгиба» (Рис. 4.1.4) на примере некоторых сочетаний.



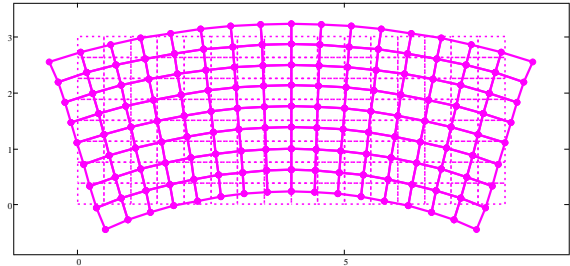
$$\alpha=10^{-2}, B=10^{-2}, w_{\max}-w_{\min}=0.7121276$$



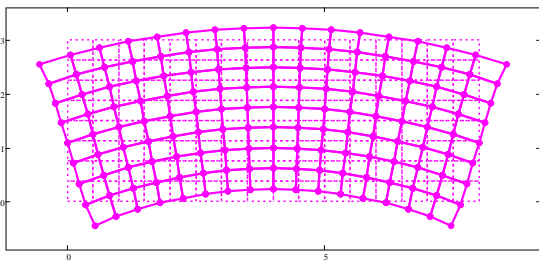
$$\alpha=10^{12}, B=10^{12}, w_{\max}-w_{\min}=0.0630398$$



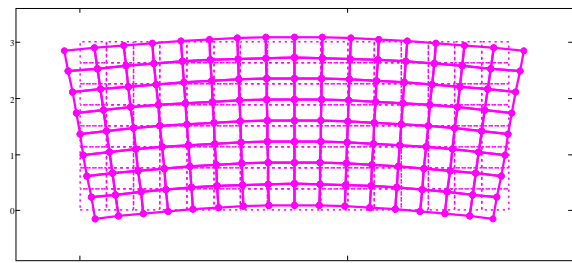
$$\alpha=10^{-2}, B=10^{10}, w_{\max}-w_{\min}=0.7121276$$



$$\alpha=10^{10}, B=10^{-2}, w_{\max}-w_{\min}=0.7102772$$



$$\alpha=10^{-2}, B=10^{13}, w_{\max}-w_{\min}=0.7121276$$



$$\alpha=10^{13}, B=10^{-2}, w_{\max}-w_{\min}=0.2604192$$

Рис. 4.1.4 Влияние параметров моментной реологии на характер изгиба

Определяя максимальный прогиб как разницу максимального и минимального вертикального перемещения на нейтральной оси, а максимальное изгибное напряжение – в фибре срединного сечения (не считая угловые точки показательными), построим зависимости этих параметров НДС от реологических (Рис. 4.1.5 - Рис. 4.1.8).

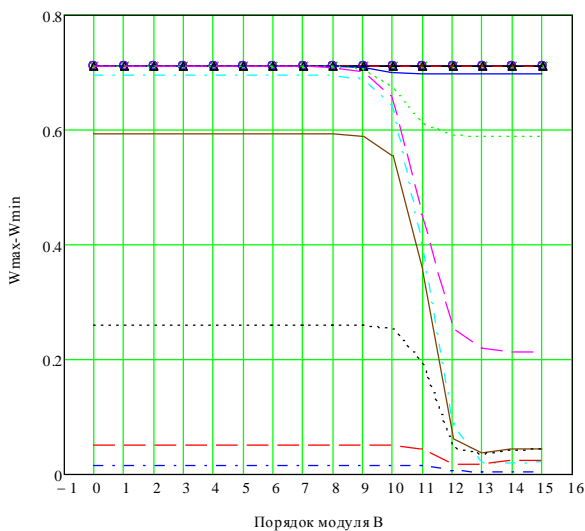


Рис. 4.1.5 Исследование влияния порядка модуля В на прогибы модели при фиксированных α

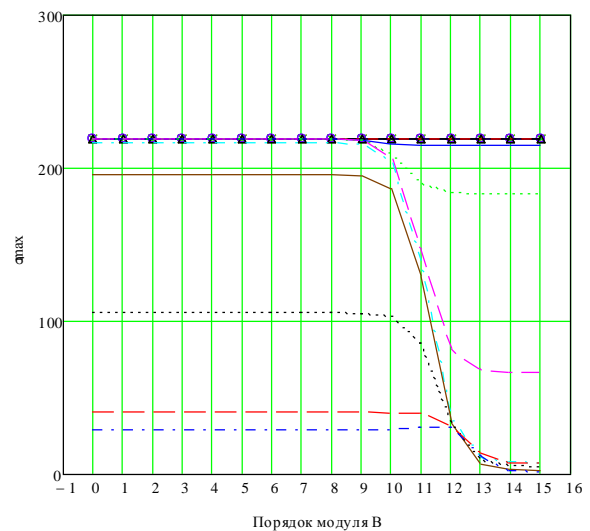


Рис. 4.1.6 Исследование влияния порядка модуля В на напряжения в модели при фиксированных α

Изменение деформированного состояния балки-стенки при росте моментных модулей можно охарактеризовать как рост изгибной жесткости. Касательные напряжения остаются практически нулевыми.

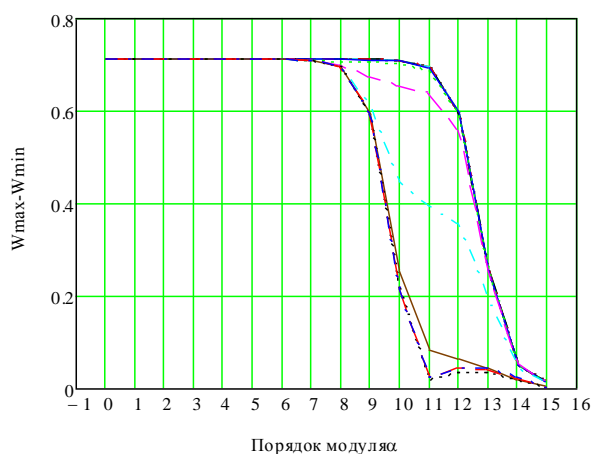


Рис. 4.1.7 Исследование влияния порядка модуля α на прогибы модели при фиксированных B

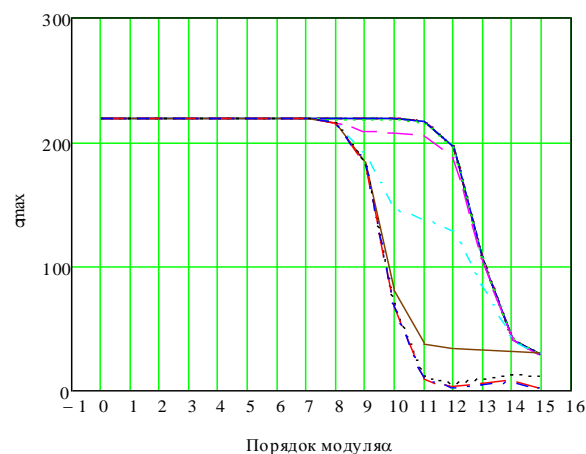


Рис. 4.1.8 Исследование влияния порядка модуля α на напряжения в модели при фиксированных B

Также рассмотрим влияние размера КЭ на сходимость прогибов и напряжений при фиксированных $\alpha = 10^{11}$, $B = 10^{11}$ (Рис. 4.1.9 - Рис. 4.1.11).

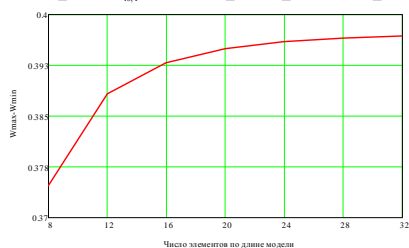


Рис. 4.1.9 Влияние размера КЭ на прогибы

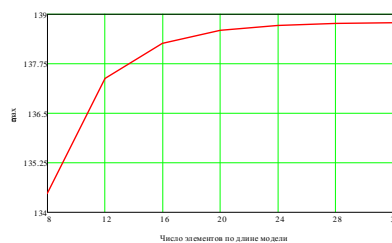


Рис. 4.1.10 Влияние размера КЭ на изгибные напряжения

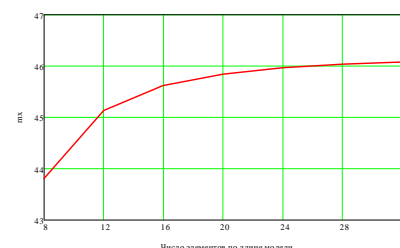


Рис. 4.1.11 Влияние размера КЭ на моментные напряжения m_x

При чистом изгибе касательные напряжения, а также моментные m_y близки к нулю на любой сетке.

Как видно из зависимостей, расхождение контрольных величин на крупных и мелких сетках невелико, т.е. автомодельность отсутствует и сходные тенденции при изменении реологии можно наблюдать на любых сетках. Повышение модулей дополнительной реологии до величин одного порядка с модулем Юнга приводит к резкому возрастанию влияния моментных напряжений. Как и в случае задачи Фламана, модуль α оказывает большее влияние на максимальное расхождение между безмоментным и моментным решением, нежели модуль B .

Отметим важные факты:

- при снижении моментно-сдвиговой жесткости стабилизация параметров «обычного» НДС в моделях стесненной среды происходит на уровне более высоком, нежели уровень безмоментного решения, а в моделях нестесненной среды – строго на уровне безмоментного решения;

- при повышении моментно-сдвиговой жесткости стабилизация параметров НДС в моделях стесненной среды происходит на уровне, отличном от нуля, тогда как в моделях нестесненной среды параметры «обычного» НДС падают до нуля.

Таким образом, *ротационная подвижность среды более высока в стесненном континууме*. Объяснить это можно тем, что поскольку повороты элементов в нестесненном континууме – величины, не имеющие линейной геометрической связи с поступательными перемещениями, то для сколько-нибудь заметного их изменения требуются гораздо больший, чем в стесненном континууме, уровень моментных напряжений. Здесь большую роль играют местные кривизны.

В реальных сыпучих средах (например, грунтах) моментные напряжения зависят от размеров и формы частиц, существенно влияющих на трение качения, и растут со снижением пористости. Таким образом, *качественно можно учитывать пористость снижением моментно-сдвиговой жесткости*.

4.2. Гибридное моделирование в задачах с невыполнением закона парности на уровне силовых граничных условий

Э.А. Булановым [75] для задач с краевыми эффектами предложена модель стесненной моментной среды, в которой моментные напряжения вызывают не местные искривления, а дополнительные сдвиги.

Однако в таких средах, как мелкодисперсный битый лед, повороты могут быть весьма существенны, и здесь перейти к чисто сдвиговой модели можно не всегда. Также существенными могут быть градиенты напряжений в особых (сингулярных) точках, например, при невыполнении закона парности. Линейный конечно-элементный расчет таких моделей, как и при нагружении локальной силой, дает в особых точках автомодельность. Как показано в работах Н.А. Зорниной и А.С. Федорова [106, 107], такие градиенты сглаживаются либо путем *введения локальных фиктивных поворотов или искривлений исходной геометрии модели*, либо путем *использования высоконелинейных решателей, допускающих накопление таких поворотов/искривлений в пошаговом решении по «классическим» моделям*. Следует отметить, что размер геометрической неправильности (фаски, галтели и т.п.) в работах [106, 107] вводился из эмпирических соображений, как и размер конечных элементов в численных моделях. Между тем реологические параметры несимметричных теорий учитывают именно размерные эффекты.

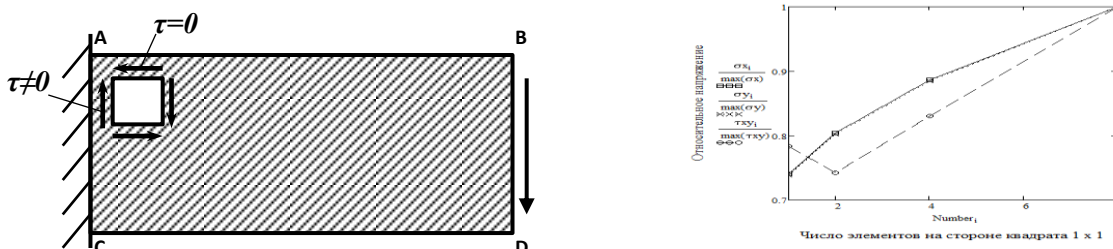


Рис. 4.2.1 Консольная балка-стенка, изгибаемая концевым возбуждением. В т. А формально (с позиций классической теории) не выполняется равенство касательных напряжений по граням АВ и АС. Решение по МКЭ в безмоментной и линейной постановке, без внесения геометрического локального «прилива» к заделке – автомодельно.

Представляется целесообразным рассмотреть применимость конечных элементов, полученных в Главе 3, для учета сингулярностей. Вполне возможно, что размер необходимой неправильности в [106] окажется однозначно определяемым моментной реологией. Пример задачи приведен на Рис. 4.2.1.

Построим моментные конечно-элементные модели для решения такой задачи. На Рис. 4.2.2 и Рис. 4.2.3 показано на разных сетках деформированное состояние полностью моментной балки-стенки, кинематически нагруженной в узлах правой грани постоянным вертикальным смещением, равным 0.5 (слева – элементы стесненного континуума, справа – нестесненного). Кинематическое нагружение вводится с той же целью, что и постоянная величина момента в предыдущем параграфе – для сохранения нагрузки для разных плотностей сетки.

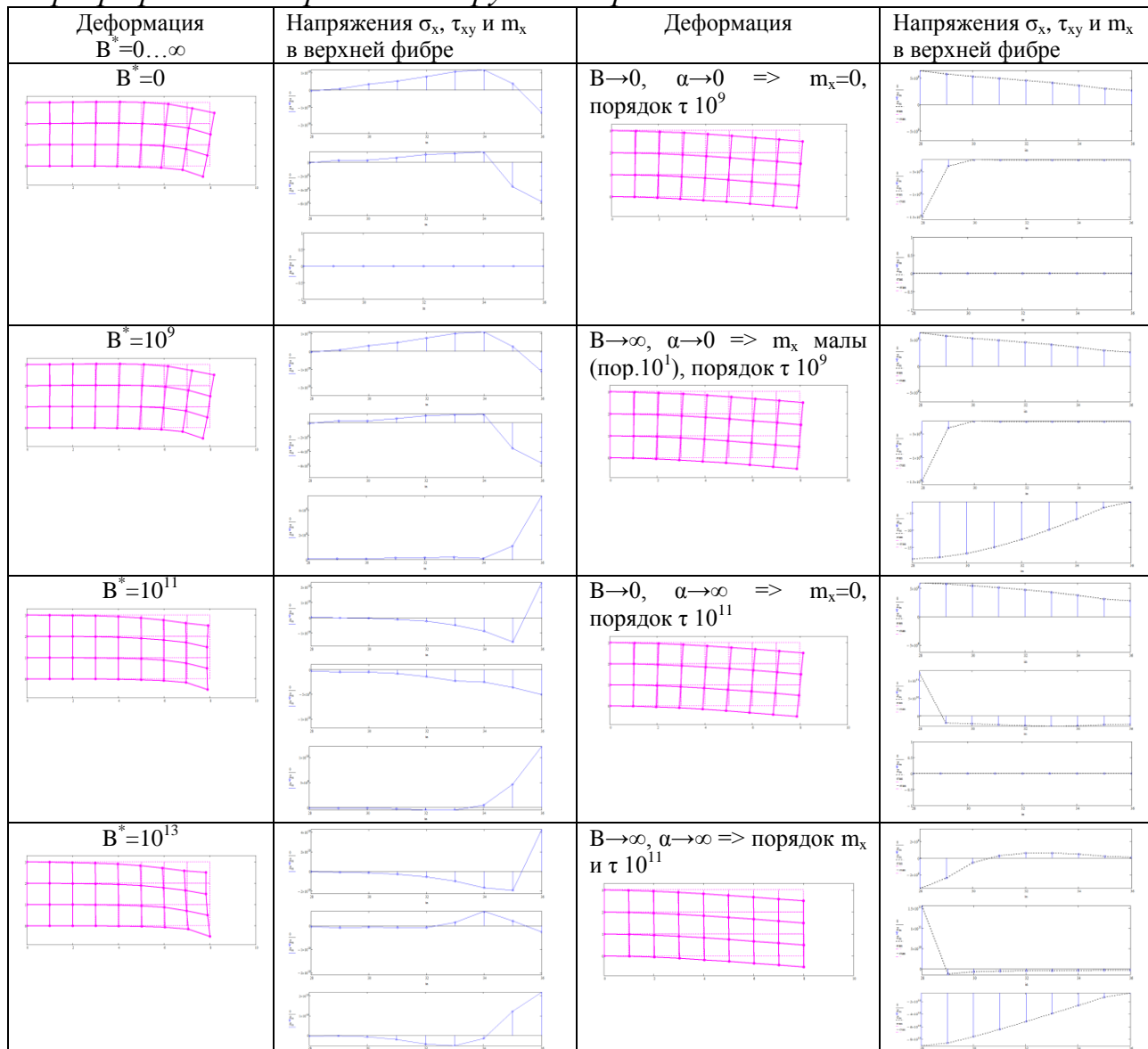


Рис. 4.2.2 Изгиб балки-стенки на крупной сетке из моментных КЭ постоянным кинематическим возбуждением при разных величинах изгибного модуля $V^* = 0 \dots 10^{13}$ (слева) и модулей V и α (справа)

Двукратное сгущение сетки для обоих видов континуума не дает автомодельных эффектов, только улучшает сходимость.

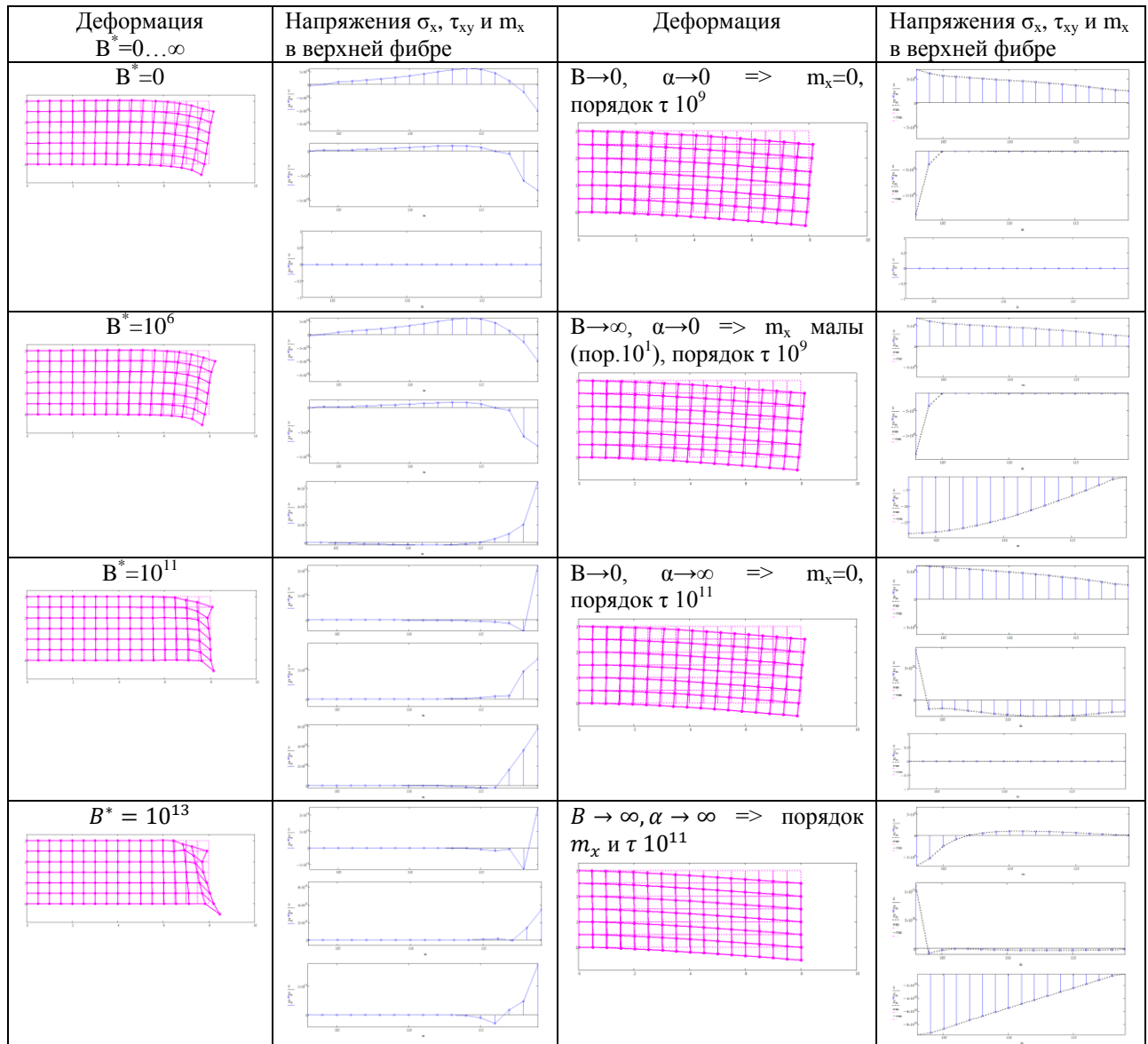


Рис. 4.2.3 Изгиб балки-стенки на мелкой сетке из моментных КЭ постоянным кинематическим возбуждением при разных величинах изгибного модуля $B^* = 0 \dots 10^{13}$ (слева) и модулей B и α (справа)

Видно, что разные величины изгибного модуля в модели стесненного континуума влияют лишь на развитие сдвигов и поворотов в ограниченной области, близкой к приложенной нагрузке, а далее возмущения затухают до нуля (справедливо для всех параметров НДС).

Элемент же нестесненного континуума, как видно из Рис. 4.2.2 (справа) позволяет получить как классическое «балочное» решение, так и различные виды моментных решений (по перемещениям слабо отличающихся от безмоментного, однако существенно различных по напряжениям). В случае нулевой моментной жесткости в точках А и С происходит «всплеск» касательных напряжений, практически – в пределах 1 КЭ на крупной сетке (8x3). Моментные напряжения при этом равны 0. Значительными они становятся только при большой величине α .

Таким образом, при решении задач контакта моментной среды с жестким телом одна и та же «вмятина» может соответствовать совершенно различным НДС и, соответственно, уровням энергопоглощения. Идентифицированная моментная среда позволит решить обратную задачу:

прогнозировать остаточные деформации и энергопоглощение при заданных усилиях внедрения или скоростях соударения.

Заметим здесь, что «отключение» в стесненной модели изгибного модуля до 0, а также закрепление всех поворотных степеней свободы во всех узлах моментной стесненной модели сохраняет характер деформирования, похожий на чистый изгиб, но с гораздо меньшими перемещениями (Рис. 4.2.4), чем обычная (безмоментная) модель (Рис. 4.2.5) при нагружении вертикальной силой в правом нижнем узле. Линейная связь поворотов с поступательными перемещениями при закреплении ротации в узлах допускает только местные искривления на границах элементов.

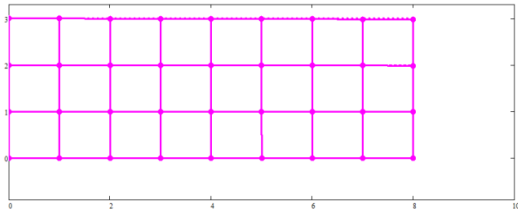


Рис. 4.2.4 Полностью моментная модель при отсутствии поворотных степеней и при нулевой величине изгибного модуля B^*

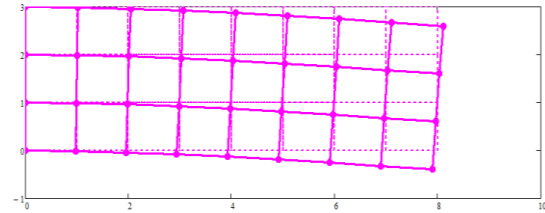


Рис. 4.2.5 Полностью безмоментная модель (дает фактически «балочное» решение по прогибам)

Очевидно, что ротационные эффекты и энергопоглощение за их счет целесообразно учитывать *не во всей расчетной модели*. Поэтому *предлагается* использовать гибридное моделирование, т.е. сетки из 2-х видов КЭ, моментных и безмоментных (Рис. 4.2.6). В качестве модельной задачи используется та же модель балки-стенки.

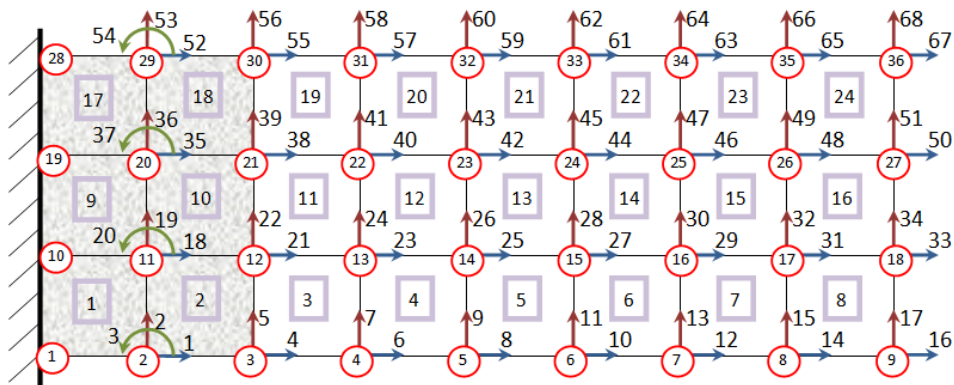


Рис. 4.2.6 Схема составной (гибридной) модели балки-стенки

На Рис. 4.2.6 представлена схема гибридной модели, где *два вертикальных ряда элементов – моментные (моментный слой)*. Совместность элементов на границе выполняется только по поступательным узловым перемещениям. Поэтому для первого приграничного ряда моментных элементов повороты в узлах границы запрещаются. Это создает более плавный переход между слоями.

Различные порядки аппроксимации также ухудшают совместность. Здесь решения будут менее точными, однако при уменьшении размеров КЭ можно добиться удовлетворительной точности.

Еще одним приемом улучшения совместности может быть использование промежуточного слоя элементов в случае, когда моментный континуум – нестесненный. Здесь можно для моментных по кинематике элементов использовать нулевую моментную реологию.

Способ ансамблирования глобальной матрицы жесткости гибридной модели состоит в создании квазидиагональной матрицы гибридного элемента (Рис. 4.2.7):

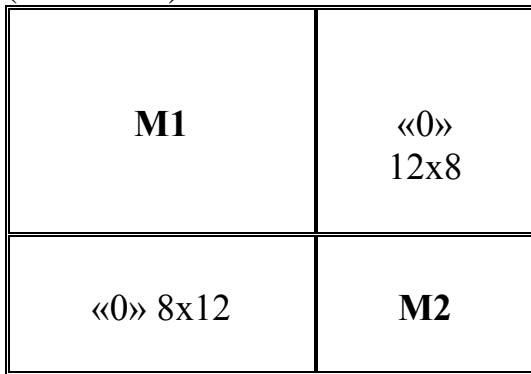


Рис. 4.2.7 Структура данных «универсального КЭ»
 Параметризованные матрицы жесткости:
 M1 – моментного КЭ (12x12),
 M2 – безмоментного КЭ (8x8),

В прямом смысле это не объединение нескольких элементов конструкции в суперэлемент, а всего лишь вспомогательная процедура по созданию удобной структуры данных. Подобной «универсальной» матрицей удобно пользоваться при создании глобальной матрицы жесткости (масс) системы с использованием аппарата

матрицы индексов. Каждый элемент, будь то элемент моментного или безмоментного слоя, искусственно имеет матрицу жесткости размерности 20x20, причем столбцы и строки, не соответствующие нужным степеням свободы, заполнены нулями. Увеличение требуемых объемов памяти незначительно сказывается на скорости счета на современных ПЭВМ.

При формировании глобальной матрицы жесткости по матрице индексов [170] используется массив бинарных признаков элементов (0 – безмоментный, 1 – моментный). Узлы сетки, принадлежащие элементам с обоими признаками, формируют границу слоев, на которой задается дополнительное граничное условие: отсутствие поворотов. Матрица индексов формируется в 3 этапа:

- матрица индексов незакрепленной системы в предположении 3 степеней свободы в каждом узле модели,
- матрица индексов с учетом кинематических граничных условий в предположении 3 степеней свободы в узле,
- матрица индексов с учетом кинематических г.у. и удалением 15, 18, 21 и 24-го столбцов.

Алгоритм суммирования жесткостей элементов согласно обобщенным степеням свободы, отраженным в матрице индексов, приведен в [170].

Рассмотрим сначала для моментных слоев элементы стесненного континуума. Используем изгибно-крутильный модуль $B^* = 10^{12}$ и размеры, а также «безмоментную» реологию предыдущей модели (8x3). Модель нагружена вертикальной силой в правом нижнем узле.

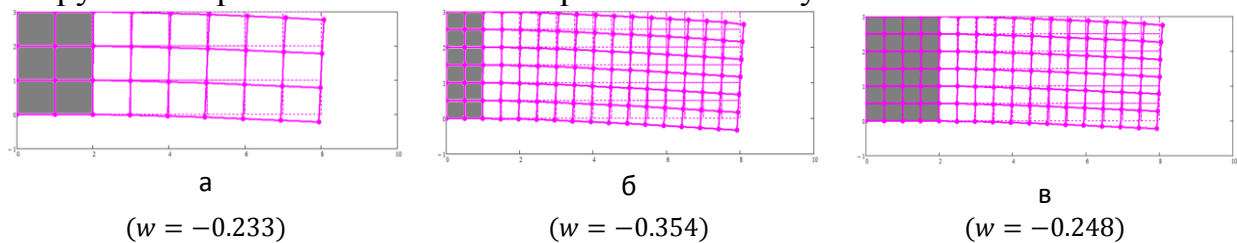


Рис. 4.2.8 Изгиб гибрид. модели при разных размерах мом. зоны и КЭ
 (точное решение в прогибах $w = -0.379$)

Как видно, модель стабилизируется по перемещениям при определенной ширине моментного слоя. Уменьшая размер элемента (Рис. 4.2.8) и, соответственно, слоя, можно выйти на прогибы основной модели.

Оценим при этом напряжения в моментном слое, удастся ли (с учетом уменьшения не только размеров КЭ, но и размеров самого слоя) снять автомодельность (Рис. 4.2.9), т.е. снизить напряжения в особых точках?

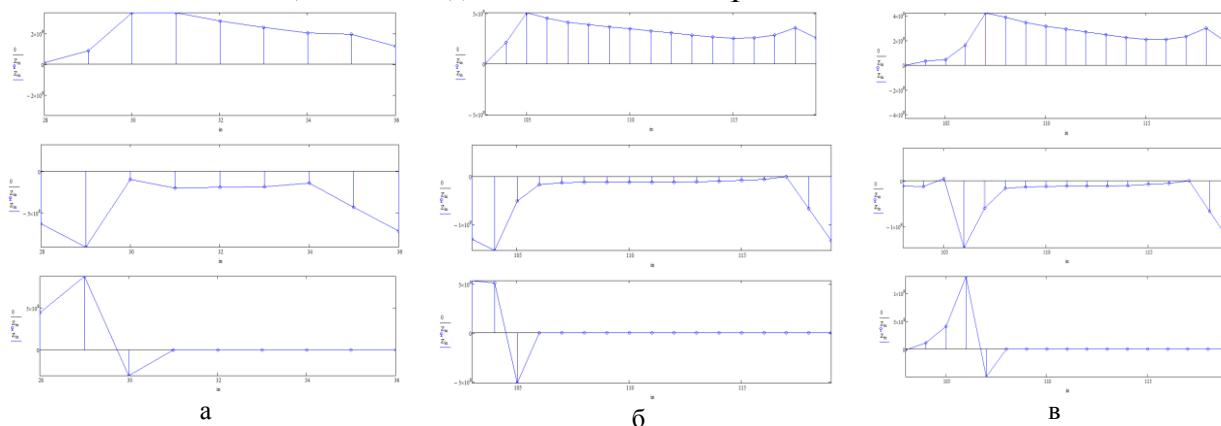


Рис. 4.2.9 Эпюры напряжений σ_x, τ_{xy}, m_x в верхней фибре гибридной модели, $B^* = 10^{12}$

Как видно по результатам расчетов, уменьшение в 2 раза размеров конечного элемента приводит к *автомодельности по касательным напряжениям*, причем зона «всплеска» находится на границе моментного и безмоментного континуума. Максимальные продольные нормальные напряжения и моментные напряжения осциллируют, т.е. по ним автомодельности нет и снижение размеров КЭ должно дать сходящееся решение. Заметим, что чисто автомодельная точка есть – это точка приложения сосредоточенной силы (нижний правый угол) в безмоментной зоне, ее в рассмотрение не берем. Отмечая то обстоятельство, что введенная моментная жесткость слишком высока, повторим те же расчеты при $B^* = 0$ (Рис. 4.2.10).

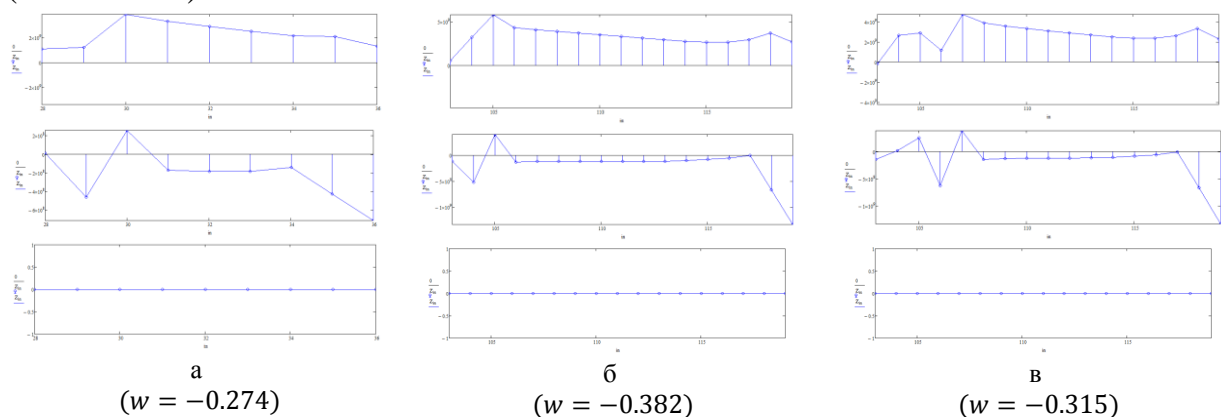


Рис. 4.2.10 Эпюры напряжений σ_x, τ_{xy}, m_x в верхней фибре гибридной модели, $B^* = 0$

В этом случае автомодельность практически отсутствует. Очевидно, что источником автомодельности по сдвиговым напряжениям явился очень большой перепад по моментной жесткости между слоями. Таким образом, для решения задач с особыми точками по гибридным моделям следует обнулять моментную жесткость. Использование элемента нестесненного континуума, однако, дает *максимальные касательные напряжения на некотором удалении от особой точки*.

Рассмотрим теперь использование элемента нестесненного континуума в этой же задаче, задаваясь близкими к 0 значениями модулей B и α (Рис. 4.2.11).

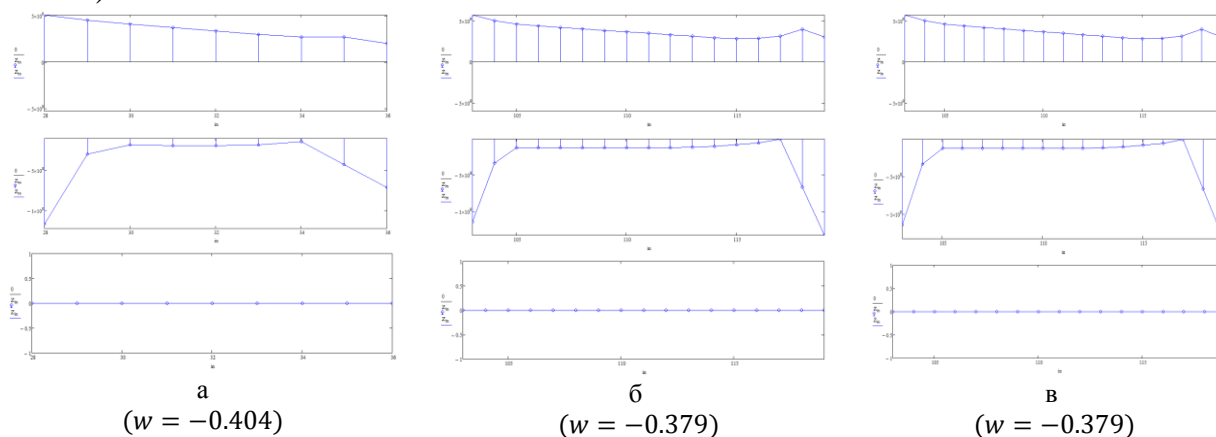


Рис. 4.2.11 Эпюры напряжений σ_x, τ_{xy}, m_x в верхней фибре гибридной модели, $B = \alpha = 0$

Увеличение плотности сетки дает устойчивую сходимость, даже на крупной сетке касательные напряжения в особой точке максимальны и близки к «точному» решению, эпюра при этом – гладкая. Решение в прогибах при этом – точное, вне зависимости от размера моментной зоны. Нормальные напряжения в верхней фибре практически неизменны по характеру и амплитуде.

Таким образом, для решения задач с особыми точками достаточно узкого слоя элементов нестесненной моментной теории с обнуленными параметрами дополнительной реологии. Отличие их от элементов с фиктивными (стабилизирующими) поворотными степенями [104, 217, 185] – в выполнении условий равновесия с учетом непарности касательных напряжений и в переводе части работы внешних сил в работу по искривлению и повороту частиц среды, т.е. в наличии вполне конкретного физического смысла.

Добавление в модели с особыми точками элементов с повышенными порядками аппроксимации перемещений и фиктивными поворотами предпринимается под названием «сингулярные конечные элементы» [4, 151], и используется, в основном, в задачах механики трещин. Как правило, это сопряжено и с существенным сгущением сеток вблизи особенностей. Использование моментных КЭ, как следует из проведенного исследования, может быть более перспективным.

4.3 Задача об упругом выдавливании ротационно-свободной полосы сближающимися границами

Рассмотрим простейшую имитацию выдавливания полосы постоянной толщины из «моментного» материала и оценим трансформацию поля напряжений на границе при варьировании моментной реологией. Нагружение задается кинематически, конечным смещением границ, в силу симметрии рассматривается 1/4 области (Рис. 4.3.1, а).

Отметим, что выдавливание как таковое подразумевает конечность границ, чтобы материал сжатой среды имел за ее пределами абсолютную кинематическую свободу. В нашем случае границы бесконечны, а полоса – конечна, что отличает модель от действительности. Можно считать, что мы рассматриваем только начальную стадию выдавливания, когда размеры сжимающих границ велики по сравнению с расчетным объемом среды.

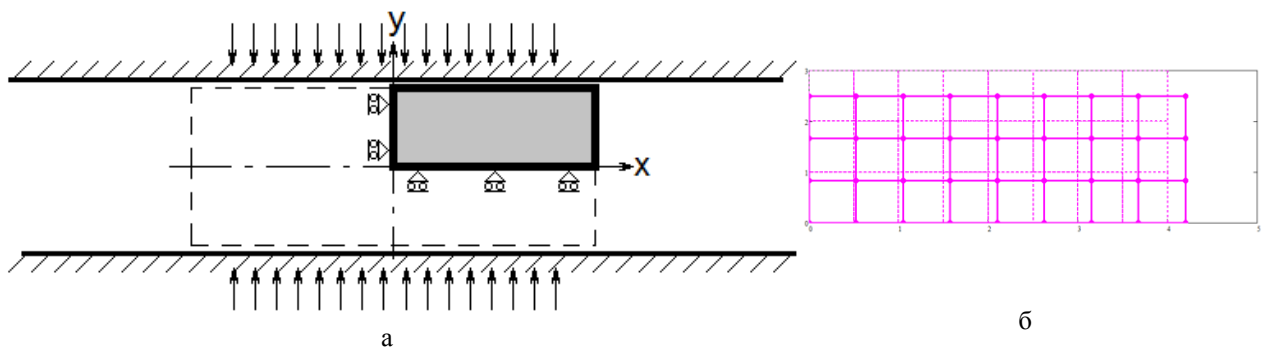


Рис. 4.3.1 Расчетная схема задачи о выдавливании полосы и безмоментное решение

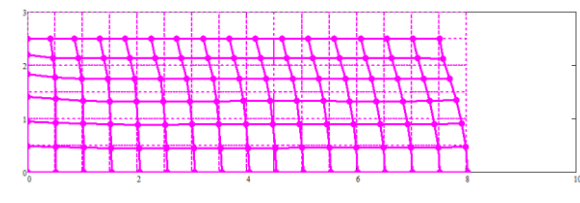
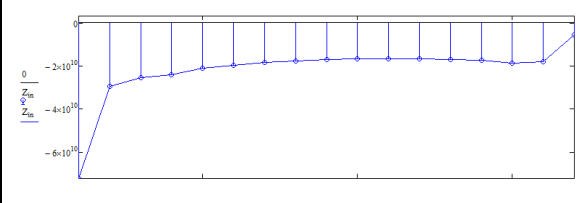
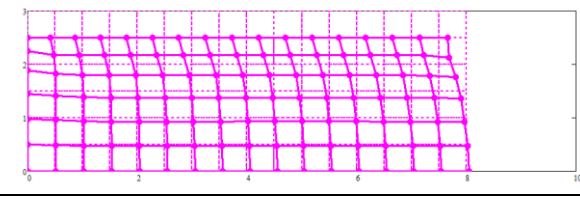
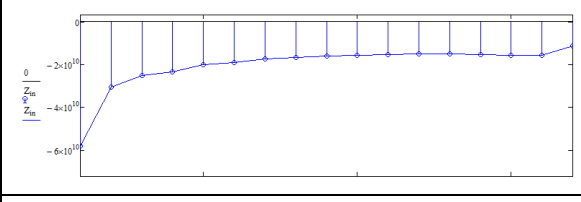
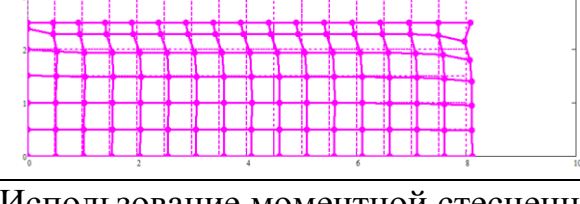
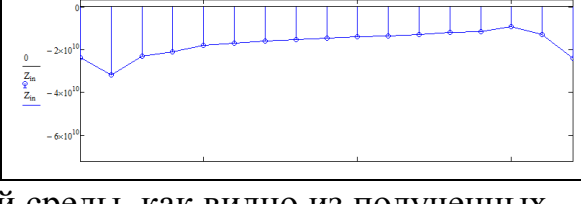
Имеет место *чистое одностороннее сжатие*. Классическая теория упругости дает *постоянное* поле всех компонентов напряжений и нулевые сдвиги (Рис. 4.3.1, б). Особых точек в задаче нет.

Решим задачу с использованием элементов моментной среды на используемой выше расчетной области (8x3). С учетом отсутствия автомодельности и в целях построения более гладких эпюр в задаче используем сетку 16x6 КЭ. Конечное смещение задано достаточно большим (равным размеру КЭ сетки), чтобы оценить общий характер деформации. Очевидно, что деформации такого порядка (десятки процентов) не характерны для реальных линейно-упругих сред и появляются только при переходе в пластику. Однако направления развития пластических деформаций формируются еще в упругой стадии.

Для задания кинематического нагружения вектор неизвестных перемещений закрепленной, но ненагруженной модели разделяется на два подвектора: перемещений известных (заданных) и неизвестных (отыскиваемых). Строки и столбцы матрицы жесткости ненагруженной модели, соответствующие номерам известных перемещений, удаляются из матрицы. Столбцы, соответствующие заданным перемещениям, умноженные на величины этих перемещений, вычитаются из изначально нулевого грузового вектора. Из полученного вектора удаляются компоненты с номерами заданных перемещений. Неизвестные компоненты перемещений

получаются умножением обращенной уменьшенной матрицы жесткости на уменьшенный вектор нагрузок.

Использование элементов стесненного континуума. В табличной форме (Таблица 4.3.1) представлено влияние величины модуля B^* на деформации и напряжения полосы. «Классические» реологические параметры приняты равными: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$. Эпюры компонентов тензора построены, как и для предыдущих задач, на горизонтальных сечениях модели.

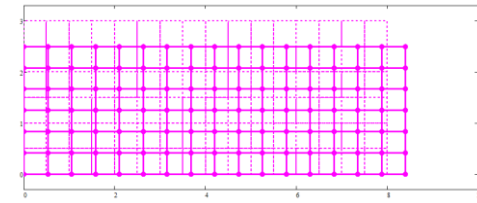
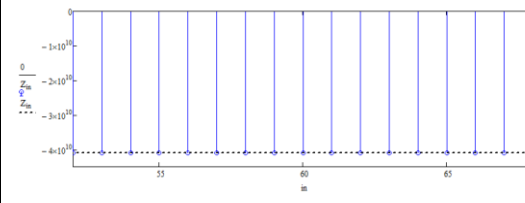
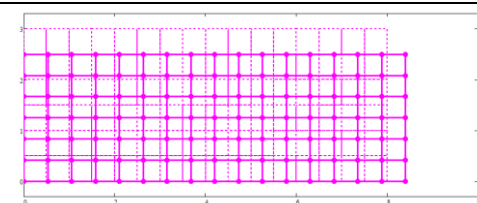
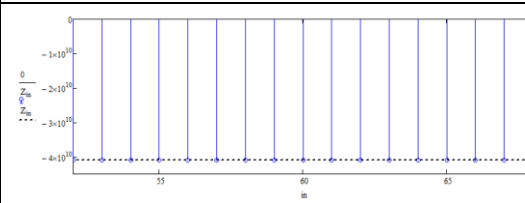
Таблица 4.3.1 Влияние изгибного модуля B на перемещения и вертикальные напряжения σ_y вблизи смещающейся границы	
$B = 0$	 
$B = 1 \cdot 10^9$	 
$B = 1 \cdot 10^{10}$	 

Использование моментной стесненной среды, как видно из полученных результатов, позволяет получить «пиковую» эпюру вертикальных напряжений вблизи смещающейся границы, причем «пиковость» вполне регулируется изгибно-крутильным модулем. Максимальный «всплеск» вертикальных напряжений наблюдается при нулевой моментной реологии. С ростом моментной напряженности среды пик пропадает.

*Отметим еще один факт: при $\nu < 0.99$ построенная численная модель стесненной среды ведет себя как **сжимаемая** (объем деформированной среды меньше исходного объема), т.е. фактически – как пористая.* Таким образом, использовать модель такой среды для имитации выдавливаемого слоя льда напрямую следует с учетом высоких значений коэффициента Пуассона (или низких – модуля Юнга), также переходящих в разряд идентифицируемых параметров реологии (с учетом того, что среда становится при $\nu > 0.5$ анизотропной). Параметр моментности l , определяемый по (3.1.7), отражает однозначную связь безмоментной и моментной реологии, однако слабо зависит от ν (*при $\nu = 0.3$ $l = 0.18$, при $\nu = 0.99$ $l = 0.22$*). Следует также заметить, что инерционные усилия при динамическом выдавливании вполне могут увеличить горизонтальные перемещения в несколько раз.

Использование модели нестесненного континуума. Используем ту же расчетную схему, заменив в ней моментные элементы на двухпараметрические (Таблица 4.3.2).

Таблица 4.3.2 Влияние модулей B и α на перемещения и вертикальные напряжения σ_y вблизи смещающейся границы

$B = 0,$ $\alpha \rightarrow 0$		
$B = 1 \cdot 10^{10},$ $\alpha = 10^{10}$		

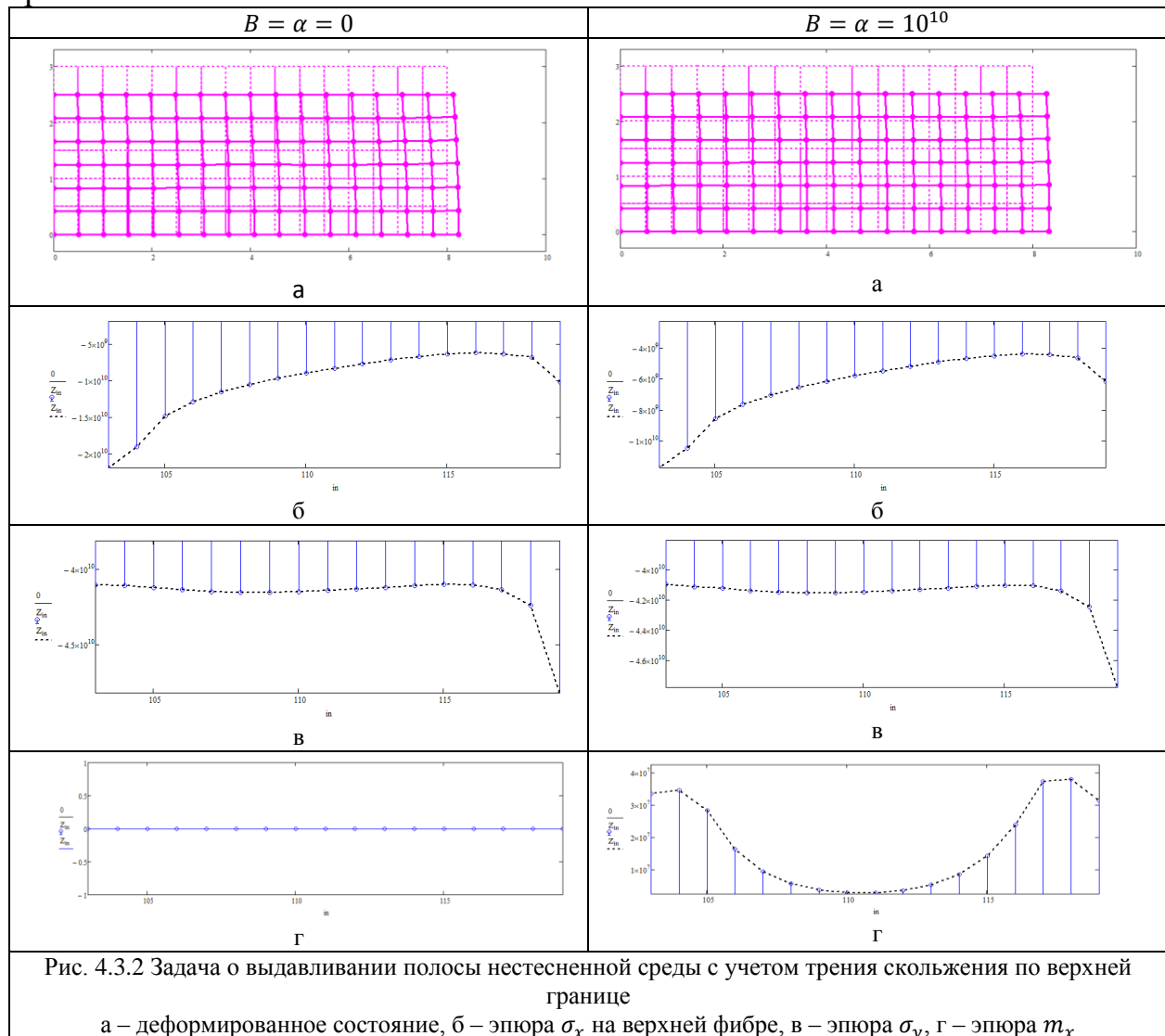
Напряженно-деформированное состояние при изменении моментной реологии сохраняется, касательные и моментные напряжения близки к нулю, то есть *решение абсолютно совпадает с безмоментным*. Таким образом, без источника ротации частиц среды экстремумы на эпюре «давления» в нестесненной среде отсутствуют.

Учет трения. В предыдущем случае (стесненной модели) малое поворотное возбуждение, возникшее за счет процедуры конденсации, позволило получить при сжатии неравномерное поле поворотов и напряжений. Создадим в рассматриваемой модели нестесненной среды на смещающейся границе продольное распределенное усилие, соответствующее низкому коэффициенту трения скольжения ($\mu = 0.1$), как инициатор неравномерности поля поворотов модели. Считаем, что кулоновское трение пропорционально нормальному давлению, в качестве которого берем *половину* вертикальных напряжений на границе модели без трения. Получим следующие поля перемещений и напряжений при различных моментных модулях (Рис. 4.3.2):

Всплеск продольных нормальных напряжений на эпюре в крайней фибре сохраняется при любых параметрах моментной реологии, однако при переходе от нулевых параметров к 10^{10} продольные напряжения падают в 2 раза. Вертикальные (поперечные) нормальные напряжения имеют незначительный (на рисунке увеличено) локальный всплеск на угловой границе модели. В остальной зоне они практически постоянны, небольшие (на 3 порядка меньше нормальных) моментные напряжения (Рис. 4.3.2, г) формируют слабый изгиб, дающий малую выпуклость на эпюре σ_y .

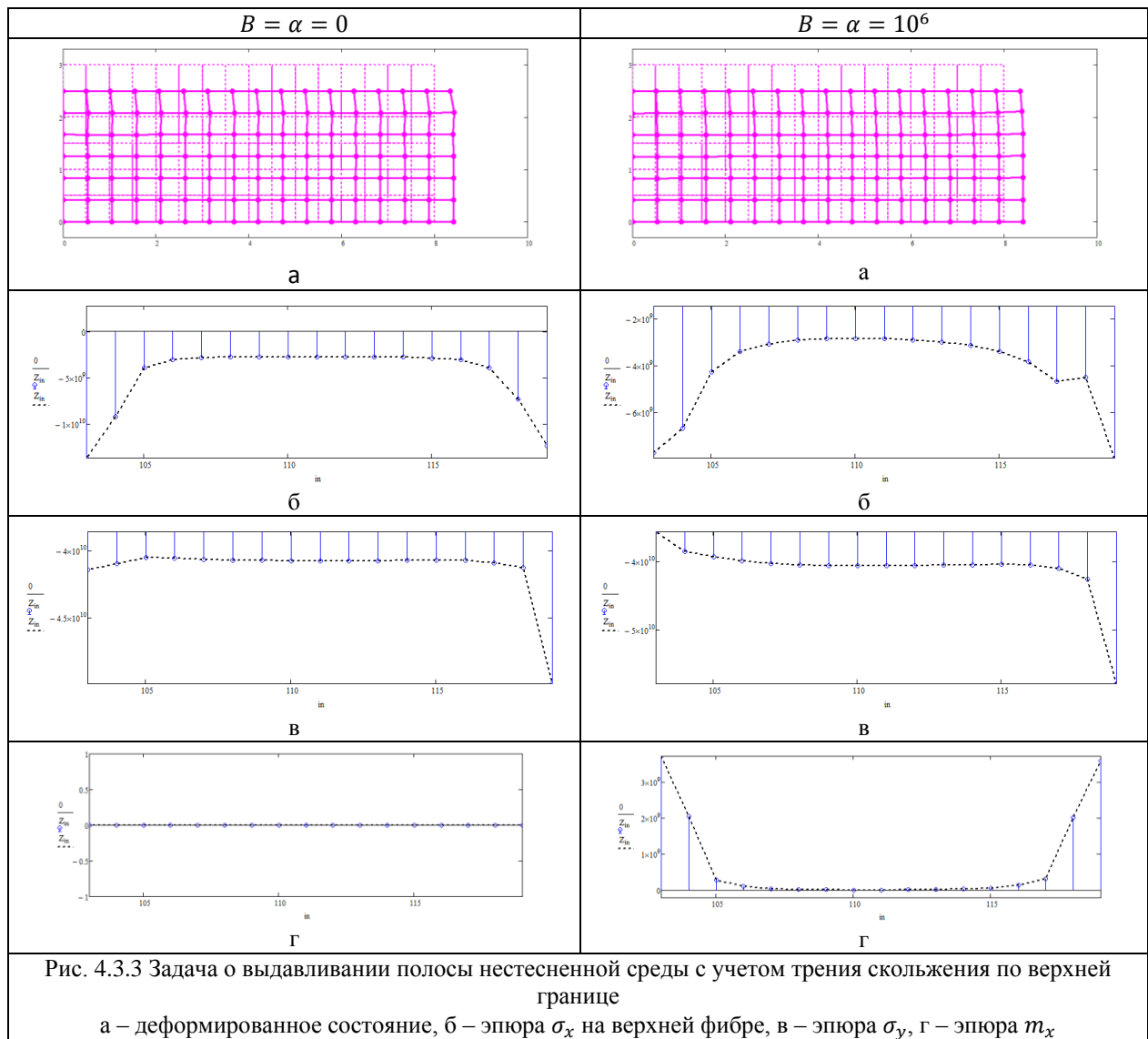
В сыпучих средах не менее важным является трение качения, которое можно смоделировать аналогично трению скольжения, задав равномерно распределенный противомомент на границе. Оценим влияние такого дополнительного нагружения (Рис. 4.3.3). Зададим коэффициент трения качения как тангенс угла внутреннего трения для сухих грунтов [90] и выберем угол внутреннего трения $\varphi = 20^\circ$ ($\mu = 0.34$). Распределенный

момент трения возьмем равным по величине распределенному усилию трения скольжения.



Незначительный пик вертикальных напряжений при нулевой моментности имеет место, с ростом модуля B он пропадает. Модуль α не влияет на характер эпюры, пик сохраняется при всех значениях модуля. Рост пика обеспечивается также при повышении коэффициента Пуассона. Отметим, что трение качения дает изменение деформаций только в крайнем слое элементов.

Таким образом, введение силового возбуждения поворотов приводит к качественной локализации нормальных поперечных напряжений в задаче выдавливания. Сочетание учета трения качения и скольжения способно дать «пиковую» эпюру. Учет реального непостоянства усилия трения может усилить «пиковость».



Геометрическое возмущение. Источником ротационных возмущений может быть и геометрия области. Имитируя наклонную жесткую границу, зададим линейно-переменное конечное смещение в её узлах (Рис. 4.3.4). Уровень градиента на оси симметрии и на периферии возьмем равным 1 мм (0.03% от минимального габарита области и 0.4% от задаваемого смещения).

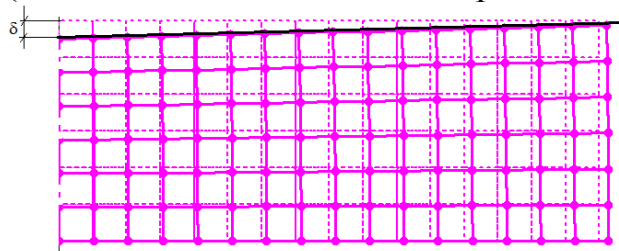


Рис. 4.3.4 Имитация наклонно смещаемой границы

Используем элементы нестесненного континуума. При расчете сжатия области при $B = 0$ и произвольных α возникает пиковая (пусть и с незначительной амплитудой) эпюра вертикальных напряжений σ_y (Рис. 4.3.5, б).

Повышение изгибно-крутильного модуля не приводит к существенному изменению характера эпюр. Таким образом, даже незначительное геометрическое возмущение дает в ротационно-подвижной среде локализацию давлений при выдавливании. Очевидно, при развитии пластического течения и повышении подвижности среды эта локализация будет усиливаться.

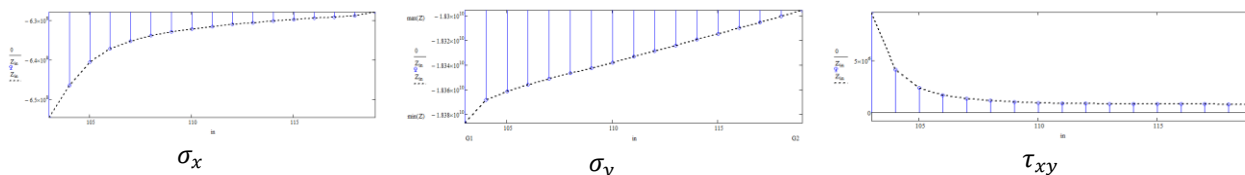


Рис. 4.3.5 Эпюры напряжений на верхней фибре модели с линейно-переменным смещением границы при $B = 0$

Реальные поверхности инденторов обладают градиентами и взаимодействуют с мелкодисперсными средами с трением, поэтому модель среды, построенная на основе несимметричной теории упругости, вполне может давать качественные эффекты, наблюдаемые в эксперименте.

Принципиально в случае наклонной границы пиковость эпюры σ_y возникает и в абсолютно безмоментной «классической» среде, однако перепад напряжений в пике и на периферии модели ниже, нежели при наличии ротационных степеней свободы и моментной жесткости. Таким образом, при определенных условиях (как это показано в Главе 2) качественно воспроизвести условия эксперимента по инденции можно и с помощью обычных КЭ. Поэтому модель льда или грунта как твердого деформируемого тела оправдана уже с точки зрения правильного воспроизводства характера контактной нагрузки. Моментная среда при этом дает более широкие возможности для идентификации.

4.4 Гибридное моделирование сжатия неоднородной структуры

На заключительном этапе исследования гибридного моментно-безмоментного моделирования используем двухслойную модель для имитации неоднородностей. При этом в «моментном» слое будем также использовать реологические параметры E и ν , отличные от параметров безмоментного слоя.

Рассмотрим решение (по традиционной теории) осесимметричной задачи динамического столкновения цилиндра с гладкой жесткой стенкой в упруго-пластической постановке дает четкое разделение упругой и пластической зон, причем координата начала пластического «слоя» при развитии текучести практически сохраняется. На Рис. 4.4.1 изображены стадии глубокого пластического деформирования цилиндра при динамическом высокоскоростном нагружении. Задача решена с использованием программного средства ANSYS в осесимметричной постановке с использованием высокоточных элементов PLANE82 (имеются промежуточные узлы, порядок аппроксимации перемещений – 2-й) [4].

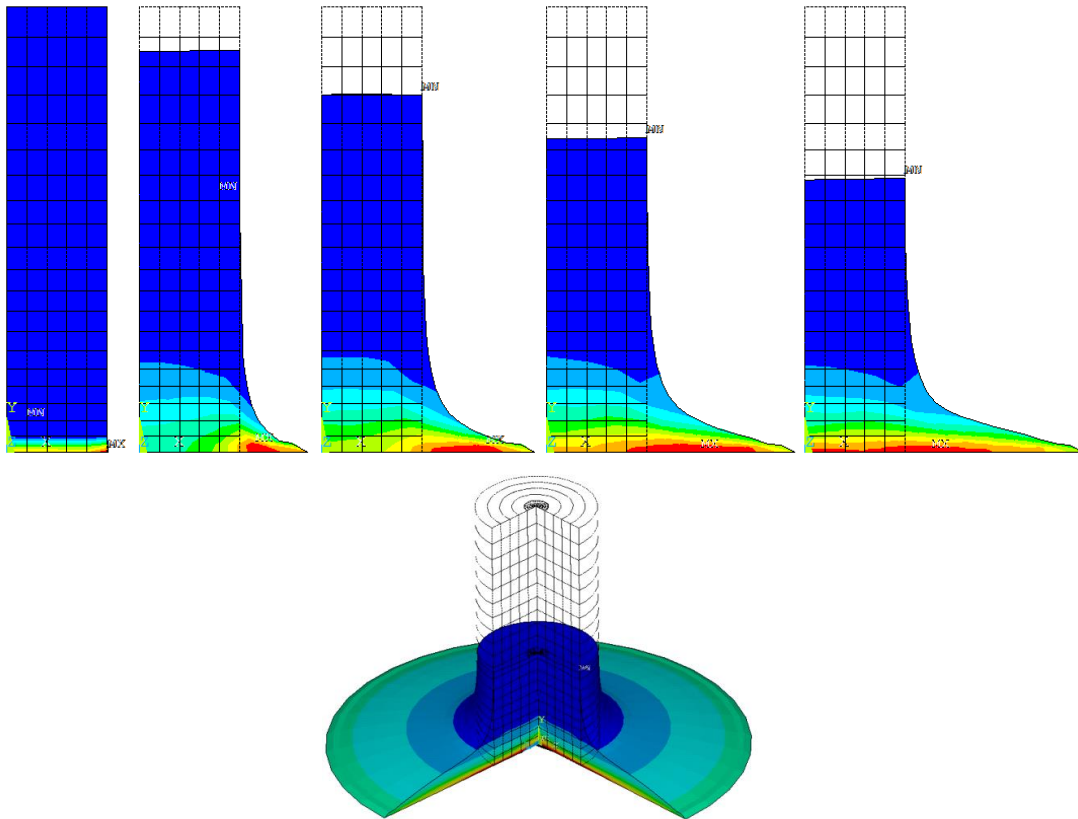


Рис. 4.4.1 Стадии деформирования цилиндрического ударника из тяжелого пластичного материала при столкновении с гладкой стенкой (кинематическая связь – двусторонняя). Параметры модели: осесимметричная, высота(длина) ударника 2 см, диаметр 9 мм, $\sigma_T = 27$ МПа, упрочнение отсутствует (близко к 0), $E = 2$ ГПа, $\nu = 0.4$, $\rho = 9000$ кг/м³, скорость при столкновении $V_0 = 100$ м/с, время процесса 140 мкс.

Характерной особенностью этой осесимметричной задачи является *постоянство зоны пластических деформаций по высоте (толщине)*. Отметим также *пиковость* эпюры вертикальных напряжений на нижней границе (для простоты задача решалась не в контактной постановке, а просто допускалась свобода радиальных перемещений пограничных узлов). Двусторонность связи обусловила отсутствие упругих отскоков модели, однако привела и к колебаниям эпюры «давлений» σ_y – при сохранении экстремума на оси модели эпюра в начальной стадии деформирования несколько раз меняла знак.

При столкновении с торосом (углом льдины, выступом и т.п.) задача о взаимодействии жесткой границы конструкции и льда рассматривается как задача о выдавливании слоя пластичного материала границей реальной и границей *условной*, образованной точками переходной зоны между неразрушенным и разрушенным диспергированным льдом. Как уже говорилось в Главе 1, распределение толщины слоя в процессе выдавливания остается близким к постоянному (за исключением более кратковременных по отношению ко всему процессу) начальной и финальной стадий [125], т.е. положение условной границы – фиксировано.

Таким образом, как видно из решения приведенной выше модельной задачи, процесс глубокого пластического деформирования *качественно* похож на процесс выдавливания: материал, переходящий в пластическое (объемно-разрушенное, «расплавленное») состояние как бы «втекает» в зону

постоянной толщины и деформируется в ней, в основном, в радиальном направлении, т.е. зона глубокой трансформации среды в пологий конус – ограниченная и постоянная. Закон сохранения объема несжимаемого вещества при этом уменьшает оставшуюся цилиндрическую часть.

Расчет упругопластической задачи даже в такой модельной постановке является крайне ресурсоемким. Для доведения пластических деформаций по Мизесу в рассмотренной задаче до 100% пришлось выполнить не менее 300 шагов динамического интегрирования, на каждом из них – не менее 10 шагов инкрементального нагружения с возможностью 100 равновесных итераций для корректировки мгновенной жесткости. Т.е. реальное обращение матрицы жесткости модели (требующей, к тому же, достаточно мелкой сетки) потребовалось выполнить несколько тысяч раз. Совершенно очевидно, что практическое использование таких моделей возможно только на очень мощной вычислительной технике.

Возможен переход к подвижной среде на неподвижной сетке (совмещение лагранжевого и эйлерового подхода), он реализован в высоконелинейных программах наподобие LS-DYNA [36], однако также ресурсоемок и сложен в применении.

В качестве средства снижения требований к вычислительным средствам предлагается использование гибридных моделей:

1) Введение ротационных степеней свободы в выдавливаемом слое повысит сходимость нелинейных решателей, снизив число итераций на шаге нагружения.

2) Учет местного растрескивания (объемного разрушения) возможен переводом только приграничных слоев безмоментных КЭ в «моментные» путем «включения» ротационных степеней по критерию текучести/разрушения. При этом остальная часть среды экономично моделируется безмоментными КЭ. Поскольку матрица жесткости гибридного КЭ имеет квазидиагональную структуру (Рис. 4.2.7), то перевод на определенном шаге нагружения безмоментных КЭ в моментные фактически означает *однократное* переформировывание матрицы индексов и матрицы жесткости системы.

При моделировании упругого поведения мы не получим больших перемещений «вытекающей» среды, однако сможем:

- *учесть энергопоглощение, возникающее вследствие фазового перехода, сужения пор и относительных качений частиц,*

- *учесть постоянство толщины выдавливаемого слоя,*

- *окружая рассматриваемые в задачах о соударениях конструкций и льда расчетные фрагменты льдин/торосов слоями моментных элементов, более корректно передать силовое воздействие на основной ледовый массив.*

Рассмотрим задачу о сжатии двухслойной прямоугольной области. В качестве моментной составляющей используем элементы стесненного и нестесненного континуума. Для сравнения также приведем результаты расчета полностью безмоментной среды.

Учет существенного изменения системной жесткости перешедшего в состояние текучести материала выполним *искусственно, путем снижения на порядок (до $2 \cdot 10^{10}$) модуля Юнга элементов «моментной» зоны и повышения коэффициента Пуассона до 0.5*. Это вполне соответствует вторым ветвям билинейных диаграмм с небольшим упрочнением с тем лишь исключением, что вводится сразу, а не по достижении в материале условий текучести. Чтобы внести ротационное возмущение, сместим также один из узлов всех моделей на небольшое расстояние (неправильность) δ , как показано на Рис. 4.4.2.

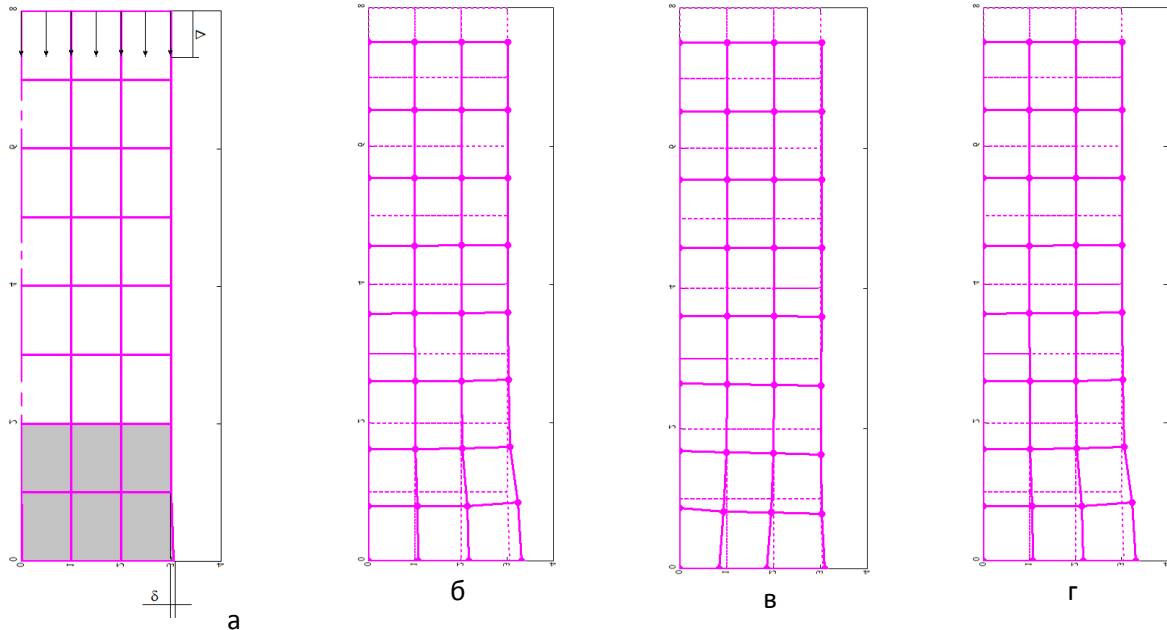


Рис. 4.4.2 Задача о сжатии двухслойной области:

а – Расчетная схема сжатия двухслойной модели на заданную величину $\Delta = 0.5$. Нижняя граница абсолютно жесткая и гладкая, правая граница – ось симметрии.

Деформированное состояние при нулевой моментной реологии:

б – безмоментная среда, в – двухслойная среда со стесненным моментным слоем, г – с нестесненным

На крупной сетке результаты расчета по безмоментной модели и по модели с нестесненным моментным слоем практически совпадают при нулевой моментной реологии (Рис. 4.4.2 б и г). Модель со стесненным моментным слоем дает существенно иной характер деформации, уравнивание безмоментной части происходит за счет больших ротаций.

Эпюры напряжений на границе слоев имеют вид (Рис. 4.4.3):

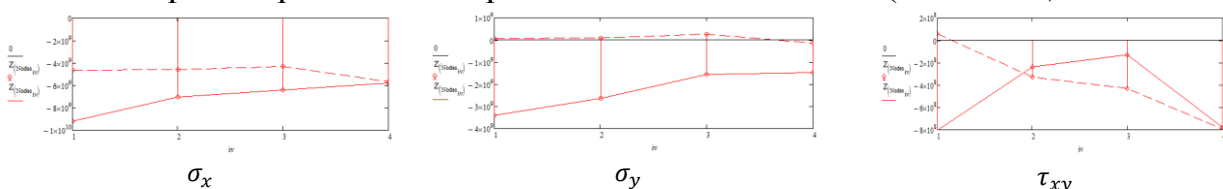


Рис. 4.4.3 Эпюры напряжений на границе слоев (сплошная линия – стесненный континуум, пунктирная – нестесненный в моментном слое)

За счет существенных местных искривлений в стесненной модели на границе с «классической» средой наблюдается поперечное сжатие (Рис. 4.4.3, эпюра σ_x).

Предположим, что варьируя видом моментной среды, а также моментной реологией, мы можем *регулировать уровень напряженности на*

границе раздела слоёв, сохраняя толщину моментного слоя при разных уровнях нагрузки.

Действительно, как показывает расчет при разных Δ , сохраняя «безмоментную» реологию неизменной и варьируя изгибно-крутильным модулем B и сдвиговым модулем α в диапазоне от 0 до ∞ , удастся изменять продольную деформацию моментного слоя лишь в довольно узком промежутке. Например, при $\Delta = 1$ – с 40% до 30%. При этом рост компонентов безмоментного тензора напряжений и деформация безмоментной части могут быть сколь угодно большими.

4.5 Выводы

По результатам 4-й Главы можно сделать ряд выводов.

1) Конечные элементы несимметричной теории упругости позволяют, сохраняя параметры традиционной реологии и варьируя моментными модулями, получать совершенно различные поля напряжений и деформаций при одинаковых видах нагружения, и притом – стабильные для сеток различной плотности. Это является обоснованием принципиальной возможности идентифицировать константы различных реальных сред по результатам упругого эксперимента.

2) Применение гибридного моделирования дает точные и экономичные численные решения задач с особыми (сингулярными) точками.

3) В задачах о нормальном упругом сдавливании моментных или гибридных моделей вполне возможно путем регулирования моментной реологии, а также возбуждением ротационных перемещений различными способами регулировать эпюры контактных давлений.

4) Перспективно использование моментных элементов для моделирования переходных зон при взаимодействии жестких границ с льдом и грунтом.

На текущем этапе исследования применение моментных элементов к решению контактных динамических нелинейных задач сопряжено с большой работой по программированию процедур нестационарного расчета и шагового нелинейного решения. Применить полученные модели среды «как есть», т.е. в упругой статической форме, можно в задачах предельного равновесия.

Глава 5 Оценка предельных усилий локального нагружения среды методом теории предельного равновесия

При всех преимуществах упругой моментной модели среды в пристеночном слое следует учитывать и пластичность среды. В механике грунтов и в ряде задач механики льда практическую ценность представляют упрощенные жесткопластические модели.

По сравнению с другими разделами механики сплошной среды, теория пластичности находится в особом положении, поскольку математически приводит к *краевым задачам для нелинейных уравнений в областях с неизвестными границами* (границы пластических зон должны определяться в процессе решения). Общие математические методы решения таких задач были разработаны лишь сравнительно недавно, в 60-70-х годах XX века и описаны в Главе 2. До этого времени наибольшие успехи в практическом применении теории пластичности были получены в рамках *теории предельного равновесия* (ТПР). Первые указания на возможность перераспределения изгибающих моментов в неразрезных балках при пластическом деформировании появились в работах Г. Казинчи (1914 г.) и Н. Киста (1917 г.) [74]. Понятия предельного равновесия и основные положения ТПР в виде трех теорем (статической, кинематической и теоремы двойственности) были впервые сформулированы А.А. Гвоздевым в докладе на Первой Всесоюзной конференции по пластическим деформациям в 1936 г [81]. Далее ТПР была проверена экспериментально А.А. Гвоздевым и его школой и использовалась при проектировании строительных конструкций. За рубежом эти работы не были известны до 1960 г., и при публикации перевода доклада А.А.Гвоздева было отмечено первенство его работы по предельному равновесию. В 1939 г. Л.В. Канторович разработал основы линейного программирования, широкое применение которого началось во второй половине XX века в связи с появлением и развитием ЭВМ. Математическая постановка задач ТПР представляет собой одно из приложений, в общем случае, задачи выпуклого программирования, и появление и реализация на ЭВМ симплекс-метода и других методов линейного программирования привела к значительно более широкому применению ТПР, поскольку при решении практических задач появилась возможность перейти от более или менее удачного подбора неизвестных распределений (полей) внутренних усилий или скоростей деформаций к их расчетному определению.

В терминах линейного программирования задача ТПР впервые была сформулирована А. Чарнсом и Х. Гринбергом [11]. Разработка в 1951 г. Д.С.Друкером фундаментального квазитермодинамического постулата устойчивости пластического состояния [16] позволило сформулировать более общую задачу ТПР в виде задачи выпуклого программирования. Решение конкретных задач ТПР, как задач линейного программирования, было получено за рубежом в работах А. Чарнса, С. Лемке, О. Зенкевича [12], Д. Купмана и Р. Ланса [123], В. Прагера [43], других авторов, а также в

отечественных работах А.А. Чираса [222], А.Р. Ржаницына [176], А.М. Проценко [173] и многих других.

В судостроительной практике впервые, видимо, П.Ф. Папкович в 1928 г. применил метод предельных нагрузок для расчета аварийных переборок. Позднее он же обращал внимание на рациональность применения этого метода к расчету конструкций ледовых усилений, говоря, что этот метод лучше соответствует физическому смыслу явления, чем метод упругих деформаций. П.Ф.Папкович предложил также решение для распределения усилий в предельном состоянии прямоугольного сечения при поперечном изгибе, сформулировав задачу как экстремальную. В отечественном судостроении расчетами конструкций с учетом пластических свойств материала занимались также В.В. Козляков, Л.М. Беленький, А.М. Бененсон, Е.П. Бураковский и ряд других авторов. В работах Л.М.Беленького [66, 67] приводится много результатов исследований предельного состояния судовых конструкций, однако вместо уже известных методов математического программирования использовался поиск кинематического механизма путем перебора возможных механизмов. Поскольку в расчетах местной прочности практический интерес часто представляет предельное состояние конструкции при поперечном изгибе, а сформулировать математически условие кинематической совместности механизма при изгибно-сдвиговом разрушении априори довольно затруднительно, этот путь может оказаться неэффективным – при переборе существует опасность не обнаружить и, соответственно, не учесть возможные механизмы, часто нетривиальные, которым будет соответствовать минимальная (в кинематической постановке задачи) предельная нагрузка, то есть совершить ошибку в опасную сторону. В 1984 г. была (одной из первых в судостроении) опубликована работа [73], в которой было получено решение *задачи о предельном состоянии конструкции при поперечном изгибе как задачи выпуклого программирования*. С тех пор вышел ряд статей и даже монографий [179, 206, 146, 145, 223], посвященных этому направлению. Очень много работ связано с промышленным и гражданским строительством, где расчеты по ТПР наиболее актуальны в связи с широким использованием железобетона.

В конце XX в. вследствие интенсивного развития мощных конечно-элементных программных комплексов, таких, как ANSYS, NASTRAN, LS-DYNA и др., появилась достаточно эффективная альтернативная возможность выполнения упруго-пластических расчетов сложных конструкций на разных стадиях работы материала, и такие расчеты получают все большее распространение. Однако они все еще довольно трудоемки, носят уникальный характер и требуют высокой квалификации исполнителей. Кроме того, затруднительно идентифицировать промежуточные состояния расчетных моделей как предельные, такие методики только начинают появляться. Поэтому представляется, что наряду с *прямыми* методами расчета, учитывающими историю нагружения, в настоящее время методы ТПР для расчетов предельной прочности различных сред (будем называть их *непрямыми*, т.к. они базируются на критериях, *не учитывающих процесс*

утраты несущей способности) сохраняют практическую ценность. Кроме того, эти методы также совершенствуются и все более адаптируются к их использованию в компьютерных технологиях.

Экстремальные теоремы (особенно кинематическая) теории предельного равновесия позволяют строить при известных поверхностях скольжения эффективные алгоритмы расчета предельных нагрузок, в т.ч. нагрузок внедрения инденторов в жестко-пластическую среду или нагрузок на откосы.

Перспективным методом оценки предельных уровней нагружения по жесткопластическим моделям является метод вариации упругих параметров (МВУ) Р.А. Каюмова и Ю.Л. Рутмана [206, 179], который нашел применение не только в механике конструкций, но и в механике грунтов [223]. Так как давления на конструкцию ледовой техники не могут превышать предельных нагрузок, разрушающих лед, то уточнение предельных уровней нагружения при взаимодействии конструкции конкретной конфигурации и льда позволит более точно оценивать расчетные нагрузки и проектировать ледовые усиления на более достоверной основе.

5.1 Метод вариации параметров упругости как универсальный численный метод теории предельного равновесия идеальных упруго-пластических тел

Адаптируемый к анализу предельных нагрузок конечно-элементной модели полупространства метод вариации упругих характеристик (МВУ) разработан в 90-х гг. Р.А. Каюмовым и Ю.Л. Рутманом и в настоящее время подробно исследуется для различных задач строительной механики. Метод хорошо сочетается с дискретизацией по МКЭ или другому методу и, соответственно, пригоден для ЭВМ. Получим алгоритм метода применительно к дискретным матричным системам.

Рассматривая поведение среды при глубоком пластическом деформировании пренебрежем упругой деформацией, т.е. заменим диаграмму Прандтля жестко-пластической диаграммой.

Система уравнений механики сплошной среды для такой модели при квазистатическом нагружении поверхностной нагрузкой с компонентами p_{vj} состоит из уравнений равновесия (5.1.1), геометрических соотношений (5.1.2) и физических соотношений в виде ассоциированного закона течения для материала (5.1.3), где критерий текучести определяет функция предельной поверхности f^* в напряжениях.

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0; \quad \sum_j \sigma_{ij} l_j = p_{vj}; \quad (5.1.1)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right); \quad (5.1.2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} \lambda \frac{\partial f^*(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, & \lambda \geq 0, \quad \text{если } f^*(\sigma_{ij}) = 1 \\ 0, & \text{если } f^*(\sigma_{ij}) < 1 \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Решение системы определяет *характер* отклика жесткопластического тела на нагрузку в одном из вариантов: а) Нагрузка уравнивается допустимыми напряжениями, то есть напряжениями, удовлетворяющими *второй* части условия (5.1.3); тело не деформируется и сохраняет несущую способность; б) Невозможно найти совокупность допустимых напряжений, уравнивающих данную нагрузку, т. е. несущая способность тела исчерпана; в) Нагрузка уравнивается допустимыми напряжениями согласно *первой* части условия (5.1.3), одновременно появляется ненулевое поле скоростей \vec{V} и происходит потеря несущей способности. Нагрузку третьего варианта и называют *предельной* и считают решением задачи о предельном равновесии.

Если $f^*(\sigma_{ij})$ получается записать как квадратичную форму от σ_{ij} , то ассоциированный закон (5.1.3) можно представить в виде:

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \lambda [\Pi] \{\sigma\}, \quad (5.1.4)$$

где $[\Pi]$ – *матрица предельной поверхности*, $\{\sigma\}$ – вектор напряжений, собранный из компонентов тензора в заданном порядке.

Введем параметр α , зависящий от предела текучести материала. На основе, например, квадратичного критерия Мизеса условие $f^*(\sigma_{ij}) = 1$ можно записать как

$$f(\{\sigma\}, \alpha) = \sum_i \sum_j \Pi(\alpha)_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [\Pi(\alpha)] \{\sigma\} = 1 \quad (5.1.5)$$

$$\text{Очевидно, что } \Pi(\alpha)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}.$$

Уравнение предельной поверхности (УПП), построенное на основе критерия Мизеса, для плоской задачи симметричной теории упругости имеет вид:

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_T}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_T}\right) + 3 \left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_T}\right)^2 = 1, \quad (5.1.6)$$

а соответствующая ему матрица –

$$[\Pi] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sigma_T^2} & -\frac{1}{\sigma_T^2} & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_T^2} & \frac{2}{\sigma_T^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{\sigma_T^2} \end{bmatrix}, \quad (5.1.7)$$

где σ_T – предел текучести материала. Очевидно, что здесь $\alpha = \frac{1}{\sigma_T^2}$.

Пусть S – некоторый параметр (обобщенная координата), характеризующий положение в деформируемом теле точки, исследуемой на предельное состояние. В конечно-элементной модели это может быть порядковый номер элемента, однозначно связанный с декартовыми

координатами узлов. Тогда поля напряжений и скоростей деформаций, а также параметр α во всем теле – функции этой обобщенной координаты.

Выражение (5.1.4) можно переписать для всей модели тела как:

$$\{\dot{\varepsilon}(S)\} = \lambda(S) [\Pi(\alpha(S))] \{\sigma(S)\} \text{ или } \{\sigma(S)\} = \frac{1}{\lambda(S)} [\Pi(\alpha(S))]^{-1} \{\dot{\varepsilon}(S)\} \quad (5.1.8)$$

Структура полученных соотношений между напряжениями и скоростями деформаций *аналогична* линейной структуре зависимостей закона Гука при упругой постановке задачи:

$$\{\sigma(S)\} = [G(S)] \{\varepsilon(S)\} \quad (5.1.9)$$

Указанная аналогия между (5.1.8) и (5.1.9) позволяет высказать такое утверждение: *если построить упругую статическую систему с полем физических жесткостей $[G^*(S)]$, пропорциональных в соответствующих точках коэффициентам при скоростях деформаций $\{\dot{\varepsilon}(S)\}$, то напряжения в такой системе при действии предельной нагрузки (т.е. при появлении ненулевых скоростей) будут такими же, что и в соответствующей жесткопластической задаче, когда $\{\varepsilon(S)\} = \{\dot{\varepsilon}(S)\}t$, где t – время или параметр простого нагружения.*

Доказательство [179]. Пусть жесткопластическое решение для рассматриваемой задачи *известно*. Это означает, что определены: предельная нагрузка, напряжения $\{\sigma(S)\}$ и скорости деформаций $\{\dot{\varepsilon}(S)\}$.

Подставив в (5.1.5) второе из равенств (5.1.8), получим

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}, \alpha, S) &= \frac{1}{2} \{\sigma(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))] \{\sigma(S)\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\lambda(S)} [\Pi(\alpha(S))]^{-1} \{\dot{\varepsilon}(S)\} \right\}^T [\Pi(\alpha(S))] \left\{ \frac{1}{\lambda(S)} [\Pi(\alpha(S))]^{-1} \{\dot{\varepsilon}(S)\} \right\} \\ &= \frac{1}{2\lambda(S)^2} \{\dot{\varepsilon}(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))]^{-1} \{\dot{\varepsilon}(S)\} = 1 \end{aligned}$$

или, в скалярной форме:

$$\sum_i \sum_j \frac{\Pi(\alpha(S))_{ij}^{-1}}{2\lambda(S)^2} \dot{\varepsilon}_i(S) \dot{\varepsilon}_j(S) = 1 \quad (5.1.10)$$

Преобразуем (5.1.10), умножив числитель и знаменатель в левой части на произвольный ненулевой коэффициент $t_2 = const$, где t имеет размерность времени, и учтём равенства $\varepsilon_i(S) = \dot{\varepsilon}_i(S)t$:

$$\sum_i \sum_j \frac{\varepsilon_i(S) \Pi(\alpha(S))_{ij}^{-1} \varepsilon_j(S)}{2\lambda^2(S) t^2} = \frac{1}{2\lambda^2(S) t^2} \{\varepsilon\}^T [\Pi(\alpha(S))]^{-1} \{\varepsilon\} = 1 \quad (5.1.11)$$

Сохраняя все геометрические размеры, граничные условия и нагрузку системы, будем считать, что ее материал обладает *не жесткопластическими, а упругими* свойствами. С учетом (5.1.11) примем распределение жесткостей пропорционально коэффициентам при $\dot{\varepsilon}_i(S)$ в (5.1.8) следующим образом:

на недеформирующихся в жесткопластической модели участках (где $\lambda = 0$, а $\frac{1}{2} \{\sigma(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))] \{\sigma(S)\} < 1$):

$$G^*(S)_{ij} \rightarrow \infty \quad (5.1.12)$$

в каждом деформирующемся элементе (т.е. в пластической зоне жесткопластической модели, где $\frac{1}{2}\{\sigma(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))] \{\sigma(S)\} = 1$):

$$G^*(S)_{ij} = \frac{\Pi(\alpha(S))_{ij}^{-1}}{\lambda(S)t} = K(S) \Pi(\alpha(S))_{ij}^{-1} \quad (5.1.13)$$

где $K(S) = \frac{1}{\lambda(S)t}$ – скалярная функция обобщенной координаты, не зависящая от вида деформации.

Сопоставляя соотношения (5.1.11) и (5.1.13), видим, что сформированная указанным образом упругая система *сходна* с исходной жесткопластической. Действительно, если создать в упругой системе деформацию, соответствующую форме разрушения жесткопластической системы: $\{\varepsilon(S)\} = t\{\dot{\varepsilon}(S)\}$, то

$$\begin{aligned} \{\sigma(S)\} &= [G^*(S)]\{\varepsilon(S)\} = \frac{[\Pi(\alpha(S))^{-1}]}{\lambda(S)t} \{\varepsilon(S)\} \\ &= \frac{[\Pi(\alpha(S))^{-1}]\{\dot{\varepsilon}(S)\}t}{\lambda(S)t} = \frac{[\Pi(\alpha(S))^{-1}]\{\dot{\varepsilon}(S)\}}{\lambda(S)} \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Из (5.1.14) и (5.1.10)-(5.1.11) следует, что в упругой и жесткопластической системах равенство (5.1.5) выполняется в одних и тех же точках (зонах, элементах). Действительно, подставив напряжения из псевдоупругой модели (5.1.14) в УПП, получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\{\sigma(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))] \{\sigma(S)\} \\ &= \frac{1}{2\lambda(S)^2} \left\{ [\Pi(\alpha(S))]^{-1} \{\dot{\varepsilon}(S)\} \right\}^T [\Pi(\alpha(S))] \left\{ [\Pi(\alpha(S))]^{-1} \{\dot{\varepsilon}(S)\} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\lambda(S)^2} \{\dot{\varepsilon}(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))]^{-1} \{\dot{\varepsilon}(S)\} = 1 \end{aligned}$$

т.е. равенство (5.1.10).

Учтём тот факт, что для квадратичных поверхностей текучести матрица $[\Pi(\alpha(S))]$ является постоянной, умноженной на α , а обратная к ней – также постоянной, умноженной на $\frac{1}{\alpha}$ (см., например, матрицу для ПНС (5.1.7)).

Из выражений (5.1.14) также видно, что в этих точках отношение напряжений в упругой системе

$$\frac{\sigma_i(S)}{\sigma_j(S)} = \frac{\dot{\varepsilon}_i}{\dot{\varepsilon}_j} \frac{\alpha_j}{\alpha_i}, \quad (5.1.15)$$

что соответствует (5.1.8) – ассоциированному закону), т.е. жесткопластическому решению. Как отмечено в работе А.И. Ржаницына [176], в предельном состоянии величины напряжений в местах образования пластических течений (точках или целых элементах модели) полностью определяют распределение внутренних усилий в целом, а также величину действующей нагрузки (*следствие С.Э.Т.*).

Таким образом, распределение напряжений и внешняя нагрузка в исходной жесткопластической и в сформированной с помощью соотношений (5.1.12)-(5.1.13) системах – совпадают. Что и требовалось доказать.

Исходная жесткопластическая задача сводится к поиску распределения жесткостей G_{ij}^* в «эквивалентной» упругой системе. Величины типа G_{ij}^* будем называть *переменными (варьируемыми) параметрами упругости или «псевдожесткостями»*. Для поиска распределения «псевдожесткостей» используем метод простых итераций, строя рекуррентные соотношения на основе равенств (5.1.14), (5.1.15) и (5.1.5). Из них следует

$$K(S) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \{\varepsilon(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))]^{-1} \{\varepsilon(S)\}}} \quad (5.1.16)$$

Соотношение (5.1.16) выполняется для всех сечений системы, в том числе – и для недеформирующихся участков (в этом случае все $\varepsilon_{ij} = 0$ и $K(S) \rightarrow \infty$). Задав в нулевом приближении $K^{(0)}(S)$ и уровень заданного типа нагрузки $Q(0)$ (сосредоточенной, распределенной, комбинированной), из решения упругой задачи методом перемещений можно найти $\{\varepsilon(S)\}^{(0)}$, затем по (5.1.16) найти $K^{(1)}(S)$ и так далее.

Так как $K^{(0)}(S)$ задается произвольно, то, при сходимости описанных итераций, функция $K(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{(n)}(S)$. Следовательно, функции $G_{ij}^*(S)$ на n -м приближении определяются с точностью до постоянного множителя $K^{(n)}(S)$. Однако такой множитель не влияет на *распределение* внутренних усилий в упругой системе. Найденное окончательно распределение усилий будет соответствовать с требуемой точностью предельному состоянию. Но само это распределение не является основной целью расчета конструкции на несущую способность.

В итерационный процесс требуется включить коэффициент, определяющий уровень нагрузок, соответствующий предельному состоянию. Его значение находим из условия, что в максимально нагруженной точке/зоне выполняется соотношение (5.1.5), то есть, применяя условие статической экстремальной теоремы о допустимом поле напряжений.

При такой организации итерационного процесса нагрузка и распределение варьируемых параметров упругости будут соответствовать состоянию предельного равновесия конструкции. С учетом (5.1.12) - (5.1.14) рекуррентное выражение получим в виде (s – номер итерации):

$$\begin{aligned}
K^{(s)}(S) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\{\varepsilon^{(s-1)}(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))]^{-1}\{\varepsilon^{(s-1)}(S)\}}} = \\
&= \frac{K^{(s-1)}(S)}{K^{(s-1)}(S)\sqrt{\frac{1}{2}\{\varepsilon^{(s-1)}(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))]^{-1}\{\varepsilon^{(s-1)}(S)\}}} = \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\{\varepsilon^{(s-1)}(S)\}^T K^{(s-1)}(S) [\Pi(\alpha(S))]^{-1}\{\varepsilon^{(s-1)}(S)\}}}{K^{(s-1)}(S)} = \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\{[G^*(S)]^{-1}\{\sigma^{(s-1)}(S)\}\}^T K^{(s-1)}(S) [\Pi(\alpha(S))]^{-1}\{[G^*(S)]^{-1}\{\sigma^{(s-1)}(S)\}\} K^{(s-1)}(S)}}{K^{(s-1)}(S)} = \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\{\sigma^{(s-1)}(S)\}^T [G^*(S)]^{-1} K^{(s-1)}(S) \{\sigma^{(s-1)}(S)\}}}{K^{(s-1)}(S)} = \\
&= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\{\sigma^{(s-1)}(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))] \{\sigma^{(s-1)}(S)\}}}{K^{(s-1)}(S)} = \quad (5.1.17)
\end{aligned}$$

Если \vec{F} – вектор, описывающий характер распределения нагрузки, а β – коэффициент уровня нагрузки, то

$$\vec{F}^{(s)} = \beta^{(s)} \vec{F}^{(s-1)} = \beta^{(s)} \beta^{(s-1)} \dots \beta^{(1)} \vec{F}^{(0)} \quad (5.1.18)$$

$$\beta^{(s)} = \min_s \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\{\bar{\sigma}^{(s-1)}(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))] \{\bar{\sigma}^{(s-1)}(S)\}}} \quad (5.1.19)$$

В (5.1.19) $\{\bar{\sigma}^{(s-1)}(S)\}$ – напряжения, определенные для $(s-1)$ -го распределения жесткостей при нагрузке $\vec{F}^{(s-1)}$, в отличие от фигурирующих в (5.1.17) напряжений $\{\sigma^{(s-1)}(S)\}$, определяемых для $(s-1)$ -го распределения жесткостей при нагрузке $\vec{F}^{(s)}$.

Так как с учетом (5.1.18) $\beta^{(n)}\{\bar{\sigma}^{(s-1)}(S)\} = \{\sigma^{(s-1)}(S)\}$, то из (5.1.19) следует, что

$$\min_s \sqrt{\frac{1}{2}\{\bar{\sigma}^{(s-1)}(S)\}^T [\Pi(\alpha(S))] \{\bar{\sigma}^{(s-1)}(S)\}} = 1 \quad (5.1.20)$$

Следовательно, переход от нагрузки $\vec{F}^{(s-1)}$ к нагрузке $\vec{F}^{(s)}$ приводит наиболее нагруженную точку (элемент) в псевдоупругой системе в состояние текучести (5.1.5).

Среди всего бесконечного множества распределения жесткостей в рассматриваемой системе распределение (5.1.12)-(5.1.13) обладает следующим особым свойством: если использовать прямой метод решения задач предельного равновесия, то переход системы из упругого состояния в состояние предельного равновесия происходит *без промежуточных этапов последовательного образования пластических зон («поверхностей скольжения», «пластических шарниров»)*. Иначе говоря, при достижении нагрузкой предельного значения все пластические шарниры, создающие

кинематическую схему превращения системы в механизм, образуются *одновременно*.

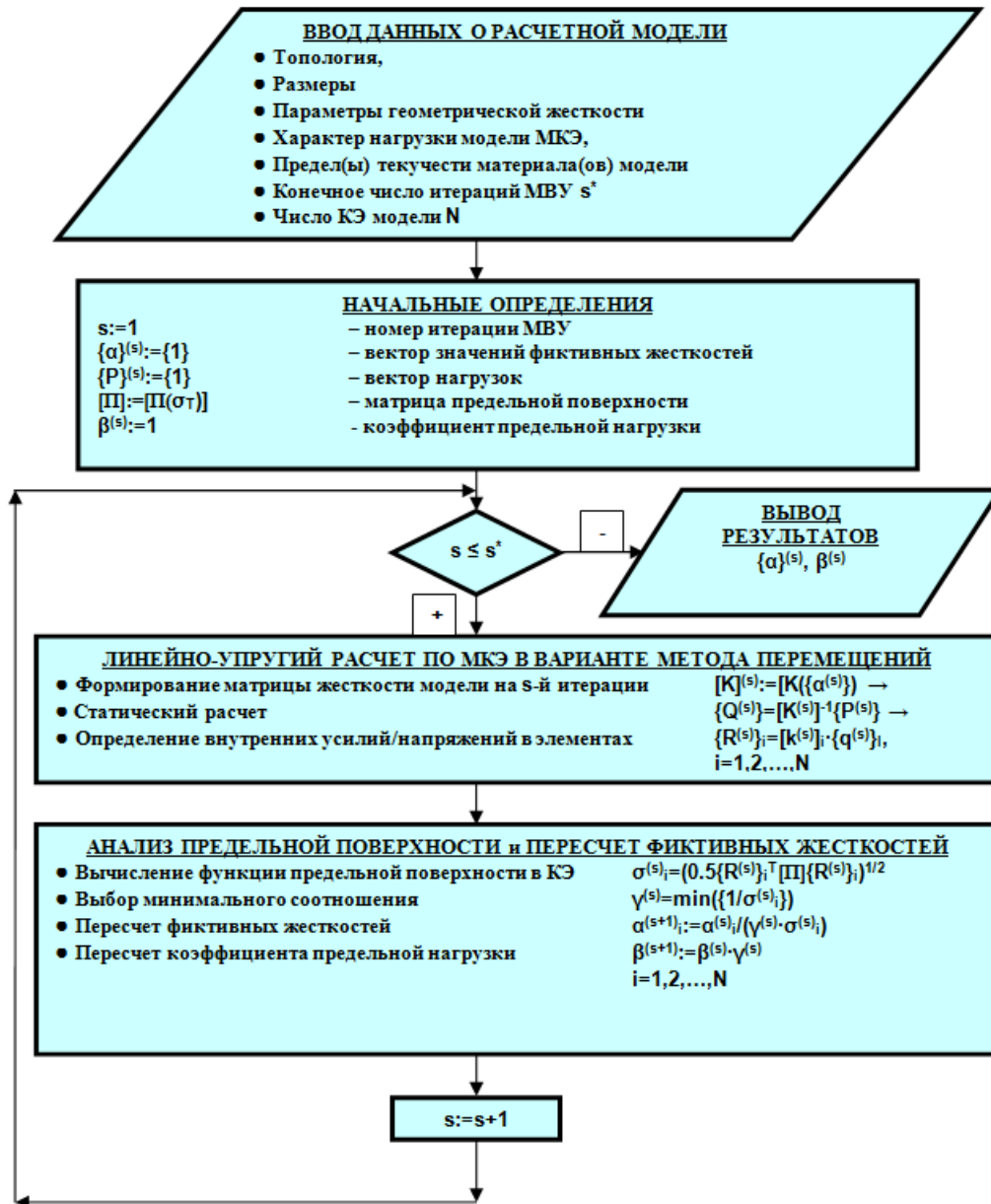


Рис. 5.1.1 Алгоритм итерационного метода вариации упругих характеристик

Таким образом, суть *метода вариации упругих характеристик* (МВУ) состоит в итерационном перераспределении поля фиктивных физических жесткостей упругой модели конструкции, которое дает те же внутренние усилия, что и наблюдаемые в предельном состоянии, т.е. состоянии, при котором скорости пластических деформаций становятся ненулевыми. Фиктивные жесткости не позволяют получить истинное деформированное состояние модели при коллапсе, однако дают картину *характера поля скоростей пластических деформаций*. Уровень внешней нагрузки, при котором это поле стабилизируется, и является предельным. К преимуществам МВУ, помимо линейности расчетной модели и вытекающим из нее быстроте счета и универсальности упругого решателя, можно отнести и инвариантность по отношению к уравнению предельной поверхности с точки зрения сложности применения метода.

Алгоритм МВУ применительно к матричным системам представлен на Рис. 5.1.1. В расчетных моделях, например, МКЭ, переменными параметрами упругости можно принять множители при матрицах жесткости тех или иных конечных элементов.

Отметим еще, что картина поля скоростей деформаций определяется величинами, обратными к псевдожесткостям. Назовем их «псевдоподатливостями».

В монографии [206] строго доказана возможность применения МВУ для получения как нижних, так и верхних оценок предельной нагрузки, а также отражены особенности её расчета в случае сложного нагружения.

5.2 Решение задач о локальном нагружении полуплоскости и оценка энергоемкости по пластической работе

Основное требование к моделям ТПР – *простой* характер нагружения. Для ряда контактных задач эпюра контактного давления с точки зрения предельного равновесия успешно заменяется упрощенной эпюрой внешнего давления [149], амплитуда и размер которой пропорциональны одному параметру нагружения. Поэтому в рассматриваемых ниже решениях локальное контактное нагружение заменено упрощенным силовым (пятном равномерного давления).

Для верификации МВУ рассмотрим численную модель плоской задачи о нагружении полупространства (в данном случае – ограниченной полуплоскости), Рис. 5.2.1, локализованным в «пятно» равномерным давлением. В упругой постановке решение задачи получено, в частности, Буссинеском [91].

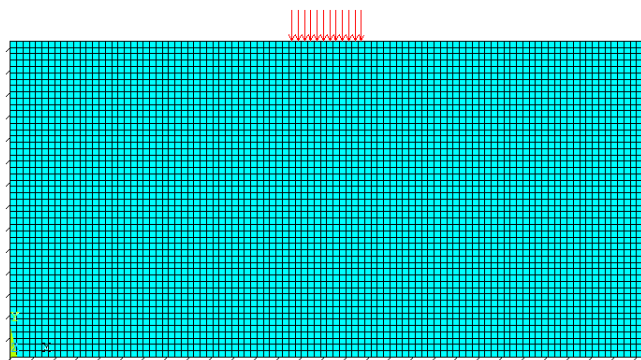


Рис. 5.2.1 Расчетная схема задачи с локализованным воздействием

Исследуется плоское напряженное состояние, используются 4-х-узловые конечные изопараметрические элементы классической теории с 8 степенями свободы и линейной аппроксимацией перемещений (PLANE42 конечно-элементной программы ANSYS). Сетка на расчетную область накладывается регулярная и

достаточно мелкая, чтобы кусочное поле напряжений, осредненных по элементам (не по узлам!) было, тем не менее, достаточно гладким в зонах концентрации. Размеры области – 1x0.5 м. Размеры квадратных КЭ сетки – 1 см. Размер пятна нагрузки – 12 см, позволяющий практически исключить автотельные эффекты и при этом обеспечивающий существенное затухание возмущений на неподвижных боковых и нижней границах расчетной области. Используется близкая к прандтлевой билинейная модель

материала с пределом текучести 320 МПа и слабым упрочнением порядка 10^3 Па, что не принципиально для получения качественных выводов.

Расчет проводился в 2 этапа.

На I этапе решалась задача ТПР методом вариации упругих параметров, с использованием упругой расчетной модели. Параметром упругости (фиктивной жесткостью), варьируемым в задаче в пределах каждого КЭ, считаем множитель при модуле Юнга материала. Очевидно, что при этом конечно-элементная модель содержит большую дополнительную информацию о «псевдоматериалах» в каждом КЭ.

Для реализации МВУ в среде ANSYS [4] было разработано прикладное программное обеспечение в виде макроса на языке APDL [4], обеспечивавшее многократный запуск конечно-элементного решателя. Текст макроса представлен в Приложениях.

Предельная поверхность была задана уравнением в форме Мизеса:

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_T}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x \cdot \sigma_y}{\sigma_T}\right) + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_T}\right)^2 = 1, \quad (5.2.1)$$

а соответствующая ему матрица имела вид:

$$[\Pi] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sigma_T^2} & -\frac{1}{\sigma_T^2} & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_T^2} & \frac{2}{\sigma_T^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{\sigma_T^2} \end{bmatrix}. \quad (5.2.2)$$

МВУ продемонстрировал устойчивую сходимость уже на 7-8 итерации (Рис. 5.2.2). Удовлетворение условия «текучести» на каждой итерации считалось выполняющимся по всему рассматриваемому элементу. Для этого решение в напряжениях осреднялось в пределах каждого элемента и представлялось в виде таблицы данных ETABLE.



Рис. 5.2.2 Сходимость метода псевдоупругих параметров

Предельная нагрузка составила, как видно из графика на Рис. 5.2.2, $Q = 3.65 \cdot 10^8$ Н/м. Некоторые результаты для модели с перестроенными локальными жесткостями представлены на Рис. 5.2.3-Рис. 5.2.5.

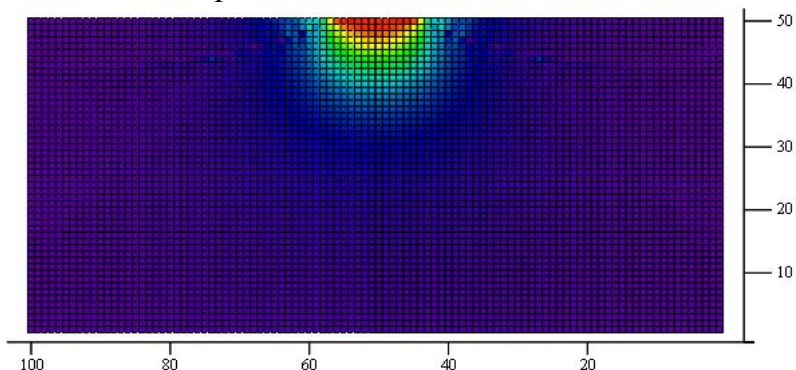


Рис. 5.2.3 Поле значений функции предельной поверхности на последней итерации

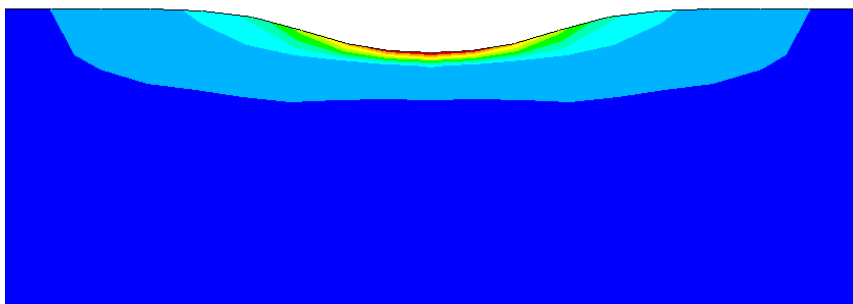
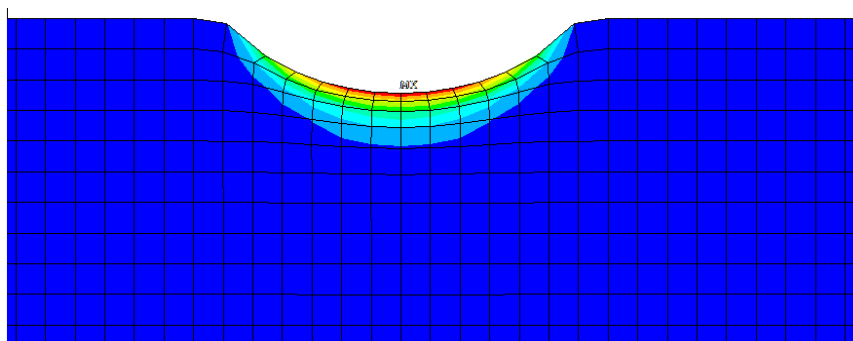


Рис. 5.2.4 Форма просадки модели МВУ на последней итерации (фрагмент модели) и действительная пластическая просадка, полученная нелинейным решением с разгрузкой.

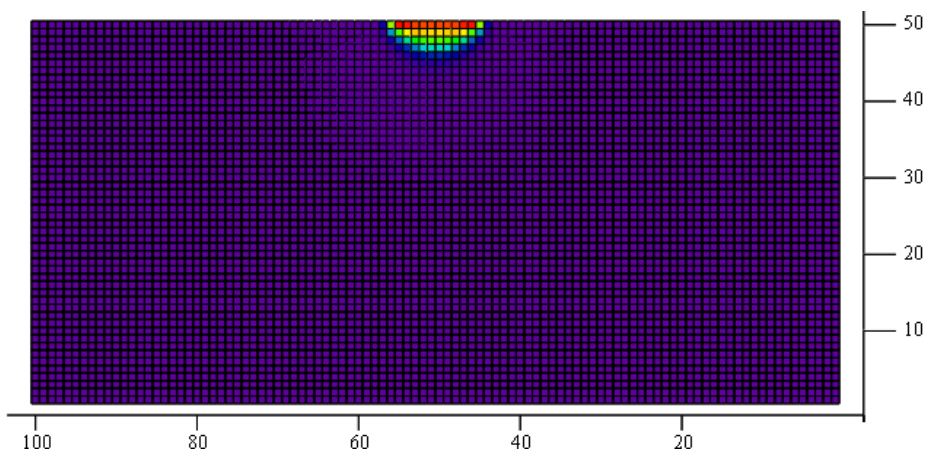


Рис. 5.2.5 Поле псевдоподатливостей (форма поля скоростей деформаций) на последней итерации

Анализируя эти поля, видим, что для идеально-пластической модели материала локальное воздействие приводит к локализованной «вмятине» с

существенным затуханием возмущений в среде при удалении от зоны воздействия.

На II этапе для проверки полученного результата прямым расчетом была задана нагрузка в 105% от полученной МВУ и выполнено пошаговое нагружение упругопластической модели до этой нагрузки с использованием корректировки методом Ньютона-Рафсона, в программе ANSYS. Изменение характера деформирования можно отследить на характерных кривых (Рис. 5.2.6).

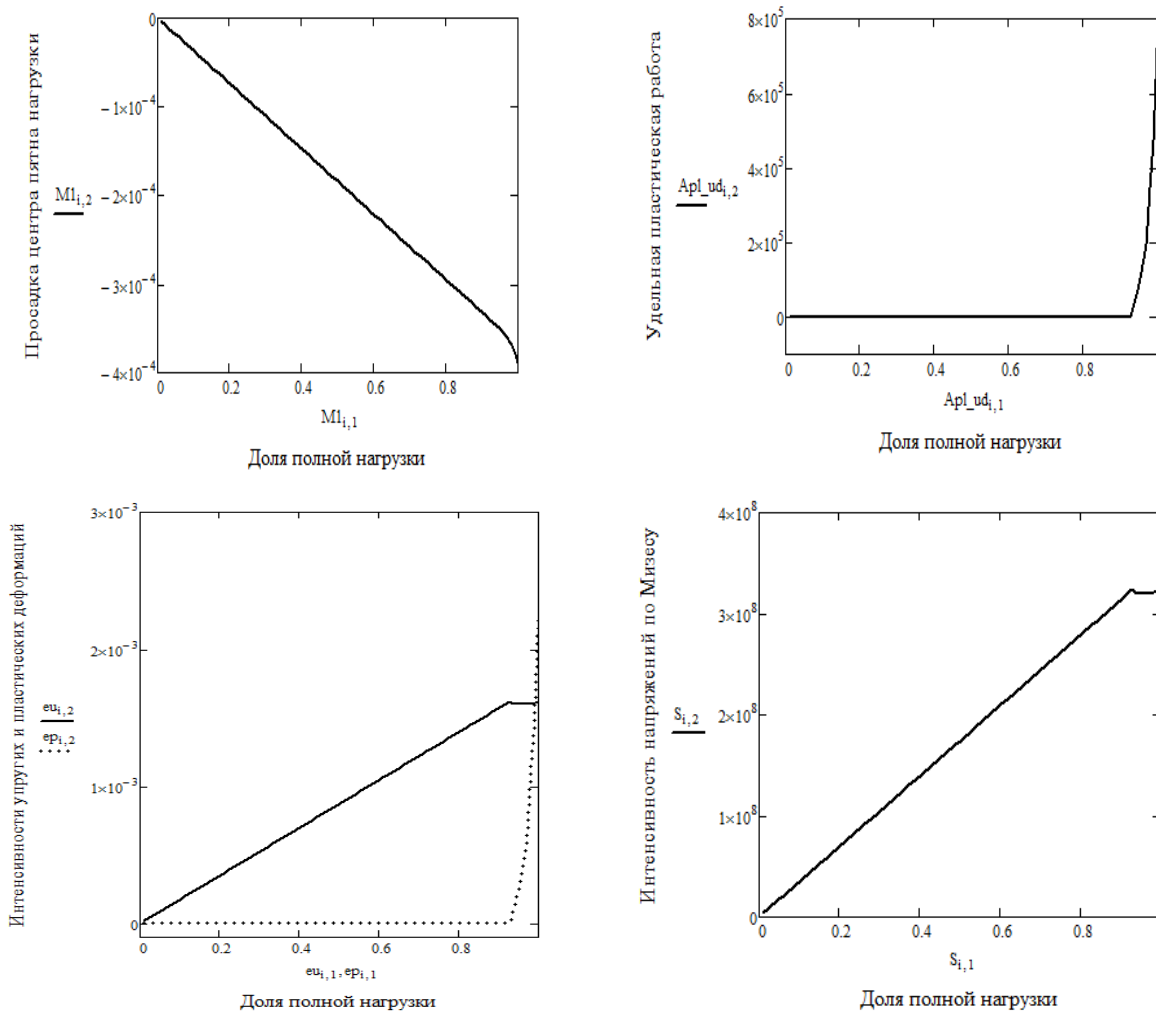


Рис. 5.2.6 Деформационные кривые физически и геометрически нелинейного шагового расчета

Из кривых перемещений видно, что предельное состояние системы в целом наступает при приложении 99% от максимума заданной нагрузки. При этом начинается «проваливание» среды на границе нагруженной и свободной поверхности, текучесть практически мгновенно на последних шагах охватывает зону, в 5-7 раз (в зависимости от плотности сетки) большую, нежели до этого (до уровня нагрузки в 95%) (Рис. 5.2.7).

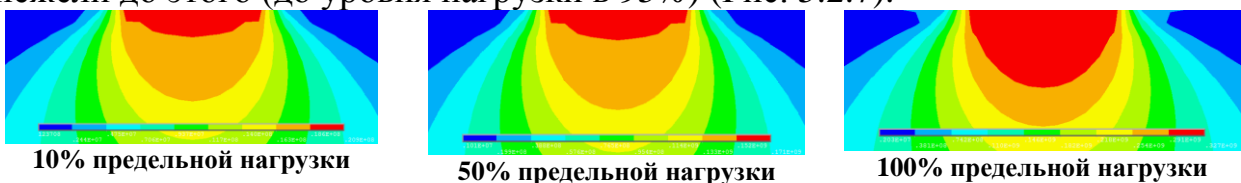


Рис. 5.2.7 Стадии развития текучести полуплоскости под локальным нагружением. Поле напряжений Мизеса, красный цвет – напряжения, равные или большие предела текучести

Таким образом, нелинейный расчет вполне подтвердил работоспособность метода теории предельного равновесия для определения предельных уровней локального нагружения пластически деформируемых сред. Выполняя разгрузочный шаг, устраняем упругие перемещения, и сравниваем конфигурацию остаточных перемещений с формой (Рис. 5.2.4), полученной по МВУ. Остаточная «вмятина» в обоих случаях локализована в пределах пятна нагрузки, форма ее краёв при нелинейном счете более пологая, что объясняется постепенным изменением направления нагрузки в ходе пошагового решения. С точки зрения оценки формы разрушения МВУ дает вполне приемлемый результат.

Переход к моментно-ротационной модели среды позволит использовать этот метод для оценки предельных внедрений в сыпучие и объемно-поврежденные среды. Дальнейшие прямые расчеты на нагрузку, определенную МВУ, позволят быстро вычислять необходимую пластическую работу.

5.3 Подход к решению задачи о предельной нагрузке внедрения индентора

Проблемой непосредственного применения МВУ к задачам контакта жестких тел и сред является их геометрическая нелинейность в общем случае, когда поверхности контактирующих тел имеют разную кривизну.

В настоящем параграфе допустим, что возможно параметрическое описание эпюры контактного давления, позволяющее применить один параметр и для учета возрастания нагрузки, и для учета изменения характера эпюры. Тогда МВУ можно будет применять как серию линейных решений под нагрузкой с известным характером на каждой итерации. Предельной нагрузкой такого «простого» нагружения будет выступать упомянутый параметр.

На основе используемых в Главе 2 моделей с классическими КЭ получено статическое нелинейное решение о вдавливании сферического индентора в пластичную среду, и по кривым деформирования оценен предельный уровень нагрузки (начала периферийного выпучивания среды и существенного вертикального «проваливания» точек нагруженной поверхности). При этом на каждом шаге приращения нагрузки получены эпюры контактных давлений (Рис.5.3.1,а).

Эпюры контактных давлений в конце нагружения на разных сетках отличаются незначительно (Рис.5.3.1), хорошо аппроксимируются регрессионной кривой 3-го порядка и имеют, как видно, довольно пологий характер, что объясняется отсутствием инерционных усилий и низкой подвижностью «классических» конечных элементов. Пологость эпюры говорит о том, что восприятие контактной нагрузки упругопластичной средой при малых пластических деформациях происходит в большей степени за счет увеличения зоны контакта, нежели за счет роста давления.

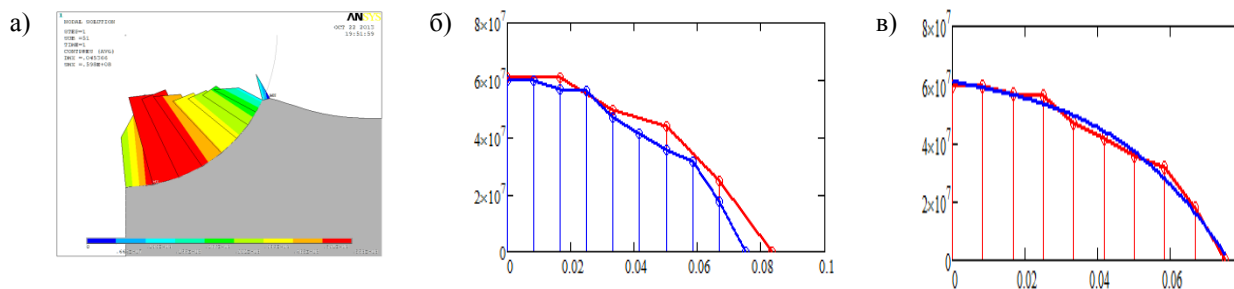


Рис.5.3.1 Контактные давления в финальной стадии внедрения, а – вид эпюры на модели, б – эпюры на сетках разной плотности, в – аппроксимация полиномом 3-й степени

Построим зависимость интегрального контактного усилия от уровня приложенной нагрузки (задаваемого вертикального смещения центра сферы) (Рис.5.3.2). До предельного уровня заглубления (до начала «проваливания» и активного вытеснения материала), определенного в Главе 2 и соответствующего примерно 30% от максимально заданного, характер зависимости практически линейный. После достижения предельного уровня заглубления этот характер практически постоянен. Т.о., при развитых пластических деформациях размер зоны нагружения перестает сильно изменяться.

Построим также зависимость длины зоны контактного давления от уровня приложенной нагрузки (Рис.5.3.3). Она также на участке от нуля до предельного уровня нагружения оказывается близкой к линейной.

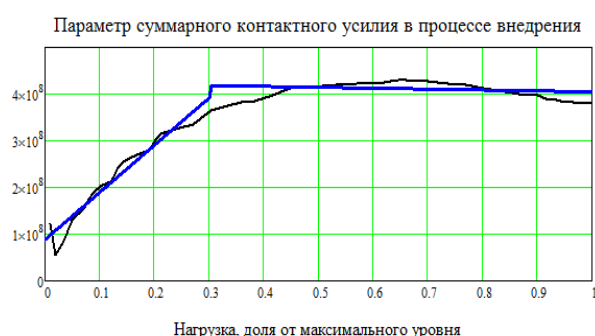


Рис.5.3.2 Зависимость параметра суммарной контактной силы (Н) от глубины внедрения и ее билинейная аппроксимация

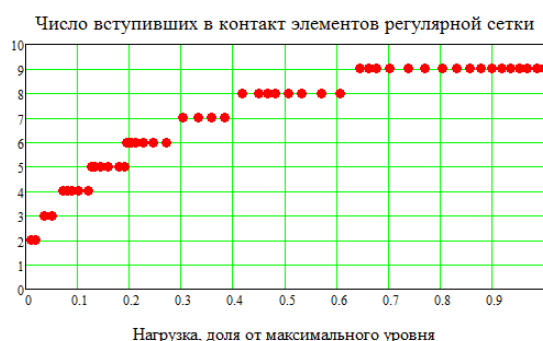
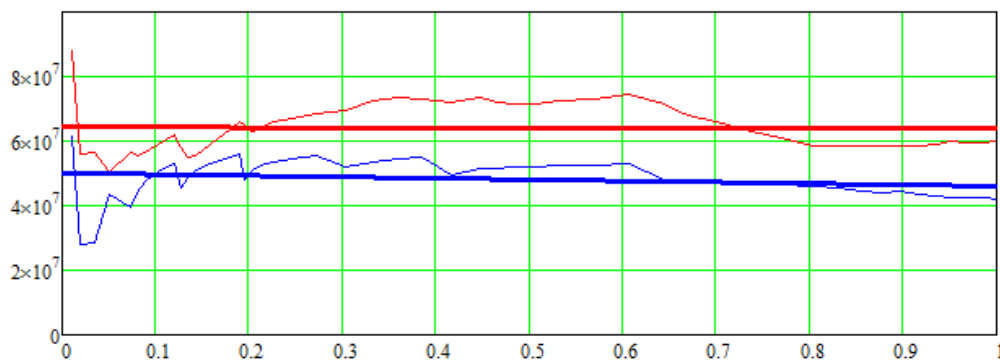


Рис.5.3.3 Зависимость размера зоны контакта от уровня нагрузки

Таким образом, суммарное контактное давление и зона нагружения вплоть до достижения предельного уровня нагрузки изменяются пропорционально уровню заглубления. Чтобы суммарное контактное усилие возросло линейно при линейном же росте контактной зоны, требуется постоянство величины давления. Рассматривая в течение всего процесса максимальное давление в контактной зоне, а также среднее давление в этой зоне, обнаруживаем неплохое выполнение этого условия (Рис.5.3.4).

Максимальные и средние контактные давления в процессе нагружения



Нагрузка, доля от максимального уровня

Рис.5.3.4 Регрессионное осреднение максимальных и средних давлений в контактной эпюре за все время нагружения

К сожалению, линейное возрастание зоны давления невозможно считать простым нагружением, пригодным для применения МВУ, из-за изменчивости расчетной схемы. Поэтому следует остановиться на замене реального контактного давления возрастающим давлением на фиксированной граничной зоне.

Допустим, что размер контактной зоны неизменен и равен конечному размеру в нелинейном расчете. Оценим уровень *равномерной* предельной нагрузки, соответствующей этому размеру пятна, а также – в какую сторону совершается при этом ошибка, по сравнению с реальным контактным нагружением.

Рассматриваем задачу с теми же исходными параметрами, что и в Главе 2: предел текучести материала среды $\sigma_T = 20\text{МПа}$, модуль упругости среды $E = 2\text{ГПа}$, модуль упрочнения билинейной диаграммы $E_T = 1\text{МПа}$, коэффициент Пуассона среды $\mu = 0.3$, размеры участка полупространства: глубина – 0.5 м, ширина – 1 м. Используем осесимметричную постановку задачи. Зону нагружения берем с радиусом, равным 4.5 см, что соответствует примерно радиусу контактной зоны на уровне предельной нагрузки.

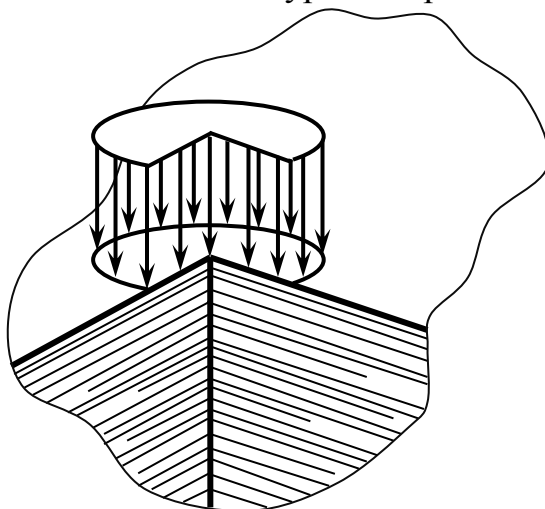


Рис. 5.3.5 Простое нагружение фрагмента полупространства пятном давления

Окончательное значение предельной нагрузки определится произведением интенсивности на диаметр нагруженной зоны в конце итерационного процесса.

Значение предельной нагрузки, полученной МВУ с учетом осесимметричного характера НДС (использовался макрос для программы ANSYS, где плоские элементы могут быть использованы как для анализа плоской деформации или плоского напряженного состояния, так и для анализа осесимметричного состояния), равно $3.4 \cdot 10^8$ Н, т.е. несколько меньше, чем на Рис.5.3.2. Ошибка по уровню нагрузки, т.о. – в безопасную сторону.

Делаем вывод, что для достаточно пологих контактных поверхностей можно путем упругих однократных расчетов заранее создать «библиотеку» эквивалентных радиусов пятна нагрузки в зависимости от средней кривизны поверхности индентора и пластических параметров среды. Далее можно считать предельную нагрузку внедрения как предельную нагрузку нагружения пятном давления эквивалентного радиуса.

Итак, применение МВУ с использованием в качестве переменных параметров упругости множителей при физических жесткостях элементов расчетной сетки показало хорошее повторение предельной конфигурации границы «вдавленной» среды и уровня соответствующей этой конфигурации нагрузки. Таким образом, пластическую работу индентора можно найти методами теории предельного равновесия. Энергоемкость же достижения предельного состояния контактной системы, очевидно, дает информацию о предельно допустимых скоростях столкновения в предположении о переходе большей части кинетической энергии ударяющего тела в пластическую работу.

Можно предполагать, что использование гибридных моделей основного массива льда и пристеночного мелкодисперсного слоя в алгоритме МВУ позволит оценивать предельные нагрузки и скорости столкновения с учетом разных свойств этих зон, но в рамках единого подхода. Для этого необходимо выяснить применимость МВУ и к моделям из моментных КЭ.

5.4 Адаптация метода вариации упругих параметров к оценке предельных нагрузок на моментный континуум

В условиях несимметричной теории сплошной среды сформулировать критерий пластичности с использованием абсолютно всех компонентов напряженного состояния (нормальных, касательных и моментных) в виде квадратичной функции, переводимой в матричную форму с симметричной матрицей, без предварительных исследований не представляется возможным. Отдельные работы посвящены этой проблеме [152, 153, 178]. Можно попытаться использовать лишь часть компонентов напряженного состояния: либо нормальные и касательные, либо моментные. В первом случае пластические деформации будут преимущественно сдвиговыми, во втором – определяться необратимыми поворотами частиц.

В работе [152] обращено внимание на следующий экспериментальный факт: деформированное состояние металлических образцов с дефектами в зоне дефекта преимущественно определяется поворотом зерен. Отмечено

также, что эти повороты *неупруги*. Для описания пластичности, обусловленной *конечными остаточными поворотами* частиц среды, Н.Ф. Морозов [152] предложил вариант реологических соотношений для изотропной среды, ориентированный на решение проблемы разрушения металлов и учитывающий изложенные наблюдения. С помощью этого варианта рассматривалось упругопластическое поведение области с ослабляющим вырезом. Исследование велось на основе моментной теории *со стесненным вращением*, причем кинематический параметр ω идентифицировался с поворотом зерен или субзерен. Использовались уравнения равновесия и геометрические соотношения для линейных и угловых компонентов плоской деформации (3.1.1) – (3.1.3), кривизны выражались через производные от поворотов, т.е. как вторые производные от поступательных перемещений. «Классические» напряжения связывались с деформациями формулами линейной моментной теории по Миндлину [144]:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \operatorname{div} u, \quad (5.4.1)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yy} + \frac{\nu E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \operatorname{div} u, \quad (5.4.2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{1+\nu} \gamma_{xy}. \quad (5.4.3)$$

Для моментных напряжений были приняты реологические соотношения по А.Ю. Ишлинскому [111]:

$$\mu_i = \sigma_T^M \cdot (\dot{\kappa}_i - \dot{\kappa}_i^y) + T \cdot (\kappa_i - \kappa_i^y) \quad (5.4.4)$$

диаграмма *билинейного упруго-пластического поворота*, где i – номер компонента напряжения, σ_T^M имеет смысл *моментного предела текучести*, T – коэффициента упрочения; геометрические и упругие соотношения имеют вид:

$$\kappa_i = \frac{\partial \omega}{\partial x_i}; \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \right); \quad \dot{\kappa}_i = \frac{\partial \kappa_i}{\partial \lambda}; \quad (5.4.5)$$

$$\kappa_i^y = \frac{\mu_i}{4B}; \quad B = G \cdot l^2, \quad (5.4.6)$$

где

$$\lambda = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{\partial(\kappa_1 - \kappa_1^y)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\kappa_2 - \kappa_2^y)}{\partial t} \right)^2} dt, \quad (5.4.7)$$

l – параметр моментности.

Соотношения Ишлинского имеют место в зонах активного нагружения, где выполняется условие $d\lambda > 0$, в противном случае заменяются чисто упругими соотношениями $\kappa_i = \frac{\mu_i}{4B}$.

Упруго-пластическая задача решалась в приращениях, шаговым методом, с использованием основных положений теории течения. На каждом шаге в каждой точке расчетной области проверялось следующее условие текучести:

$$\sqrt{(\mu_1 - T \cdot \kappa_1)^2 + (\mu_2 - T \cdot \kappa_2)^2} = \sigma_T^M. \quad (5.4.8)$$

Очевидно, что при переходе к нужной для применения ТПР модели жестко-пластического поворота условие текучести упростится до вида:

$$\sqrt{(\mu_1)^2 + (\mu_2)^2} = \sigma_T^M. \quad (5.4.9)$$

Т.о., если разрушение («озернение») среды произошло хрупко, до ее дальнейшего смятия в пределах мелкобитого объема происходит на основе упругого «классического» поведения частиц и неупругого моментного поведения.

В первом приближении в качестве новой дополнительной реологической константы – моментного предела текучести – считаем возможным использовать обычный предел текучести. Очевидно, что изменяя этот параметр, можем в анализе предельных состояний добиваться разных предельных конфигураций среды.

С использованием конечно-элементной модели моментной нестесненной среды, полученной в Главе 3, было рассмотрено влияние выбора каждого из 2-х вариантов поверхности текучести на результаты решения задачи о предельном равновесии среды. Начальные параметры упругой среды были приняты равными: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, $B^* = 10^{11}$, $\alpha = 10^{11}$, предел текучести – $\sigma_T = 20$ МПа. Размеры расчетной области – те же, что и при решении задачи Фламана (8x3 м). Результаты представлены на Рис. 5.4.1-Рис. 5.4.2.

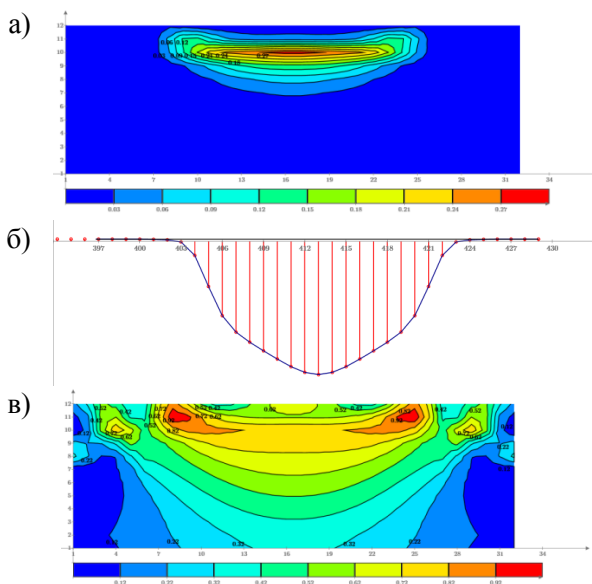


Рис. 5.4.1 Решение задачи о предельном надавливании на моментную среду с использованием предельной поверхности Мизеса, $q_0 = 0.9 \cdot 10^6$ Н/м

- а) картина поля скоростей пластических деформаций (псевдоподатливостей)
- б) форма потери несущей способности в перемещениях поверхности среды (форма «вмятины»)
- в) поле критерия текучести

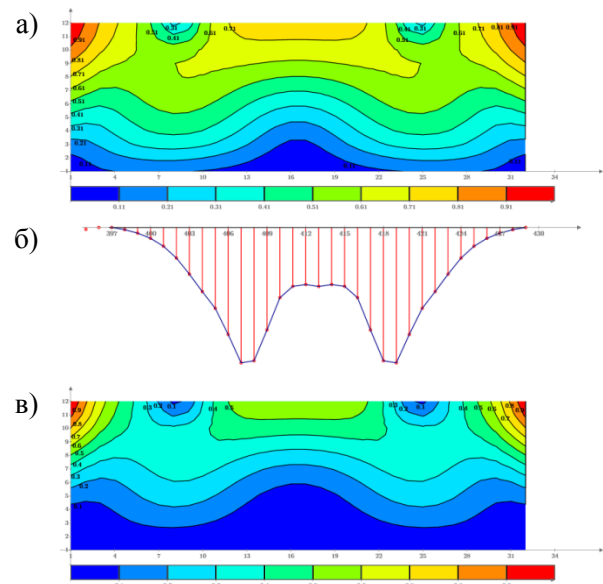


Рис. 5.4.2 Решение задачи о предельном надавливании на моментную среду с использованием предельной поверхности по Н.Ф. Морозову – А.Ю. Ишлинскому $q_0 = 3.98 \cdot 10^6$ Н/м

Как видно из сравнения результатов, уровни предельной нагрузки и формы потери несущей способности для разных критериев текучести существенно различны (около 10 МН/м и около 40 МН/м соответственно для критериев Мизеса и Ишлинского). Попытка учесть пластические повороты приводит к тому, что в центре пятна нагрузки вертикальная подвижность среды меньше, чем на его краях (Рис. 5.4.2, б), что в какой-то степени

соответствует представлениям [6] о непостоянстве толщины выдавливаемого слоя. Использование критерия Мизеса (из непарных касательных напряжений в нем участвуют большие) для моментной среды привело к форме «вмятины» с более отвесными «стенками» (Рис. 5.4.2, а), чем для безмоментной. Сходимость МВУ при использовании предельной поверхности по Ишлинскому хуже, возникают осцилляции. Очевидно, что путь к определению приемлемого вида предельной поверхности лежит в направлении комбинации двух рассмотренных критериев.

В качестве простейшей комбинации рассмотрим суммарный критерий вида:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2 + (\mu_1)^2 + (\mu_2)^2} = \sigma_T. \quad (5.4.10)$$

Очевидно, что матрица предельной поверхности образуется квазидиагональным объединением матриц критериев Мизеса и А.Ю. Ишлинского. Внедряя этот вид предельной поверхности в МВУ, рассмотрим влияние на предельную нагрузку и поля характерных величин различных сочетаний параметров моментной реологии:

1. Расчет при равных величинах модулей: $B^* = 10^{11}$, $\alpha = 10^{11}$ (Рис. 5.4.3).

2. Расчет при относительном снижении изгибного модуля: $B^* = 10^{10}$, $\alpha = 10^{11}$ (Рис. 5.4.4)

3. Расчет при относительном снижении сдвигового модуля: $B^* = 10^{11}$, $\alpha = 10^{10}$ (Рис. 5.4.5).

4. Расчет при относительном повышении изгибного модуля: $B^* = 10^{12}$, $\alpha = 10^{11}$ (Рис. 5.4.6).

5. Расчет при относительном повышении сдвигового модуля: $B^* = 10^{11}$, $\alpha = 10^{12}$ (Рис. 5.4.7).

6. Расчет при общем увеличении моментной жесткости: $B^* = 10^{12}$, $\alpha = 10^{12}$ (Рис. 5.4.8).

Отметим, что использование «объединенного» критерия стабилизирует сходимость МВУ при всех комбинациях, осцилляции отсутствуют.

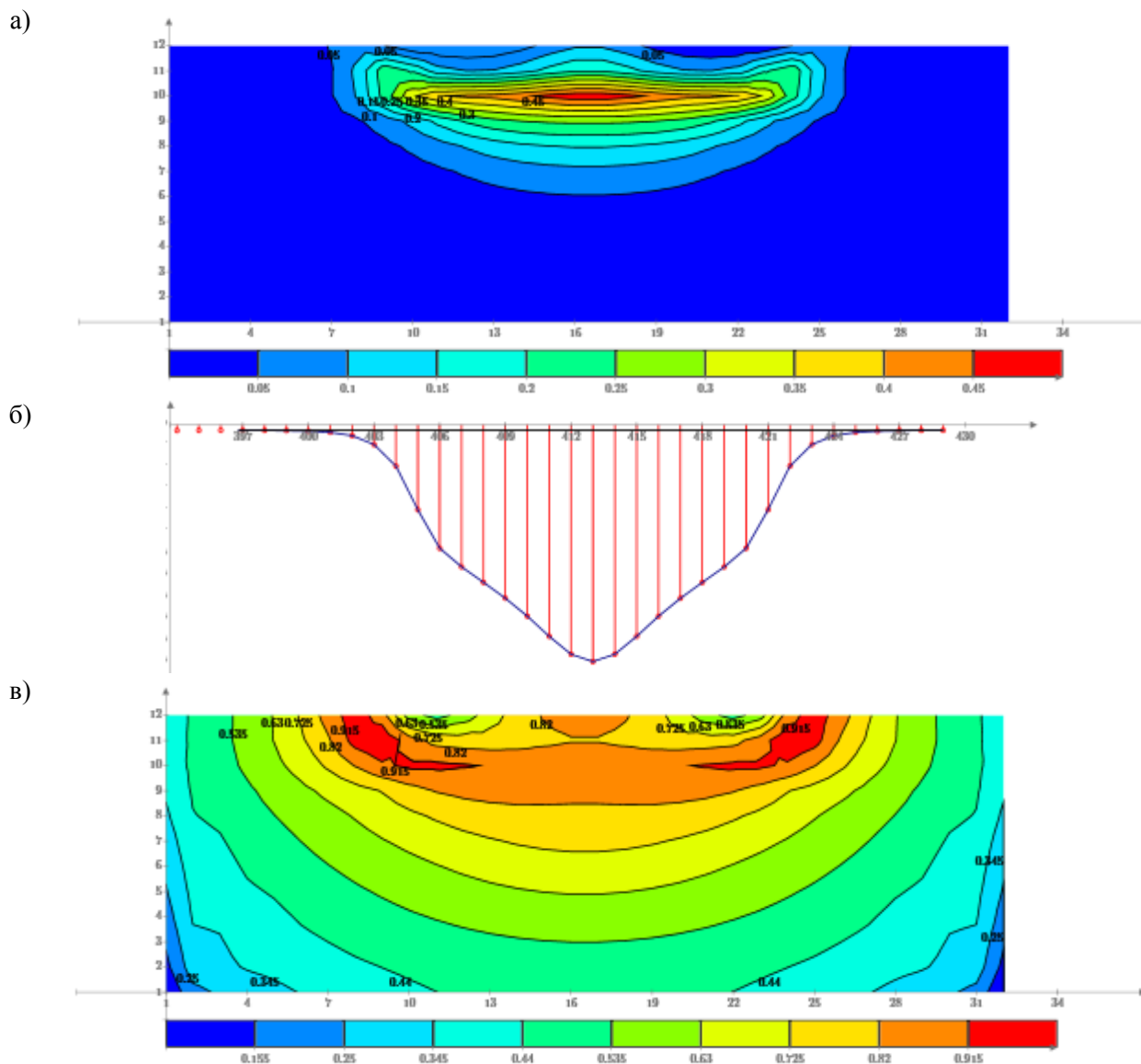
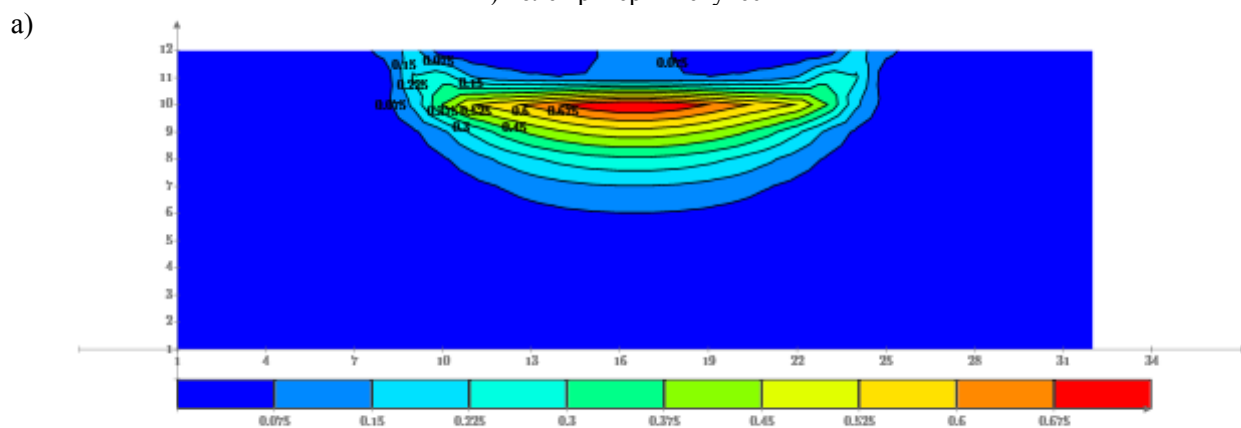


Рис. 5.4.3 Решение задачи о предельном надавливании на моментную среду с использованием предельной поверхности (5.4.10), $q_0 = 7.46 \cdot 10^6$ Н/м

а) картина поля скоростей пластических деформаций (псевдопластичностей)

б) форма потери несущей способности в перемещениях поверхности среды (форма «вмятины»)

в) поле критерия текучести



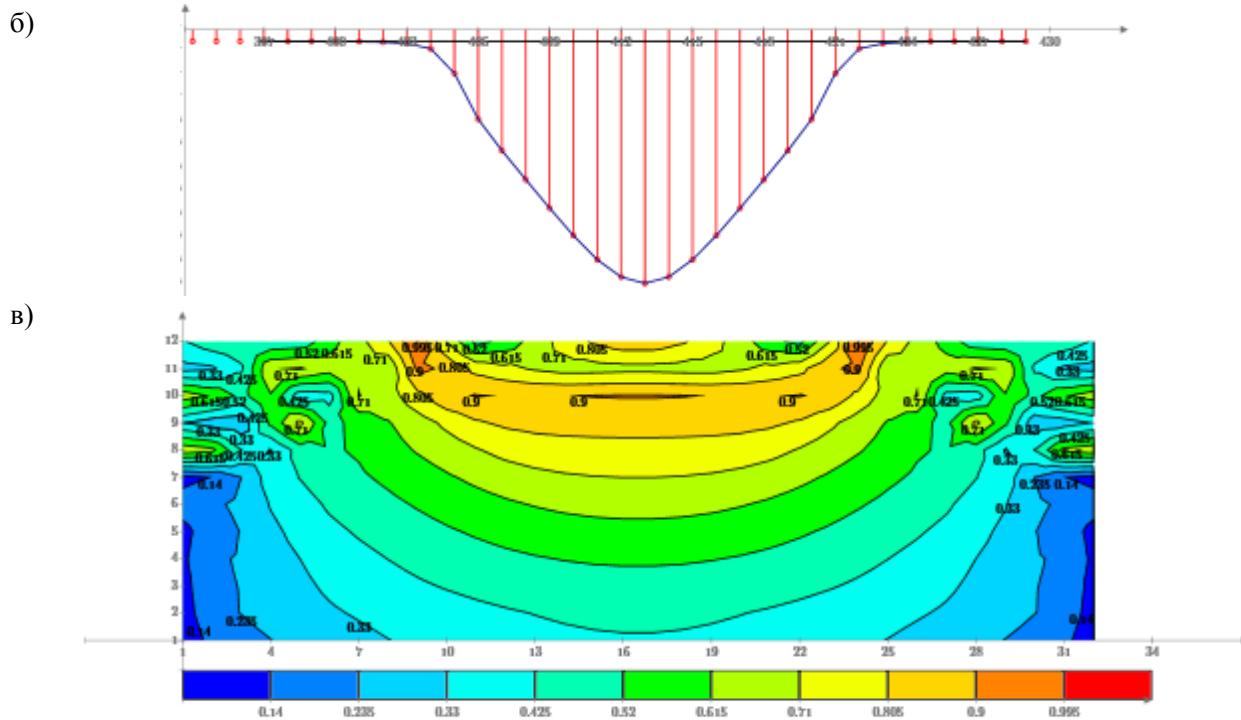
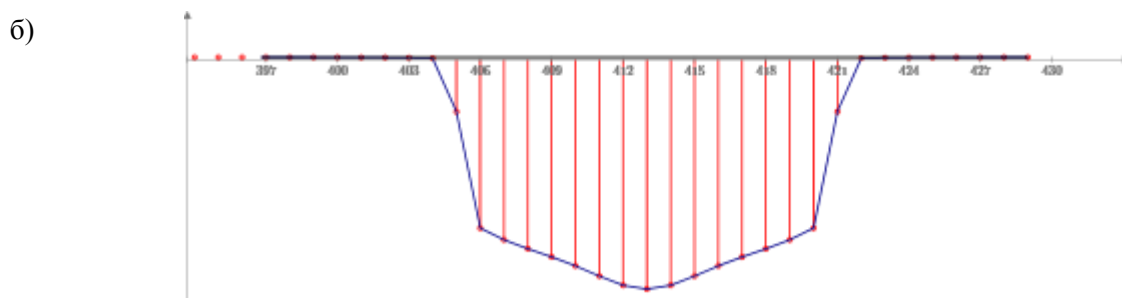
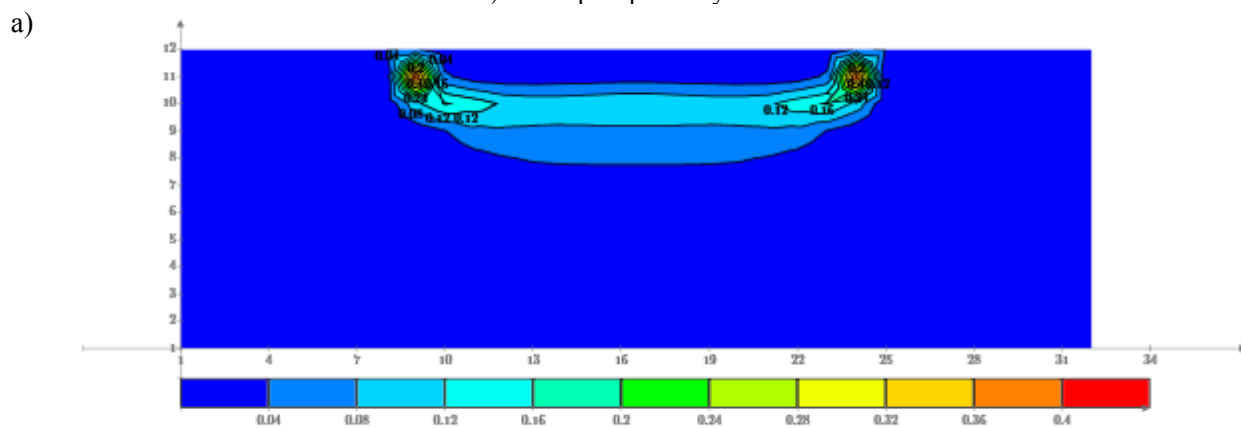


Рис. 5.4.4 Решение задачи о предельном надавливании на моментную среду с использованием предельной поверхности (5.4.10), $q_0 = 6.223 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$

а) картина поля скоростей пластических деформаций (псевдоподатливостей)

б) форма потери несущей способности в перемещениях поверхности среды (форма «вмятины»)

в) поле критерия текучести



в)

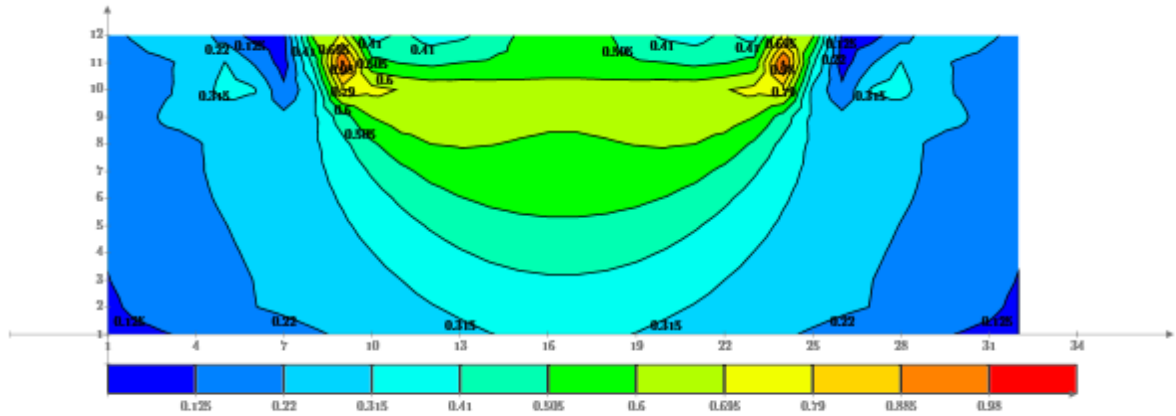


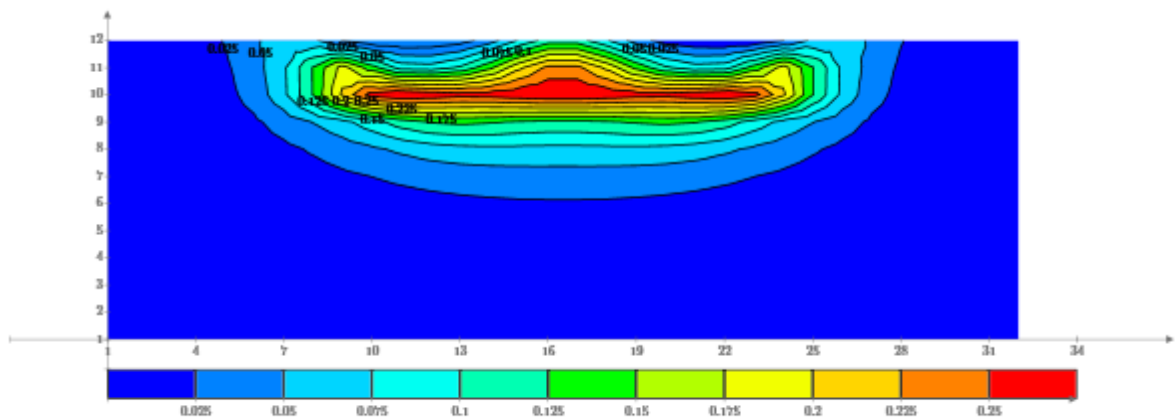
Рис. 5.4.5 Решение задачи о предельном надавливании на моментную среду с использованием предельной поверхности (5.4.10), $q_0 = 5.465 \cdot 10^6$ Н/м

а) картина поля скоростей пластических деформаций (псевдоподатливостей)

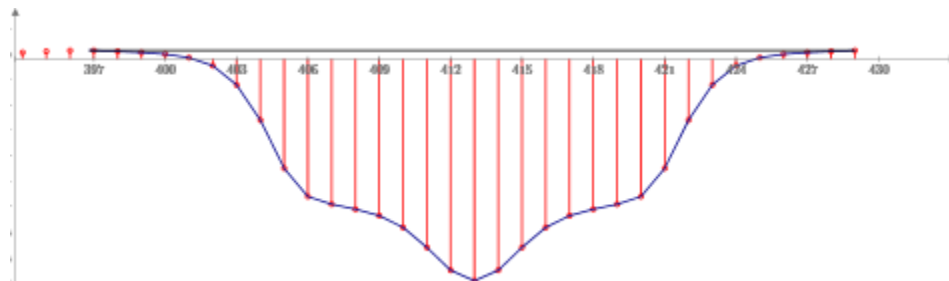
б) форма потери несущей способности в перемещениях поверхности среды (форма «вмятины»)

в) поле критерия текучести

а)



б)



в)

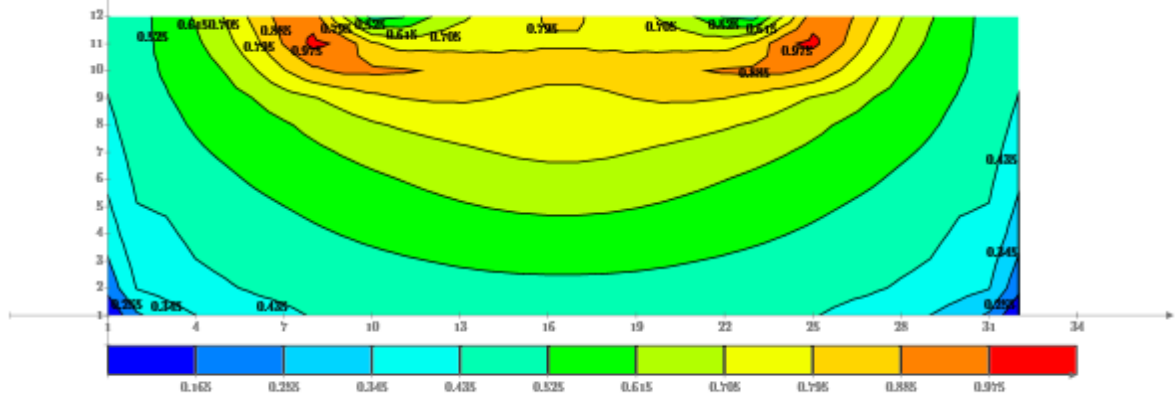
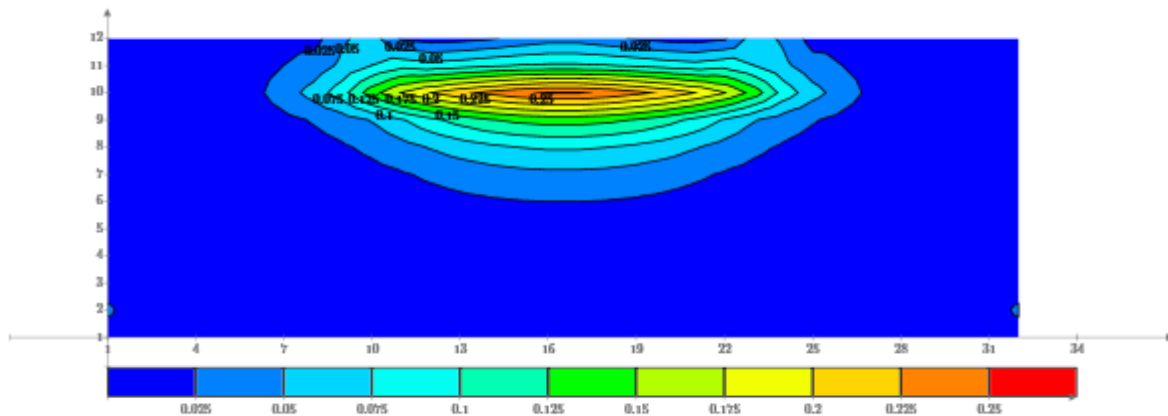


Рис. 5.4.6 Решение задачи о предельном надавливании на моментную среду с использованием предельной поверхности (5.4.10), $q_0 = 7.53 \cdot 10^6$ Н/м

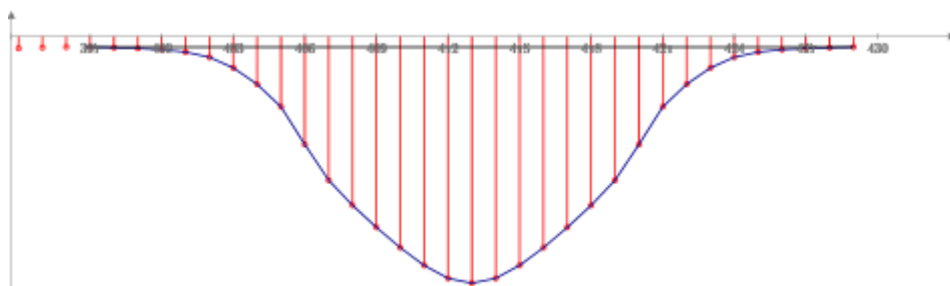
а) картина поля скоростей пластических деформаций (псевдоподатливостей)

б) форма потери несущей способности в перемещениях поверхности среды (форма «вмятины»)
в) поле критерия текучести

а)



б)



в)

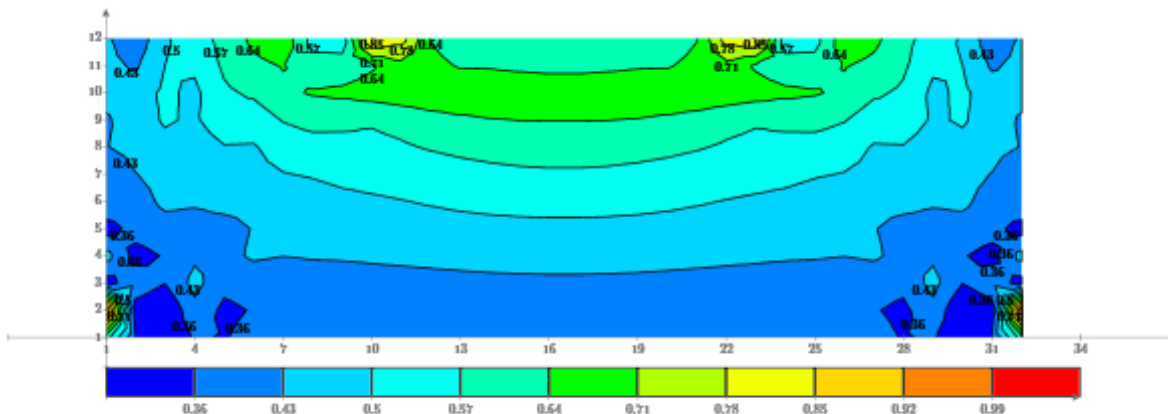


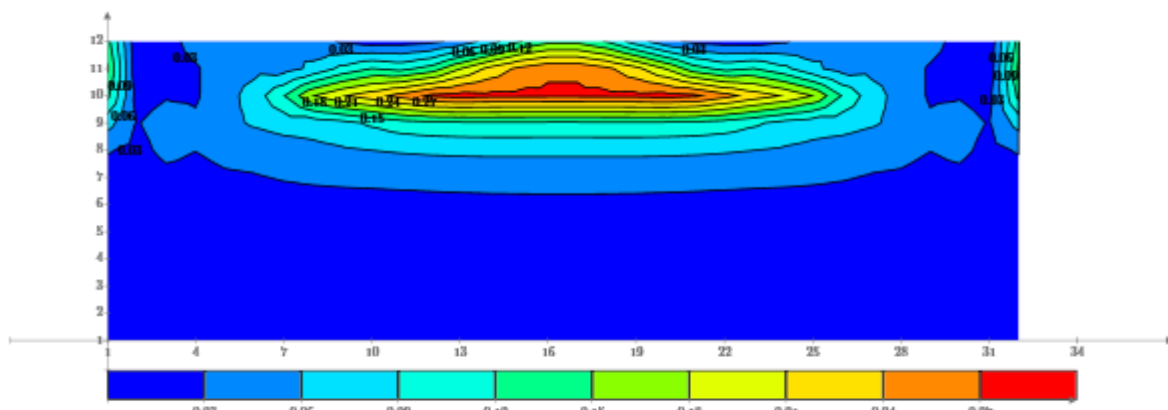
Рис. 5.4.7 Решение задачи о предельном надавливании на моментную среду с использованием предельной поверхности (5.4.10), $q_0 = 6.6 \cdot 10^6$ Н/м

а) картина поля скоростей пластических деформаций (псевдоподатливостей)

б) форма потери несущей способности в перемещениях поверхности среды (форма «вмятины»)

в) поле критерия текучести

а)



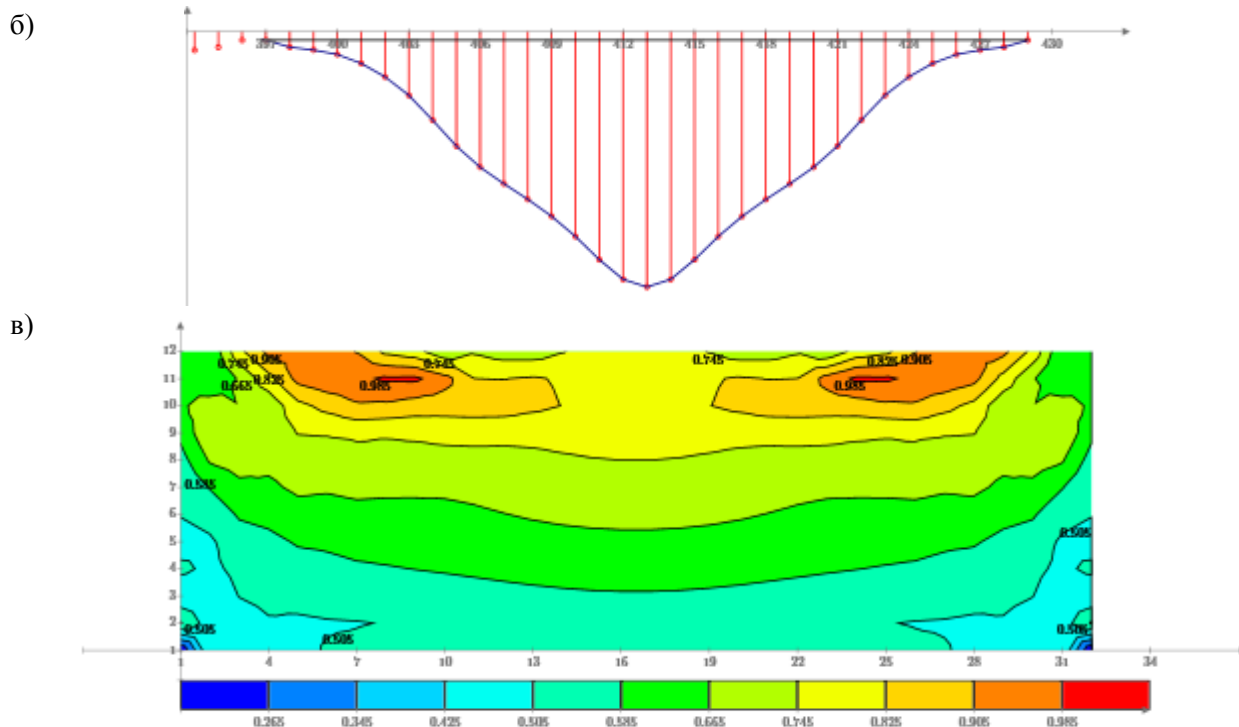


Рис. 5.4.8 Решение задачи о предельном надавливании на моментную среду с использованием предельной поверхности (5.4.10), $q_0 = 7.614 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$
 а) картина поля скоростей пластических деформаций (псевдоподатливостей)
 б) форма потери несущей способности в перемещениях поверхности среды (форма «вмятины»)
 в) поле критерия текучести

Проведенные расчеты показывают, что та или иная реология моментной среды в предельном состоянии порождает при довольно близких величинах предельной нагрузки совершенно различные формы пластического разрушения, т.е. по формам разрушения под модельными локальными нагрузками вполне можно определять реологические параметры.

Таким образом, одним из способов решения проблемы подбора модельного эксперимента над макрообъемом для идентификации моментной среды является расчет предельных состояний.

5.5 Выводы

В настоящем исследовании выполнен численный анализ локальных контактных и чисто силовых нагружений пластичной среды в традиционной идеализации, разработаны и протестированы новые конечные элементы моментной теории упругости, позволяющие учесть ротационную подвижность сред и исследовать новые реологические параметры. С использованием традиционных и новых моделей среды были получены оценки предельных нагрузок, по которым можно определить максимальную энергоемкость однократного монотонного нагружения. Применительно к задаче взаимодействия конструкций морской техники с ледовой средой, полагая лед моментной пластичной средой с низким упрочнением, принципиально можно уточнять оценку предельной энергоемкости среды для определения скоростей столкновения, приводящих к максимальным давлениям на заданных глубинах внедрения. Дальнейшие исследования могут быть связаны с адаптацией моментных конечных элементов к решению нестационарных и геометрически нелинейных задач, с определением приемлемого критерия текучести и с постановкой задачи идентификации модели среды по известным экспериментальным данным.

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Существующие методики численного расчета упруго-пластического контактного взаимодействия тел и сред на основе МКЭ и традиционных представлениях о поведении сплошной среды усовершенствованы и адаптированы к проблеме соударения судовых конструкций со льдом.

2. Разработаны новые конечные элементы моментной теории упругости для решения задач с различными допущениями о кинематике континуума.

3. Предложена, на основе разработанного аппарата, техника гибридного моделирования упругих сред для решения задач с особенностями и задач с разрушающимся периферийным слоем.

4. Предложен способ численной оценки предельной скорости соударения жесткой конструкции с жестко-пластической средой на основе статической теоремы предельного равновесия и сведения эпюр контактной нагрузки к моделям простого нагружения.

В итоге можно сделать вывод, что в работе создан вычислительный аппарат, позволяющий эффективно решать задачи о взаимодействии конструкций и сред со сложной реологией.

Источники

1. Abaqus: применение комплекса в инженерных задачах. Версия 6.7. –М.: Тесис, 2008. – 99 с.
2. Akyuz F.A., Merwin J. E. Solution of nonlinear problems of elastoplasticity by finite element method // AIAA Jour. №1. – 1968. – 6. – p. 185
3. Allman D.J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis // Computers and structures. – 1984. – Vol.19, Iss. 1-2. – pp.1-8
4. ANSYS Theory Reference. ANSYS Inc, 2012. – 1546 с.
5. Appolonov E.M. Research of Arctic ice dynamic strength with the help of Drop Ball Tests / Report from WP3 of ARCDEV project supported by the EC Transport programme. –St.Petersburg: Krylov Shipbuilding Research Institute, 1999. –128 pp.
6. Appolonov E.M., Nesterov A.B., Zimnitsky Yu.A. The method for refinement of analytic of ship hull/ice impact interaction basing on the statistic analysis of model and full scale experiments // Proceeding of POAC'99. –Helsinki, 1999. – Vol. 3. –pp. 949-955
7. Bathe K.J. Numerical methods in finite element analysis / K.J. Bathe, E.L. Wilson. Englewood Cliffs. – N.J.: Prentice-Hall. – 1976
8. Bence Gerber, Tham C.Yang. Making an impact //ANSYS ADVANTAGE. – 2008. –Vol. II, Issue 4. – pp. 11-13
9. Bishop J. F. W. On the complete solutions to problems of deformation of a plastic-rigid material // J. Mech. and Phys. Solids.–1953. – 2. – pp. 43-53
10. Bishop R.F., Hill R., Mott N.F. The theory of indentation and hardness tests // Proc. Phys. Soc. –1945. – 57. – pp. 147-159
11. Charnes A., Greenberg H.J. Plastic collapse and linear programming // Bulletin of American Mathematical Society. – 1951. – Vol. 57. – pp.480
12. Charnes A., Lemke C., Zienkiewich O. Virtual work, linear programming and plastic limit analysis // Proceedings of the Royal Society. –1959. – Vol. 251 (May). –pp.110-116
13. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des Corps Deformables // Traité de Physique. Ed. O.D. Chwolson. – Paris. –1909. – pp. 953-1173
14. Curant R. Variable methods for the solution of problems of equilibrium and vibration // Bull. Amer. Math. Soc. –1943. – Vol. 49. – pp. 1-23
15. Daley C. Conceptual Framework for an Ice Load Model / C. Daley, K. Riska. – PERD, National Energy Board, Calgary, 1995. – 41 p.
16. Drucker D. A more fundamental approach to plastic stresses-strain relations // Proceedings of the 1st US National Congress of Applied Mechanics, ASME. – 1951. – pp. 487-491
17. Follansbee P.S., Sinclair G.B. Quasi-static normal indentation of an elastic-plastic half-space by a rigid sphere // Internat. J. Solids and Structures. – 1984. – 20. – p. 81-91
18. Francis H.A. Phenomenological analysis of plastic spherical indentation // Trans. ASME J. Engng Mater. Technol., Ser. Y. – 1976. – 98. – pp. 272-281

19. Frederking R.M.W., Jordaan I.J., McCallum J.S. Field Tests of Ice Indentation of Medium Scale Hobson's Choice Ice Island, 1989 // Proceeding of the 10th IAHR Ice Symposium, Espoo, Finland, Aug. 20-23. – 1990. – Vol.II. – pp. 931-944
20. Goodman R.E., Taylor R.J., Brekhet T.A. A model for the mechanics of Joiteel Rock // Proc. ASCE. – 1968. – Vol. 94, pp. 637-659
21. Grioli G. Mathematical theory of elastic equilibrium (recent results). –Berlin: Springer-Verlag OHG, 1962. –168 p.
22. Hardy C., Baronet C.N., Tordion G.V. Elastoplastic indentation of a half-space by a rigid sphere // J. Numerical Methods in Eng.. – 1971. – 3. – pp. 451-462
23. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Harte (On the contact of rigid elastic solids and on hardness) // Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses, – Leipzig, 1882 [Английский перевод см.: Miscellaneous Papers By H. Hertz, eds. Jones and Schott. – London: McMillan and Co., 1896
24. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford: University Press, 1998. – 335 p.
25. Hill R. A theoretical investigation of the effect of specimen size in the measurement of specimen size in the measurement of hardness // Philos. Magazine. – 1950. – 41. – p. 745
26. Jacinto A.C., Ambrosini R.D., Danesi R.F. Dynamic response of plates subjected to blast loading // Proc. Inst. Civ. Eng. Struct. And Build. – 2002. – №3 (152). – pp. 269-276
27. Jonson K.L. The correlation of indentation experiments // J. Mech. and Phys. Solids. – 1970. – 18. – p. 115-126
28. Jordaan I.J. Mechanics of ice-structure interaction // Engineering Fracture Mechanics. – 2001. – 68. – pp. 1923-1960
29. Kärnä T., Kamesaki K., Tsukuda H. A numerical model for dynamic ice-structure interaction // Computers and Structures. – 1999. – 72. – pp. 645-658
30. Kikuchi N., Oden J.T. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods // Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1995. – (July 14). – p. 495
31. Koiter W.T. Couple-stress in the theory of elasticity // Proc. Koenicl. Acad. Wet.. – 1964. – V. B67. – p. 17-29, 30-44
32. Kotisalo K., Kujala P., Riska K. Analysis of ice load measurements onboard MT Uikku / Results from the ARCDEV – voyage to Ob-Bay, April – May 1998. – Report from WP8 of ARCDEV-project supported by the EC Transport-programme, Helsinki University of Technology, Ship Laboratory, Report D-50. – Helsinki. – 1999
33. Kroner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1960. – Vol. 4. – pp. 273-334
34. Kujala P., Riska K. Statistical analysis of the ice load measurements onboard MT Uikku during the ARCDEV-voyage in 1998 / Report from WP8 of

- ARCDEV-project supported by the EC Transport-programme, Helsinki University of Technology, Ship Laboratory, Report D-51. – Helsinki. – 1999
35. Lee C.H., Masaki S., Kobayashi S. Analysis of ball indentation. // *Internat. J. Mech. Sci.*. – 1972 – 14. – p. 417-426
 36. LS-DYNA. Keyword user's manual. – Livermore: Livermore software technology corporation, 2007. – 2206 p.
 37. Lundberg G., Sjövall H. Stress and Deformation in Elastic Solids // *Publ. № 4, Inst. Th. of Elast., Chalmers University of Technology.* – Göteborg: Sweden, 1958
 38. Marsh D.M. Plastic Flow in glass // *Proceedings of the royal society of London.* – 1964. – Serie A, № 279. – p. 420-435
 39. Masterson D.M., Frederking R. Load contact pressures in ship/ice and structure/ice interactions // *Cold Region Science and Technology.* – 1993. – vol. 21. – pp. 169-185
 40. Matveenko V.P., Korepanov V.V., Kulesh M.A., Shardakov I.N. Investigation of couple-stress effects in elastic bodies under deformation // *XXI ICTAM, 15-21 August 2004, Warsaw, Poland.* – 2004. – p.241
 41. Mulhearn T.O. Deformation of metals by Vickers-type pyramidal indenters // *J. Mech. and Phys. of Solids.* – 1959. – 7. – p.85-88
 42. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // *Proceedings of the 11th Internat. Congr. Applied Mechanics 1964. –Berlin-Heidelberg-New York, 1966.* – p.153–158
 43. Prager W. Mathematical programming and theory of structures // *Jour. of SIAM.* – 1965. Vol.13, № 1. –pp. 312-332
 44. Puttick K.E., Smith L.S., Miller L.E. Stress and strain fields round indentations in poly (methyl methacrylate) // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 1977. – 10. – p. 617
 45. Richmond O., Morrison H.L., Devenpeck M.L. Sphere indentation with application to the Brinell Hardness test // *Internat. J. Mech. Sci.* – 1974. – 16. – p.75-82
 46. Samuels L.E., Mulhearn T.O. An experimental investigation of the deformed zone associated with indentation hardness impressions // *J. Mech. and Phys. Of Solids.* – 1957. – 5. – p. 125-134
 47. Schaefer H. *Miszellaneen der angewandten Mechanik.* – Berlin:Festschrift. W.Tollmien, 1962. 312 p.
 48. Shield R.T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry // *Proc. Roy. Soc. Lond.* – 1955. – A233 – p. 267-287
 49. Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica // *Atti Soc. Ital. per Progresso delle Scienze.* – 1933. – p. 513-533
 50. Skalski K. Contact problem analysis of an elastoplastic body // *Prace Naukowe Mechanica, Warsaw Polytechnic.* – 1979. – p. 67
 51. Tabor D. *The Hatdness of Metals.* – Oxford: University Press, 1951. – 188 p.
 52. Timco G.W., Frederking R.M.W. Drop impact tests on freshwater ice: spherical head // *Proceeding of the 10th IAHR Ice Symposium, Espoo, Finland, Aug. 20-23.* – 1990. – Vol.II. – pp.776-787

53. Timco G.W., Frederking R.M.W. Laboratory impact tests on freshwater ice. // Cold Region Science and Technology. –Amsterdam:Elsevier Science Publishers B.V.. – 1993. – Vol.22. – pp.77-97
54. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories // Encycl. Phys. – Springer-Verlag, 1960. – V.III. – pp.226–793
55. Voigt W. Teoretische Studien ueber die Elastizitaets verhaltnisse der Kristalle // Abh. Ges. Wiss. Gottingen. – 1887. – Bd. 34.
56. Wilsea M., Johnson K.L., Ashby M.F. Indentation of foamed plastics // Internat. J. Mech. Sci. – 1975. – 17 – p. 457-460
57. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. – Berlin: Springer, 2006. – 519 p.
58. Аленин В.П. Расчет систем с односторонними винклеровскими связями // Изв. вузов. Строительство и архитектура. –1988. – № 3. – с. 33-36
59. Альтенбах Х., Еремеев В.А. Об уравнениях оболочек типа Коссера // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – № 4 (2). – с. 11-18
60. Аннин Б.Д., Садовский В.М. Очисленной реализации вариационного неравенства в задачах динамики упругопластических тел // ЖВМ и МФ. – 1996. – № 9. – с. 134-141
61. Апполонов Е.М., Дидковский А.В., Кутейников М.А., Нестеров А.Б. Совершенствование методологии определения ледовых нагрузок // Науч.–техн. сб. Российского морского регистра судоходства. – 2002. – Вып. 25. – с. 83-100
62. Астанин В.В., Надеждин Г.Н., Петров Ю.Н. и др. Локализация пластической деформации при скоростном ударном деформировании алюминия и сплава Амг-6 // Пробл. прочности. – 1987. – №3. – с. 81-85
63. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц //ФТТ. – 1960. – №7 (2). – с. 1399-1409
64. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2001. – №5. – с. 156-173
65. Безухов Н.И. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач: Учеб. пособие для втузов / Н.И. Безухов, О.В. Лужин. – М.:Высшая школа, 1974. – 200 с.
66. Беленький Л.М. Предельные нагрузки судовых перекрытий при поперечном изгибе // Вопросы судостроения, Проектирование судов. – Л. – 1978. – № 17. – с.25-37
67. Беленький Л.М. Расчет судовых конструкций в пластической стадии. –Л.: Судостроение, 1983. – 443 с.
68. Белостоцкий А.М., Сутурин И.М. Построение конечного элемента плоского напряженного состояния на основе моментной теории упругости, реализация для тонких оболочек // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы конечных и граничных элементов: Труды XIX Международной конференции. – СПб. – 2001. –т.2. – с. 66-71

69. Белостоцкий А.М., Белый М.В., Сутурин И.М. Построение конечного элемента плоского напряженного состояния на основе моментной теории упругости, реализация для тонких оболочек. // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики: Сб. научных трудов МГСУ. –М. – 2000. – с. 36-40
70. Белостоцкий А.М., Сутурин И.М. Опыт применения тонкостенно-оболочечных КЭ на основе моментной теории упругости в расчетах пространственных конструкций, зданий и сооружений. // Труды XX международной конференции «ВЕМ&FEM-2003». – СПб. – 2003. – с.88-95
71. Белостоцкий А.М., Сутурин И.М. Тестирование КЭ плоского напряженного состояния и тонких оболочек на основе моментной теории упругости. // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики: Сб. научных трудов МГСУ . – 2001. – с. 34-40
72. Белостоцкий А.М. Численное моделирование статического и динамического НДС пространственных систем «сооружение-основание-водохранилище» с учетом нелинейных эффектов открытия-закрытия швов и макротрещин: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук.:05.23.07 / Белостоцкого Александр Михайлович; РГАУ-МСХА имени К.А.Тимирязева. –М., 1998. – 58 с.
73. Бененсон А.М., Курдюмов В.А. Расчет предельного равновесия стержневых конструкций с учетом сдвига // Прикладная механика. – Киев. – 1984. № 12 (XX). –с. 90-94
74. Бененсон А.М. Численные методы оценки предельных нагрузок судовых конструкций: Учебное пособие/ А.М. Бененсон, М.Ю. Миронов, А.А. Родионов. – СПб: Изд. центр СПбГМТУ, 2013. - 121 с.
75. Буланов Э.А. Моментные напряжения в механике твердого, сыпучего и жидкого тела. – М.: Вузовская книга, 2012. – 140 с.
76. Вовкушевский А.В. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов/ А.В. Вовкушевский, Б.А. Шойхет. – М.: Энергия, 1981. – 136 с.
77. Войтенко Ю.И. Деформирование прямоугольной пластины при импульсном нагружении // Проблемы прочности. – 1998. – №6. – с. 85-90
78. Вороненок Е.Я. Метод редуцированных элементов для расчета конструкций/ Е.Я. Вороненок, О.М. Палий, С.В. Сочинский. – Л.:Судостроение, 1990. – 220 с.
79. Галлагер Р. Введение в метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
80. Гарагаш И.А., Николаевский В.Н. Механика Коссера для наук о Земле // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – № 4 (2). – с. 44-66
81. Гвоздев А.А. Определение величины разрушающих нагрузок для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические

- деформации // Труды конференции по пластическим деформациям. – М. – 1938. – с. 19-30
82. Главачек И. Решение вариационных неравенств в механике/ И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. – М.: Мир, 1986. – 270 с.
83. Гловински Р. Численное исследование вариационных неравенств/ Р. Гловински, Ж.Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
84. Голованов А.И., Султанов Л.У. Расчет больших упругопластических деформаций трехмерных тел МКЭ // Математическое моделирование систем и процессов. – 2004. – № 12. – с. 4-11
85. Гольдштейн Ю.Б. Простейшие задачи динамики стержневых систем с односторонними связями // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – №1 (18). – с. 13-18
86. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. О модели разрушения льда при большой площади контакта // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 1. – с. 137-153
87. Горбачев К.П. Метод конечных элементов в расчетах прочности, –Л.: Судостроение, 1985. – 156 с.
88. Гордеев В.Н., Перельмутер А.В. Расчет упругих систем с односторонними связями как задача квадратичного программирования // Исследования по теории сооружений. – 1967. — Вып. 15. – с. 208-212
89. Давыдов Р.Л., Султанов Л.У. Численный алгоритм решения задачи о больших упругопластических деформациях МКЭ // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2013. – №1. – С. 81-93
90. Далматов Б.И. Механика грунтов, основания и фундаменты, –Л.: Стройиздат, 1988. – 415 с.
91. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
92. Донаускас А.Ю., Локшин А.З., Фрумен А.И. Исследование сходимости решения плоской задачи моментной теории упругости по МКЭ// II дальневосточная науч.-техн. Конф. «Повреждения и эксплуатационная надежность судовых конструкций»: Тез. докл. – Владивосток. – 1987. – с.213-216
93. Донаускас А.Ю., Манухин В.А. Об использовании гибридных и моментных конечных элементов плоской задачи теории упругости // Труды ЛКИ: Прочность судовых конструкций. – 1988. – 98 с.
94. Доронин Ю.П. Морской лед / Ю.П. Доронин, Д.Е. Хейсин. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 320 с.
95. Друкер Д., Прагер В., Гринберг Х. Расширение теоремы о предельном состоянии для непрерывной среды // Механика. – 1953. – № 1. – с.98-106
96. Дьяченко Е.Н. Аналитическая верификация моделей седиментации, основанных на методе дискретных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 2(22). – с. 17-21
97. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Макромеханическое моделирование упругой и вязкоупругой сред Коссера // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – с. 40-47

98. Ершов В.Н. Конечно-элементная реализация динамических уравнений сплошной среды // Сборник трудов IX Дальневосточной научно-технической конференции по повреждениям и эксплуатационной надежности судовых конструкций, Владивосток. – 1984. – с. 179-181
99. Ершов Н.Ф. Прочность судовых конструкций при локальных динамических нагружениях / Н.Ф. Ершов, А.Н. Попов. –Л.: Судостроение, 1989. – 200 с.
100. Жигалин А.Г., Головинский В.Н., Федечев А.Ф., Поляков К.А. О решении динамических задач теории упругости МКЭ с применением современных прикладных программ // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2002. – №1 (9). – с. 188-189
101. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А.Н. Подгорный, П.П. Гонтаровский, Б.Н. Киркач и др. – Киев: Наукова думка, 1989. – 232 с.
102. Захаров П.Ю. Анализ устойчивости и сходимости одной конечно-разностной схемы численного интегрирования нелинейного уравнения колебаний// Труды ЛКИ: Динамика и прочность судовых конструкций. – Л. – 1986. – с. 74-81
103. Зданчук Е.В., Лалин В.В. Безмоментная теория упругости со свободным вращением. Волны в изотропной линейно упругой среде // Морские интеллектуальные технологии. – 2010. – № 1. – с. 26-28
104. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. –М.: Мир, 1974. –542с.
105. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. –М.: Мир, 1986. – 320 с.
106. Зорнина Н.А., Федоров А.С. Исследование концентрации напряжений вблизи особых точек в геометрически нелинейной постановке // Изобретательство. – 2012. – №8. – с. 32-37
107. Зорнина Н.А., Федоров А.С. Метод исследования концентрации напряжений в узлах соединений корабельных рулевых устройств при сжатии в геометрически нелинейной постановке // Изобретательство. – 2013. – Т. XIII, №6. – с.52-56
108. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
109. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. –270 с.
110. Ильюшин А.А., Ломакин В.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // Прочность и пластичность. – М.:Наука. – 1971. – с. 54-61
111. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журнал. – 1954. – т.6, №3. – с. 314-325
112. Ишлинский А.Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бринелля // ПММ. – 1994. – т.8, вып. 3. – с. 201-224
113. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.:Наука, 1969. – 420 с.
114. Каштелян В.И. Приближённое определение усилий, разрушающих ледяной покров // Проблемы Арктики и Антарктики. – 1960. – №5. – с.31-37

115. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика: сб. переводов. – 1965. – №3 (91). – с. 89-112
116. Конюхов А.В., Жигалко Ю.П., Бережной Д.В. Метод трапеций при решении динамических задач механики деформируемого твердого тела в МКЭ // Механика оболочек и пластин: Сб. докл. 19 Международной конф. по теории оболочек и пластин, 28-30 сент. – Нижний Новгород: изд. ННГУ, 1999. – с. 104-108.
117. Корепанов В.В., Матвеев В.В. Конечно-элементный анализ некоторых двумерных задач несимметричной теории упругости // Тезисы докладов конференции молодых ученых «Неравновесные процессы в сплошных средах». – Пермь – 2002. – с. 72
118. Коржавин К.Н. Воздействие льда на инженерные сооружения. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 203 с.
119. Короткина М.Р. а) О моментных напряжениях. I. Модель простой структуры // Вестник Моск. ун-та. – атем., мех. – 1968. – №5. – с.88-95 б) О моментных напряжениях. II. Модель сложной структуры // Вестник Моск. ун-та. Матем., мех. – 1968. – №6. – с. 53-61
120. Котов В.В. Численное моделирование динамических упругопластических упрочняющихся сред в эйлерово-лагранжевых переменных // Вестн. Нижегород. ун-та. Сер. Мех. – 2002. – №1. – с. 50-57
121. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // Известия РАН: Механика твердого тела. – 2002.–№5. –с.69-82
122. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. О свойствах поверхностных волн в среде Коссера // Математическое моделирование систем и процессов. –2006. –№ 14. – с. 109-113
123. Купман Д., Ланс Р. О линейном программировании и теории предельного равновесия // Механика. – 1966. – № 2. – с.150-160
124. Купрадзе В.Д. Пространственная задача теории упругости. – М.: Наука, 1980.
125. Курдюмов В.А., Хейсин Д.Е. Гидродинамическая модель удара твердого тела о лед // Прикладная механика. – Киев. – 1976. – Т. XII, №10. – с. 103-109
126. Кутилин Д.И. Теория конечных деформаций. –М.:Гостехиздат, 1947. – 275 с.
127. Лавров В.В. Деформация и прочность льда. – Л.: Гидрометеоиздат, 1969. – 206с.
128. Лалин В.В., Зданчук Е.В. Об одной модели сыпучих сред. Волны в редуцированной среде Коссера //Инженерно-строительный журнал. – 2012. – №5.– с.65-71
129. Лихоманов В.А., Хейсин Д.Е. Экспериментальное исследование удара твердого тела о лед // Проблемы Арктики и Антарктики. – Л.:Гидрометеоздат. – 1971. – вып. 38. – с.105-111

130. Лобанов В.А. Алгоритм контактного взаимодействия тел со льдом в задачах с конечноэлементной постановкой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2009. – №3. – с.19-25
131. Лобанов В.А. Моделирование взаимодействия льда с конструкциями // Вестник научно-технического развития. Национальная техническая группа. – 2011. – №10(50). – с. 31-39
132. Локшин А.З., Фрумен А.И. Конечный элемент плоской задачи моментной теории упругости // Труды Ленинградского Кораблестроительного института. – 1981. – с. 49-54
133. Ломакин В.А. Вопросы обобщённой моментной теории упругости // Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ. – 1967. – № 1. – с. 82-88
134. Ломакин В.А. Статистическое описание напряженного состояния деформируемого тела.// Доклады АН СССР. – 1964. –155. №6
135. Ломакин В.А. Плоская задача теории упругости микронеоднородных тел в полуплоскости // МТТ. – 1966. – № 3. – с. 72-77
136. Ломакин В.А. О деформировании микронеоднородных упругих тел // ПММ. – 1965. – т. 29, вып. 5
137. Ломакин В.А. О теории деформирования микронеоднородных тел и ее связи с моментной теорией упругости // ПММ. – 1966. – т.30, в.5. – с. 875-881
138. Ломакин В.А., Савова Л.Н. Вопросы деформирования микронеоднородных вязко-упругих тел и моментная теория вязко-упругости // Механ. Полимеров. – 1967. – № 2. – с. 213-220
139. Лукашевич А.А., Розин, Л.А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа // Инженерно-строительный журнал. – 2003. – №1. – с. 75-81
140. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
141. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в MathCAD: Учебный курс. – СПб: Питер, 2005. – 448 с.
142. Механика контактных взаимодействий / сборник трудов п/р И.И. Воровича и И.М. Александрова – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 – 672 с.
143. Миндлин Р.Д. Сб.: Приложения теории функций в механике сплошной среды. –М.:Наука, 1965. – т.1
144. Миндлин Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика. – 1964. – Т. 86, вып. 4. – с. 115-128
145. Миронов М.Ю., Пономарев Д.А., Родионов А.А. Анализ уравнений предельных поверхностей балочных сечений с использованием объемных моделей МКЭ // Материалы XXIV международной конференции ВЕМ&FEM. – СПб. – 2011. – с.75-77
146. Миронов М.Ю., Родионов А.А. Метод переменных параметров упругости в расчетах несущей способности судовых конструкций // Материалы XXIV международной конференции ВЕМ&FEM. – СПб. – 2011. – с.77-79

147. Миронов М.Ю. Предельные состояния балочных моделей судовых конструкций: Учебное пособие / М.Ю. Миронов, А.А. Родионов. – СПб: Изд-во СПбГМТУ, 2012. – 127 с.
148. Миронов М.Ю., Строганова О.С. Об энергоемкости вдавливания сферического индентора в пластичную среду // Тезисы докладов: Конференция по строительной механике корабля, посвященная памяти академика Ю. А. Шиманского 19-20 декабря 2013 г., ФГУП «Крыловский государственный научный центр». – СПб, 2013. – с.92-94
149. Миронов М.Ю., Строганова О.С. Оценка предельного усилия вдавливания сферы в пластичную среду // Материалы научно-практической конференции, посвященной 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова 20-21 сентября 2013. – СПб. –2013. – с. 68-72
150. Мисику М. Сб.: Приложения теории функций в механике сплошной среды. – М.:Наука, 1965. – т. 1
151. Морозов Е.М. Контактные задачи механики разрушения / Е.М. Морозов, М.В. Зернин. – М.: Машиностроение, 1999. – 544 с.
152. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
153. Назаров С.А., Семенов Б.Н. а) Равномерные по малому параметру оценки решений задач моментной теории упругости со стесненным вращением. – Депонированная рукопись № 304777. Деп. ВИНТИ, – 1978. б) О связи коэффициентов интенсивности для плоской задачи теории упругости в классической и моментной постановках. Исследования по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – вып. 13
154. Немиш Ю.Н. Плоская задача моментной теории упругости для области с круговым отверстием // Прикл. механика. – 1965. – Т. 1, Вып. 5. – с. 52-59
155. Немиш Ю.Н. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости. // Прикл. мех. – 1966. – т. 2, вып. 4.
156. Новацкий В. Теория упругости. –М.: Мир, 1975. – 872 с.
157. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. –М.: Мир, 1981. – 304 с.
158. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
159. Павловская Е.Е., Петров Ю.В. О некоторых особенностях решения динамических задач теории упругости // Изв. РАН, Мех. тв. тела. – 2002. – №4. – с. 39-45
160. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. – 1964. – Т. 28, вып. 3. – с. 401-408
161. Пальмов В.А. Приложение теории обобщенного континуума к проблеме пространственного затухания в сложных механических системах // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – с. 105-110

162. Пальмов В.А. Основные уравнения теории асимметричной упругости // ПММ. – 1964. – т.28, №3. – с.401-408
163. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. – М.: Мир, 1989. – 494 с.
164. Папкович П.Ф. Труды по прочности корабля. – Л.:Судпромгиз, 1956 – 678 с.
165. Перельмутер А.В. К расчету систем с односторонними дискретными связями // Строительная механика и расчет сооружений. – 1976. – № 1. – с. 23-31
166. Подгорный А.Н. Решение прикладных контактных задач методом конечных элементов / А.Н. Подгорный, Г.А. Марченко, П.П. Гонтаровский и др. – Харьков: ИПМАШ, 1984. – 65 с.
167. Попов Ю.Н. Прочность судов, плавающих во льдах/ Ю.Н. Попов, О.В. Фаддеев, Д.Е. Хейсин, А.А. Яковлев. –Л.: Судостроение, 1967. – 224 с.
168. Постнов В.А. Вибрация корабля/ В.А. Постнов, В.С. Калинин, Д.М. Ростовцев. –Л.: Судостроение, 1983. – 284 с.
169. Постнов В.А., Тумашик Г.А., Миронов М.Ю. Спектральный анализ существующих конечно-разностных методов решения задачи динамики инженерных конструкций // Сб. трудов НТК «Кораблестроительное образование и наука – 2003». – СПб:СПбГМТУ. –2003.
170. Постнов В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций/ В.А. Постнов, И.Я. Хархурим. –Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.
171. Постнов В.А. Численные методы в расчетах судовых конструкций, –Л.: Судостроение, 1977. –280 с.
172. Правила классификации и постройки морских судов. Том 1. 17-е издание. – СПб:РМРС, 2014. – 535 с.
173. Проценко А.М. Теория упруго-идеальнопластических систем. –М.: Наука, 1982. –288 с.
174. Рабинович И.М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. –М.: Стройиздат, 1975. – 149 с.
175. Развитие теории контактных задач в СССР: сб. статей / Под. ред. Л.А. Галина. – М.: Наука, 1976, – 493 с.
176. Ржаницын А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. –М.: Наука, 1983. – 288 с.
177. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. –М.: Стройиздат, 1977. – 128 с.
178. Ромашов Ю.А. Определение коэффициентов интенсивности в линейной моментной теории упругости // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – вып. 13. – с.154-165
179. Рутман Ю.Л. Метод псевдожесткостей для решения задач о предельном равновесии жесткопластических конструкций. –СПб: БГТУ, 1998. – 53 с.
180. Савин Г.Н. Основы плоской задачи моментной теории упругости (конспект лекций). – Киев: Ин-т механики АН УССР, 1965. – 162 с.

181. Сагомоян А.Я., Романов И.Н. Пробивание тонкой плиты жестко-пластическим упрочняющимся снарядом // Вест.Моск.ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 1990. –№ 2. –с. 36-41
182. Садовский В.М., Садовская О.В., Варыгина М.П. Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – с. 111-121
183. Салганик Е.А., Шхинек К.Н. Вибрация шельфовых сооружений при действии льда // Инженерно-строительный журнал. – 2014. – № 4. – с. 72-88
184. Свойский Ф.М. Граничные условия для конечных элементов с вращательными степенями свободы. – СПб:ВВМ, 2004, – 83с.
185. Свойский Ф.М. Несовместные конечные элементы для расчета листовых пространственных конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Автоматизация научных исследований по прочности. – Горький: Изд-во Горьковского ун-та, –1986. –с.59-70
186. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. –М.: Мир, 1979. – 392 с.
187. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. 9 изд. –М.: Наука, 1981. – 440 с.
188. Седов Л.И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи матем. наук. – 1965 – т.20, №5. – с.121-180
189. Сергеева А.М., Ткачева А.В., Одинокое В.И. Численное исследование процесса деформирования ледяного покрова ледокольным судном // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. –2013. – № 3(23). – с. 111-120
190. Симборт Э. Сравнение динамических упругопластических расчетов, выполненных по одностепенной модели и по модели со многими степенями свободы // Инженерно-строительный журнал. –2011. –№6. – с.23-27
191. Справочник по строительной механике корабля. Т.2 / под ред. Паляя О.М. – Л.: Судостроение, 1982. – 232 с.
192. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 350 с.
193. Строганова О.С. Исследование допущения о стесненности моментной среды на конечно-элементных моделях плоской задачи теории упругости // Материалы научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов «Балтийский экватор-3» 14-15 октября 2014 г.. –СПб:СПбГМТУ. –2014. – с.87-92
194. Строганова О.С. Конечно-элементное моделирование механизмов локального нагружения сред со сложной реологией // Тезисы научно-технической конференции по строительной механике корабля, посвященной памяти профессора И.Г. Бубнова и 110-летию со дня образования кафедры строительной механики корабля «Бубновские чтения» 23 декабря 2014 г.. – СПб. –2014. – с.120-121

195. Строганова О.С., Фрумен А.И. Методология применения МКЭ для оценки долговечности элементов бурового оборудования // Морские Интеллектуальные Технологии. –2011. – № 4 (спецвыпуск). – с. 76-89
196. Строганова О.С., Фрумен А.И. Оценка НДС по МКЭ элементов бурового оборудования с учетом подвижного контакта в цикле нагружения // Материалы XXIV Международной конференции ВЕМ&FEM-2011: Тезисы докладов. – СПб. – 2011. – с. 109-114
197. Строганова О.С., Фрумен А.И. Решение контактных задач с подвижной нагрузкой в системе ANSYS // Материалы 2-й межвузовской конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов «Балтийский экватор» 22-23 сентября 2011 г. – СПб. – 2011. – с. 266-278
198. Строганова О.С., Фрумен А.И. Четырехугольный конечный элемент несимметричной теории упругости в задачах о локальном нагружении // Тезисы докладов ФГУП «Крыловский государственный научный центр». – СПб. – 2013. – с. 85-87
199. Строганова О.С., Фрумен А.И. Четырехугольный конечный элемент несимметричной теории упругости в задачах о локальном нагружении // Труды Крыловского государственного научного центра. – СПб. – 2014. – вып. 82 (366). – с. 99-112
200. Строганова О.С., Фрумен А.И. Численное исследование влияния реологии грунта на параметры долговечности цангового кернорвателя // Материалы Восьмой общероссийской конференции по морским интеллектуальным технологиям 18-19 сентября 2011 г «МОРИНТЕХ-2011». – 2011. – № 2 (спецвыпуск). – с. 86-91
201. Строганова О.С., Фрумен А.И., Миронов М.Ю. Оптимизационное проектирование многослойной цилиндрической оболочки подводного аппарата // Тезисы доклада на конференции по строительной механике корабля памяти проф. П.Ф. Папковича 17-18 декабря 2012 года. – СПб. 2012. – с.59-61
202. Строганова О.С., Фрумен А.И., Миронов М.Ю. Применение методов теории предельного равновесия к расчету предельных состояний локально нагруженной моментной среды // Материалы научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых специалистов «Балтийский экватор-3» 14-15 октября 2014 г. – СПб: СПбГМТУ. – 2014. – с. 77-82
203. Строганова О.С., Фрумен А.И., Миронов М.Ю. Проектирование многослойной цилиндрической оболочки подводного аппарата // Труды Крыловского государственного научного центра. – СПб. –2013. –выпуск 75 (359). – с.79-88
204. Строганова О.С., Фрумен А.И. Разработка конечного элемента плоской задачи моментной теории упругости // Материалы научно-практической конференции, посвященной 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова 20-21 сентября 2013. – СПб. –2013. – с. 93-101
205. Стружанов В.В., Бурмашева Н.В. Вычислительная процедура нахождения предельных значений параметров нагружения

- механических систем // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 4. – с. 107-113
206. Терегулов И.Г. Расчет конструкций по теории предельного равновесия / И.Г. Терегулов, Р.А. Каюмов, Э.С. Сибгатуллин. – Казань: ФЭН, 2003. – 150 с.
207. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 560 с.
208. Трифонов О.В. Оценка повреждений оборудования при интенсивных сейсмических воздействиях // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 3. – с. 122-127
209. Угодчиков А.Г. Об уравнениях моментной динамики твердого деформируемого тела // ПППП, Межвуз. сборник. – М., – 1995. – №53 – с.158-176
210. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, –1967. – с. 212-263
211. Федоров А.С., Вересов В.С., Казанкова И.П., Крамской Л.М., Кемпинский А.С. Метод и программа расчета на ЭВМ плоских и осесимметричных элементов конструкций с учетом геометрической и физической нелинейности. Отчет по НИР А-988, Л., ЛКИ, 1983
212. Федоров А.С. и др. Метод и программа расчёта на ЭВМ плоских и осесимметричных элементов конструкций с учётом физической и геометрической нелинейности // Расчёты и испытания на прочность. – М.: ВНИИНМАШ, –1985.
213. Федоров А.С., Фадеев В.М., Болдин А.И. Решение динамических задач теории пластичности методом конечных элементов. Отчет по НИР А-905, – Л.: ЛКИ, –1980.
214. Федоров А.С. Физические соотношения теории пластичности в геометрически нелинейных задачах // Труды ЛКИ: Строительная механика и прочность судовых конструкций. – Л. – 1981. – с. 120-127
215. Фридман В. М., Чернина В. С. Решение задачи о контакте упругих тел итерационным методом // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1967 – № 1. – с. 116-120
216. Фрумен А.И. Деформация бесконечной полуплоскости в моментной постановке // Международная конференция по методам конечных и граничных элементов ВЕМ&FEM-2001. – СПб, 2001.
217. Фрумен А.И. Треугольный элемент плоской задачи теории упругости // Труды Ленинградского Кораблестроительного института. – 1977. – Вып. 116. – с. 87-93
218. Фрумен А.И., Постнов В.А. Решение задач моментной теории упругости методом конечных элементов // Вторая Международная конференция и выставка по морским интеллектуальным технологиям MORINTEX-97. – СПб, 1997. – с. 33-35
219. Фрумен А.И., Строганова О.С. Решение плоской контактной задачи с помощью конечных элементов моментной теории упругости // Тезисы докладов XXV Международной конференции «Математическое

- моделирование в механике деформируемых сред и конструкций. Методы граничных и конечных элементов» 23-26 сентября 2013. –СПб, 2013. –с. 219-220
220. Хейсин Д.Е., Лихоманов В.А. Экспериментальное определение удельной энергии механического дробления льда при ударе //Проблемы Арктики и Антарктики. – Л.: Гидрометеиздат, 1973. – вып.41. – с.55-61
221. Хейсин Д.Е., Черепанов Н.В. Изменение структуры льда в зоне удара твердого тела о поверхность ледяного покрова // Проблемы Арктики и Антарктики. –Л.:Гидрометеиздат, 1970. – Вып.34. – с.79-84
222. Чирас А.А. Математические модели анализа и оптимизации упругопластических систем. – Вильнюс, 1982. – 112 с.
223. Шакирзянов Ф.Р. Оценка несущей способности системы «конструкция-грунт»: Автореф. дис. ... канд.тех.наук: 01.02.04/ Шакирзянов Фарид Рашитович; КГАСУ. – Казань, 2012. – 22 с
224. Шапошников Н.Н., Бабаев В.Б., Сенющенков М.А. Решение контактных динамических задач методом конечных элементов по неявной схеме в системе прочностных расчетов «СПРИНТ» // Расчеты на прочность. – 1985. – Вып. 26. – с. 265-274
225. Шиманский Ю.А. Условные измерители ледовых качеств судов // Труды АНИИ. –1938. – Т. 130. – 125 с
226. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows.– М.: ДМК Пресс, 2003. – 448 с.
227. Штаерман И.Я. Обобщение теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел // ДАН СССР. – 1940. – Т. 29, № 3. – с. 179-181