



Свидетельство саморегулируемых организаций:  
НП «Объединение организаций в сфере проектирования  
«Академический Проектный Центр (АПЦ)» от 27.04.2011  
№ П-119-18012010-7743578813-0007-4



**Утверждаю**  
Генеральный директор

С.С.Кнюк

**Согласовано**

Научный руководитель  
докт.техн.наук, проф.

В.А.Ильичев

## **ВЕРИФИКАЦИОННЫЙ ОТЧЕТ ПО ПРОГРАММНОМУ КОМПЛЕКСУ MIDAS GTS**

### **ТОМ 2**

### **Верификационные примеры из MIDAS GTS Manual**

**Заказчик:** MIDAS Information Technology Co., Ltd. (MIT), Корея, г. Соннам

Москва 2012

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>Матрицы верификации.....</b>	<b>4</b>
<b>Пример 1. Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде.....</b>	<b>8</b>
<b>Пример 2. Сферическая полость в бесконечной упругой среде.....</b>	<b>20</b>
<b>Пример 3. Цилиндрическое отверстие в бесконечной среде Мора-Кулона .....</b>	<b>27</b>
<b>Пример 4.Обделка тоннеля круглого сечения в упругой среде с анизотропными напряжениями.....</b>	<b>43</b>
<b>Пример 5. Жесткий ленточный фундамент на упругом основании .....</b>	<b>52</b>
<b>Пример 6. Ленточная нагрузка на упругом основании Гибсона.....</b>	<b>56</b>
<b>Пример 7. Круглый фундамент на упругом полупространстве .....</b>	<b>61</b>
<b>Пример 8. Ленточные и круглые фундаменты на упруго-пластическом основании (модель Мора-Кулона).....</b>	<b>67</b>
<b>Пример 9. Гладкий квадратный фундамент на упруго-пластическом основании (модель Мора-Кулона - для связного грунта при отсутствии трения) .....</b>	<b>83</b>
<b>Пример 10. Откопка с применением распорок .....</b>	<b>89</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящий том содержит верификацию примеров, взятых из пособия, поставляемого разработчиками MIDAS GTS.

**Руководитель работы:** акад. РААСН, докт. техн. наук, проф. В. А. Ильичев (РААСН)

**Ответственный исполнитель:** канд. техн. наук Ю. А. Готман (ООО «Подземпроект»)

**Исполнитель:** с.н.с. Р.Н. Магзумов (ГУП Институт "БашНИИстрой")

**Матрицы верификации**  
***MIDAS GTS***



## MIDAS GTS. Матрица верификации №1

№	Наименование теста	Тип проверки и результатов	Конечные элементы	Оцениваемые параметры	Погрешность, %
1	Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде	(1)	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации,	Радиальное напряжение	0,92
				Касательное напряжение (внутр./внеш.)	1,77 / 1,7
				Радиальное перемещение	1,25
			4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент	Радиальное напряжение	0,95
				Касательное напряжение (внутр./внеш.)	1,84 / 1,24
				Радиальное перемещение	1,49
2	Сферическая полость в бесконечной упругой среде	(1)	4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент	Радиальное напряжение	0,01
				Касательное напряжение (внутр./внеш.)	1,33 / 0,16
				Радиальное перемещение	1,25
3	Цилиндрическое отверстие в бесконечной среде Мора-Кулона	(1)	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации	Радиус зоны текучести	2,94
			4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент		4,15
			8-ми узловой гексаэдр		2,94
4	Обделка тоннеля круглого сечения в упругой среде с анизотропными напряжениями	(1)	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации	Приведенное радиальное перемещение ( $0^{\circ}/90^{\circ}$ )	0,27 / 7,37
				Приведенное касательное перемещение ( $45^{\circ}$ )	0,46
				Приведенное продольное усилие	1,24 / 0,51 / 1,08

				(0°/45°/90°)	
				Приведенные изгибающие мо- менты (0°/45°/90°)	14,87 / 0 / 14,97
5	Жесткий ленточный фундамент на упругом основании	(1)	6-ти узловой треугольный элемент плоской деформации	Нагрузка на фундамент	0,85
6	Ленточная нагрузка на упругом основании Гибсона	(1)	6-ти узловой треугольный элемент плоской деформации	Осадка	7,4
7	Круглый фундамент на упругом полупространстве	(1), (3)	4-х узловой четырёхугольный осесимметричный элемент	Осадка	7,4
				Давление под подошвой (размер модели 40х40м)	11,37-21,83
				Давление под подошвой (размер модели 80х80м)	5,79-15,72
8	Ленточные фундаменты на упруго- пластическом основании (модель Мора-Кулона)	(1)	8-ми узловой четырёхугольный элемент плоской деформации	Разрушающая нагрузка	0,5
			20-ти узловой гексаэдр		0,31
	Круглые фундаменты на упруго- пластическом основании (модель Мора-Кулона)		8-ми узловой осесимметричный четырёхугольный элемент		5,23
			20-ти узловой гексаэдр		5,08
10	Гладкий квадратный фундамент на упруго- пластическом основании (модель Мора-Кулона - для связного грунта при отсутствии трения)	(1)	20-ти узловой гексаэдр	Разрушающая нагрузка	Соответствует аналити- ческим границам
12	Откопка с применением распорок	(2)	8-ми узловой гексаэдр	Продольное усилие в распорке	6,05

- (1) - сравнение с аналитическим решением  
(2) - сравнение с альтернативными ПС  
(3) - в примере анализируется сходимость решения в зависимости от размера сетки

*MIDAS GTS. Типы верифицированных конечных элементов*

	6-ти узловой треугольный элемент плоской деформации	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации	8-ми узловой четырехугольный элемент плоской деформации	4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент	8-ми узловой четырехугольный осесимметричный элемент	8-ми узловой гексаэдр	20-ти узловой гексаэдр
Линейная статика	5, 6	1, 4	-	1, 2, 7	-	12	-
Нелинейная статика	-	3	8	3	8	3	8, 10

**Пример 1. Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде**

Источник	Jaeger, J. C., and N. G. W. Cook. <i>Fundamentals of Rock Mechanics</i> , 3rd Ed. London: Chapman and Hall, 1976.
Тип задачи:	Статический линейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации, 4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент

**Описание**

Данная задача касается определения напряжений и перемещений для случая цилиндрического отверстия в бесконечно упругой среде под действием поля напряжений  $\sigma_{xx} = p_1$ ,  $\sigma_{yy} = p_2$ . В задаче рассчитывается модель изотропного упругого материала в условиях плоской деформации и осесимметричного напряженного состояния геометрия.

Цилиндрическое отверстие радиусом 1 м рассматривается в бесконечной среде под действием однородного напряжения сжатия в 30 МПа. Предполагается, что задача симметрична относительно как горизонтальной, так и вертикальной осей. Предполагается также, что радиус отверстия небольшой по сравнению с длиной цилиндра. Это предположение позволяет сократить задачу 3D в 2D задачу плоской деформации.

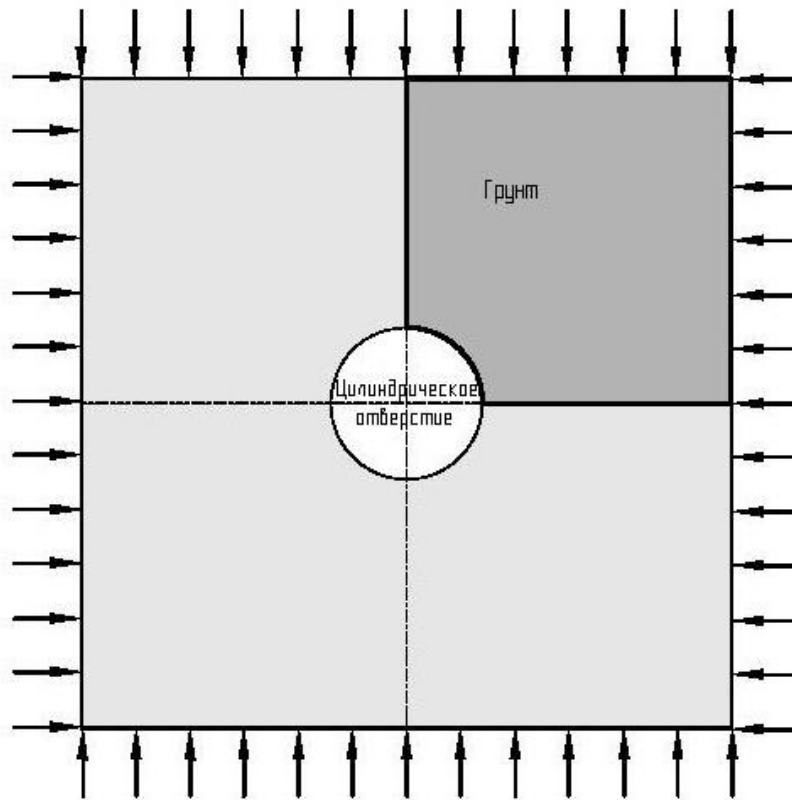


Рисунок 1.1 – Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде

### Аналитическое решение

Для цилиндрического отверстия в бесконечной, изотропной, упругой среде в условиях плоской деформации, распределения радиального и касательного напряжений даются по классическому решению Кирша.

Точка, расположенная в полярной системе координат  $(r, \theta)$  около отверстия радиусом  $a$  (рис. 1.2) обладает напряжениями  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$ , определяемыми следующими уравнениями:

$$\sigma_r = \frac{p_1 + p_2}{2} \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \right] + \frac{p_1 - p_2}{2} \left[ 1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 + p_2}{2} \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} \right] - \frac{p_1 - p_2}{2} \left[ 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{p_1 - p_2}{2} \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta$$

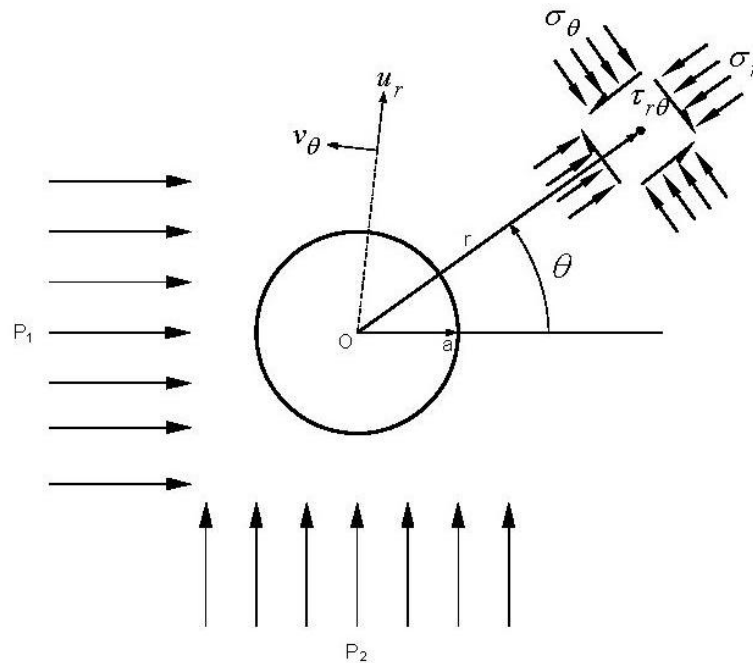


Рисунок 1.2 – Действующие напряжения в точке на расстоянии  $r$  от центра отверстия радиусом  $a$

Перемещения также могут быть определены из предположения состояний плоской деформации:

$$u_r = \frac{p_1 + p_2}{4G} \frac{a^2}{r} + \frac{p_1 - p_2}{4G} \frac{a^2}{r} \left[ 4(1 - \nu) - \frac{a^2}{r^2} \right] \cos 2\theta$$

$$v_\theta = -\frac{p_1 - p_2}{4G} \frac{a^2}{r} \left[ 2(1 - 2\nu) + \frac{a^2}{r^2} \right] \sin 2\theta$$

где  $u_r$  - радиальное перемещение и  $v_\theta$  - касательное перемещение, как показано на рис. 1.2.  $G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

### GTS модель

Для этой задачи рассматривались 2 различные модели. Первая – модель плоской деформации с плоскостью расчета, перпендикулярной к оси отверстия. Вторая – осесимметричная модель с осью симметрии, выровненной по оси отверстия.

Для первой модели в силу симметрии рассматривается только четверть среды. Геометрическая модель и граничные условия показаны на рис. 1.3. Конечноэлементная сетка показана на рис. 1.4 и, как показывает рисунок, радиальная сетка образуется с увеличением размера сетки на расстоянии от отверстия. Однородная сетка вокруг отверстия обеспечивает более точное решение, чем неоднородная сетка. В этой сетке используется в целом 900 КЭ. Расположение границы менялось, чтобы определить её влияние на точность решения. Граница была выбрана на расстоянии 10 м (т.е. 5 диаметров отверстия) от центра отверстия.

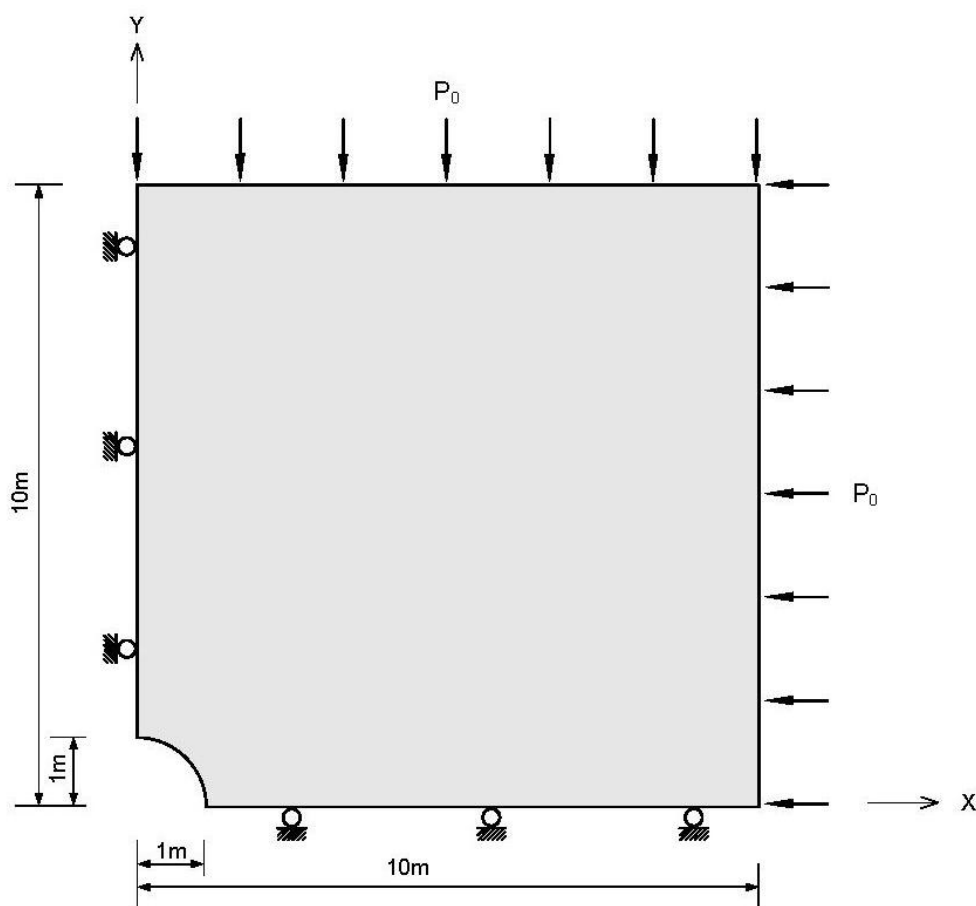


Рисунок 1.3 – Геометрические размеры и граничные условия для модели плоской деформации – четверть симметричная модель

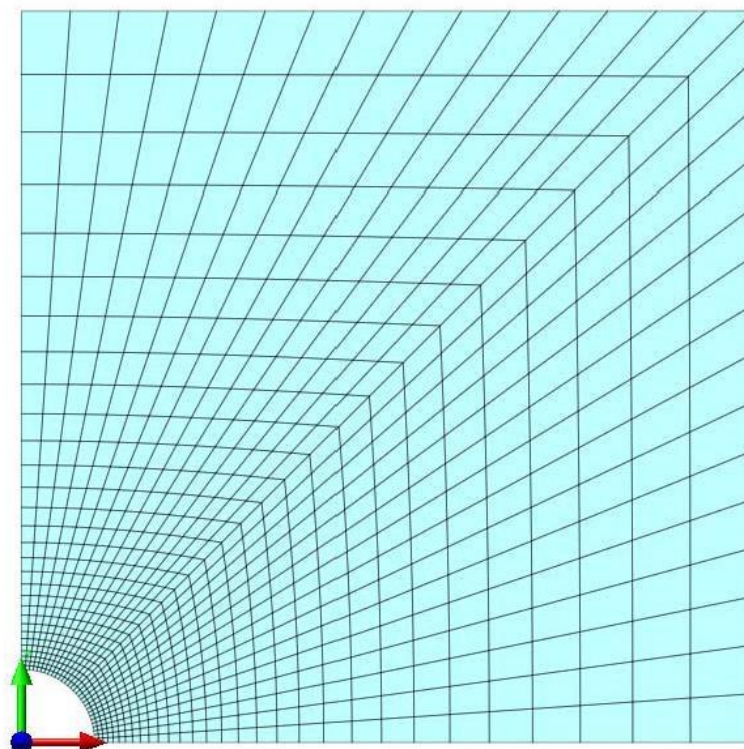


Рисунок 1.4 – Сетка конечных элементов для модели плоской деформации

Осесимметричная модель для этой задачи показана на рис. 1.5, а КЭ сетка - на рис. 1.6. Ось симметрии расположена вдоль оси отверстия. При использовании осесимметричной модели, общее количество элементов значительно сокращается; теперь используется всего 62 КЭ. Граница модели находится на расстоянии 10 м, так же как и для первой модели.

Обе модели обладают одинаковыми свойствами материалов. Обе модели подвергаются изотропному напряжению сжатия, равному 30 МПа.

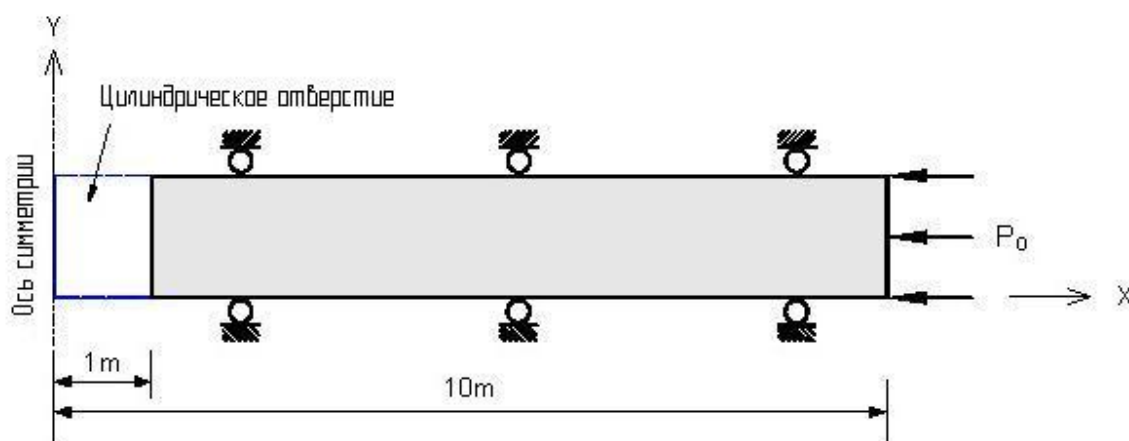




Рисунок 1.5 - Геометрические размеры и граничные условия для осесимметричной модели

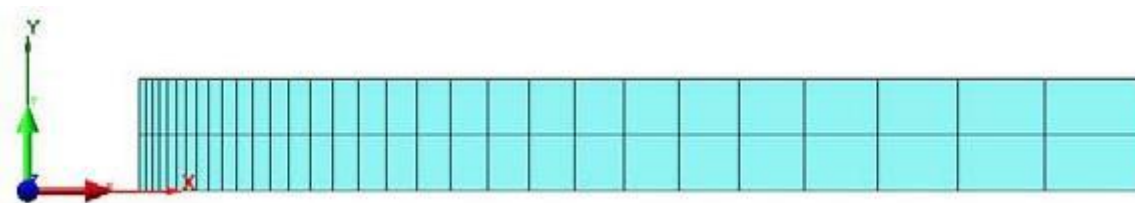


Рисунок 1.6 – Сетка конечных элементов для осесимметричной модели

### Исходные данные для модели 1

Тип расчета	Упругий расчет по 2D модели плоской деформации	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	10м
	Высота	10м
	Радиус отверстия	1м
КЭ	4-х узловой элемент плоской деформации	
Материал	Модуль упругости	$E=677,7931$ МПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,210345$
Граничные условия	Левая сторона	Ограничение по Dx
	Нижняя сторона	Ограничение по Dy
Нагрузки	Начальное изотропное предварительное напряжение 30 МПа. Граничное давление по правой и верхней граням – 30МПа	

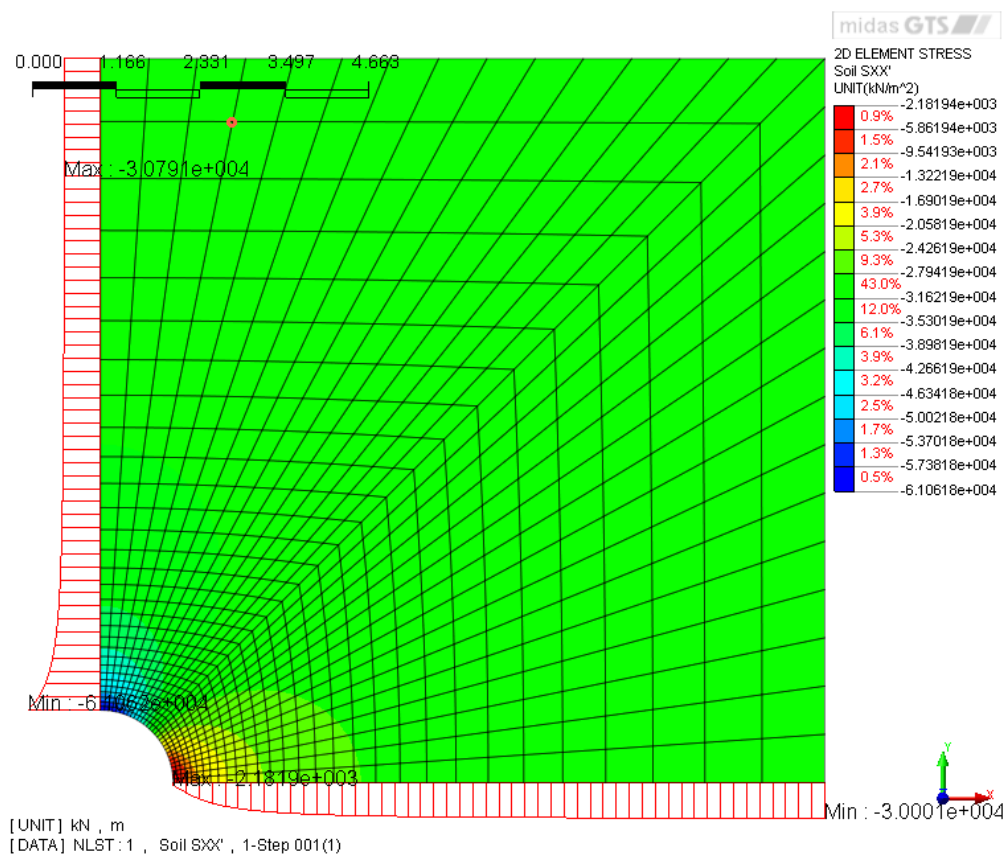
### Исходные данные для модели 2

Тип расчета	Упругий расчет по 2D осесимметричной модели	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	10м
	Высота	1м
	Радиус отверстия	1м
КЭ	4-х узловой осесимметричный элемент	

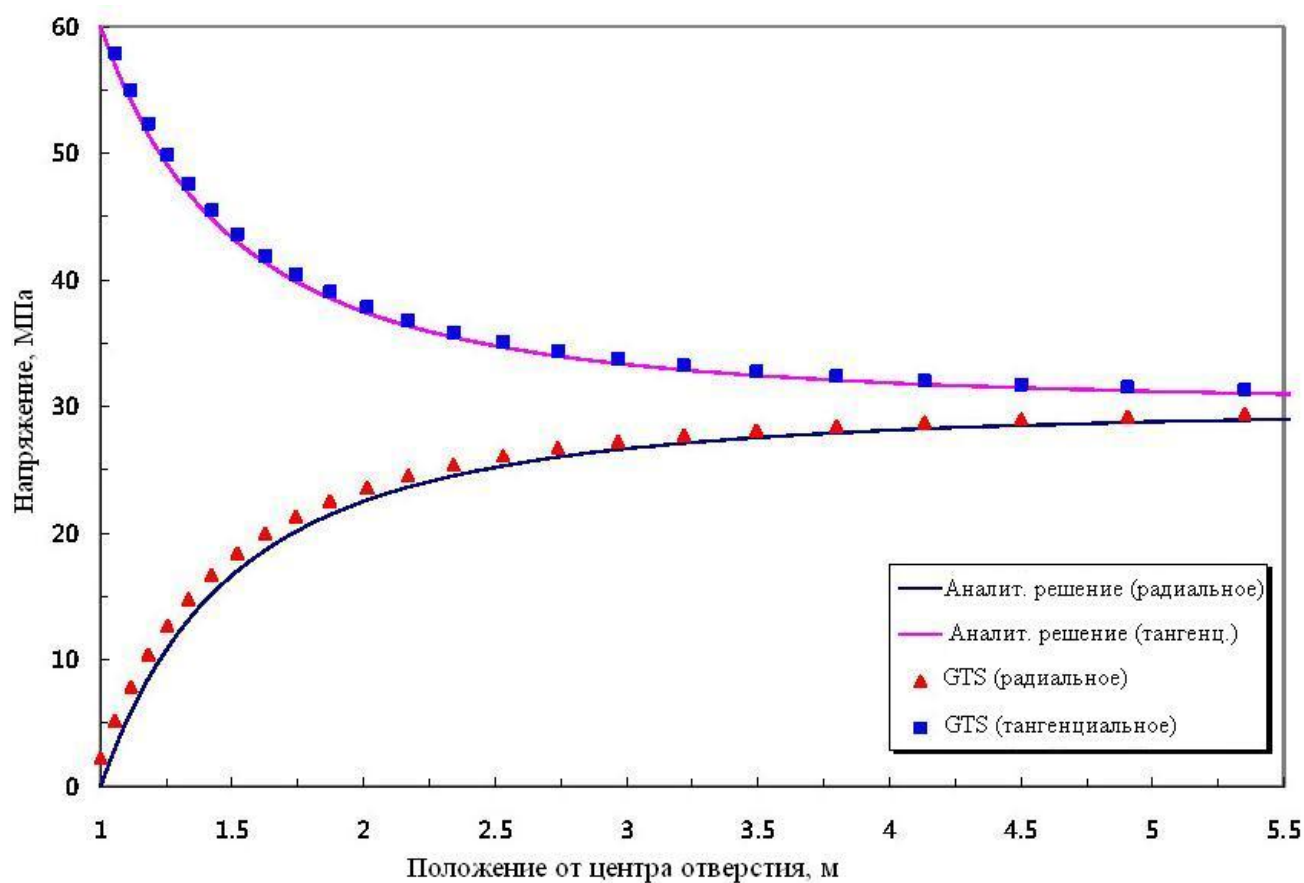
Материал	Модуль упругости	E=677,7931 МПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,210345$
Граничные условия	Верхняя сторона	Ограничение по Dy
	Нижняя сторона	Ограничение по Dy
Нагрузки	Начальное изотропное предварительное напряжение 30 МПа. Граничное давление по правой и верхней граням – 30 МПа	

## Результаты

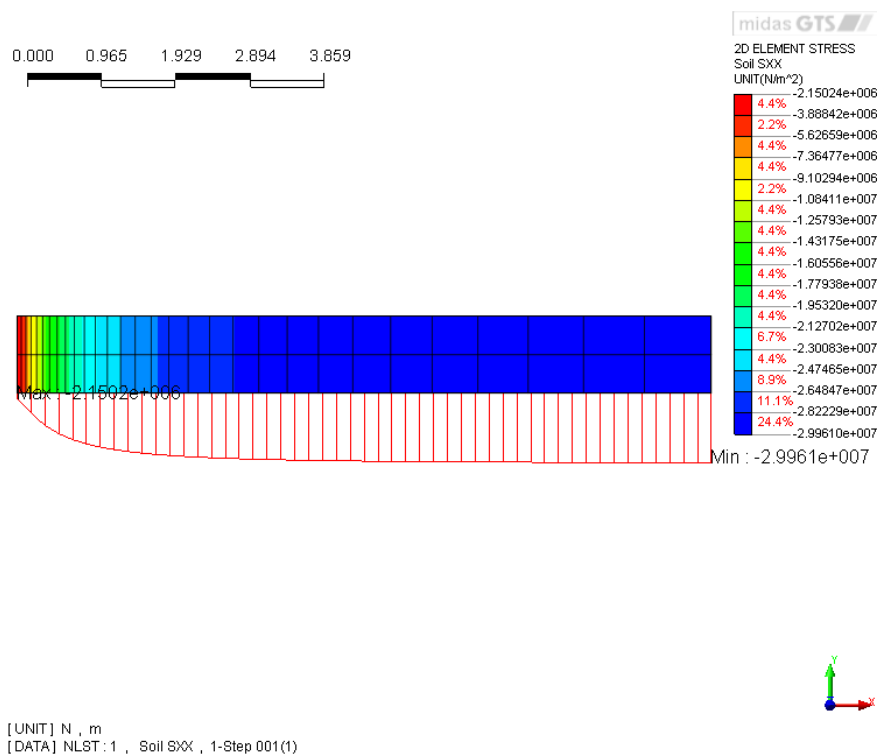
На рис. 1.7 показаны радиальное и касательное напряжения, рассчитанное в GTS в сравнении с аналитическим решением для  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ . На рис. 1.8 показано сравнение для радиального перемещения.

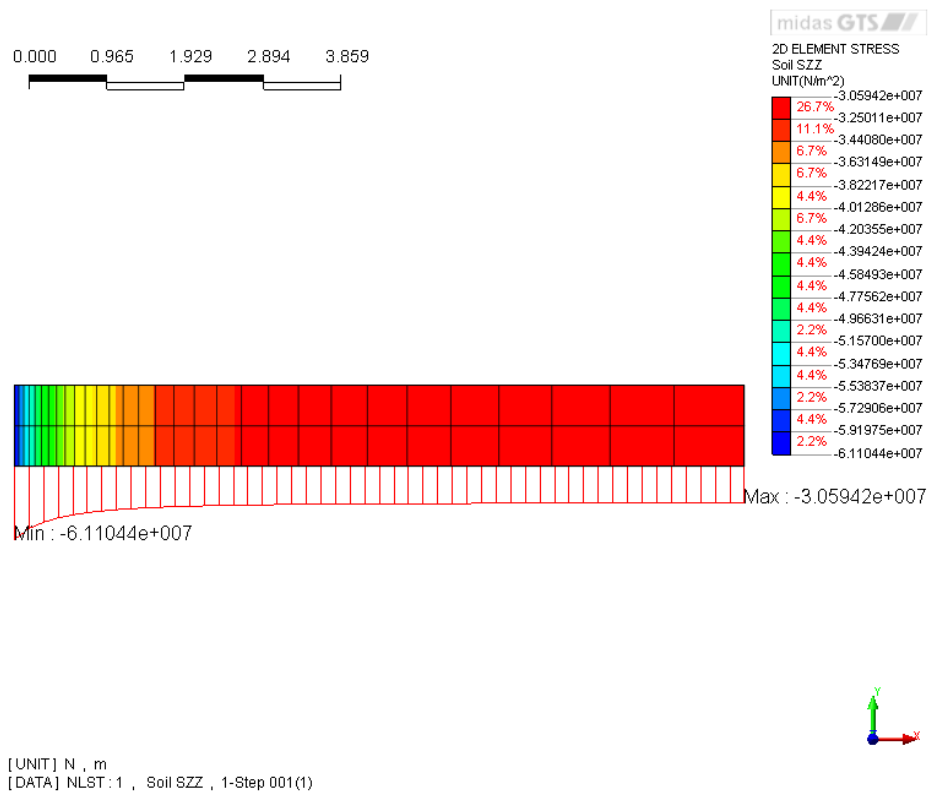


(а) Изополя напряжений вдоль оси X (модель 1)

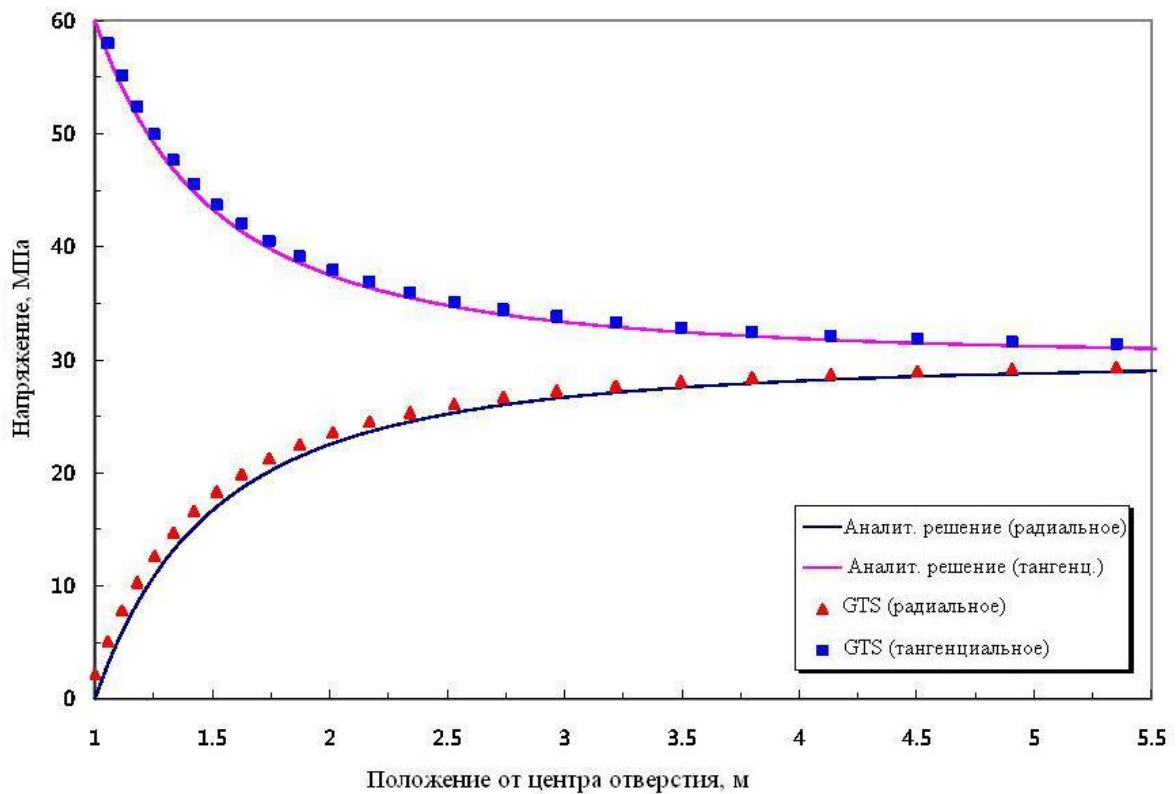


(б) График касательного и радиального напряжений (модель 1)



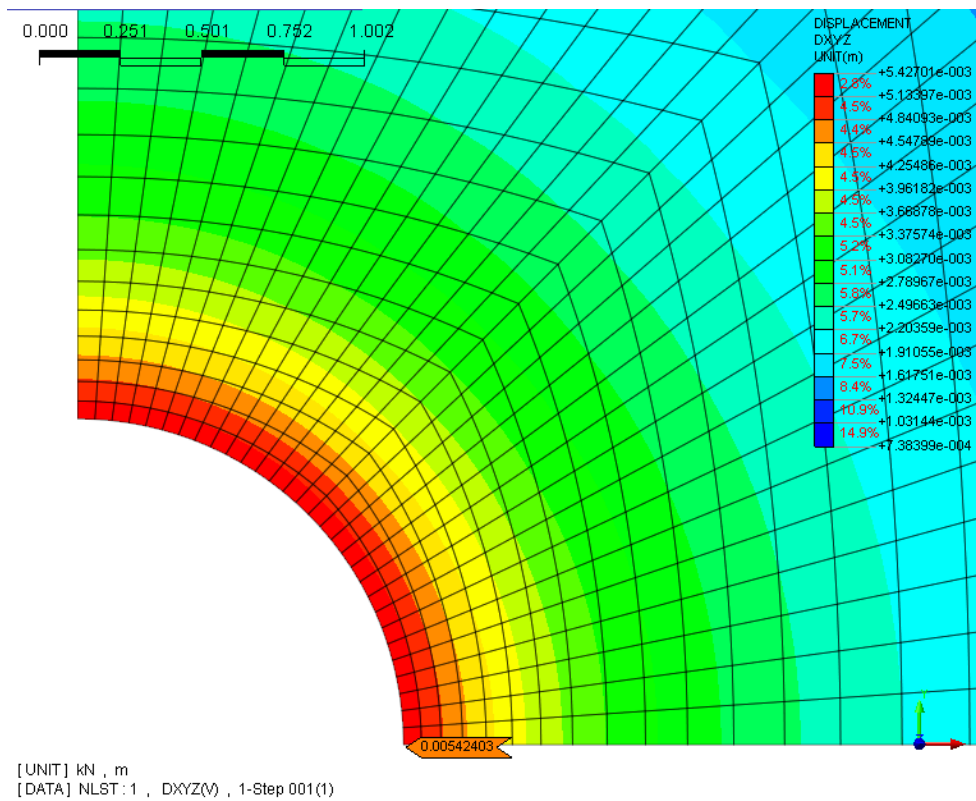


(с) Изополя напряжений вдоль осей X и Z (модель 2)

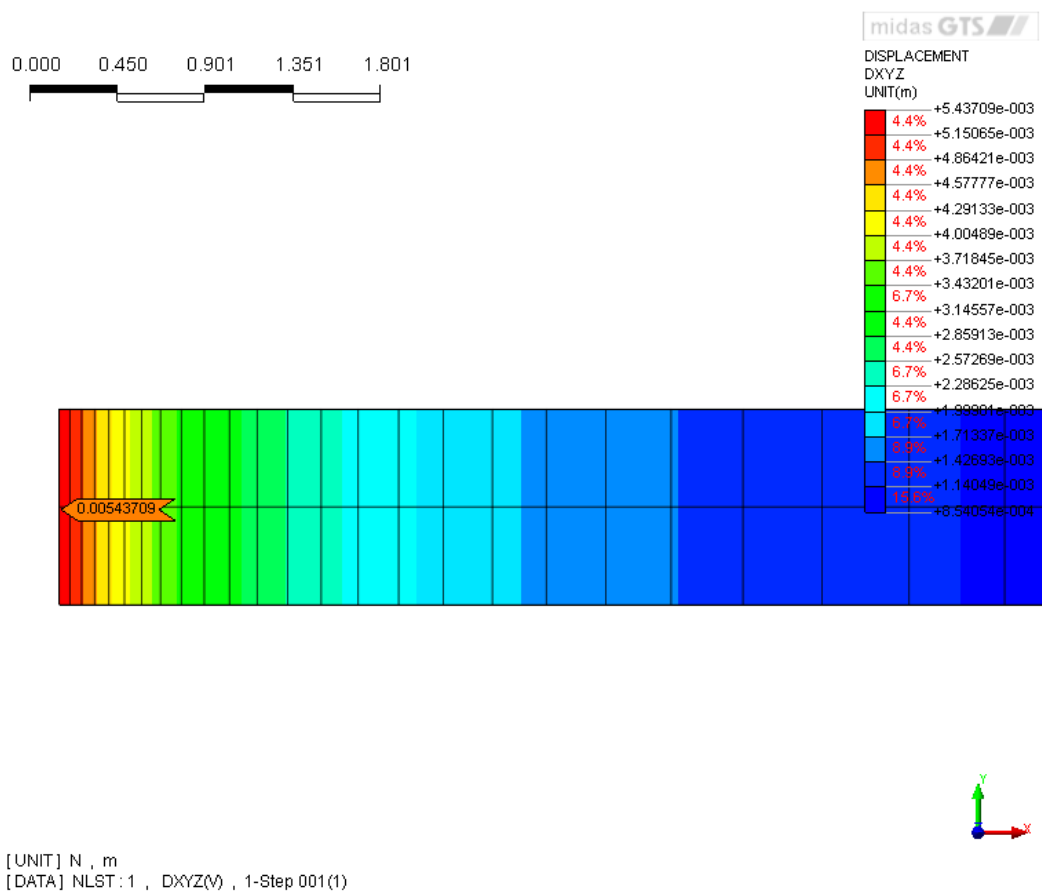


(d) Графики касательного и радиального напряжений (модель 1)

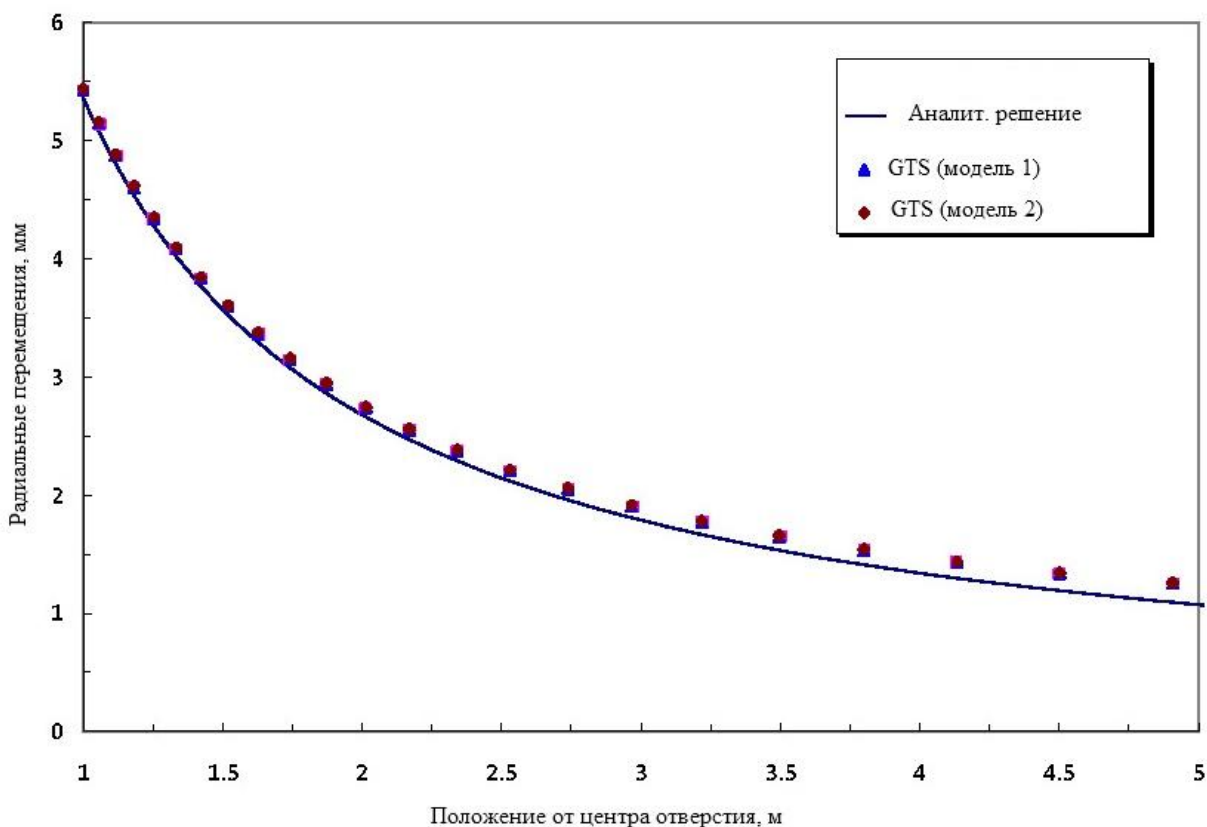
Рисунок 1.7 - Сравнение  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  для цилиндрического отверстия в бесконечной упругой среде



(a) Изополя перемещений (модель 1)



(b) Изополя перемещений (модель 2)



(с) Графики радиальных перемещений (модели 1 и 2)

Рисунок 1.8 - Сравнение  $u_r$  для цилиндрического отверстия в бесконечной упругой среде

### Сравнение результатов

Величины и погрешности на внутренней и внешней границах приведены ниже в таблицах для радиального и касательного напряжения и радиального перемещения соответственно. Как показывают эти таблицы, погрешность в напряжениях менее 1.84%, а погрешность в перемещении менее 1.49%.

### Касательное и радиальное напряжения

	Аналитическое решение		GTS							
	внутр.	внешн.	модель 1				модель 2			
			внутр.		внешн.		внутр.		внешн.	
			значе- ние	погреш- ность	значе- ние	погреш- ность	значе- ние	погреш- ность	значе- ние	погреш- ность

				(%)		(%)		(%)		(%)
Касат. напряж.	60	30,3	61,06	1,77	30,81	1,7	61,1	1,84	30,68	1,24
Радиаль. напряж.	0	29,7	2,24	-	29,97	0,92	2,15	-	29,98	0,95

### Радиальное перемещение на внутреннем отверстии

Аналитическое решение	GTS			
	модель 1		модель 2	
	значение	погрешность (%)	значение	погрешность (%)
5,357	5,424	1,25	5,437	1,49

## Пример 2. Сферическая полость в бесконечной упругой среде

Источник	Goodman, R. E., <i>Introduction to Rock Mechanics</i> , John Wiley & Sons, New York, 1980. Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., <i>Theory of Elasticity</i> , McGraw Hill, New York, 1970.
Тип задачи:	Статический линейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент

### Описание

Напряжения и перемещения определяются для случая сферической полости в бесконечной упругой среде находящейся под изотропным начальным напряжением. Радиус полости 1 м.

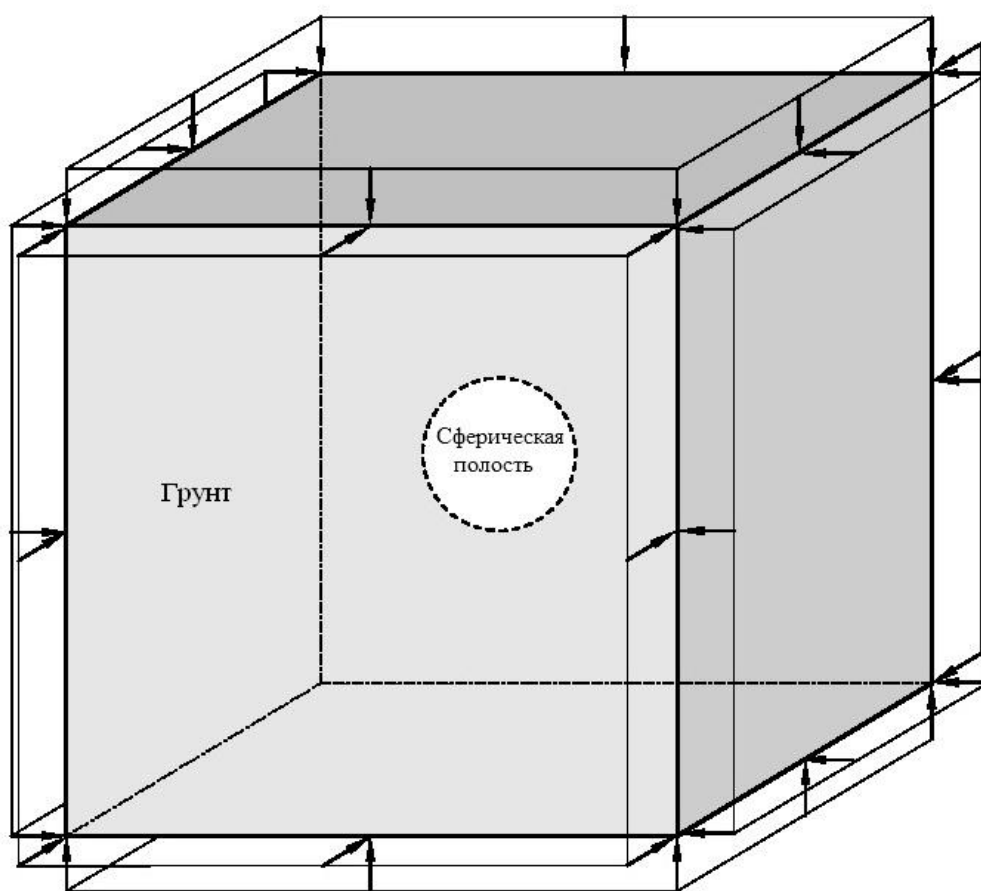


Рисунок 2.1 – Сферическая полость в бесконечной упругой среде



### Аналитическое решение

Радиальное перемещение вокруг сферической полости в бесконечном упругом теле под действием поля изотропного напряжения дано Гудмэном.

$$u_r = -\frac{P_o a^3}{4r^2 G}$$

где  $P_o$  - внешнее давление,  $a$  – радиус сферического отверстия и  $G$  – модуль сдвига.

Тимошенко и Гудвер дают решение для поля напряжения в полном сферическом контейнере, подверженном действию внутреннего и внешнего давления:

$$\sigma_r = \frac{P_o b^3 (r^3 - a^3)}{r^3 (a^3 - b^3)} + \frac{P_i a^3 (b^3 - r^3)}{r^3 (a^3 - b^3)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_o b^3 (2r^3 + a^3)}{2r^3 (a^3 - b^3)} - \frac{P_i a^3 (2r^3 + b^3)}{2r^3 (a^3 - b^3)}$$

$P_i$  - внутреннее давление,  $b$  – внешний радиус контейнера.

Решение к задаче сферической полости в бесконечной среде определяется путем установления  $P_i=0$  и поиском предела по мере приближения  $b$  к бесконечности. Радиальное и касательное напряжения приведенные к величине  $P_o$  будут следующими:

$$\frac{\sigma_r}{P_o} = -\frac{r^3 - a^3}{r^3}$$

$$\frac{\sigma_\theta}{P_o} = -\frac{a^3 + 2r^3}{2r^3}$$

### GTS модель

На рис. 2.2 показана модель, используемая в расчете. КЭ сетка модели идентична сетке, используемой для модели цилиндрического отверстия в примере - 1. КЭ сетка показана на рис. 2.2.

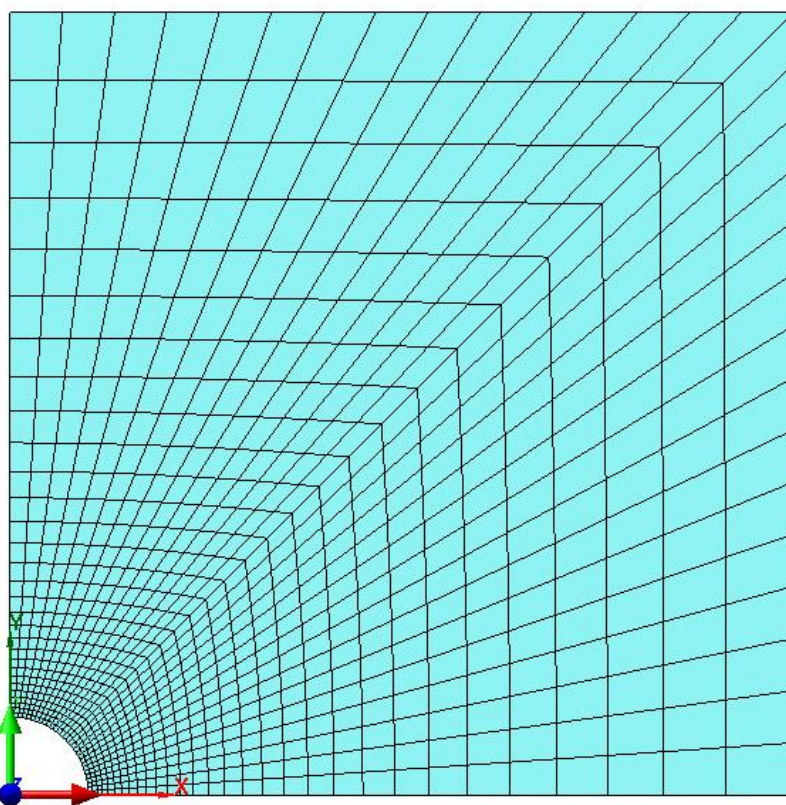
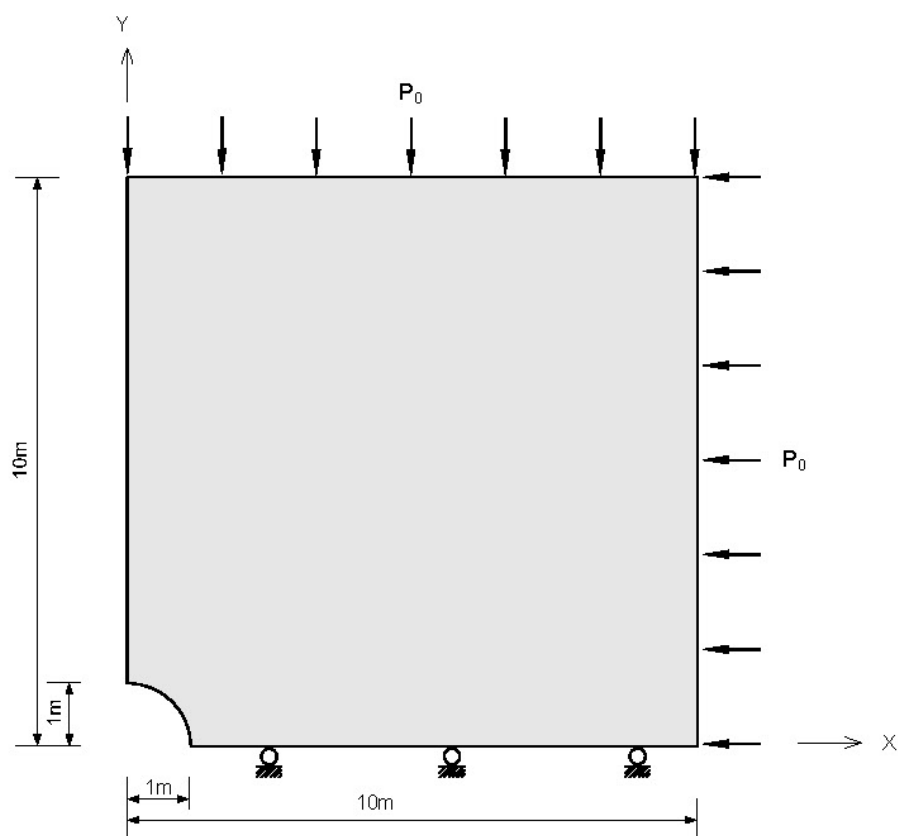


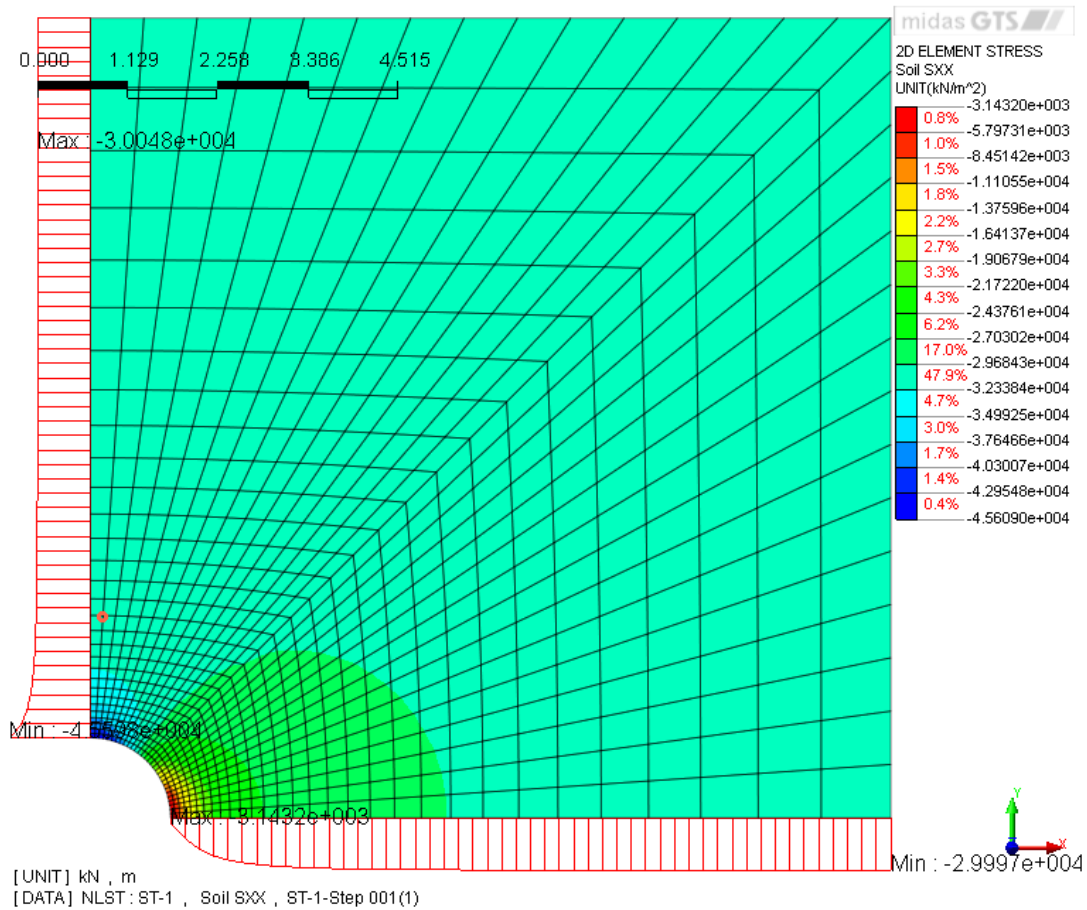
Рисунок 2.2 – Геометрические размеры и сетка конечных элементов

**Исходные данные**

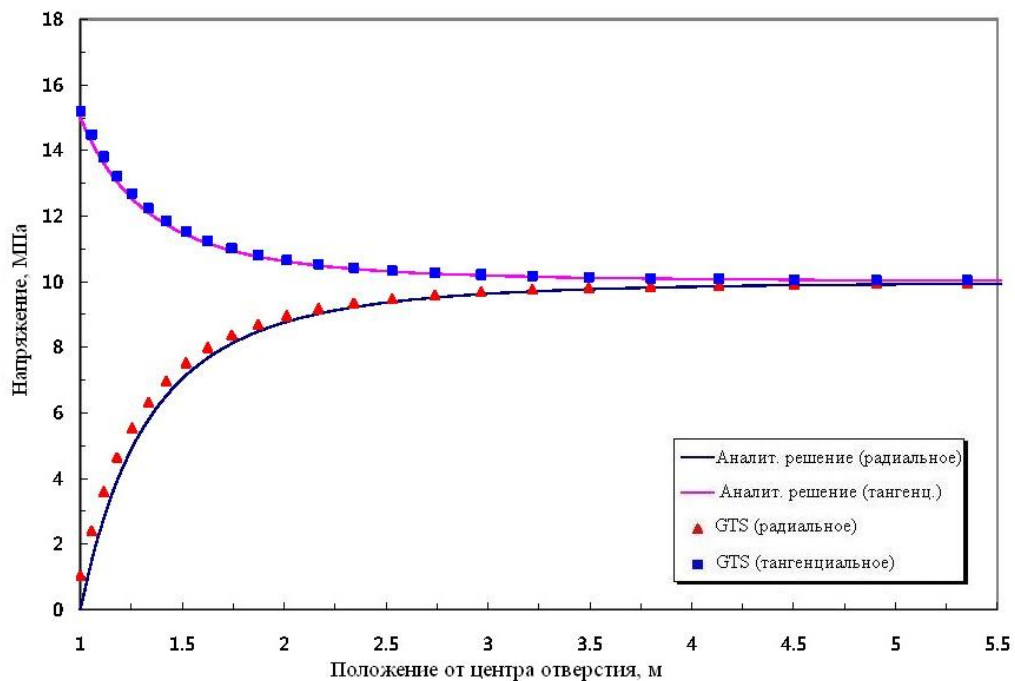
Тип расчета	Упругий расчет по 2D осесимметричной модели	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	10м
	Высота	10м
	Радиус отверстия	1м
КЭ	4-х узловой осесимметричный элемент	
Материал	Модуль упругости	E=697,2 МПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,2021$
Граничные условия	Левая сторона	Ограничение по Dx
	Нижняя сторона	Ограничение по Dy
Нагрузки	Начальное изотропное предварительное напряжение 30 МПа. Граничное давление по правой и верхней граням – 30МПа	

**Результаты**

На рис. 2.3 и 2.4 показано прямое сравнение между MIDAS GTS и аналитическим решением для радиального и касательного напряжений и радиальных перемещений соответственно. Графики сравнивают приведенные напряжения,  $-\sigma_r / P_o$ , и приведенное перемещение,  $-u_r / r$ , относительно приведенного радиуса  $r/a$ .

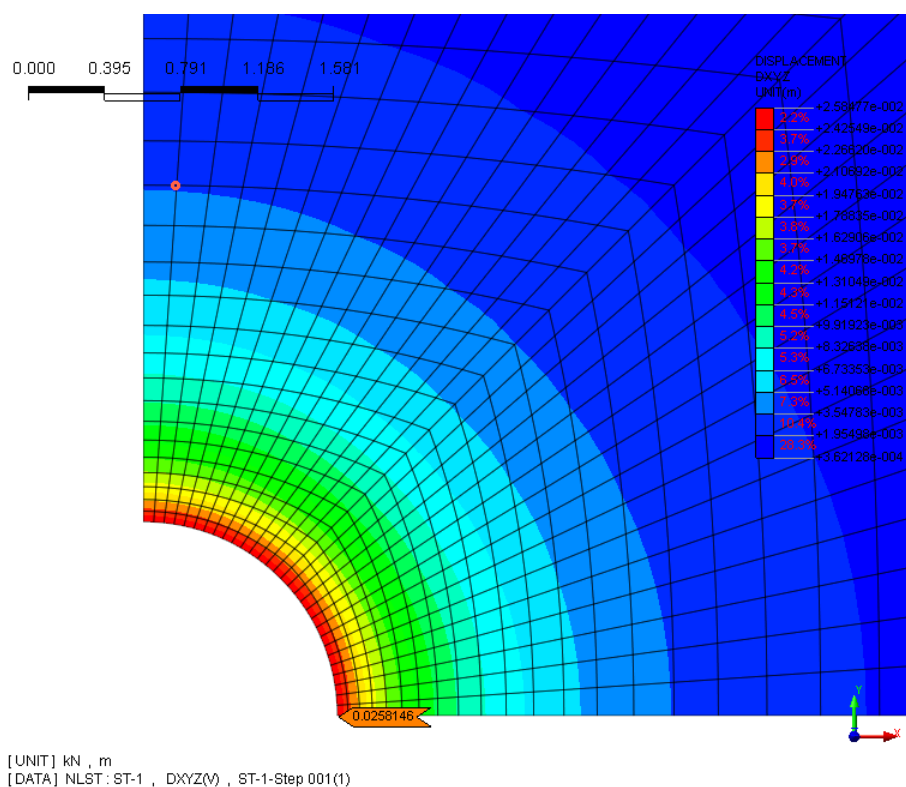


(а) Изополя напряжений вдоль оси X

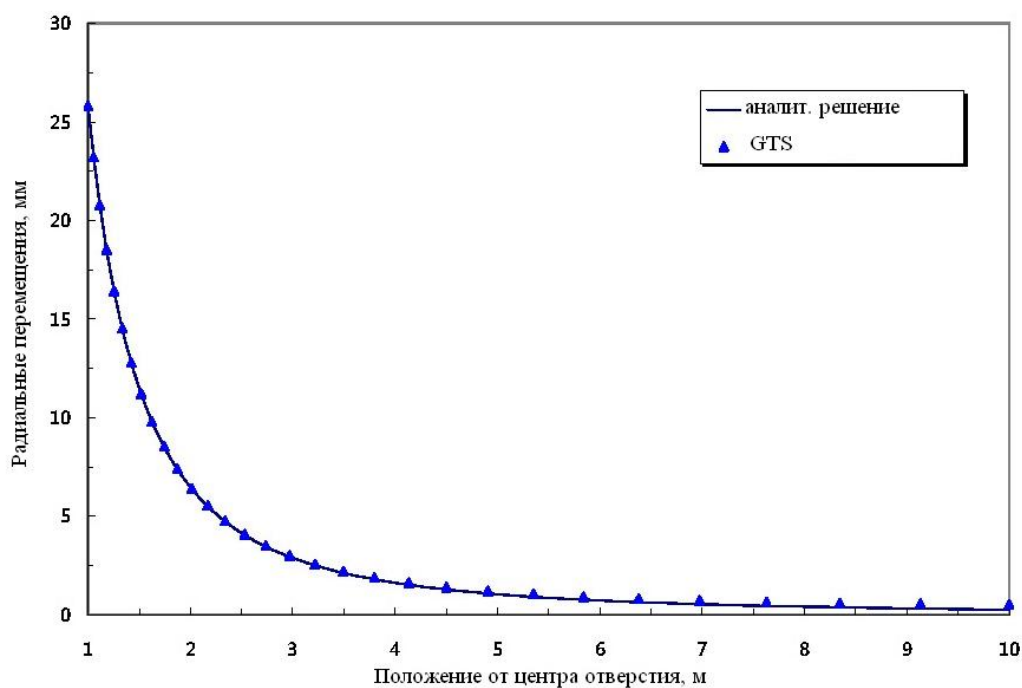


(б) График касательного и радиального напряжений (модель 1)

Рисунок 2.3 - Сравнение  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  для сферической полости в бесконечной упругой среде



(a) Изополю перемещений



(b) Графики радиальных перемещений (модели 1 и 2)

Рисунок 2.4 - Сравнение  $u_r$  для сферической полости в бесконечной упругой среде

## Сравнение результатов

Величины и погрешности на внутренней и внешней границах приведены ниже в таблицах для радиального и касательного напряжения и радиального перемещения соответственно. Как показывают таблицы, погрешность в напряжениях меньше 1.33%, а погрешность в перемещении составляет 0.17%.

### Касательное и радиальное напряжения

	Аналитическое решение		GTS			
	Внутр.	Внешн.	Внутр.		Внешн.	
			Значение	Погрешность (%)	Значение	Погрешность (%)
Касат. напряжения	1,50	1,00	1,52	1,33	1,00	0,16
Радиаль. напряжения	0,00	1,00	0,10	-	1,00	0,01

### Радиальное перемещение

Аналитическое решение	GTS			
	Модель 1		Модель 2	
	Значение	Погрешность (%)	Значение	Погрешность (%)
5,357	5,424	1,25	5,437	1,49

**Пример 3. Цилиндрическое отверстие в бесконечной среде Мора-Кулона**

Источник	Salencon, J., “Contraction Quasi-Statique D’une Cavite a Symetrie Spherique Ou Cyllindrique Dans Un Milieu Elastoplastique,” <i>Annales Des Ponts Et Chaussees</i> , No. 4, 1969, pp. 231-236.
Тип задачи:	Статический нелинейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации, 4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент, 8-ми узловой гексаэдр

**Описание**

Данная задача касается определения напряжений и перемещений для случая цилиндрического отверстия в бесконечно упругой среде под действием поля напряжений  $\sigma_{xx} = p_1$ ,  $\sigma_{yy} = p_2$ . Грунтовая среда предполагается линейно упругой, абсолютно пластичной, с поверхностью разрушения, определяемой критерием Мора-Кулона.

Цилиндрическое отверстие радиусом 1 м рассматривается в бесконечной среде под действием однородного напряжения сжатия в 30 МПа. Предполагается, что задача симметрична относительно как горизонтальной, так и вертикальной осей. Радиус отверстия 1 м и предполагается, что он небольшой по сравнению с длиной цилиндра. Это позволяет применить модель плоской деформации.

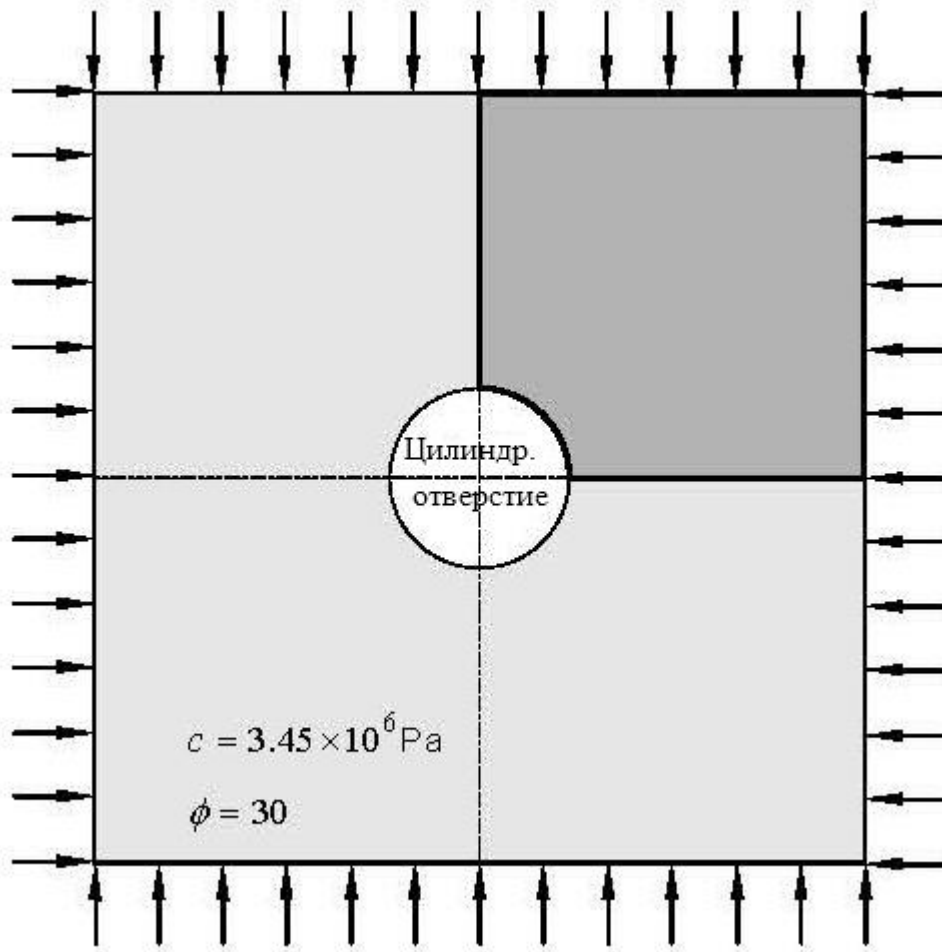


Рисунок 3.1 – Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде Мора-Кулона

### Аналитическое решение

Радиус зоны текучести,  $R_o$ , дается аналитически теоретической моделью, основанной на решении Сэленкона (1969);

$$R_o = a \left[ \frac{2}{K_p + 1} \frac{P_o + q/(K_p - 1)}{P_i + q/(K_p - 1)} \right]^{1/(K_p - 1)}$$

где  $a$  = радиус отверстия;

$$K_p = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi};$$

$$q = 2 \cdot c \cdot \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right);$$

$P_o$  – величина начального напряжения;

$P_i$  – внутреннее давление.



Радиальное напряжение на границе начала пластичности:

$$\sigma_{re} = -\frac{1}{K_p + 1}(2P_o - q)$$

напряжения в зоне пластичности:

$$\sigma_r = \frac{q}{K_p - 1} - \left( P_i + \frac{q}{K_p - 1} \right) \cdot \left( \frac{r}{a} \right)^{K_p - 1}$$

$$\sigma_\theta = \frac{q}{K_p - 1} - K_p \left( P_i + \frac{q}{K_p - 1} \right) \cdot \left( \frac{r}{a} \right)^{K_p - 1}$$

где  $r$  – расстояние до центра отверстия.

Напряжения в зоне упругости:

$$\sigma_r = -P_o + (P_o - \sigma_{re}) \cdot \left( \frac{R_o}{r} \right)^2$$

$$\sigma_\theta = -P_o - (P_o - \sigma_{re}) \cdot \left( \frac{R_o}{r} \right)^2$$

Перемещения в зонах упругости и пластичности даны Сэленконом (1969).

Для зоны упругости:

$$u_r = - \left( P_o - \frac{2P_o - q}{K_p + 1} \right) \left( \frac{R_o}{2G} \right) \left( \frac{R_o}{r} \right)$$

для зоны пластичности:

$$u_r = -\frac{r}{2G} \chi$$

$$\chi = (2\nu - 1) \left( P_o + \frac{q}{K_p - 1} \right) + \frac{(1 - \nu)(K_p^2 - 1)}{K_p + K_{ps}} \left( P_i + \frac{q}{K_p - 1} \right) \left( \frac{R_o}{a} \right)^{K_p - 1} \left( \frac{R_o}{r} \right)^{K_{ps} + 1} + \left( (1 - \nu) \frac{K_p K_{ps} + 1}{K_p + K_{ps}} - \nu \right) \left( P_i + \frac{q}{K_p - 1} \right) \left( \frac{r}{a} \right)^{K_p - 1}$$

где:

$$K_{ps} = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi},$$

$\psi$  – угол дилатации;

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$G$  – модуль сдвига.

### GTS модель

Задача первоначально смоделирована в двумерной постановке в модели плоской деформации, используя четвертную симметрию. Граничные условия, применяемые к модели, показаны на рис. 3.2. Внешние границы расположены на расстоянии 10м (5 диаметров отверстия) от центра отверстия. Модель содержит 900 прямоугольных КЭ, ориентированных в радиальной структуре, как показано на рис. 3.2. Такое разбиение сводит к минимуму влияние от краевых эффектов.

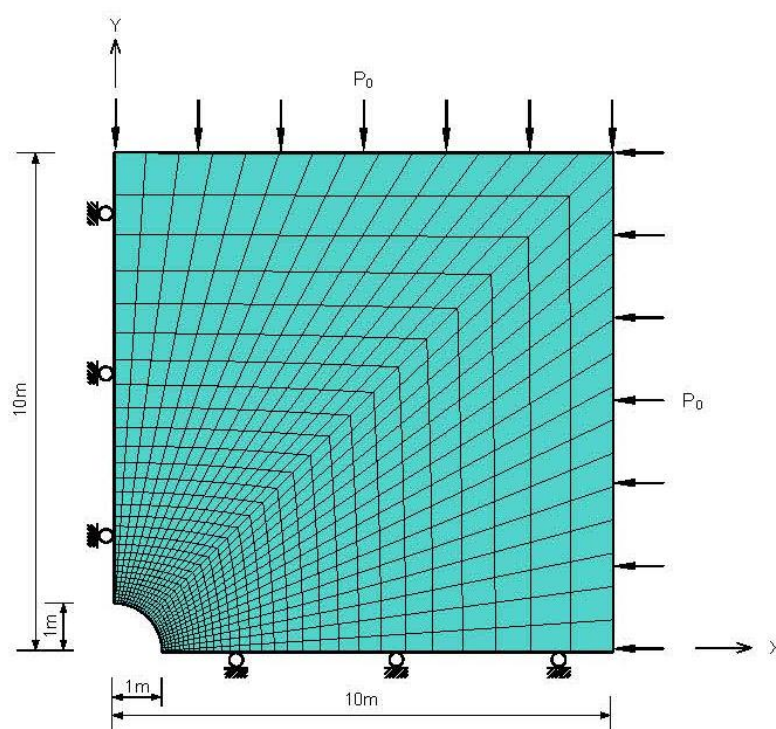


Рисунок 3.2 – Геометрические размеры и сетка конечных элементов для модели плоской деформации – четвертная симметрия

Задача также моделируется в осесимметричной постановке. На рис. 3.3 показаны граничные условия и КЭ сетка, созданные для этого расчета.

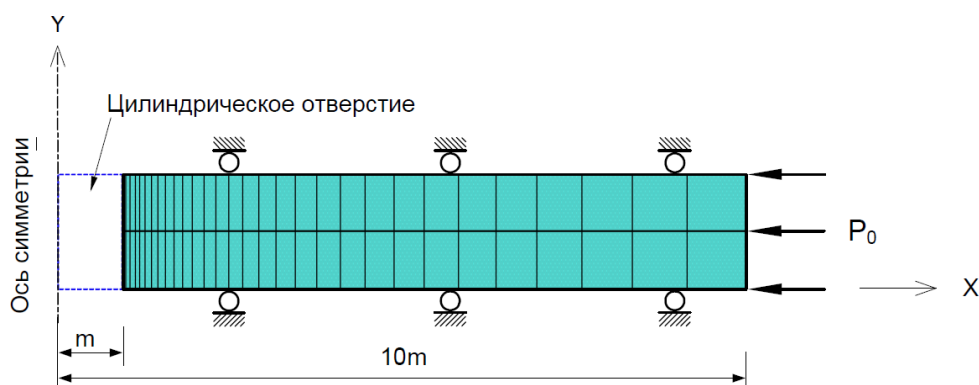


Рисунок 3.3 – Геометрические размеры и сетка конечных элементов для осесимметричной модели

Наконец, задача также моделируется с использованием трехмерных объемных элементов. К этой модели применяются та же сетка и те же граничные условия, как в модели плоской деформации, за исключением того, что имеется толщина. Все модели подвергаются изотропному напряжению сжатия -30 МПа.

#### Исходные данные (модель 1)

Тип расчета	Упругий расчет по 2D модели плоской деформации	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	10м
	Высота	10м
	Радиус отверстия	1м
КЭ	Четырехугольный элемент плоской деформации	
Материал	Модуль упругости	$E=6777,931$ МПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,210345$
	Критерий текучести	Мора-Кулона
	Сцепление	$c=3,45$ МПа
	Угол внутреннего трения	$\phi=30^\circ$
	Угол дилатансии	$\psi=30^\circ$
Граничные условия	Левая сторона	Ограничение по Dx
	Нижняя сторона	Ограничение по Dy
Нагрузки	Начальное изотропное предварительное напряжение 30 МПа. Граничное давление по правой и верхней граням – 30МПа	

**Исходные данные (модель 2)**

Тип расчета	Упругий расчет по 2D осесимметричной модели	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	10м
	Высота	10м
	Радиус отверстия	1м
КЭ	Четырехугольный осесимметричный элемент	
Материал	Модуль упругости	E=6777,931 МПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,210345$
	Критерий текучести	Мора-Кулона
	Сцепление	$c=3,45$ МПа
	Угол внутреннего трения	$\phi=30^\circ$
	Угол дилатансии	$\psi=30^\circ$
Граничные условия	Левая сторона	Ограничение по Dx
	Нижняя сторона	Ограничение по Dy
Нагрузки	Начальное изотропное предварительное напряжение 30 МПа. Граничное давление по правой и верхней граням – 30МПа	

**Исходные данные (модель 3)**

Тип расчета	Упругий расчет по нелинейной 3D модели	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	10м
	Высота	10м
	Радиус отверстия	1м
КЭ	Восьмиугольный гексаэдр	
Материал	Модуль упругости	E=6777,931 МПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,210345$
	Критерий текучести	Мора-Кулона

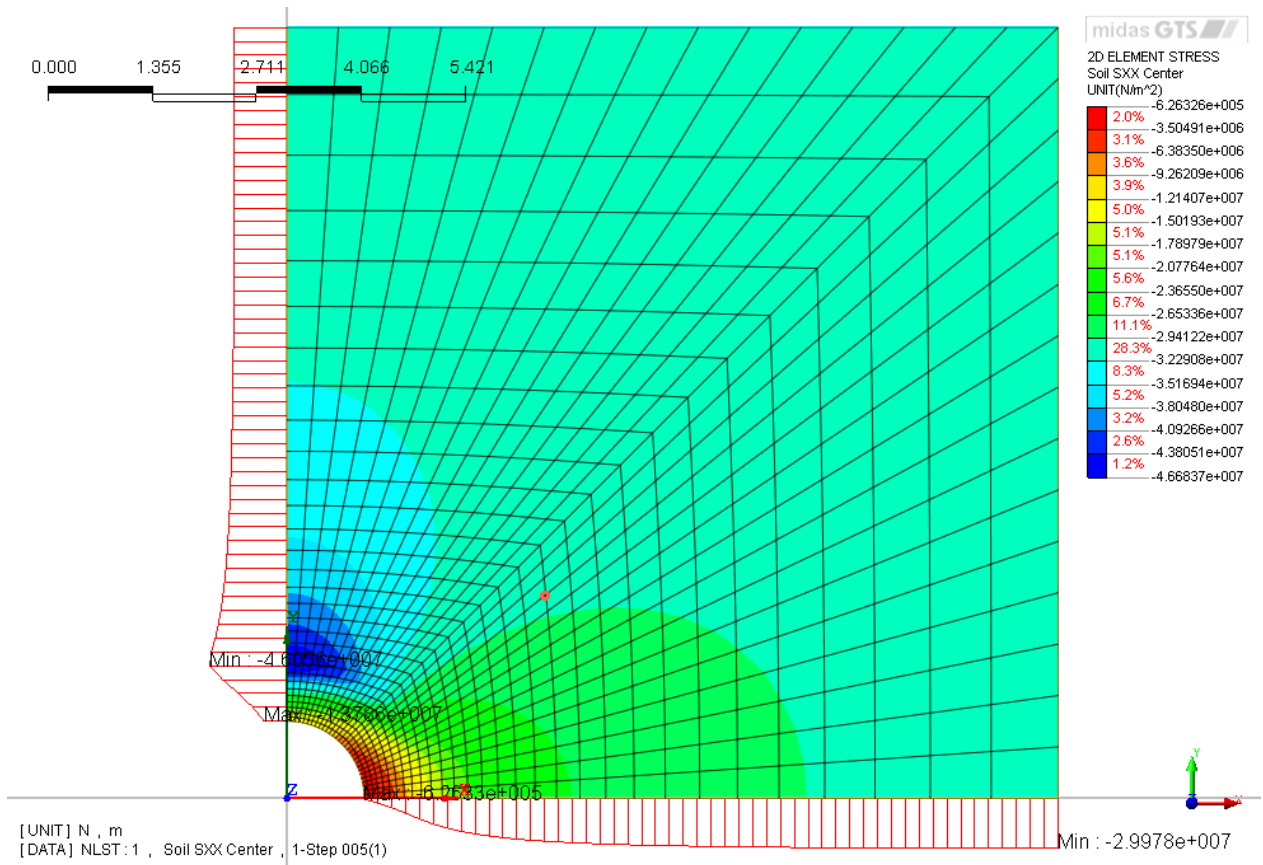
	Сцепление	$c=3,45$ МПа
	Угол внутреннего трения	$\varphi=30^\circ$
	Угол дилатансии	$\psi=30^\circ$
Граничные условия	Левая сторона	Ограничение по Dx
	Нижняя сторона	Ограничение по Dy
Нагрузки	Начальное изотропное предварительное напряжение 30 МПа. Граничное давление по правой и верхней граням – 30МПа	

### Результаты

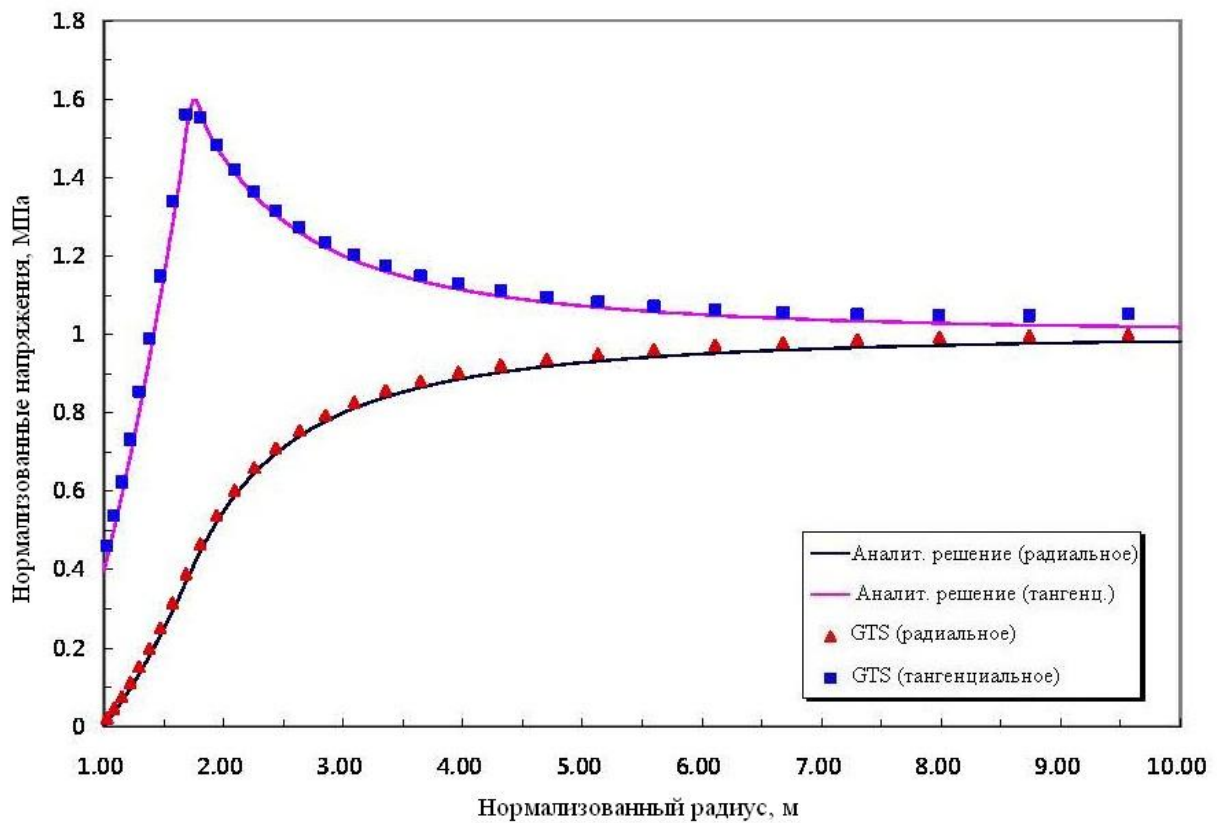
На рис. 3.4, 3.5 и 3.6 показано прямое сравнение результатов GTS и аналитического решения вдоль радиальной кривой для случая четвертной симметрии. Приведенные напряжения  $-\sigma_r/P_o$ , и  $-\sigma_\theta/P_o$  графически изображены относительно приведенного радиуса  $r/a$  на рис. 3.4, в то время как приведенное перемещение  $-u_r/a$  графически изображено относительно приведенного радиуса на рис.3.5. Рис. 3.6 показывает радиус зоны предельного напряженного состояния.

Для осесимметричной геометрии рис. 3.7, 3.8 и 3.9 показывают прямое сравнение результатов GTS и аналитического решения.

Для трехмерной объемной геометрии прямое сравнение результатов GTS и аналитического решения показано на рис. 3.10, 3.11 и 3.12.

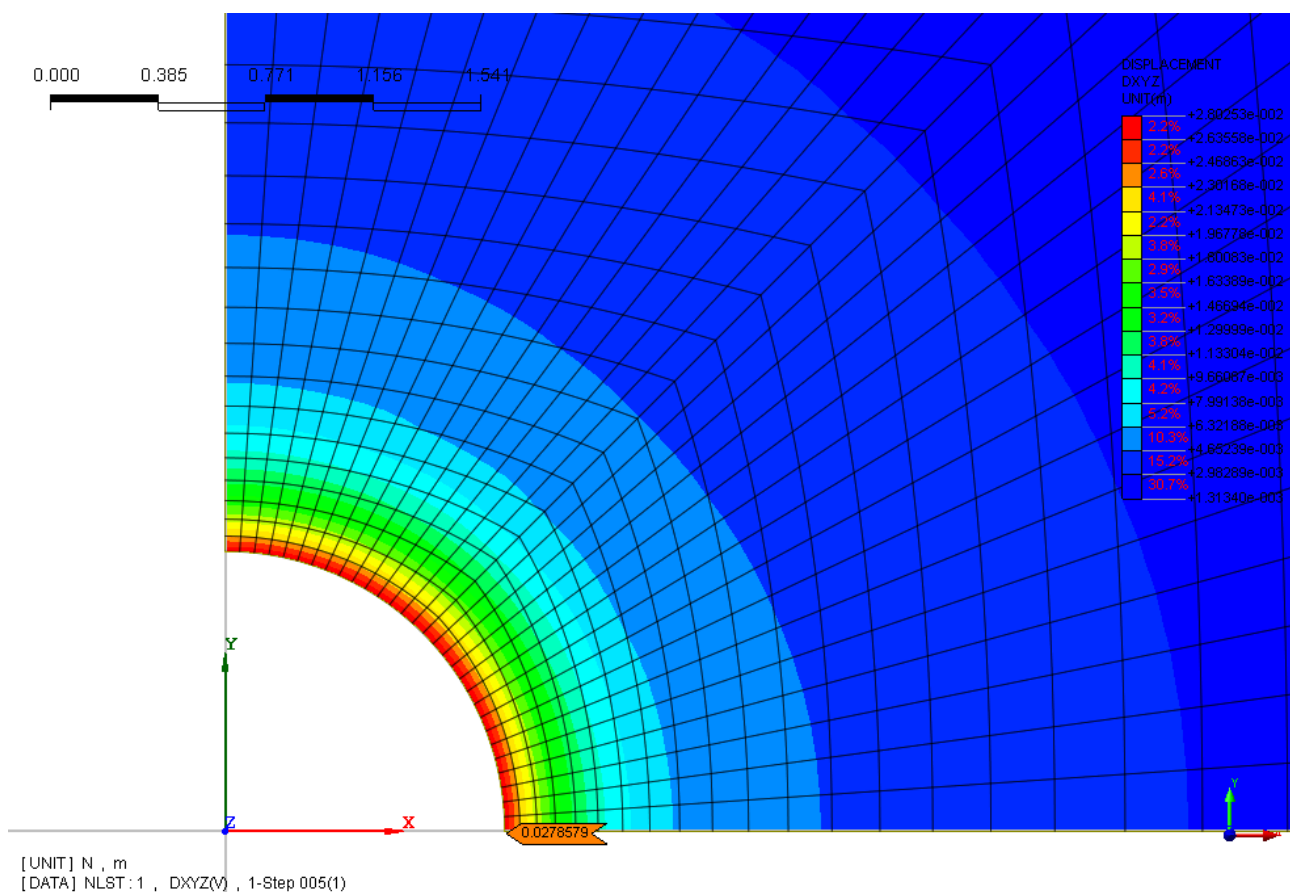


(a) Изополя напряжений вдоль оси X

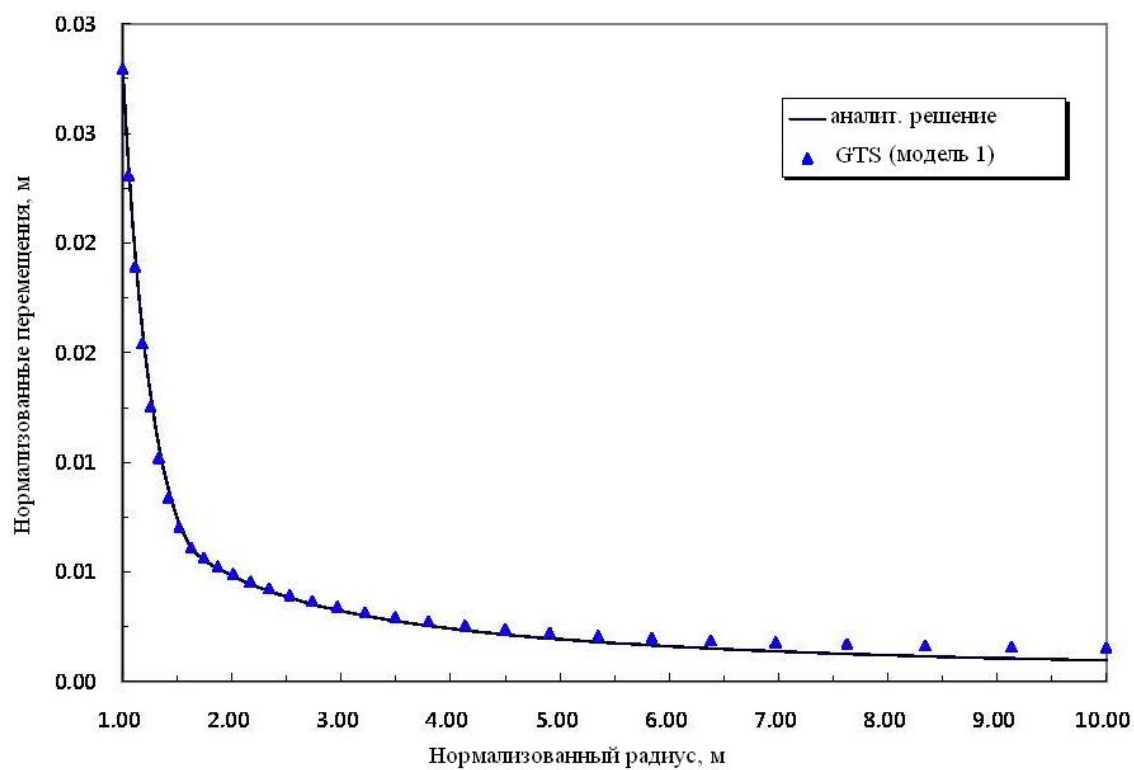


(b) График касательного и радиального напряжений

Рисунок 3.4 - Сравнение касательного и радиального напряжений (модель 1)



(a) Изополю перемещений



(b) Графики приведенных радиальных перемещений

Рисунок 3.5 - Сравнение радиальных перемещений (модель 1)

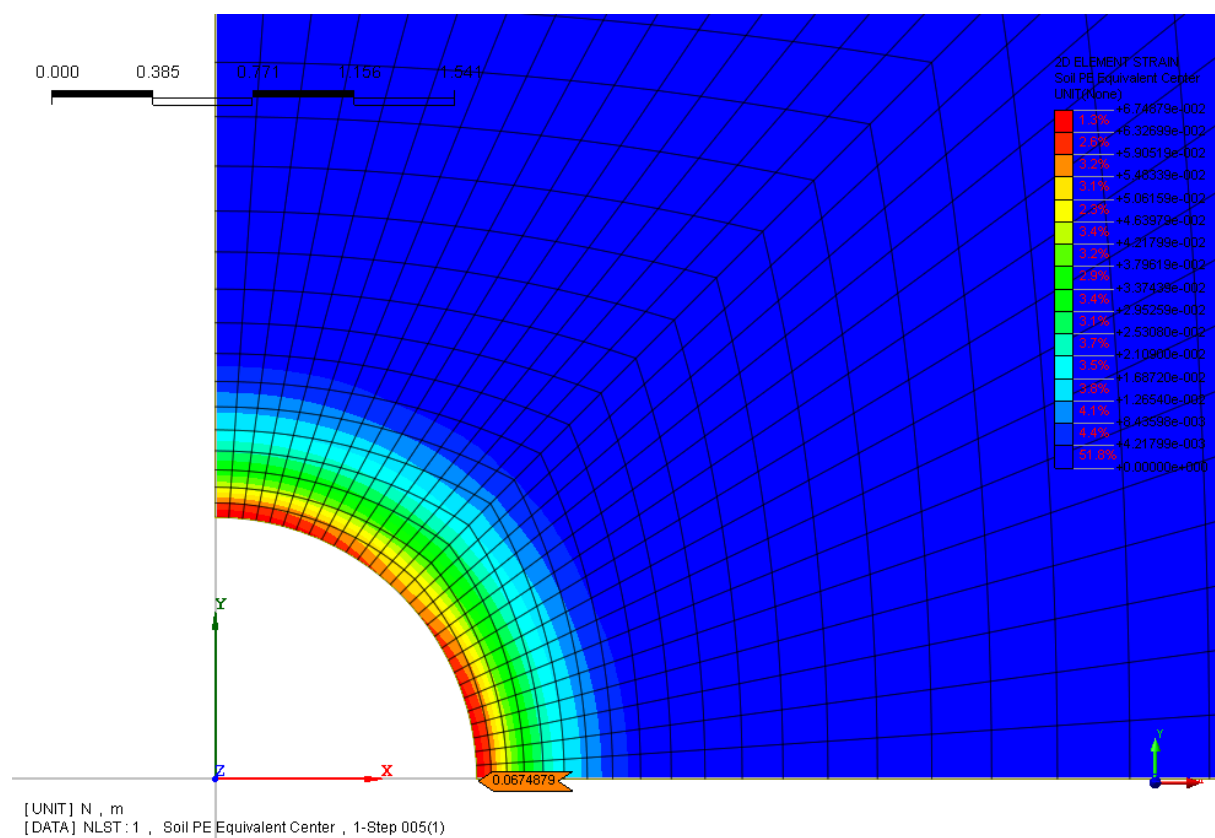
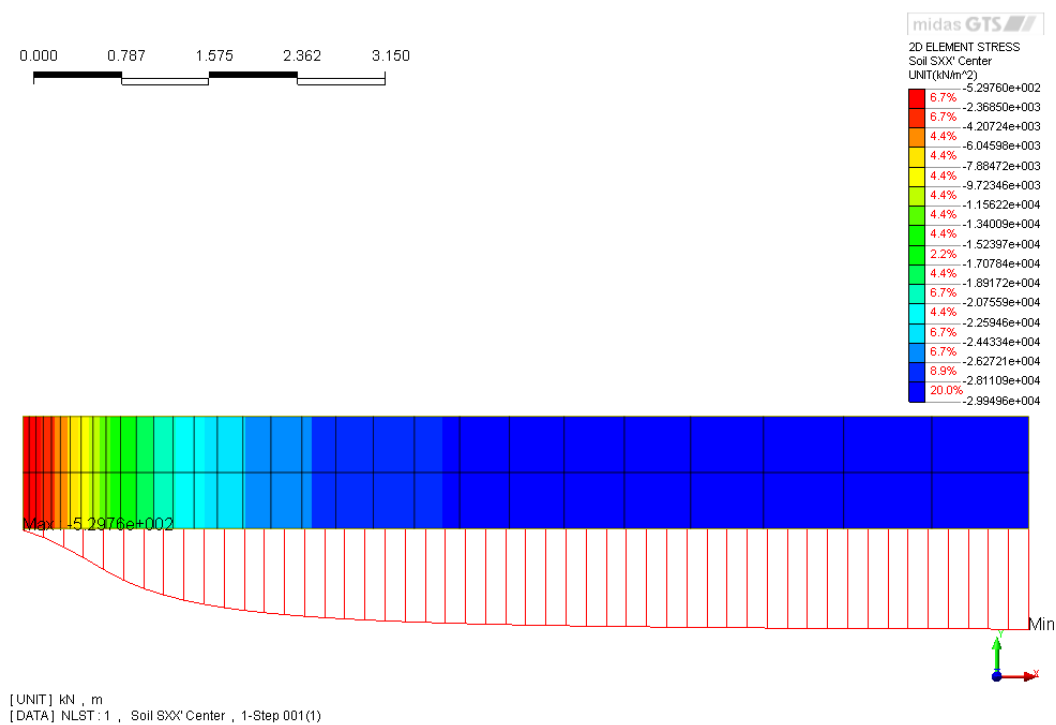
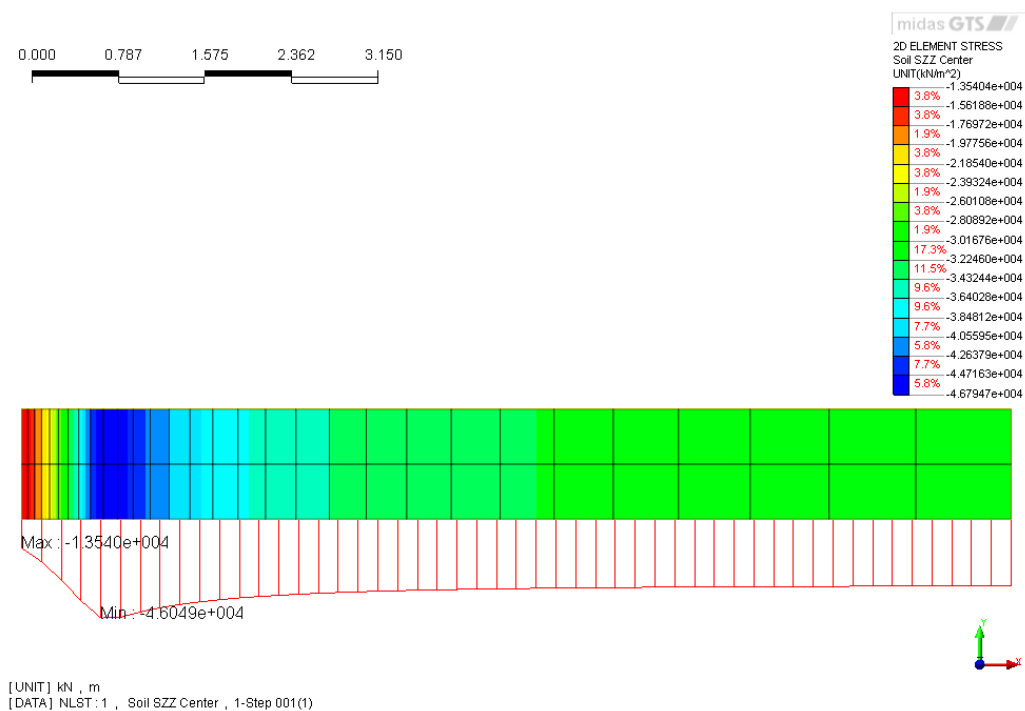


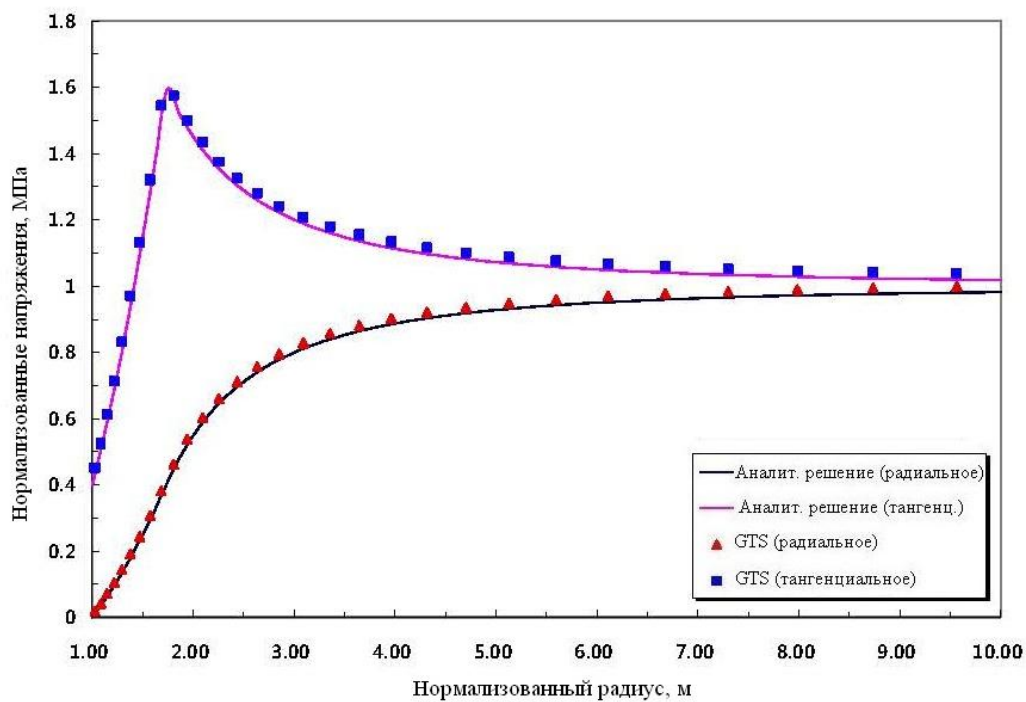
Рисунок 3.6 – Изополя эквивалентных пластических деформаций (модель 1)





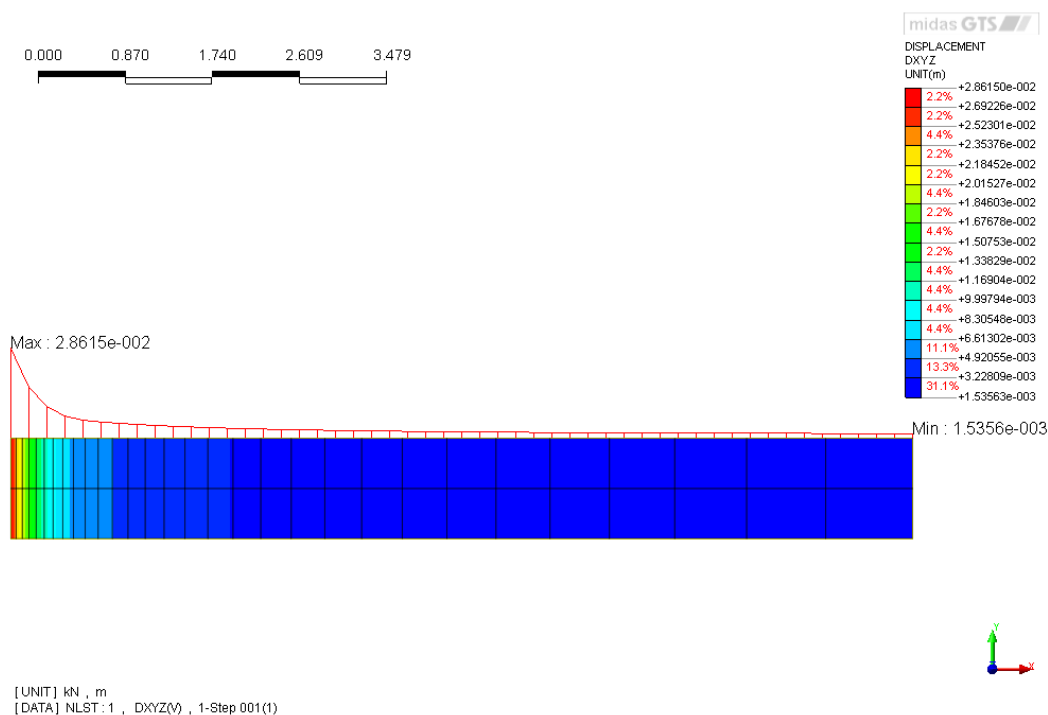


(a) Изополя напряжений вдоль осей X и Z

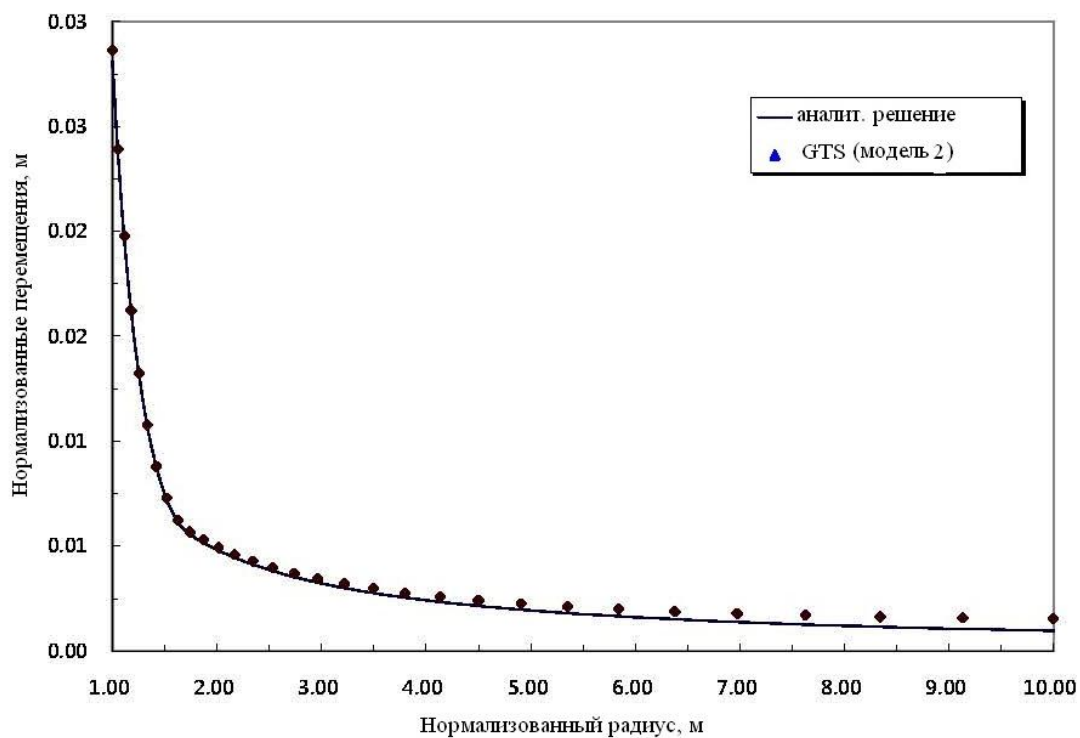


(b) Графики приведенных радиальных и касательных напряжений

Рисунок 3.7 – Сравнение приведенных радиальных и касательных напряжений  
(модель 2)



(a) Изополя перемещений



(b) Графики приведенных радиальных перемещений

Рисунок 3.8 - Сравнение радиальных перемещений (модель 2)

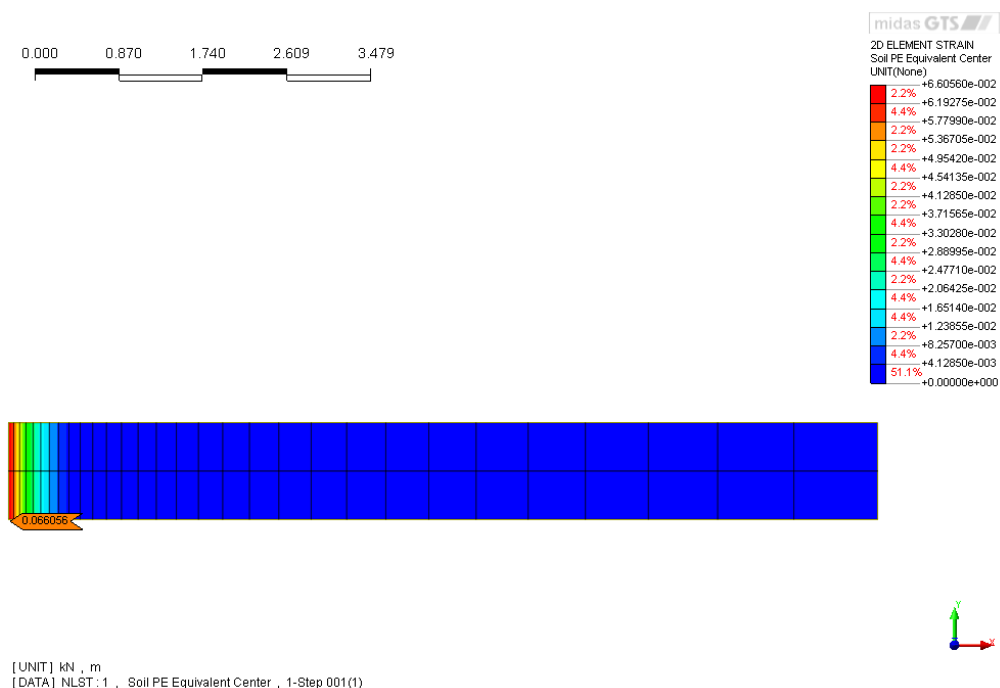
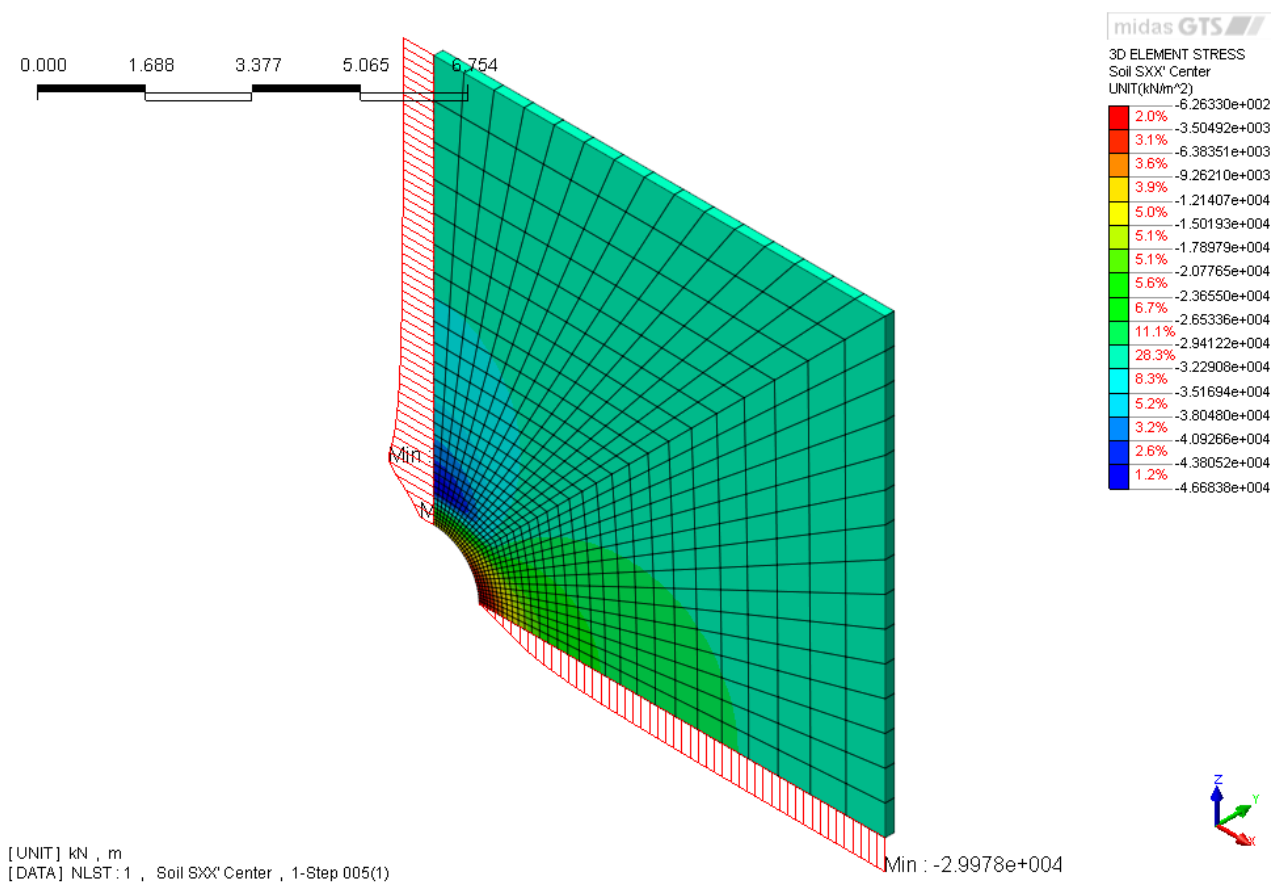
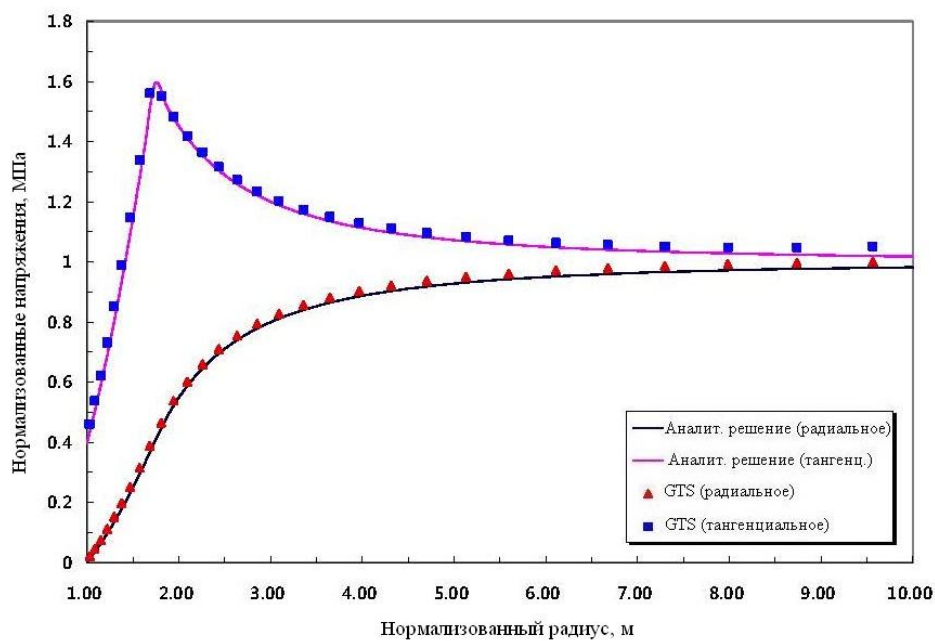


Рисунок 3.9 – Изополя пластических деформаций (модель 2)

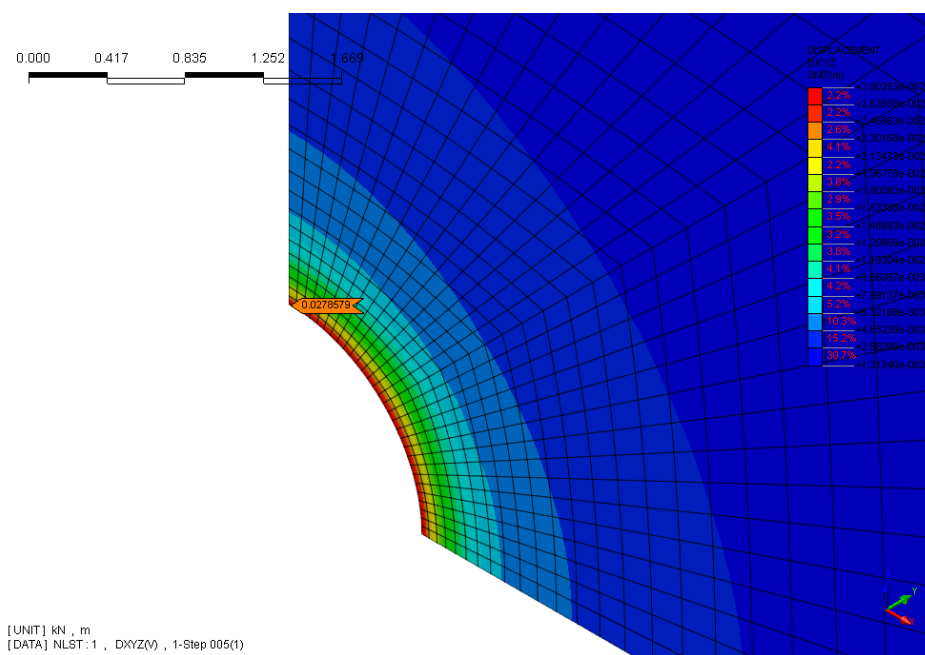


(а) Изополя напряжений вдоль оси X

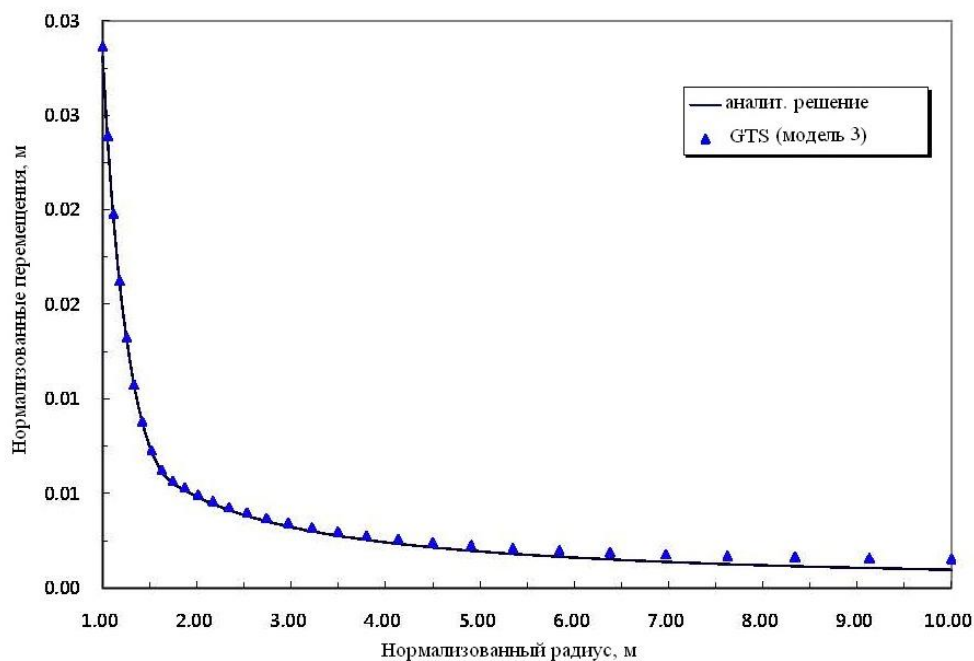


(б) Графики приведенных радиальных и касательных напряжений

Рисунок 3.10 – Сравнение приведенных радиальных и касательных напряжений  
(модель 3)



(а) Изополя перемещений



(b) Графики приведенных радиальных перемещений

Рисунок 3.11 - Сравнение радиальных перемещений (модель 3)

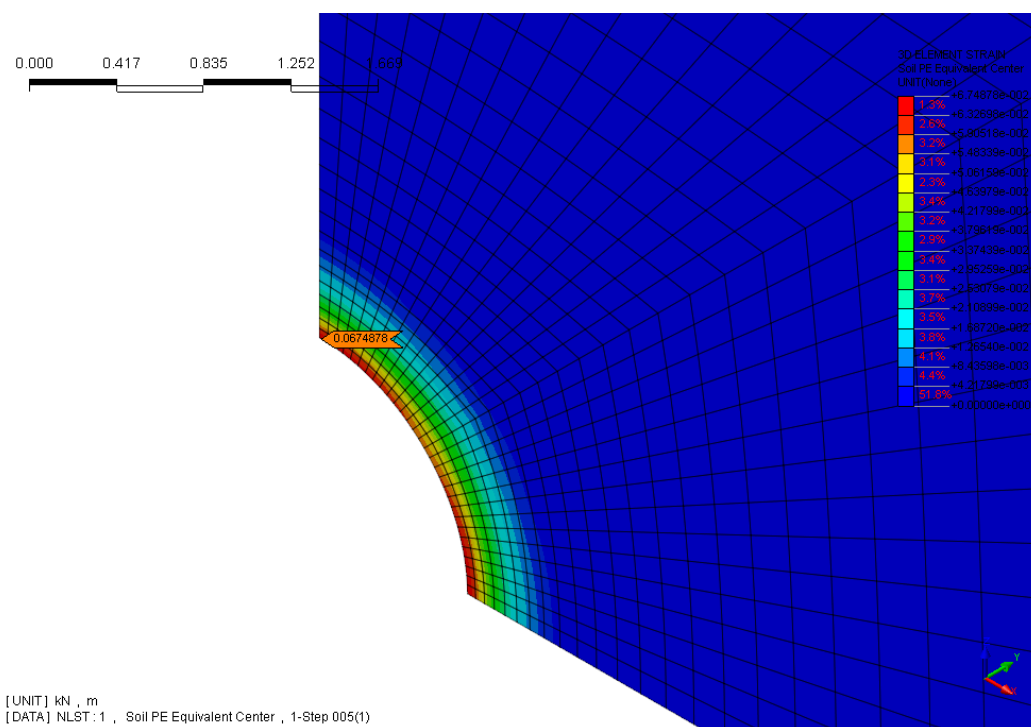


Рисунок 3.12 - Изополюс пластических деформаций (модель 3)

### Сравнение результатов

Ниже в таблице приведены значения радиуса зоны текучести и погрешности для всех трех моделей. Как показывают эти таблицы, погрешность менее 4.15% и это говорит о приемлемости результатов GTS.

**Радиус зоны текучести**

	Аналитическое решение	GTS (зависимая от сетки)					
		Модель 1		Модель 2		Модель 3	
		Значение	Погрешность (%)	Значение	Погрешность (%)	Значение	Погрешность (%)
Радиус зоны текучести	1,735	1,684	2,94	1,807	4,15	1,684	2,94

#### Пример 4. Обделка тоннеля круглого сечения в упругой среде с анизотропными напряжениями

Источник	Einstein, H. H., and Schwartz, C.W., “Simplified Analysis for Tunnel Supports.,” <i>J. Geotech. Engr. Div.</i> , V. 105 (GT4), 1979, pp. 499-518.
Тип задачи:	Статический линейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации

#### Описание

Данная задача касается расчета обделки тоннеля круглого сечения в упругой среде. Тоннель имеет бетонную обделку, находящуюся в прямом контакте с окружающей массой в бесконечной упругой среде под анизотропным напряжением.

Целью расчета является определение перемещения, осевых продольных сил и моментов в узлах элементов балки.

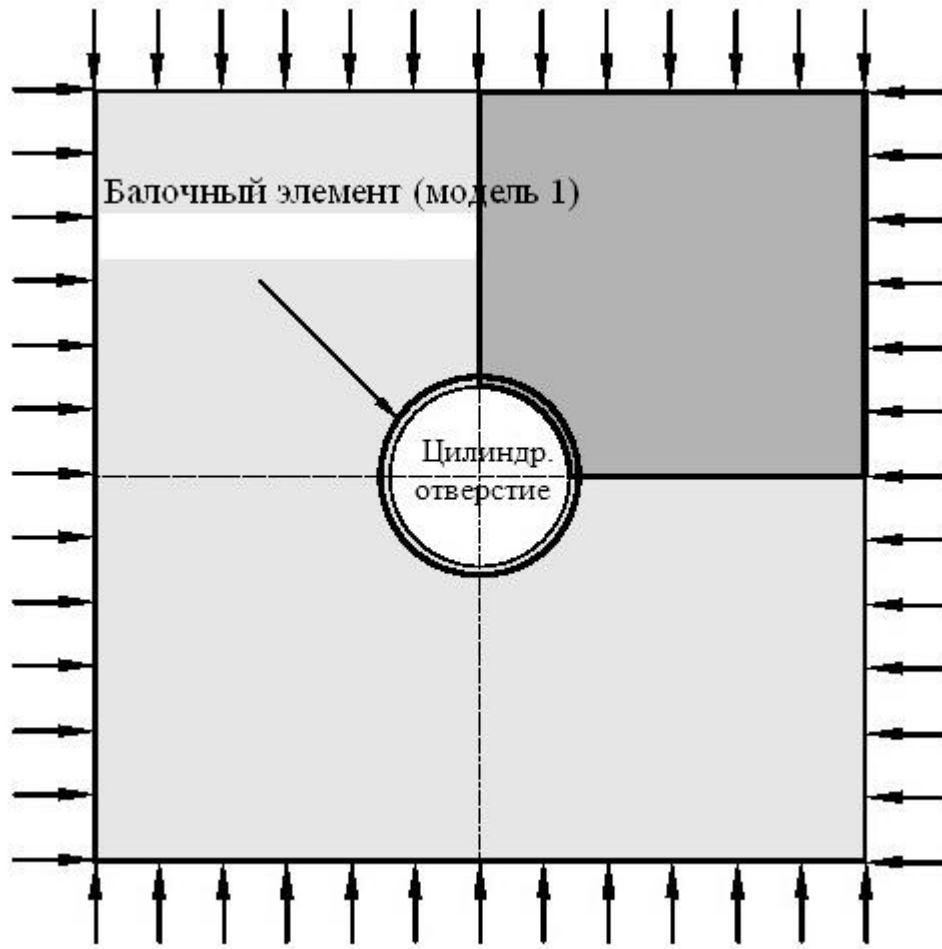


Рисунок 4.1 – Обделка тоннеля круглого сечения в упругой среде с анизотропными напряжениями

### Аналитическое решение

Аналитическое решение для упругой обделки тоннеля дали Эйнштейн и Шварц.

Перемещения, радиальное  $u$  и касательное  $v$ , внутреннее сжимающее усилие или осевая сила в облицовке,  $N$ , и изгибающий момент,  $M$ , даны в следующих уравнениях, соответственно.



$$\frac{2Gu}{P_o a} = -\frac{1}{2}(1+K)a_0^* + \frac{1}{2}(1-K)[4(1-\nu)b_2^* - 2a_2^*]\cos 2\theta$$

$$\frac{2Gv}{P_o a} = (1-K)[a_2^* + (1-2\nu)b_2^*]\sin 2\theta$$

$$\frac{N}{P_o a} = \frac{1}{2}(1+K)(1-a_0^*) + \frac{1}{2}(1-K)(1+2a_2^*)\cos 2\theta$$

$$\frac{M}{P_o a^2} = \frac{1}{4}(1-K)(1-2a_2^* + 2b_2^*)\cos 2\theta$$

$G$  – модуль сдвига скальной породы;

$P_o$  – компонент вертикального напряжения;

$K$  – отношение горизонтального к вертикальному напряжению ( $\sigma_x/\sigma_z$ );

$\Theta$  – угловое расположение от горизонтали;

$$a_0^* = \frac{C^*F^*(1-\nu)}{C^* + F^* + C^*F^*(1-\nu)};$$

$$a_2^* = \beta \cdot b_2^*;$$

$$b_2^* = \frac{C^*(1-\nu)}{2[C^*(1-\nu) + 4\nu - 6\beta - 3\beta C^*(1-\nu)]};$$

$$C^* = \frac{Er(1-\nu_s^2)}{E_s A(1-\nu^2)};$$

$$F^* = \frac{Er^3(1-\nu_s^2)}{E_s I(1-\nu^2)};$$

$$\beta = \frac{(6+F^*)C^*(1-\nu) + 2F^*\nu}{3F^* + 3C^* + 2C^*F^*(1-\nu)};$$

$E$  – модуль Юнга скальной породы;

$E_s$  – модуль Юнга обделки;

$\nu_s$  – коэффициент Пуассона обделки;

$A$  – площадь поперечного сечения обделки на участок длиной 1 м;

$I$  – линейный момент инерции.

## GTS модель

Задача симметрична относительно горизонтальной и вертикальной осей, что позволяет применить геометрию четвертной симметрии.

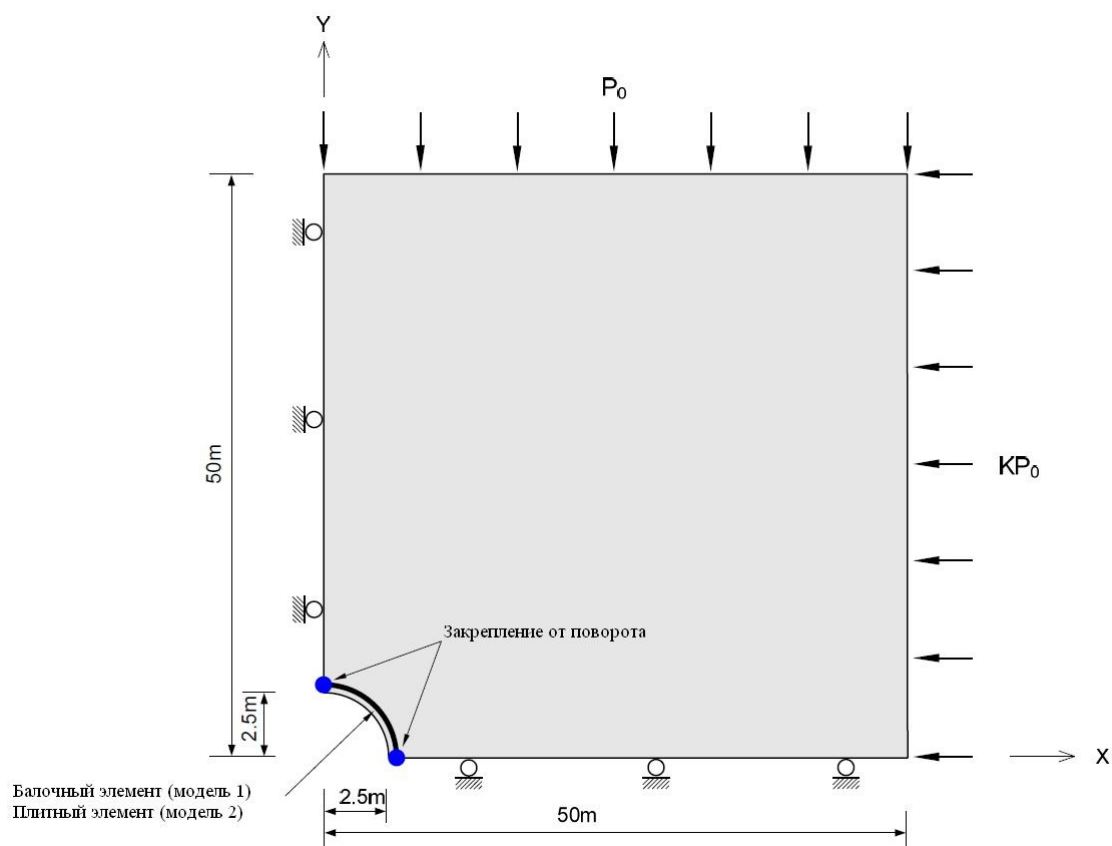


Рисунок 4.2 – Геометрические размеры и граничные условия задачи

### Исходные данные (модель 1)

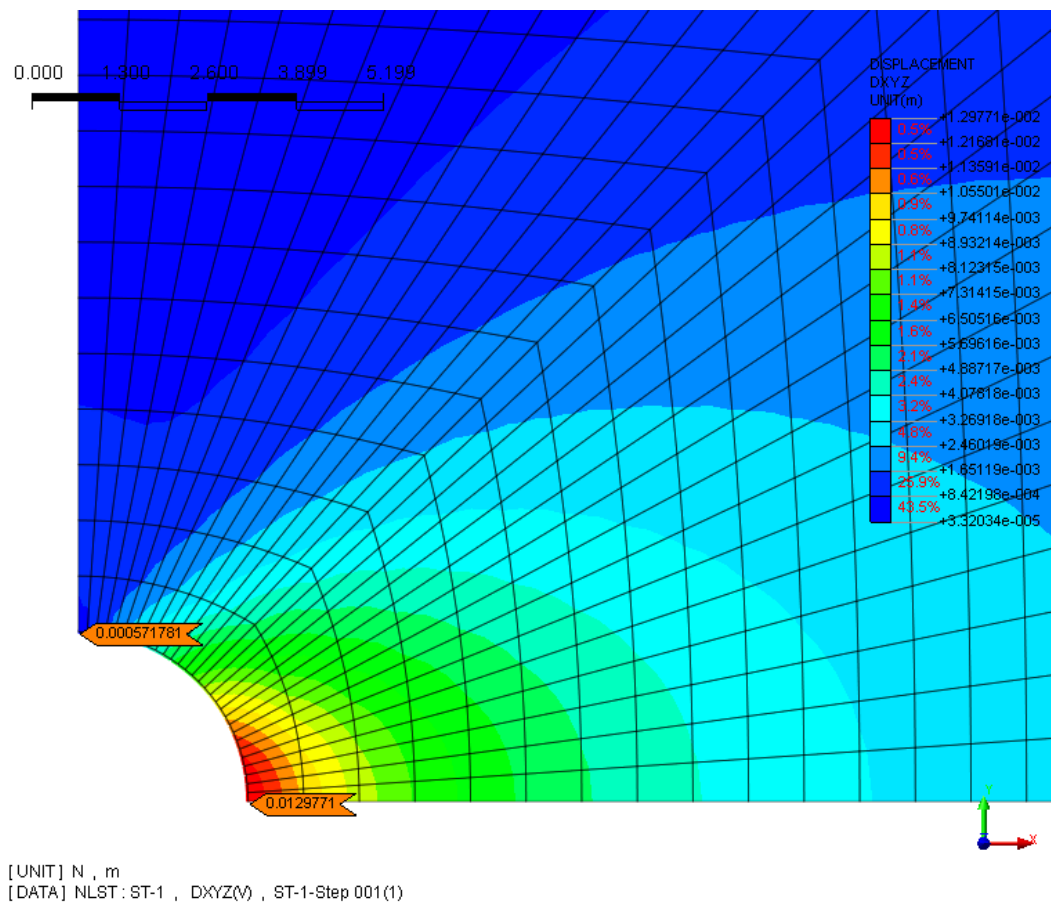
Тип расчета	Упругий расчет по 2D модели плоской деформации	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	50м
	Высота	50м
	Радиус отверстия	2,5м
КЭ	4х узловой элемент плоской деформации	
Материал	Модуль упругости	$E=6777,931 \text{ МПа}$
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,210345$
	Площадь облицовки	$A=0,5 \text{ м}^2$
	Момент инерции облицовки	$I=0,04167 \text{ м}^2$

Граничные условия	Левая сторона	Ограничение по Dx
	Нижняя сторона	Ограничение по Dy
Нагрузки	Начальное изотропное предварительное напряжение $\sigma_x = -30$ МПа, $\sigma_y = \sigma_z = -15$ МПа. Граничное давление по правой грани – 30 МПа, по верхней – 15 МПа	

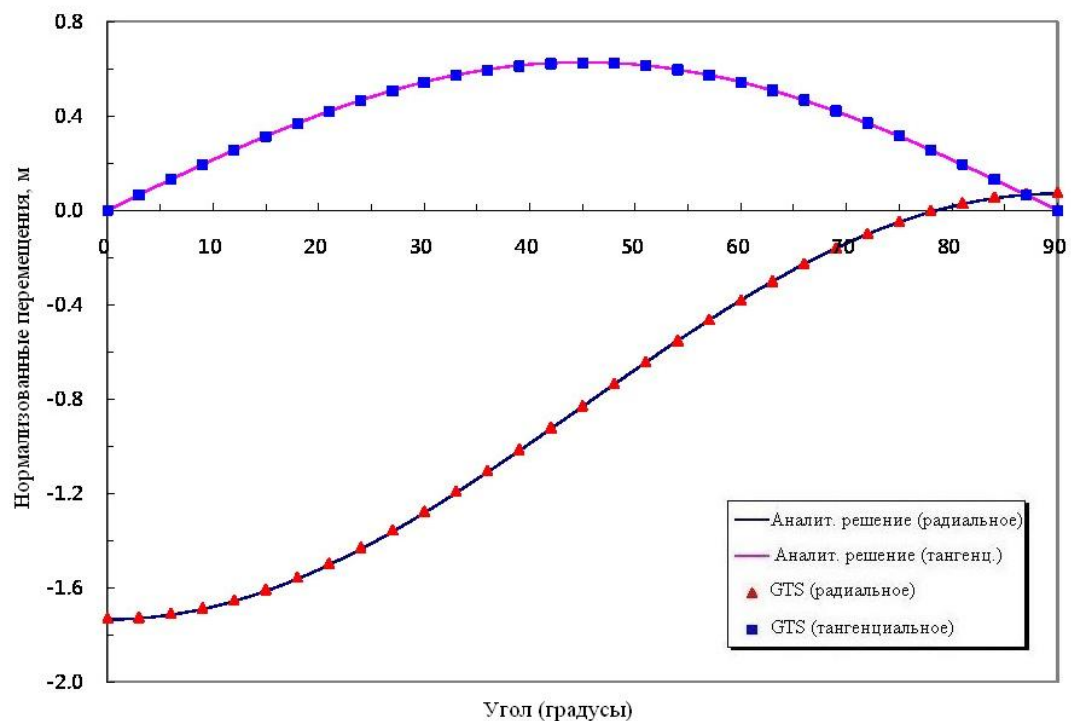
## Результаты

Результаты GTS сравниваются с аналитическим решением на рис. 4.3-4.8. На этих рисунках сравниваются значения для радиального и касательного перемещений, осевых сил в конструктивных элементах, и моментов в узлах обделки. Результаты для двухмерной модели представлены как приведенные перемещения ( $2G_u/P_o a$ ), приведенная сила ( $N/P_o a$ ) и приведенный момент ( $M/P_o a^2$ ). Отмечается хорошее схождение результатов расчета перемещений и осевых сил. Моменты не показывают такого точного соответствия.

Для определенной задачи нагрузка преимущественно воспринимается усилием от распора в облицовке и поэтому моменты довольно малы. Погрешность более выражена в рассчитанных моментах, т.к. моменты обеспечивают только вторичный эффект.

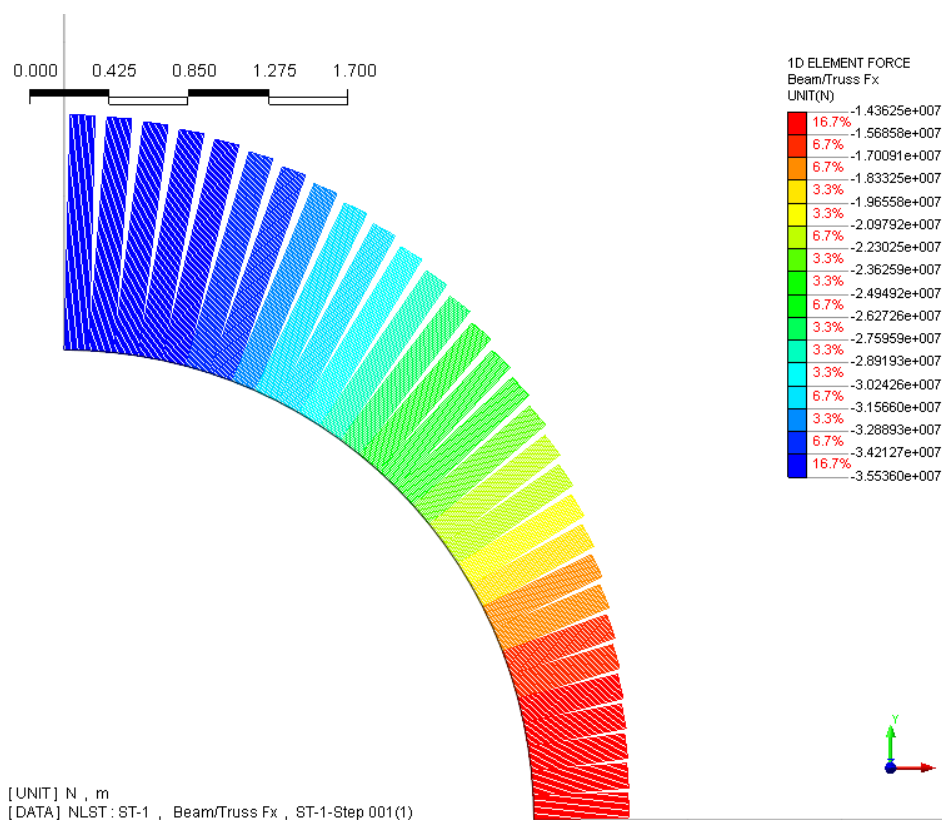


(a) Изополя перемещений

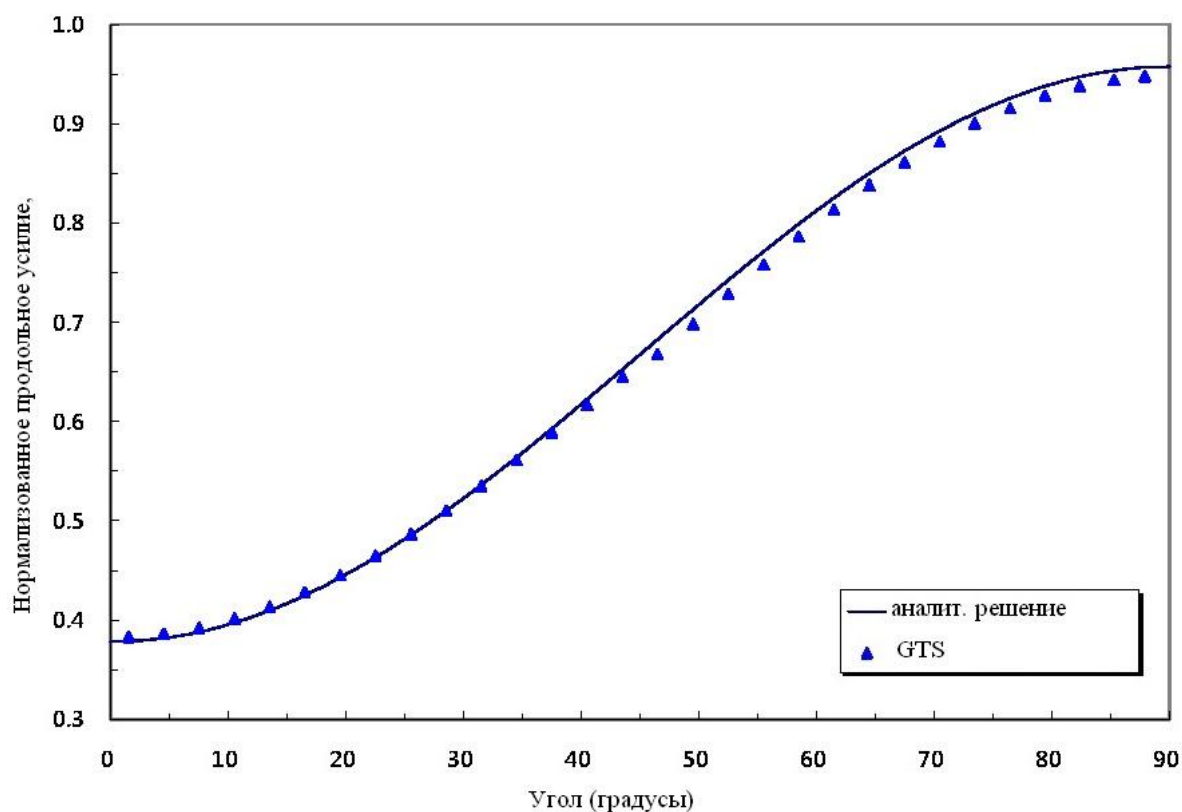


(b) Графики приведенных радиальных и касательных перемещений

Рисунок 4.3 - Сравнение перемещений полученных в GTS с аналитическим решением (модель 1)

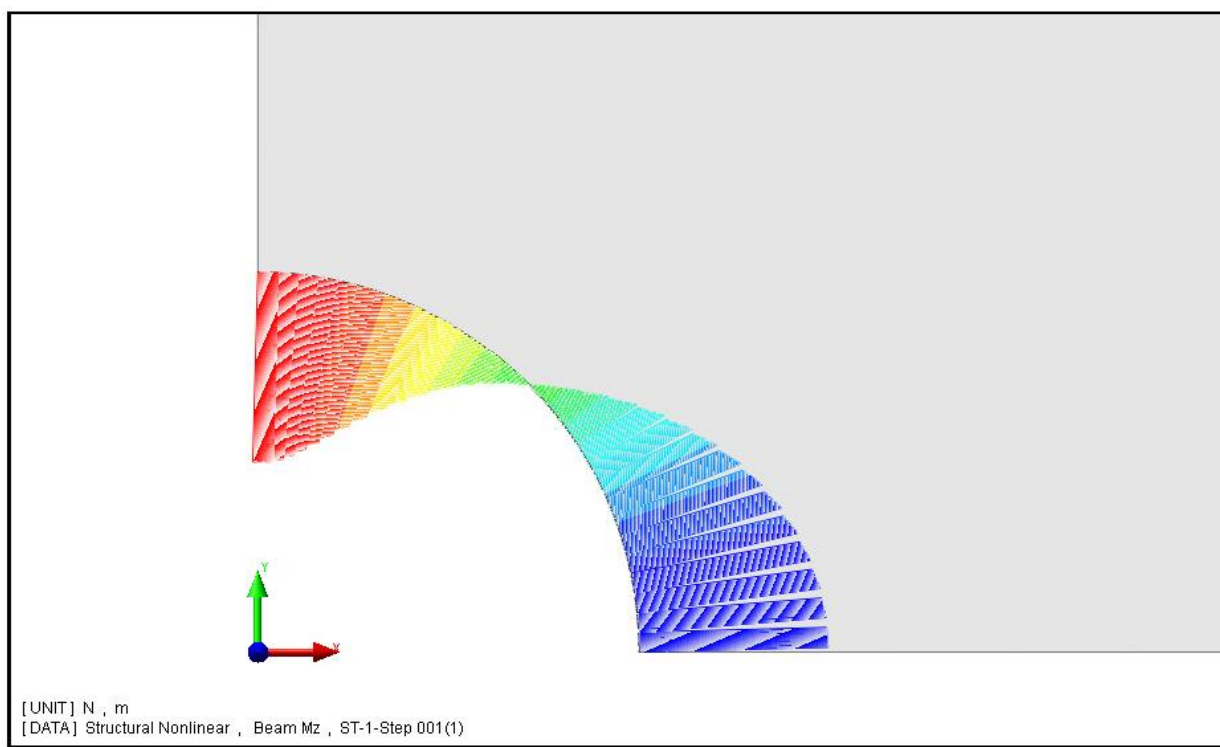


(a) Эпюра продольных сил

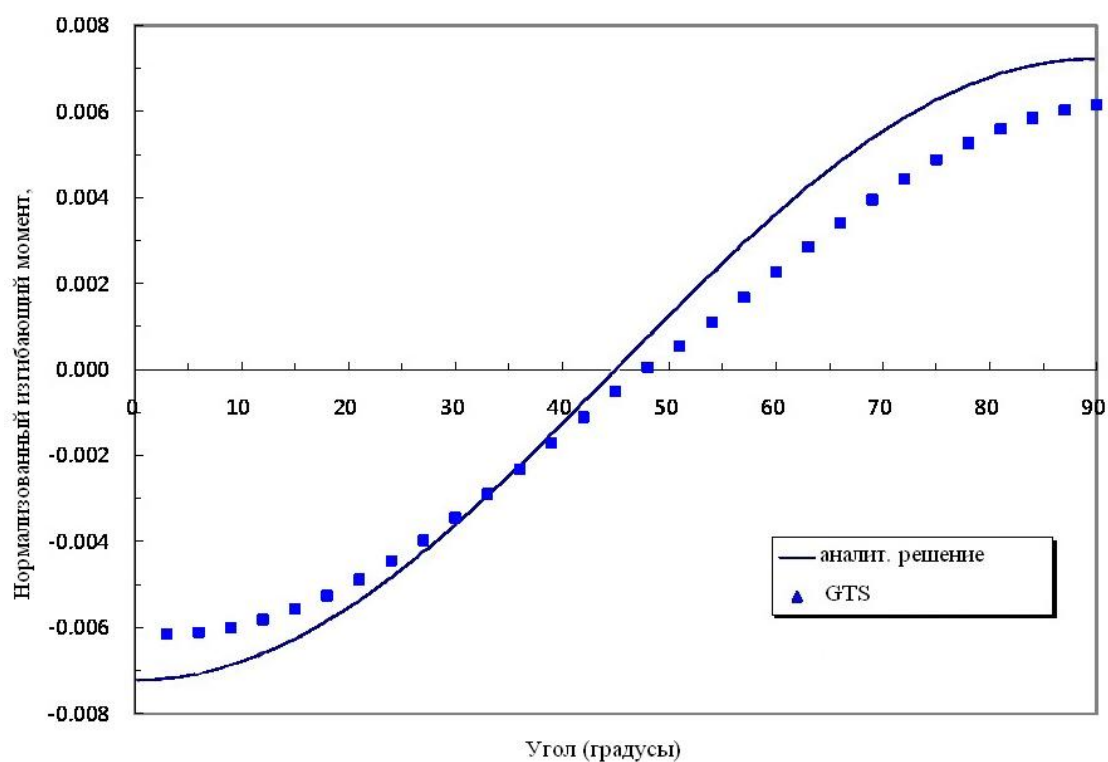


(b) График приведенного продольного усилия

Рисунок 4.4 - Сравнение продольного усилия, полученного в GTS с аналитическим решением (модель 1)



(a) Эпюра изгибающих моментов



(b) График приведенных изгибающих моментов

Рисунок 4.5 – Сравнение изгибающих моментов, полученных в GTS с аналитическим решением (модель 1)

## Сравнение результатов

### Приведенные радиальные и касательные перемещения

		Аналитическое решение	GTS	
			Значение	Погрешность (%)
Радиальное	0°	-1,735	-1,730	0,27
	90°	$7,103 \times 10^{-2}$	$7,627 \times 10^{-2}$	7,37
Касательное	45°	$6,280 \times 10^{-1}$	$6,251 \times 10^{-1}$	0,46

### Приведенные продольные усилия

	Аналитическое решение	GTS	
		Значение	Погрешность (%)
0°	0,3783	0,3830	1,24
45°	0,6679	0,6676	0,51
90°	0,9579	0,9476	1,08

### Приведенные изгибающие моменты

	Аналитическое решение	GTS	
		Значение	Погрешность (%)
0°	$-7,227 \times 10^{-3}$	$-6,15 \times 10^{-3}$	14,87
45°	0,00	$-0,52 \times 10^{-3}$	0,00
90°	$7,227 \times 10^{-3}$	$6,14 \times 10^{-3}$	14,97

**Пример 5. Жесткий ленточный фундамент на упругом основании**

Источник	Giroud, J.P., <i>Tables pour le calcul des foundations</i> , V. 1, Dunod, Paris, 1972.
Тип задачи:	Статический линейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	6-ти узловой треугольный элемент плоской деформации

**Описание**

Задача жесткого ленточного фундамента на упругом грунтовом основании глубиной  $H$  показана на рис.5.1. На этом рисунке показана сетка конечных элементов, используемая в расчете. Применяются 6-узловые элементы плоской деформации. Постоянное вертикальное заданное перемещение - 10 мм, а вертикальная нагрузка  $F$ , определяется по результатам численных расчетов методом конечных элементов. Т.к. задача симметрична, можно смоделировать только одну половину задачи.

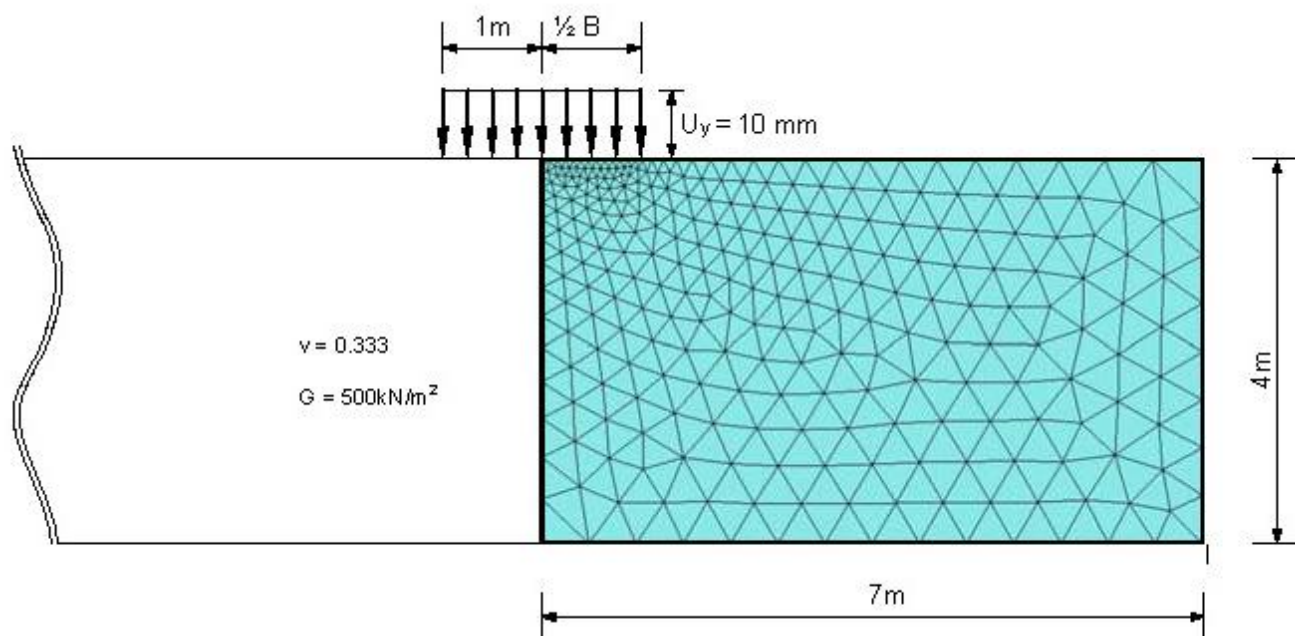


Рисунок 5.1 – Геометрические размеры и КЭ сетка



### Аналитическое решение

Жиру (1972) дает аналитическое решение данной задачи в приведенной ниже формуле:

$$\text{осадка} = \frac{F\delta}{2(1+\nu)G}, \text{ при } \delta = 0,88 \text{ и } \frac{H}{0,5B} = 4$$

где Н – глубина слоя, В – общая ширина фундамента и  $\delta$  – постоянная величина.

Для размеров и свойств материала, используемого в анализе методом конечных элементов, это решение дает вертикальную нагрузку, равную 15,15 кН.

### GTS модель

#### Исходные данные

Тип расчета	Линейный статический расчет по 2D модели плоской деформации	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	7,0м
	Высота	4,0м
КЭ	6-ти узловой элемент плоской деформации	
Материал	Модуль упругости	E=1333 кПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,3330$
Граничные условия	Левая и правая стороны	Ограничение по Dx
	Нижняя сторона	Ограничение по Dx, Dy
Нагрузки	Заданные перемещения 10мм по верхней грани	

### Результаты

На рис.5.2 и 5.3 даны как аналитические, так и численные GTS расчеты распределения давления под фундаментом. На рисунках видно очень хорошее соответствие результатов (GTS) численных расчетов с аналитическим решением.

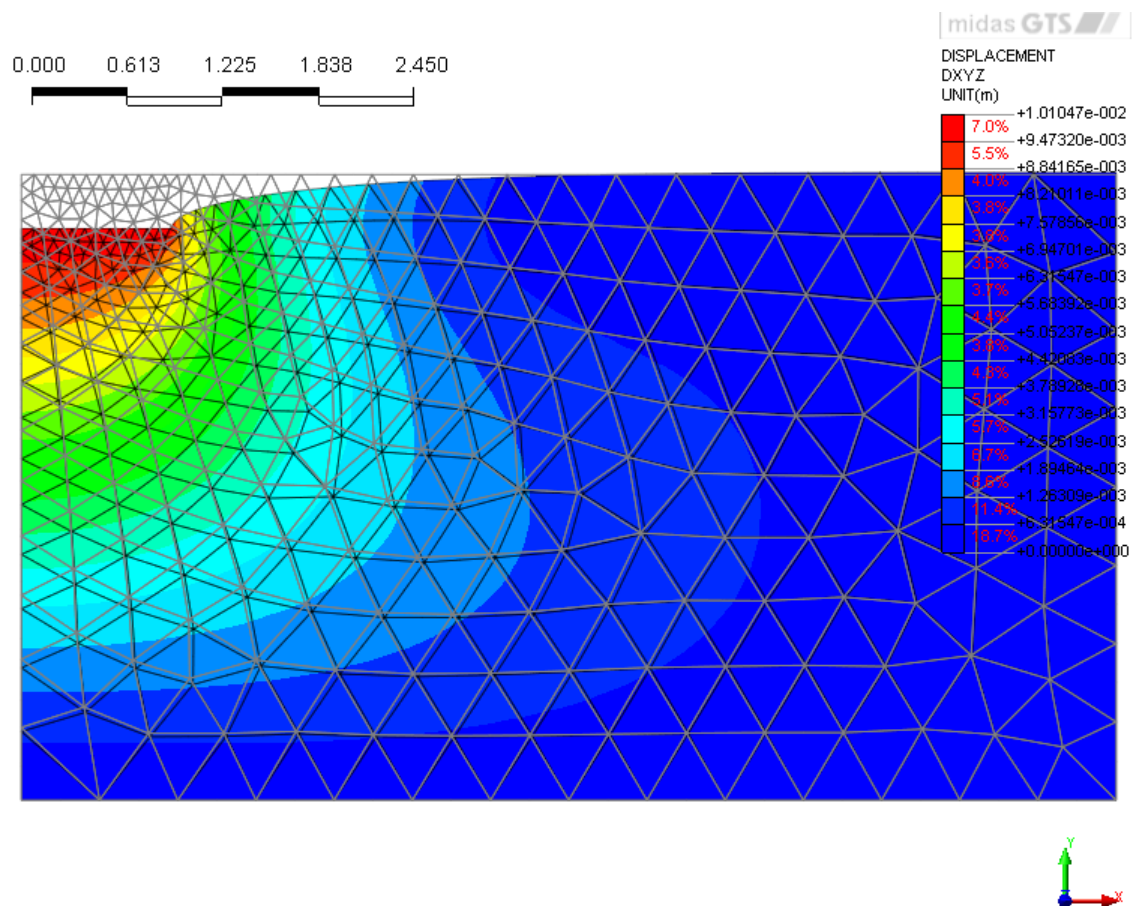


Рисунок 5.2 – Деформированная сетка КЭ и распределение давления

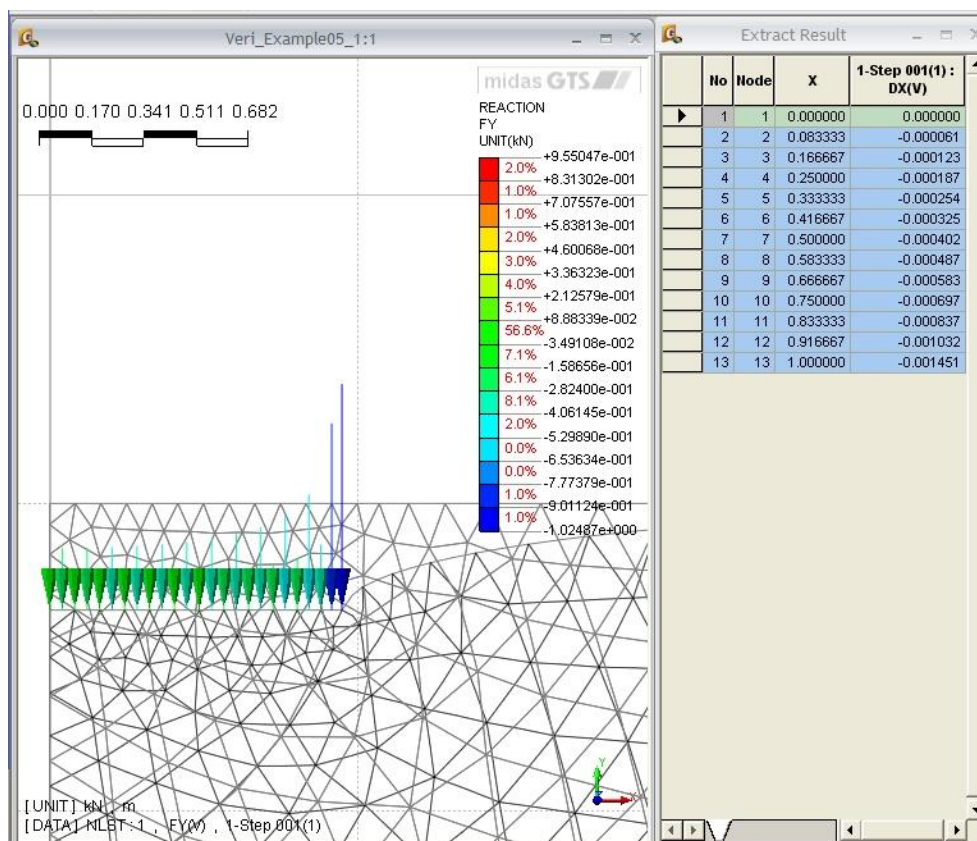


Рисунок 5.3 – Реакция по основанию фундамента

## Сравнение результатов

### Нагрузка на фундамент, при заданном перемещений 10мм

	Аналитическое решение	GTS	
		Значение	Погрешность (%)
Нагрузка на фундамент, кН	15,15	15,28	0,85

**Пример 6. Ленточная нагрузка на упругое основание Гибсона**

Источник	Gibson, R.E., “Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space,” Geotechnique, Vol. 17, 1967, pp. 58-64.
Тип задачи:	Статический линейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	6-ти узловой треугольный элемент плоской деформации

**Описание**

На рис.6.1 показаны КЭ сетка и данные грунта для расчета плоской деформации осадки от ленточной нагрузки на грунт Гибсона (грунт Гибсона – это упругий грунт, в котором модуль сдвига возрастает линейно с увеличением глубины).

Используя  $z$  для обозначения глубины, модуль сдвига,  $G$ , применяемый в расчете, определяется уравнением  $G=\alpha z=100z$ . При коэффициенте Пуассона, равном 0,495, модуль Юнга меняется на  $E=299z$ . Для того, чтобы применить это изменение модуля Юнга в графу «свойства материала», эталонное значение модуля Юнга,  $E$ , берется равным 0. Увеличение модуля Юнга  $E$  (приращение) составляет 299 и эталонный уровень  $y_{\text{ref}}$  вводится равным 4,0 м, что является верхней гранью модели (поверхность грунта).

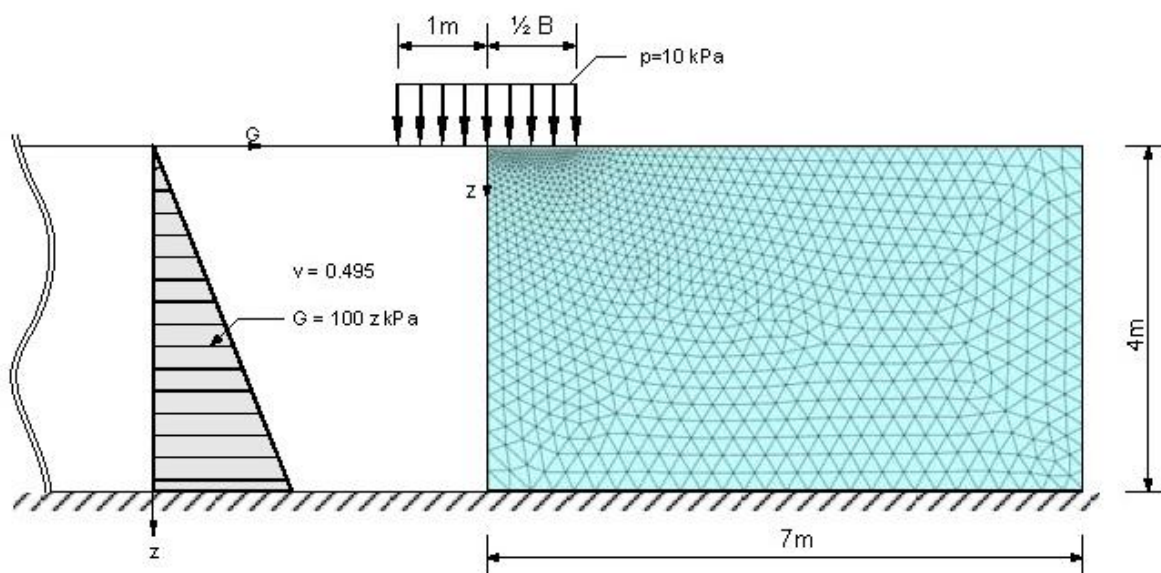


Рисунок 6.1 – Геометрические размеры и КЭ сетка

### Аналитическое решение

Аналитическое решение точно только для бесконечного полупространства, в то время как решение GTS получено для слоя конечной глубины. Однако, эффект модуля сдвига, который линейно увеличивается с увеличением глубины, заключается в локализации деформации у поверхности; тогда можно было бы ожидать, что конечная толщина слоя будет оказывать лишь небольшое влияние на результаты. Точное решение для этой определенной задачи, как показывает Гибсон (1967) дает однородную осадку ниже нагрузки величиной:

$$\text{Осадка} = \frac{q}{2\alpha}$$

В этом случае точное решение дает осадку 0,05 м.

### GTS модель

#### Исходные данные

Тип расчета	Линейный статический расчет по 2D модели плоской деформации	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	7,0м
	Высота	4,0м

КЭ	6-ти узловой элемент плоской деформации	
Материал	Модуль упругости	$E=299z$ кПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,495$
Граничные условия	Левая и правая стороны	Ограничение по Dx
	Нижняя сторона	Ограничение по Dx, Dy
Нагрузки	Давление 10кПа на поверхности грунта (верхняя грань)	

## Результаты

Точное решение этой задачи имеется только для случая коэффициента Пуассона, равного 0,5; в расчете GTS величина 0,495 применяется для коэффициента Пуассона, чтобы приблизить это состояние (условие несжимаемости).

Численные расчеты в GTS показывают почти равномерную осадку поверхности грунта под действием ленточной нагрузки, что видно на рисунке изополя вертикальных перемещений на рис.6.2. Рассчитанная осадка составляет 0,0504 м в центре приложенной ленточной нагрузки.



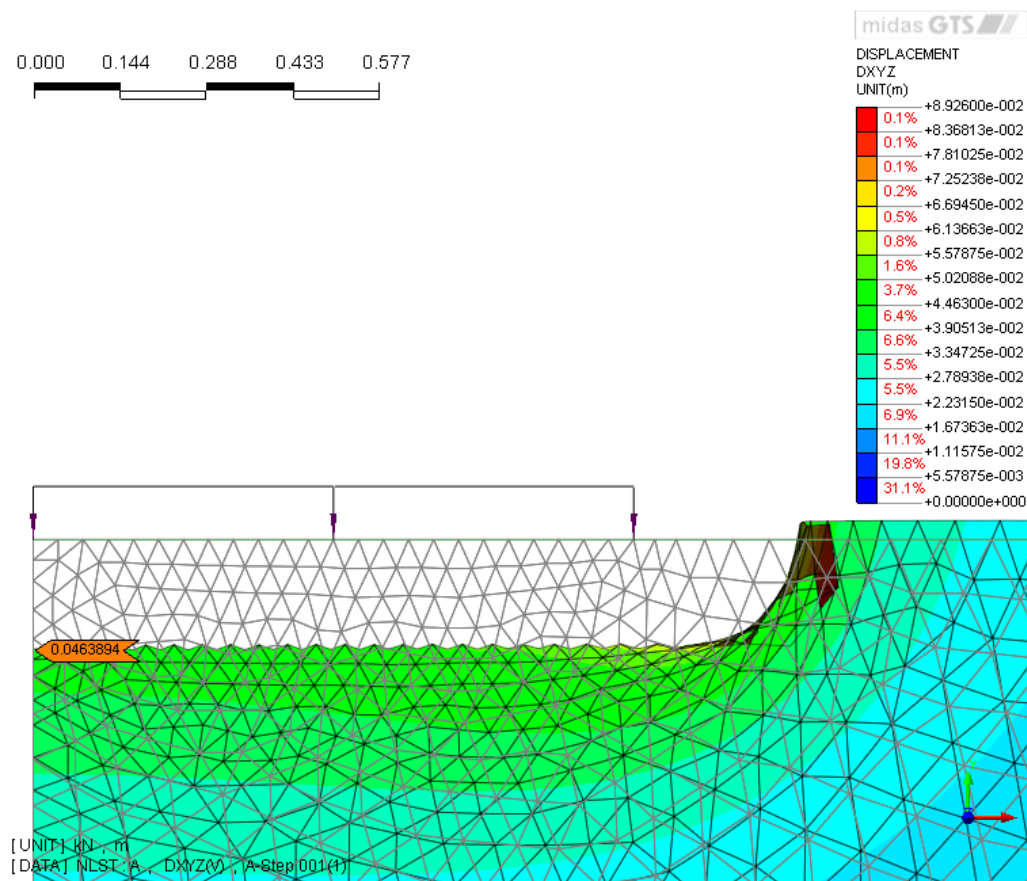


Рисунок 6.2 – Изополя вертикальных перемещений

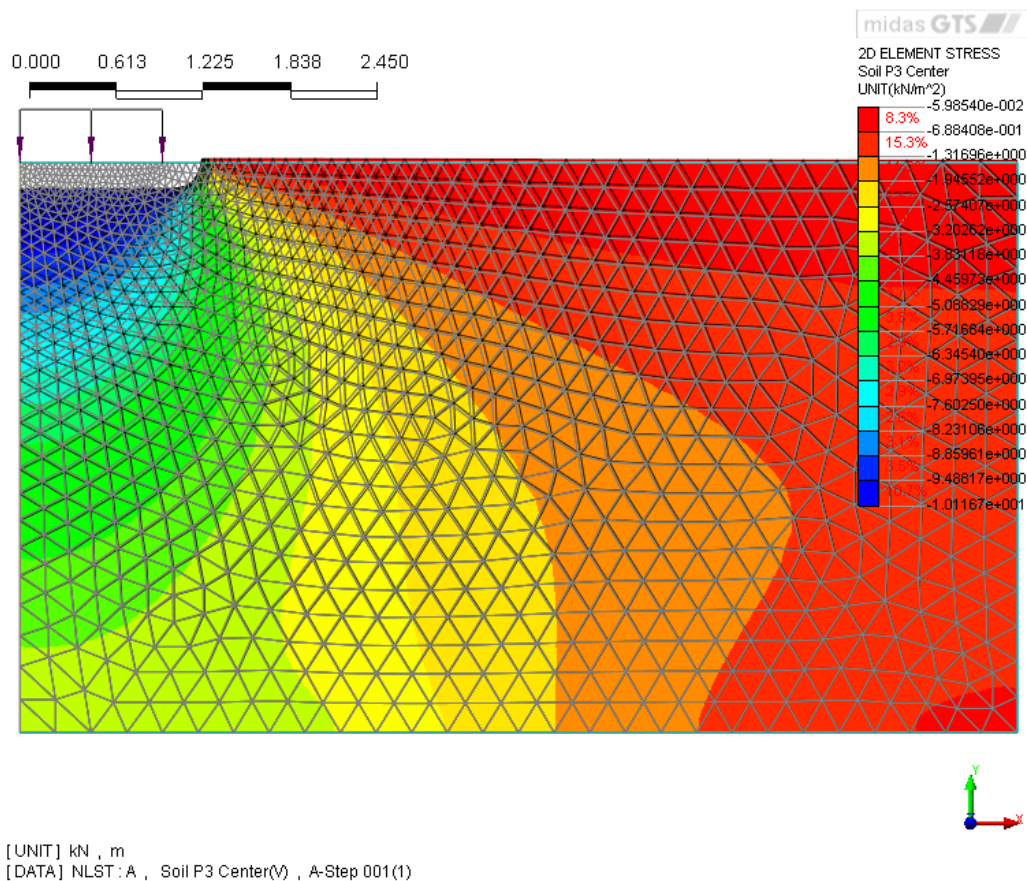


Рисунок 6.3 – Основные напряжения в грунте

**Сравнение результатов****Осадка под нагрузкой**

	Аналитическое решение	GTS	
		Значение	Погрешность (%)
Осадка	0,0500 (для бесконечной полуплоскости и коэффициента Пуассона 0,5)	0,0463	7,40



**Пример 7. Круглый фундамент на упругом полупространстве**

Источник	Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., <i>Theory of Elasticity</i> , McGraw Hill, New York, 1970.
Тип задачи:	Статический линейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент

**Описание**

Это проверочная задача расчета жесткого круглого фундамента на упругом полупространстве. В этом случае, перемещение основания,  $u$ , является постоянным под подошвой фундамента; однако распределение давлений не является постоянным. Интенсивность давления по основанию фундамента, общая нагрузка и перемещение фундамента, рассчитанные в GTS в осесимметричной постановке, можно сравнить с аналитическим решением. Для этой задачи мы прикладываем к фундаменту заданное вертикальное перемещение  $u=0,05\text{м}$ . Затем рассчитаем общую нагрузку,  $P$ , на фундамент и распределение давления под подошвой фундамента.

**Аналитическое решение**

Решение для случая жесткого фундамента на упругом полупространстве дано Тимошенко и Гудьером (1970). Распределение давлений,  $q$ , под фундаментом дается уравнением:

$$q = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}},$$

где  $P$  – общая нагрузка на фундамент,  $a$  – радиус фундамента,  $r$  – расстояние от центра фундамента. Наименьшее значение  $q$  отмечается в центре фундамента ( $r=0$ ):

$$q_{\min} = \frac{P}{2\pi a^2}$$

а на краю фундамента ( $r=a$ ) давление бесконечно. Перемещение фундамента дано уравнением:

$$u = \frac{P(1-\nu^2)}{2aE}$$

где  $E$  и  $\nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона для упругой среды соответственно.

### **GTS модель**

Расчет выполняется в осесимметричной постановке. Ось симметрии при  $x=0$  выравнивается с центром фундамента. Сетка из 6400 конечных элементов представлен упругим материалом. Постоянное заданное перемещение 0,001 м применяется к выбранным граничным узлам на верхней грани модели для 50 этапов, чтобы создать заданное перемещение фундамента, равное 0,05 м. Геометрия и граничные условия модели показаны на рис.7.1. Эта задача очень чувствительна к размерам расчетной области поэтому рассматривались 2 модели.

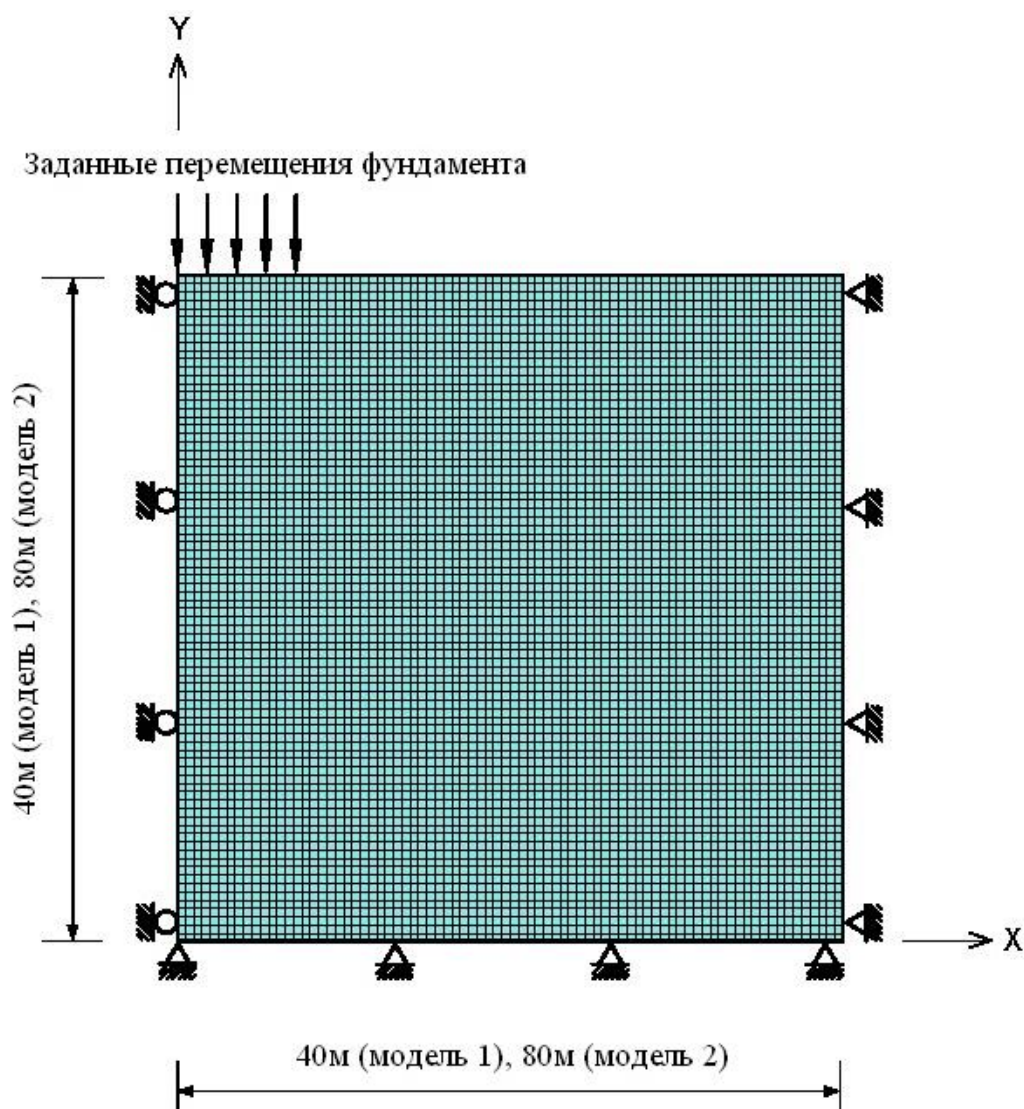


Рисунок 7.1 – Расчетная модель для круглой плиты в упругой среде (модели 1, 2)

**Исходные данные (модель 1)**

Тип расчета	Упругий расчет по 2D осесимметричной модели	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	40,0м
	Высота	40,0м
КЭ	4-х узловой осесимметричный элемент	
Материал	Модуль упругости	E=257,1429 МПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,285714$
Граничные условия	Левая и правая стороны	Ограничение по Dx
	Нижняя сторона	Ограничение по Dx, Dy
Нагрузки	Заданное перемещение -0,05м на узлы фундамента	

**Исходные данные (модель 2)**

Тип расчета	Упругий расчет по 2D осесимметричной модели	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	80,0м
	Высота	80,0м
КЭ	4-х узловой осесимметричный элемент	
Материал	Модуль упругости	E=257,1429 МПа
	Коэффициент Пуассона	v=0,285714
Граничные условия	Левая и правая стороны	Ограничение по Dx
	Нижняя сторона	Ограничение по Dx, Dy
Нагрузки	Заданное перемещение -0,05м на узлы фундамента	

**Результаты**

Общая нагрузка на фундамент, Р, которая развивается для применяемого перемещения фундамента, равного 0,05 м, рассчитывается по следующему уравнению:

$$P = 2\pi \sum f_i^{(Y)}$$

где  $f_i^{(Y)}$  - реактивная сила Y в узле фундамента i (рис.7.2).

Распределение давлений под фундаментом рассчитывается следующим образом. Давление  $q_i$ , связанное с узлом фундамента i, расположенным на расстоянии радиуса  $r_i$  от центра фундамента, рассчитывается исходя из у-реактивной силы в узле,  $f_i^{(Y)}$ , и площади в масштабе  $A_i^{sc}$ , связанной с узлом:

$$q_i = \frac{2\pi f_i^{(Y)}}{2\pi r_i A_i^{sc}} = \frac{f_i^{(Y)}}{r_i A_i^{sc}}$$

где  $r_i$  – радиус для узла i.

Для узлов, не находящихся на оси симметрии ( $x=0$ ), радиусом является x-расстояние от центра фундамента до каждого узла, имеющего заданное перемещение. В узле центра фундамента радиус в 0,25 раз больше x-расстояния до соседнего узла.

Давление на фундамент рассчитанного в GTS сравнивается с аналитическим решением на рис.7.3. Следует отметить, что эффективный радиус фундамента,  $a$  – это радиус до точки в середине между последним узлом с заданным перемещением ( $x=4\text{м}$ ) и соседним узлом ( $x=4,5\text{ м}$ ).

На рис.7.3 показано, что влияние границы (размеров расчетной области) – это основная причина разницы между численным и аналитическим результатами.

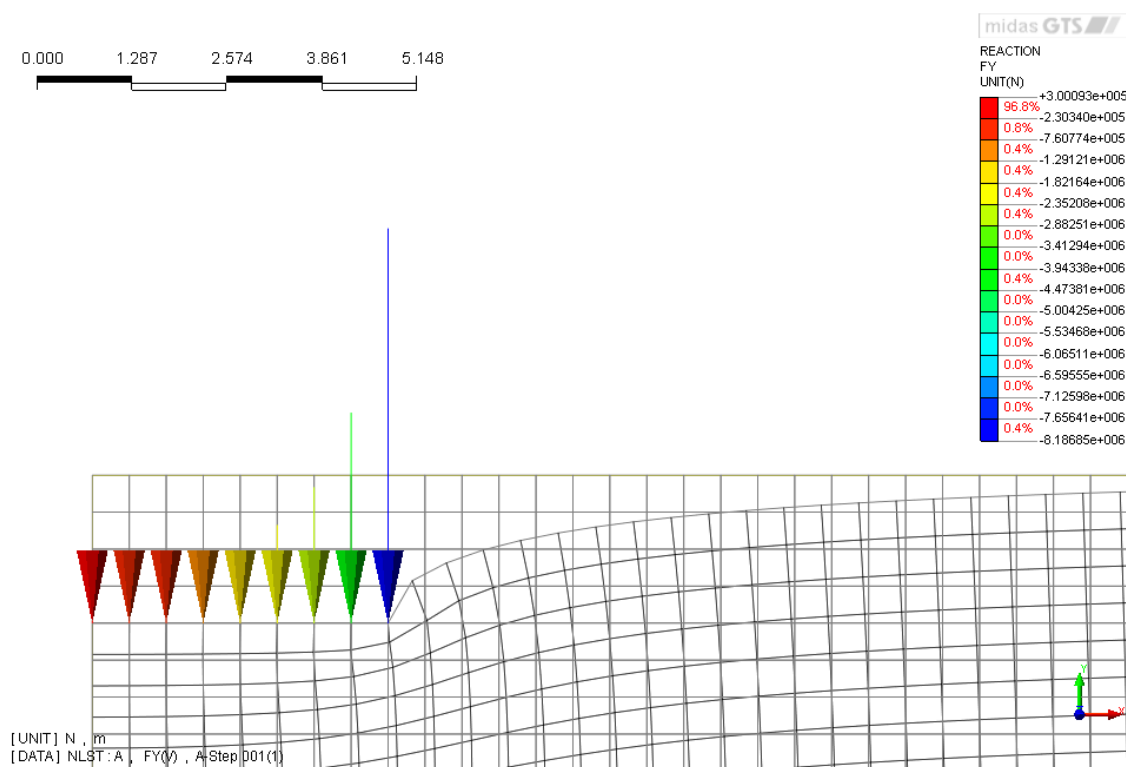


Рисунок 7.2 – Реактивные усилия под узлами фундаментов (модель 1)

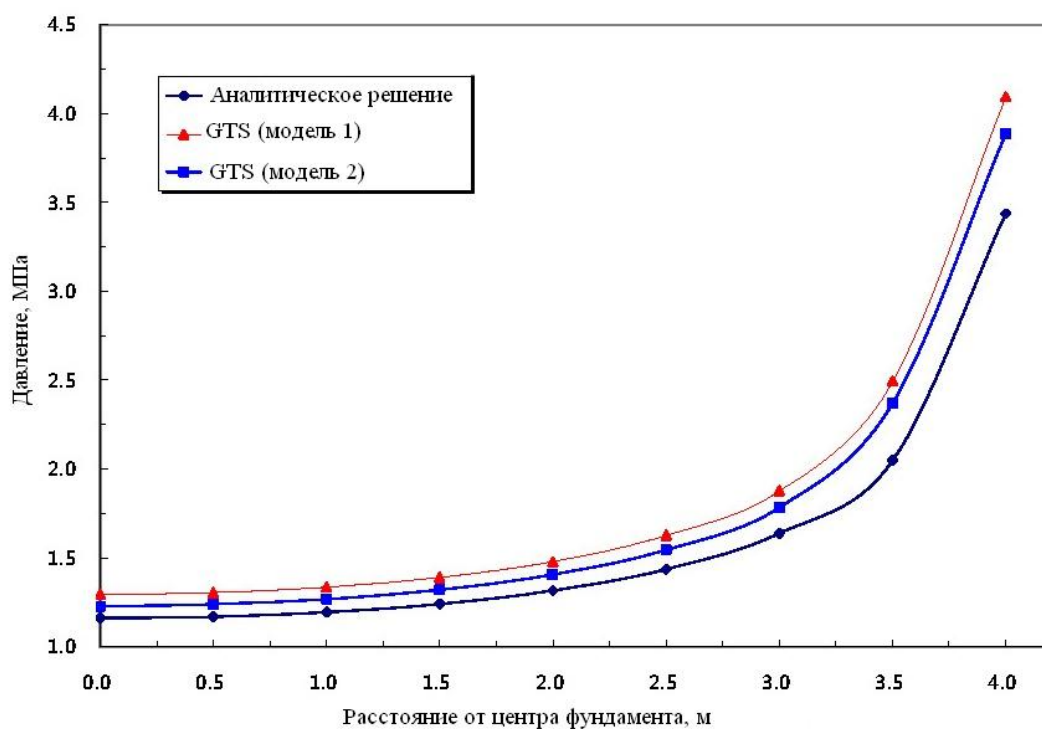


Рисунок 7.3 – Сравнение давления под подошвой фундамента (модели 1 и 2)

### Сравнение результатов

#### Давление под подошвой фундамента

		Аналитическое решение	GTS			
			40x40		80x80	
			Значение	Погрешность (%)	Значение	Погрешность (%)
X (м)	0,0	1,161	1,293	11,37	1,228	5,79
	0,5	1,169	1,305	11,65	1,240	6,06
	1,0	1,195	1,336	11,76	1,269	6,16
	1,5	1,241	1,391	12,05	1,321	6,44
	2,0	1,316	1,480	12,45	1,406	6,85
	2,5	1,436	1,627	13,31	1,546	7,64
	3,0	1,639	1,878	14,58	1,784	8,86
	3,5	2,047	2,494	21,83	2,369	15,72
	4,0	3,436	4,093	19,13	3,886	13,08

### Пример 8. Ленточные и круглые фундаменты на упруго-пластическом основании (модель Мора-Кулона)

Источник	<p>Cox, A. D.; Eason, G.; and Hopkins, H. G.; “Axially Symmetric Plastic Deformations in Soils,” <i>Trans. R. Soc., Ser. A</i>, 254:1, London, 1961.</p> <p>Chen, W. F., “Limit Analysis and Soil Plasticity”, <i>Developments in Geotechnical Engineering 7.</i>, Elsevier Scientific Publishing Co., New York, 1961.</p> <p>Sloan, S. W. and Randolph, M. F., “Numerical Predictions of Collapse Loads Using Finite Element Methods,” <i>Int. J. Num. &amp; Anal. Methods in Geomech.</i>, V. 6, 1982, pp. 47-76.</p> <p>Terzaghi, K., and Peck, R. B., <i>Soil Mechanics in Engineering Practice</i>, 2nd Ed., John Wiley &amp; Sons, New York, 1967.</p>
Тип задачи:	Статический нелинейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	8-ми узловой четырехугольный элемент плоской деформации; 20-ти узловой гексаэдр; 8-ми узловой осесимметричный четырехугольный элемент

#### Описание

Прогнозирование разрушающей нагрузки в условиях устойчивого пластичного течения – это то, что может затруднить четкое численное моделирование (Слоун и Рэндольф, 1982). Простой пример задачи, включающей устойчивое течение – это определение несущей способности фундамента на упруго-пластичном грунте. Несущая способность зависит от устойчивого пластичного течения под фундаментом, обеспечивая этим меру способности GTS смоделировать это условие (состояние).

Определяются 2 типа фундаментов: ленточный фундамент и круглый фундамент. У ленточного фундамента половина ширины равна 3,5 м, радиус круглого фундамента – 3,375 м. Ленточный фундамент имеет шероховатую поверхность и расположен на связном грунте без трения. Круглый фундамент – гладкий и расположен на связном грунте и на несвязном грунте (модель Мора-Кулона).

### Аналитическое решение

#### *Задача ленточного фундамента:*

Если угол внутреннего трения грунта нулевой,  $\varphi=0$ , тогда несущая способность для ленточного фундамента определяется по решению Прандтля как дано Терцаги и Пеком (1967):

$$q = (2 + \pi)c \text{ или } q = 5,14c$$

где  $c$  - сцепление материала,  $q$  - напряжение несущей способности при разрушении.

Решение основано на характере разрушения, как показано на рис.8.1.

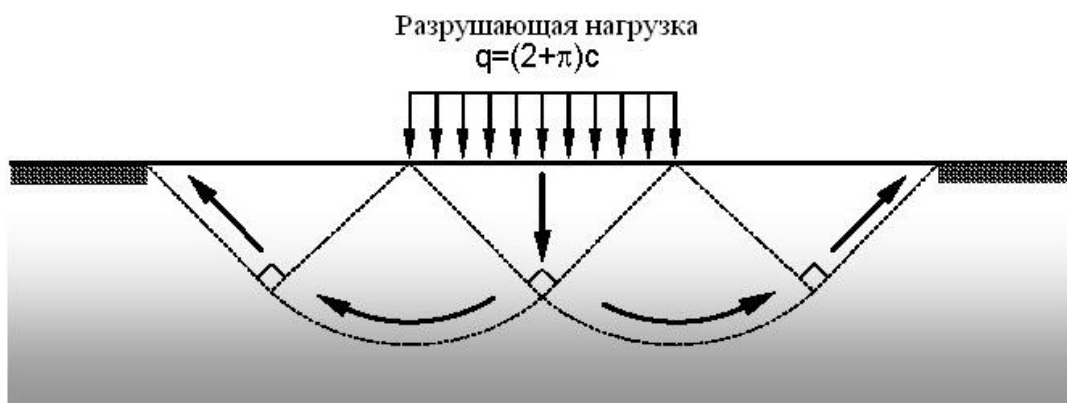


Рисунок 8.1 – Задача выклинивания грунта (задача Прандтля) под ленточным фундаментом в грунтах без трения

#### *Задача круглого фундамента:*

Кокс и другие (1961) решили численным методом уравнения линии сдвига для задачи осесимметричного фундамента.

Полуаналитическое значение среднего давления на фундамент при разрушении для угла трения  $20^\circ$  будет:



$$q=20,1c$$

где  $q$  и  $c$  – такие же, как определено в уравнении для ленточного фундамента.

Соответствующая сеть линии сдвига, на что сделана ссылка в работе Чена (1975) показана на рис.8.2.

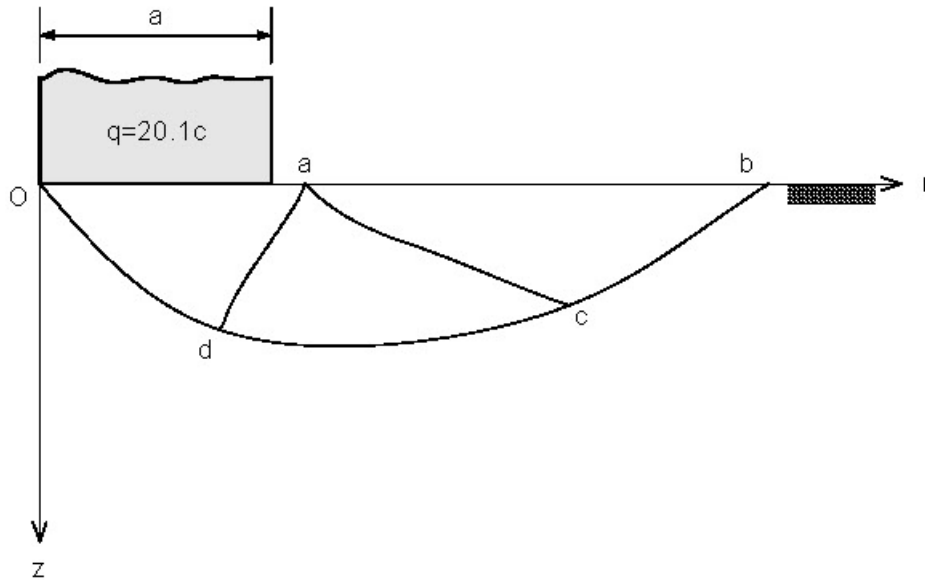


Рисунок 8.2 – Линии сдвига Кокса для гладкого круглого фундамента при  $\varphi=20^\circ$

### GTS модель

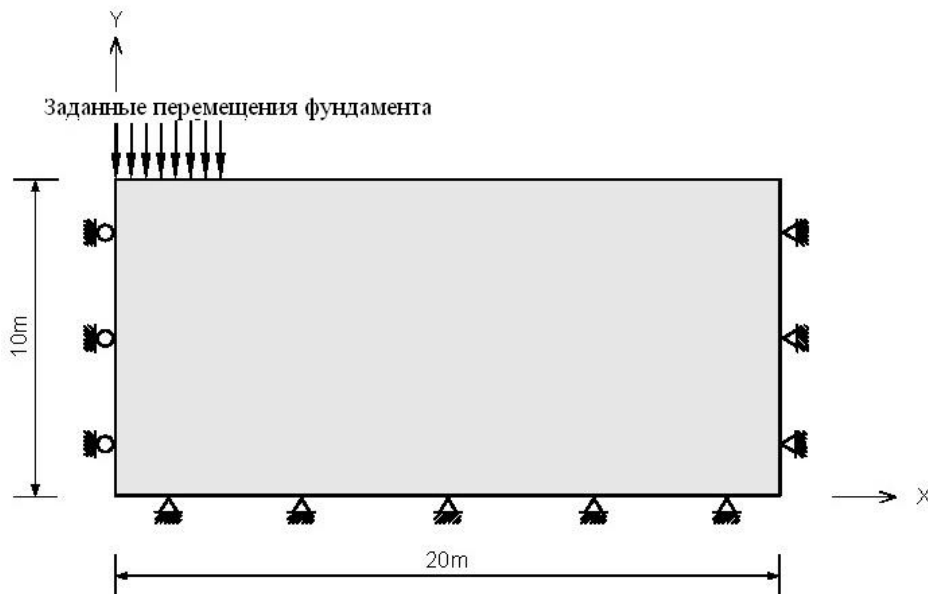


Рисунок 8.3 – Геометрические размеры и граничные условия 2D модели ленточного фундамента (модель 1)

Расчет в модели двумерной плоской деформации и трехмерного твердого тела производится для задачи ленточного фундамента, а двумерный осесимметричный расчет и расчет трехмерного твердого тела – для задачи круглого фундамента.

Геометрия и граничные условия двумерного ленточного фундамента для расчета по модели плоской деформации показаны на рис.8.3. Зона модели разбита на 200 конечных элементов, что показано на рис.8.4.

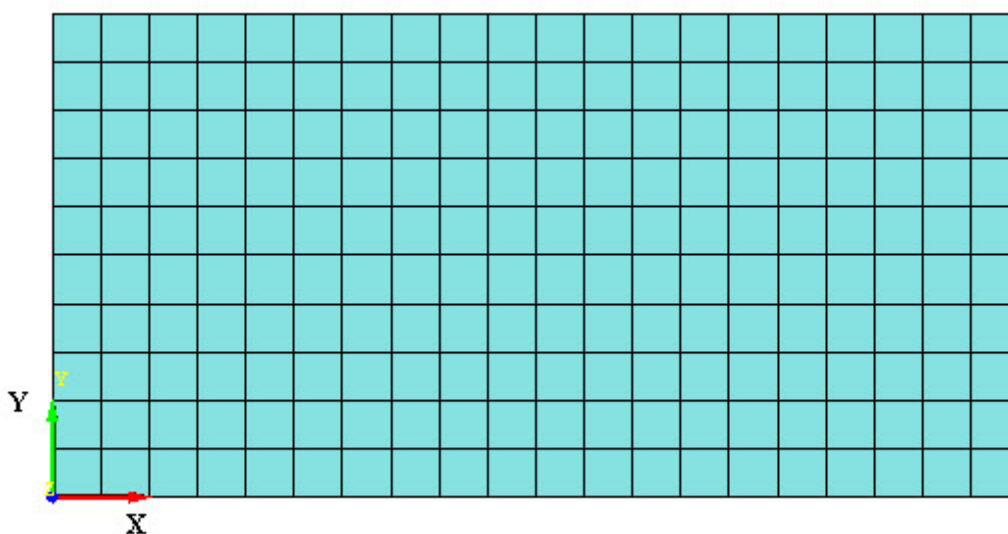


Рисунок 8.4 – Сетка КЭ для 2D модели ленточного фундамента (модель 1)

Геометрия и граничные условия для модели трехмерного ленточного фундамента, отражены на рис.8.5. Зона модели разбита на 520 КЭ (рис.8.6).

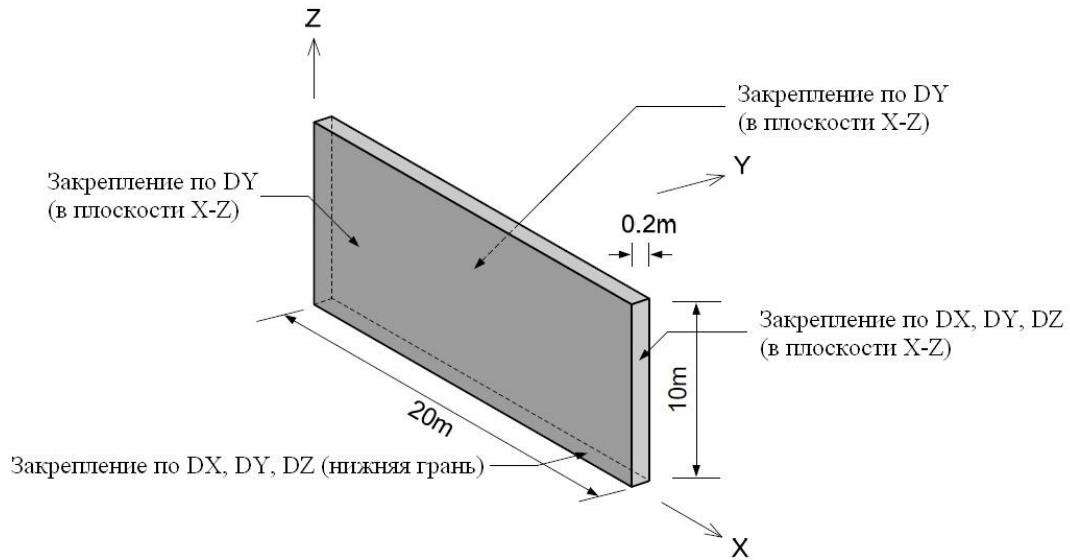


Рисунок 8.5 – Геометрические размеры модели и граничные условия для 3D модели ленточного фундамента (модель 2)

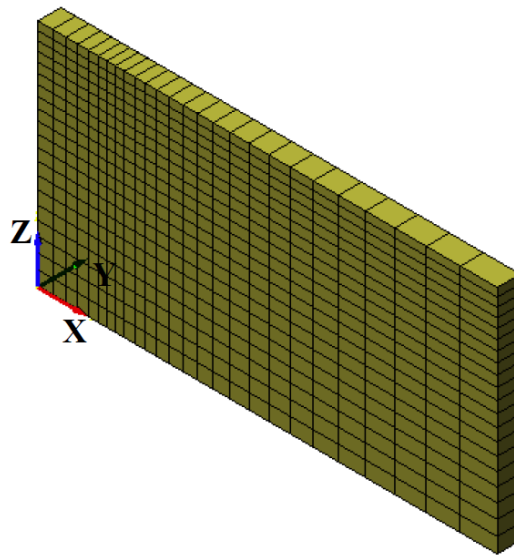


Рисунок 8.6 – Сетка КЭ 3D модели ленточного фундамента (модель 2)

Геометрия и граничные условия для осесимметричного расчета показаны на рис.8.7.

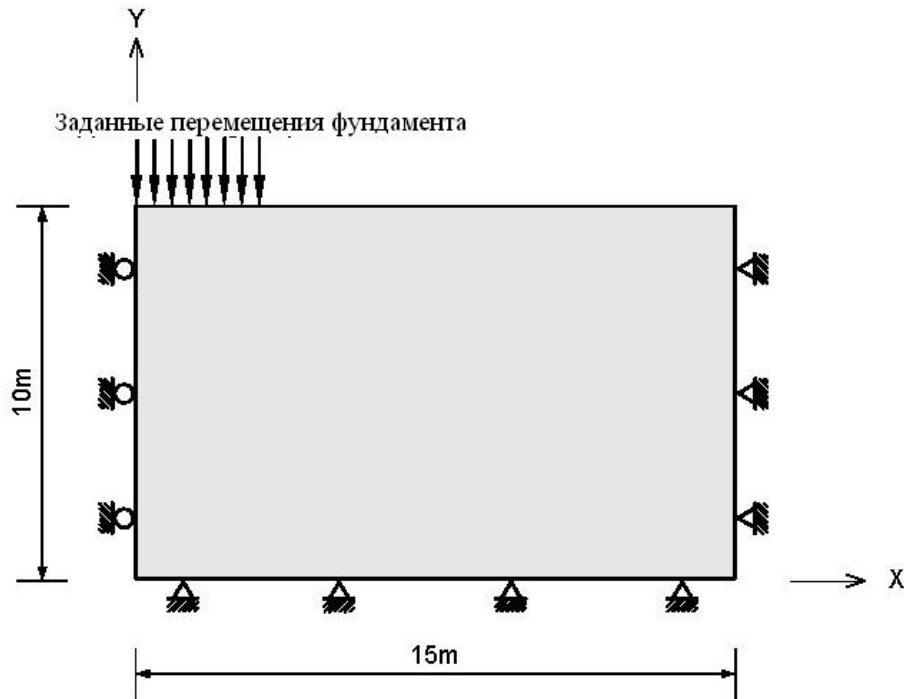


Рисунок 8.7 - Геометрические размеры модели и граничные условия для 2D модели круглого фундамента (модель 3)

Геометрия и граничные условия к расчету трехмерного круглого фундамента показаны на рис.8.8. Зона модели разделена на 2520 КЭ, рис.8.9.

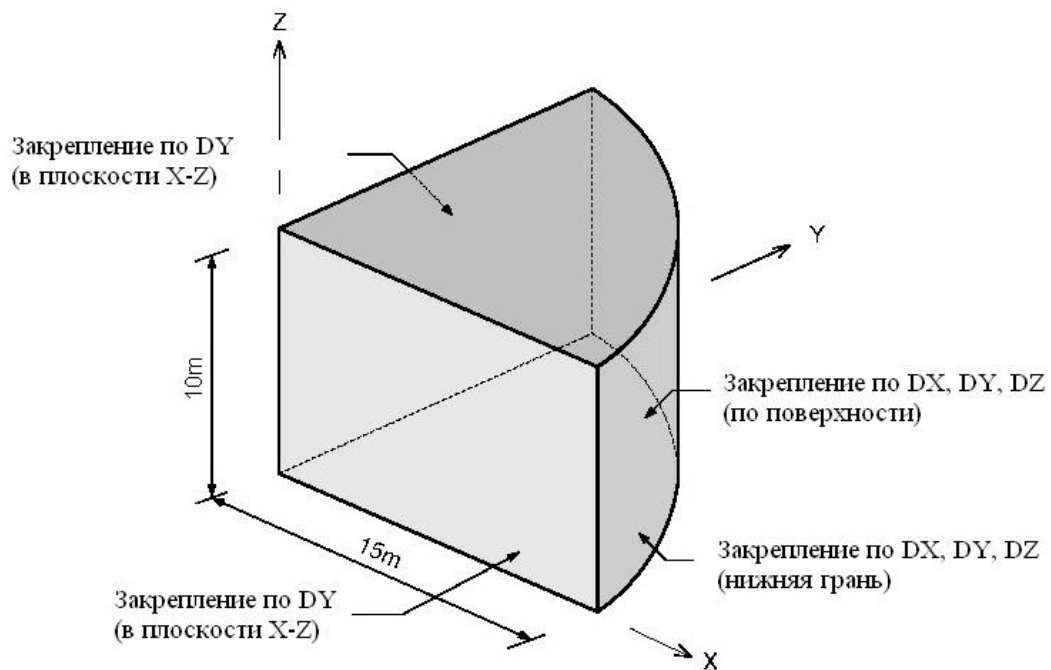


Рисунок 8.8 – Геометрические размеры модели и граничные условия для 3D модели круглого фундамента (модель 4)

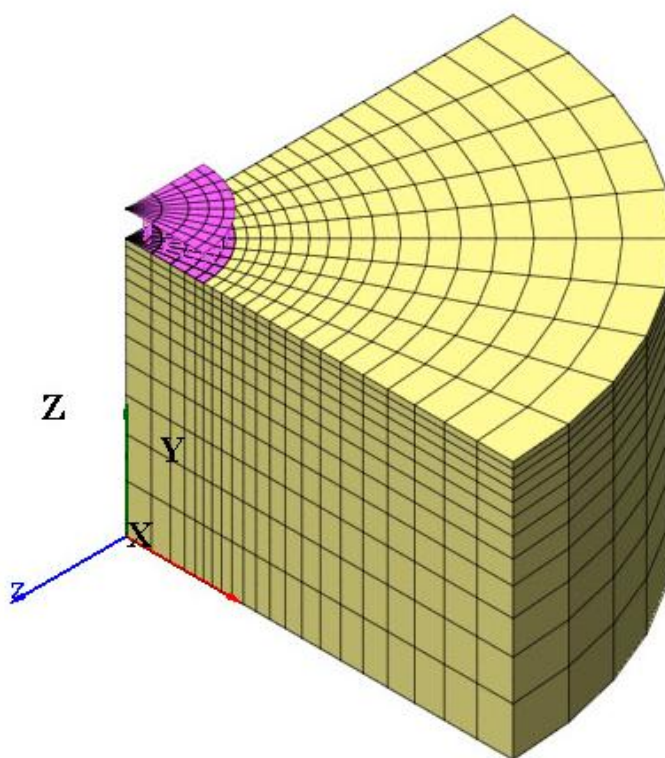


Рисунок 8.9 - Сетка КЭ 3D модели круглого фундамента (модель 4)

В трехмерной упруго-пластичной модели основания элементы, расположенные сразу под основанием (фундаментом), будут нагружаться в пластичном режиме. Т.к. применяется модель пластичности без упрочнения, эти элементы могут иметь произвольную деформацию при постоянном уровне напряжения. Это условие ведет к неустойчивому численному решению. Для стабилизации расчета нагрузка на основание прикладывается через интерфейсные элементы, с высокой жесткостью. К узлам на верхней поверхности элементов прикладывается вертикальное перемещение, при этом эти узлы могут свободно перемещаться в горизонтальной плоскости. Нижняя поверхность интерфейсных элементов связана с грунтовыми элементами.

**Исходные данные (модель 1)**

Тип расчета	Нелинейный расчет по 2D модели плоской деформации	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	20,0м
	Высота	10,0м
КЭ	8-ми узловый элемент плоской деформации	
Материал	Модуль упругости	E=257140 кПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,285714$
	Критерий текучести	Мора-Кулона
	Сцепление	$c=100$ кПа
	Угол внутреннего трения	$\varphi=0^\circ$
	Угол дилатансии	$\psi=0^\circ$
Граничные условия	Левая сторона и узлы фундамента	Ограничение по Dx
	Правая и нижняя границы	Ограничение по Dx, Dy
Нагрузки	Заданное перемещение -0,125м на узлы фундамента	

**Исходные данные (модель 2)**

Тип расчета	Нелинейный расчет по 3D модели	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	20,0м
	Высота	10,0м
	Глубина	0,2м
КЭ	20-ти узловый шестигранный объемный элемент	
Материал	Модуль упругости	E=257142,9 кПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,285714$
	Критерий текучести	Мора-Кулона
	Сцепление	$c=100$ кПа

	Угол внутреннего трения	$\varphi=0^\circ$
	Угол дилатансии	$\psi=0^\circ$
Граничные условия	Левая поверхность и узлы фундамента	Ограничение по Dx
	Правая и нижняя поверхности	Ограничение по Dx, Dz
	Узлы фронтальной и тыльной поверхности	Ограничение по Dy
Нагрузки	Заданное перемещение -0,125м на узлы фундамента	

**Исходные данные (модель 3)**

Тип расчета	Нелинейный расчет по 2D осесимметричной модели	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	15,0м
	Высота	10,0м
КЭ	8-ти узловой четырехгранный осесимметричный элемент	
Материал	Модуль упругости	$E=257140$ кПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,285714$
	Критерий текучести	Мора-Кулона
	Сцепление	$c=100$ кПа
	Угол внутреннего трения	$\varphi=20^\circ$
	Угол дилатансии	$\psi=0^\circ$
Граничные условия	Левая сторона	Ограничение по Dx
	Правая и нижняя границы	Ограничение по Dx, Dy
Нагрузки	Заданное перемещение -0,125м на узлы фундамента	

**Исходные данные (модель 4)**

Тип расчета	Нелинейный расчет по 3D модели	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	15,0м
	Высота	10,0м
КЭ	20-ти узловой шестигранный объемный элемент	
Материал	Модуль упругости	$E=257142,9$ кПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,285714$
	Критерий текучести	Мора-Кулона
	Сцепление	$c=100$ кПа
	Угол внутреннего трения	$\varphi=20^\circ$
	Угол дилатансии	$\psi=0^\circ$
Граничные условия	Левая поверхность	Ограничение по Dx
	Фронтальная поверхность	Ограничение по Dy
	Внешняя и нижняя поверхности	Ограничение по Dx, Dy, Dz
Нагрузки	Заданное перемещение -0,125м на узлы фундамента	

**Результаты***Задача ленточного фундамента.*

На рис.8.9-8.13 показаны результаты расчета модели в конце численных расчетов для задачи ленточного фундамента. Показанное поведение очень близко к поведению, ожидаемому на рис.8.1. На рис.8.11 и 8.13 показана история нагружения фундамента и несущая способность основания для 2-х и 3-х мерной ленточной модели, соответственно.

Следует отметить, что погрешность в несущей способности связана с неопределимостью кажущейся ширины фундамента. Механизм, показанный на рис.8.1, подразумевает особенность перемещения грунта на концах фундамента. В численном моделировании эта особенность распространена на всю ширину элемента. Явное положение скачка перемещения в пределах этого элемента зависит от точной геометрии развивающегося поля скоростей. При выведении  $q$



предполагается, что скачок возникает на ширине половины зоны от конца контролируемого сегмента.

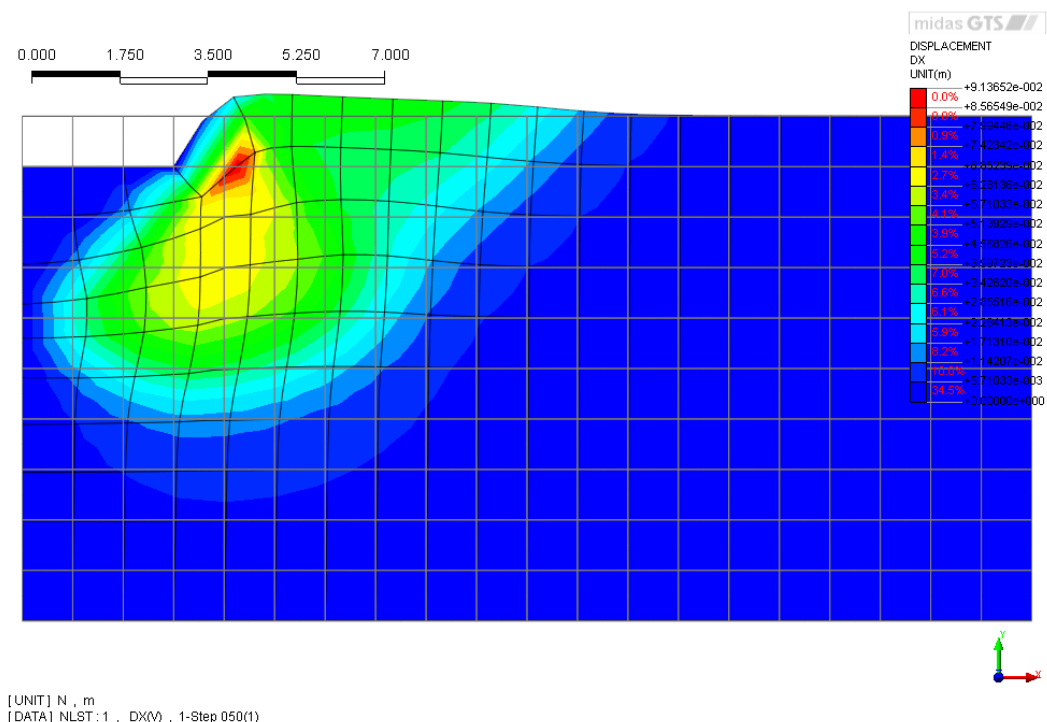


Рисунок 8.9 – Изополя перемещений грунта по оси X при разрушающей нагрузке для ленточного фундамента (модель 1)

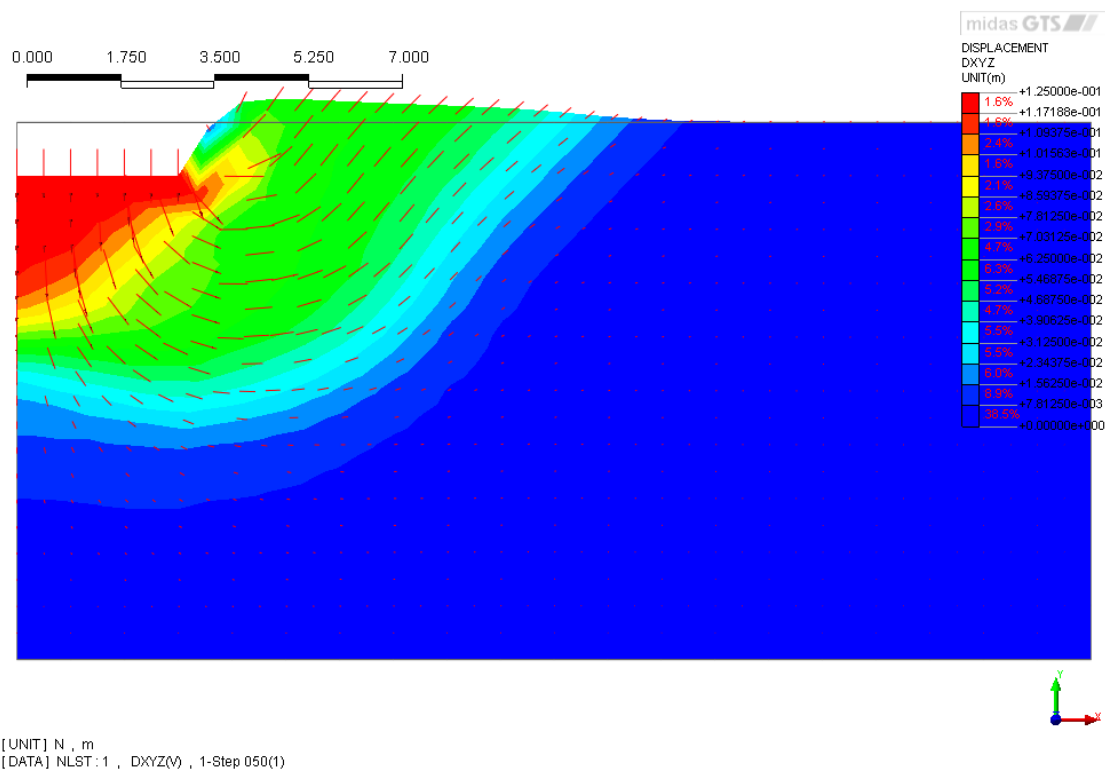


Рисунок 8.10 – Векторы перемещений под 2D ленточным фундаментом (модель 1)

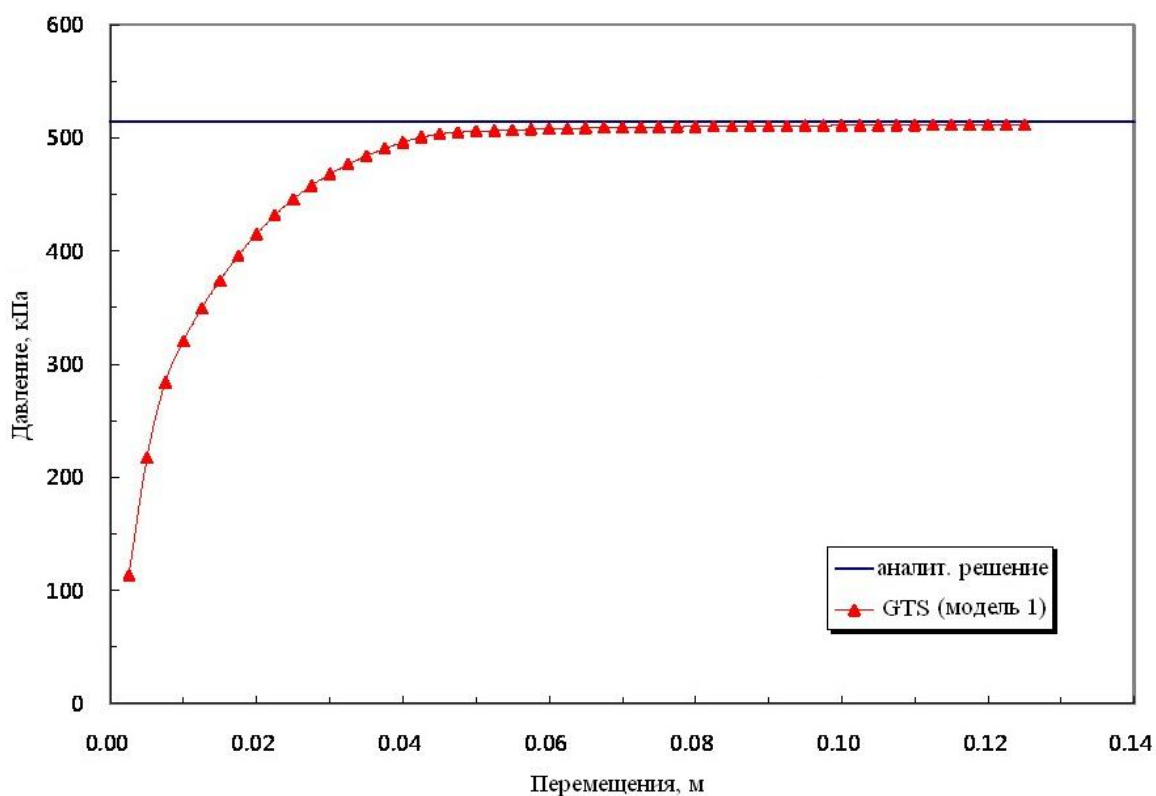


Рисунок 8.11 – История нагружения ленточного фундамента (модель 1)

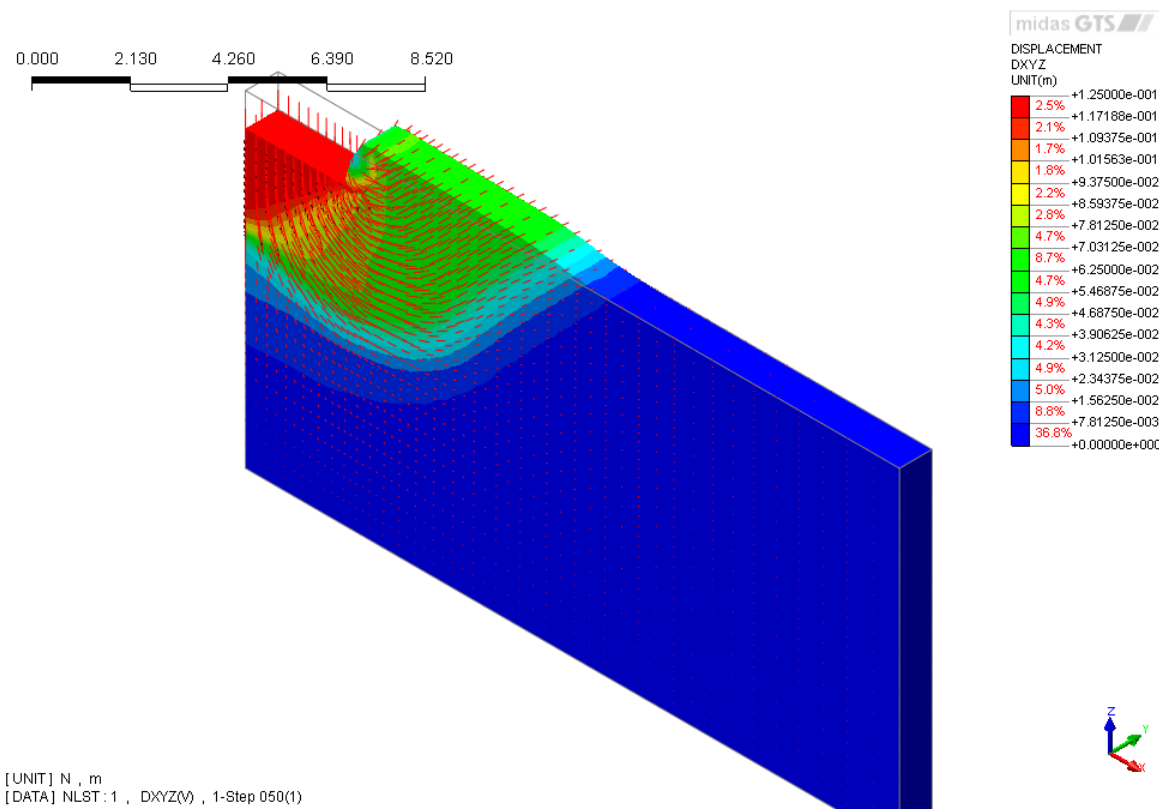


Рисунок 8.12 – Векторы перемещений под 3D ленточным фундаментом (модель 2)

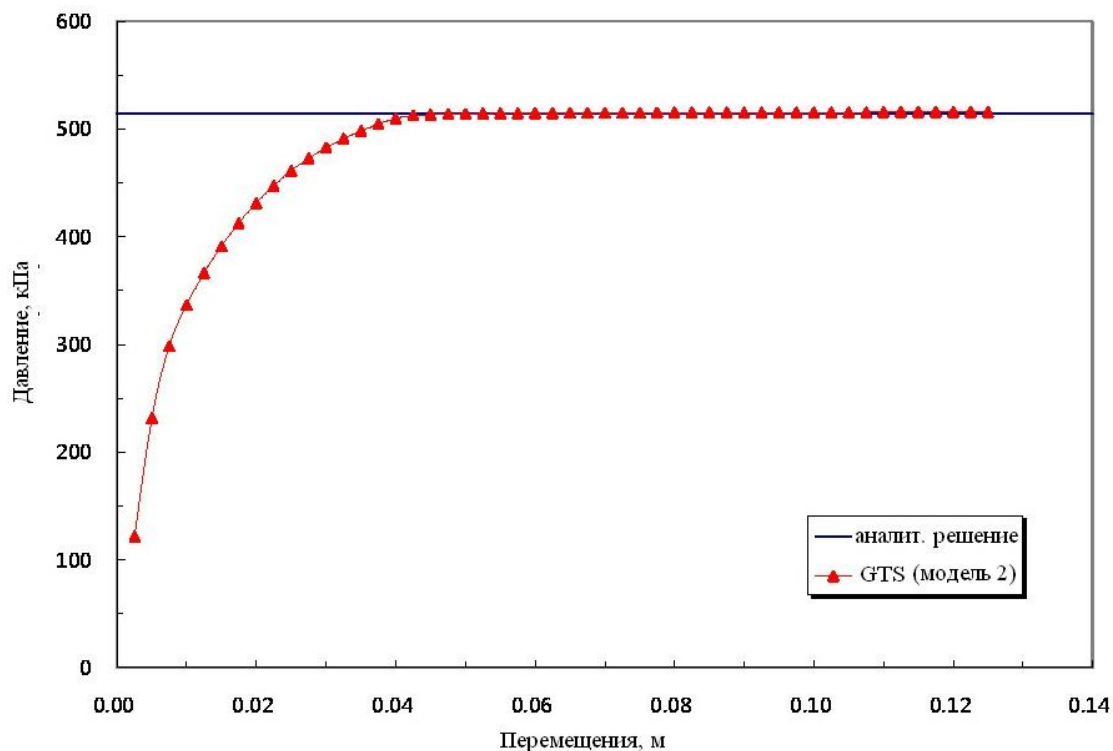


Рисунок 8.13 – История нагружения ленточного фундамента (модель 2)

*Задача круглого фундамента.*

На рис.8.14 показаны векторы перемещений грунта от нагрузки для задачи круглого фундамента. Давление на фундамент  $q$  определяется по следующему выражению:

$$q = \frac{2\pi \sum f_i^{(Y)}}{\pi R^2}$$

где  $f_i^{(Y)}$  - реактивная сила в  $\gamma$  - направлении в узле  $i$  фундамента;  $R$  - эффективный радиус фундамента.

Эффективный радиус фундамента – это радиус до точки в середине между последним узлом с заданным перемещением ( $x=3$  м) и примыкающим узлом ( $x=3,75$  м).

Изополя и векторы перемещений в конце расчетов представлены на рис.8.14 и 8.16 для 2-х и 3-х мерной круглой модели фундамента и показывают хорошее соответствие с механизмом на рис.8.2.

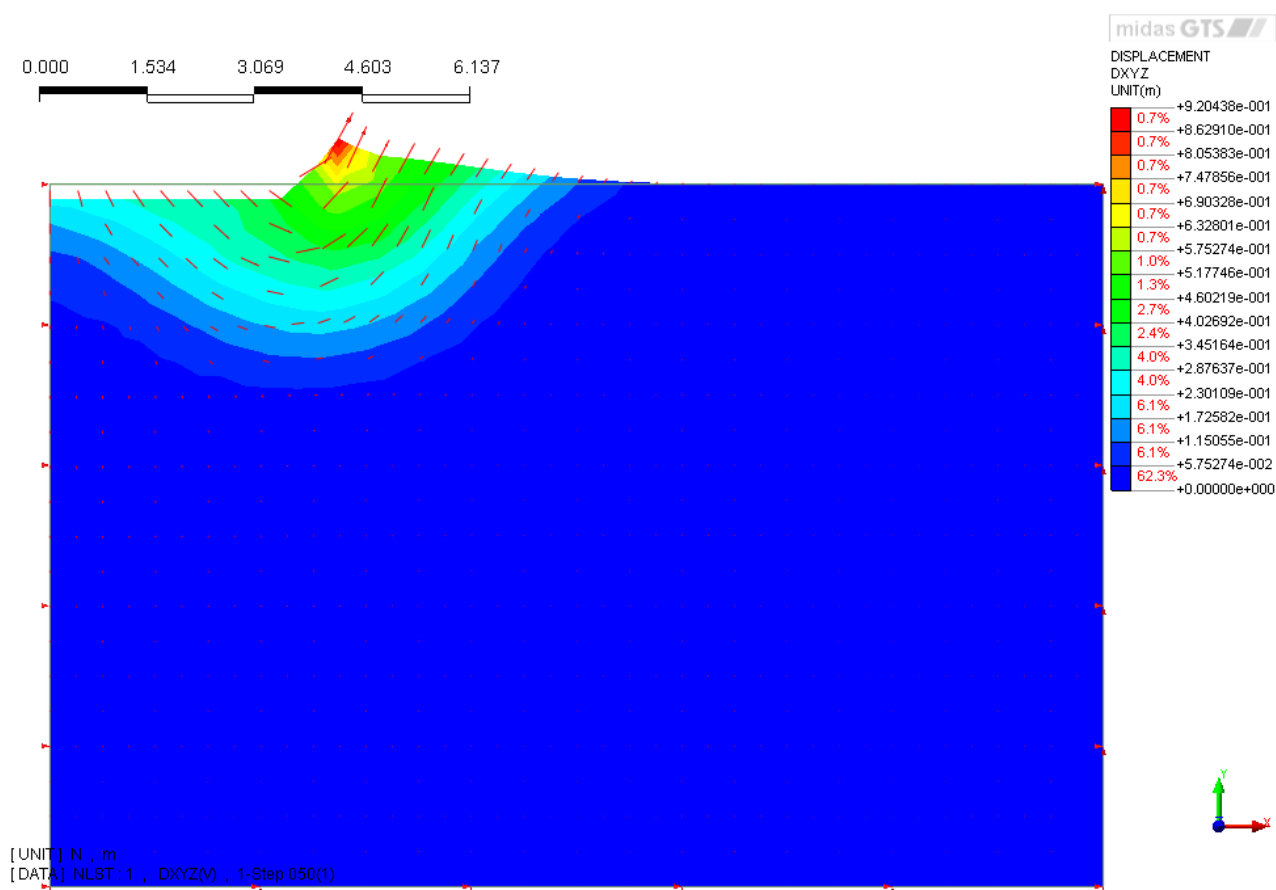


Рисунок 8.14 – Векторы перемещений под круглым фундаментом (модель 3)

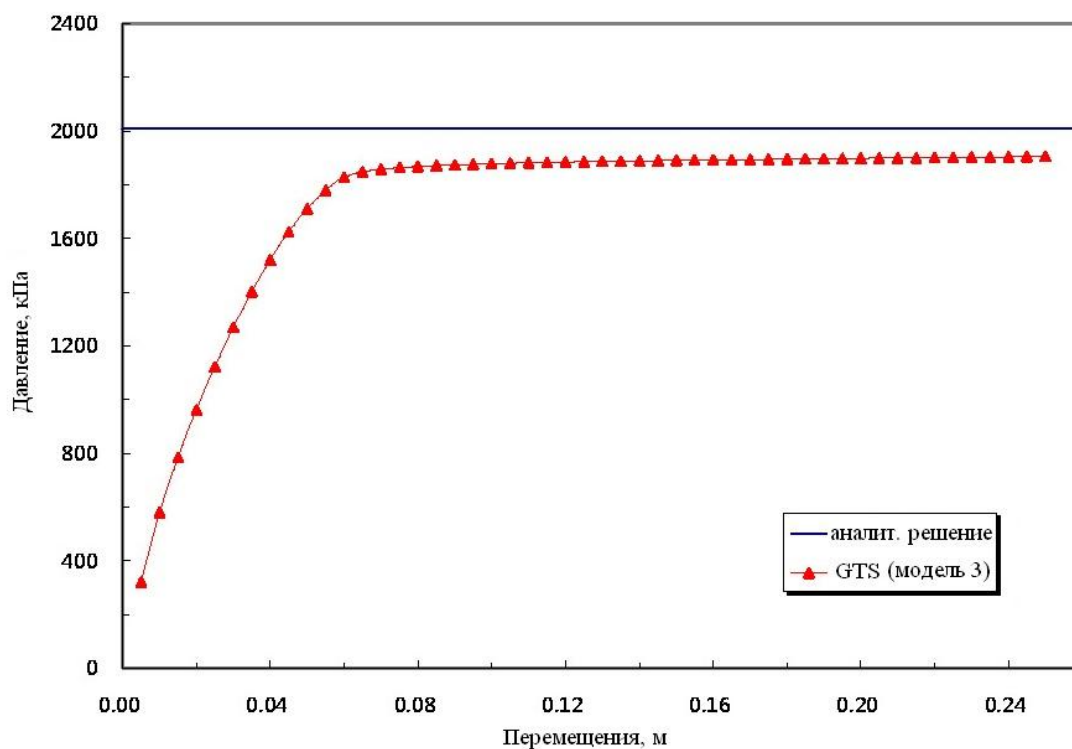


Рисунок 8.15 – История нагружения круглого фундамента (модель 3)

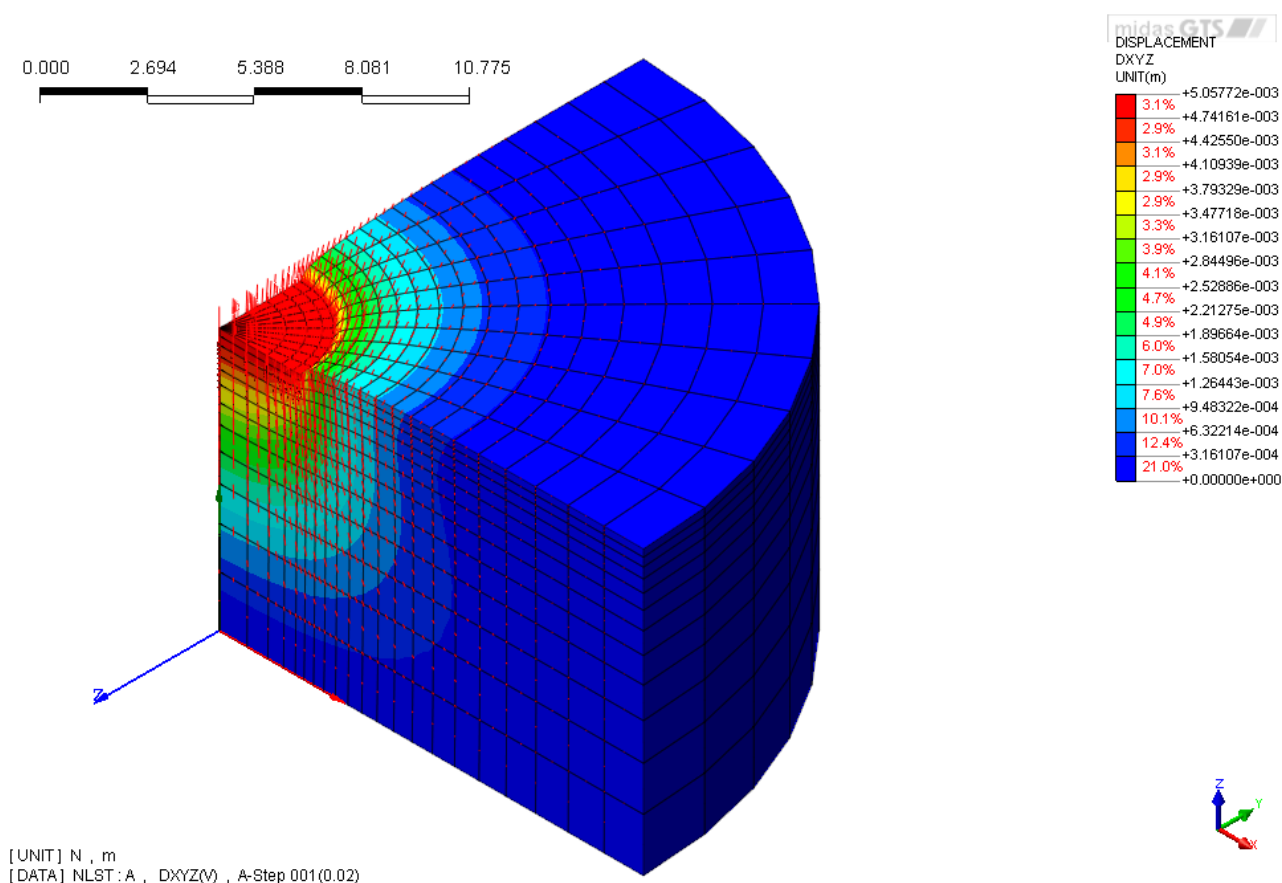


Рисунок 8.16 – Векторы перемещений под круглым фундаментом (модель 4)

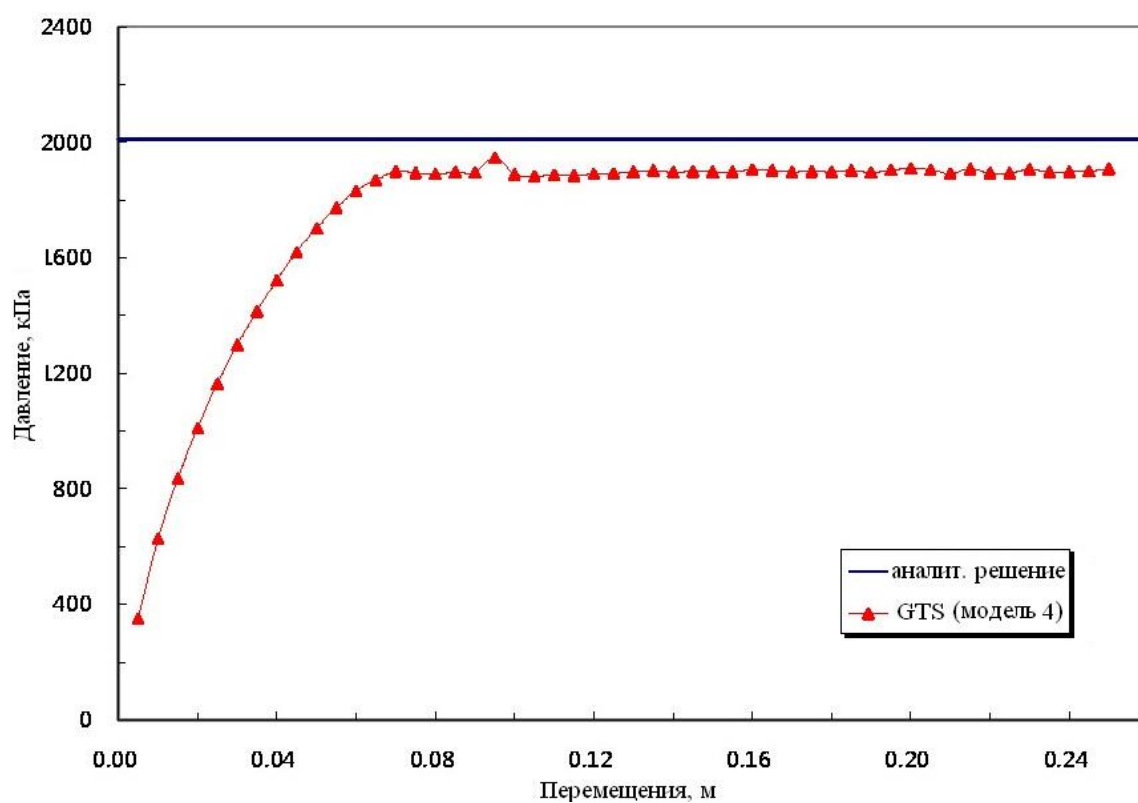


Рисунок 8.17 – История нагружения круглого фундамента (модель 4)

**Сравнение результатов****Несущая способность ленточного фундамента**

		Аналитическое решение	GTS	
			Значение	Погрешность (%)
Разрушающая нагрузка	Модель плоской деформации	514,20	511,62	0,50
	3D модель	514,20	515,81	0,31

**Несущая способность круглого фундамента**

		Аналитическое решение	GTS	
			Значение	Погрешность (%)
Разрушающая нагрузка	Осесимметричная модель	2010,0	1904,8	5,23
	3D модель	2010,0	1907,9	5,08

**Пример 9. Гладкий квадратный фундамент на упруго-пластическом основании (модель Мора-Кулона - для связного грунта при отсутствии трения)**

Источник	Chen, W. F., "Bearing Capacity of Square, Rectangular and Circular Footings," <i>Limit Analysis and Soil Plasticity, Developments in Geotechnical Engineering 7</i> , Ch. 7, pp. 295-340, New York: Elsevier Scientific Publishing Co., 1975. Shield, R. T., and Drucker, D. C., "The Application of Limit Analysis to Punch-Indentation Problems," <i>J. Appl. Mech.</i> , <b>20</b> , pp. 453-460, 1953.
Тип задачи:	Статический нелинейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	20-ти узловой гексаэдр

### Описание

Эта задача касается численного определения несущей способности гладкого прямоугольного фундамента на связном грунте, лишенного внутреннего трения (модель Треска). Фундамент шириной  $2a$  и  $2b$  расположен на упругопластичном материале Треска.

### Аналитическое решение

Задача действительно 3-х мерная и хотя нет точного решения, верхняя и нижняя границы для несущей способности  $q$ , определенные как среднее давление на фундамент при разрушении, были получены с использованием расчета по предельному состоянию. Верхняя граница,  $q_u$ , полученная с применением механизма разрушения Шилда и Друкера (1953), имеет форму:

$$q^u = c \left( 5.24 + 0.47 \frac{a}{b} \right) \quad \frac{a}{b} \geq 0.53$$

$$q^u = c \left( 5.14 + 0.66 \frac{a}{b} \right) \quad \frac{a}{b} < 0.53$$

где  $c$  – сцепление материала.

Нижняя граница  $q_1$ , которая соответствует несущей способности ленточного фундамента, имеет значение:

$$q^I = c(2 + \pi)$$

### GTS модель

В численных исследованиях фундамент - квадратный и представлен площадью с длиной равной половине ширины ( $b=a$ ). Преимущество отдано четвертной симметрии, а область модели – параллелепипед с размерами 15м x 15м x 10м (рис.10.1). Система осей координат выбирается с x-и y-осями в горизонтальной плоскости фундамента и z-осью в вертикальном направлении.

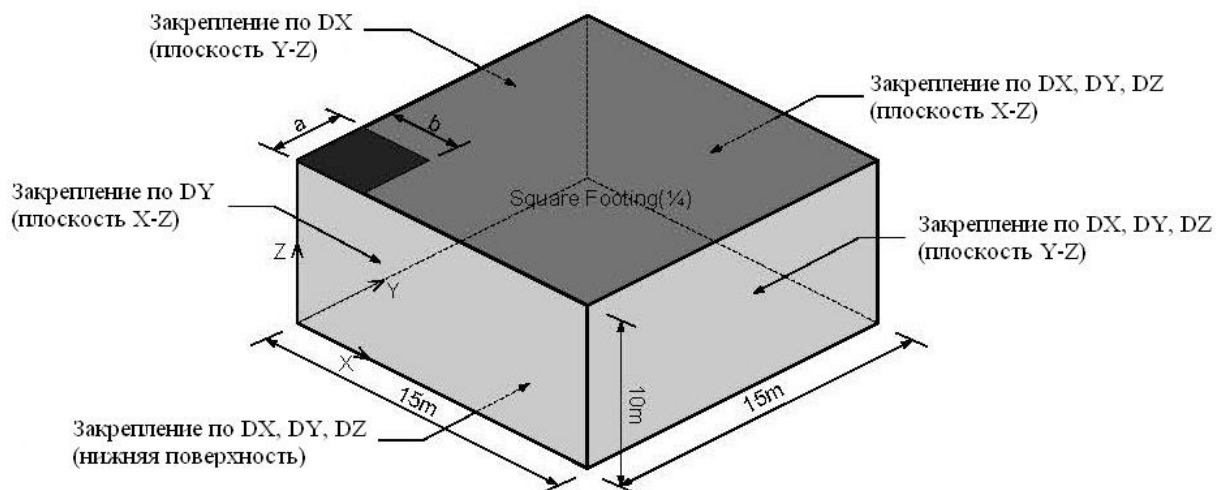


Рисунок 10.1 – Геометрические размеры и граничные условия 3D четверть-симметричной модели

Граничные условия для области фундамента показаны на рис.10.2.



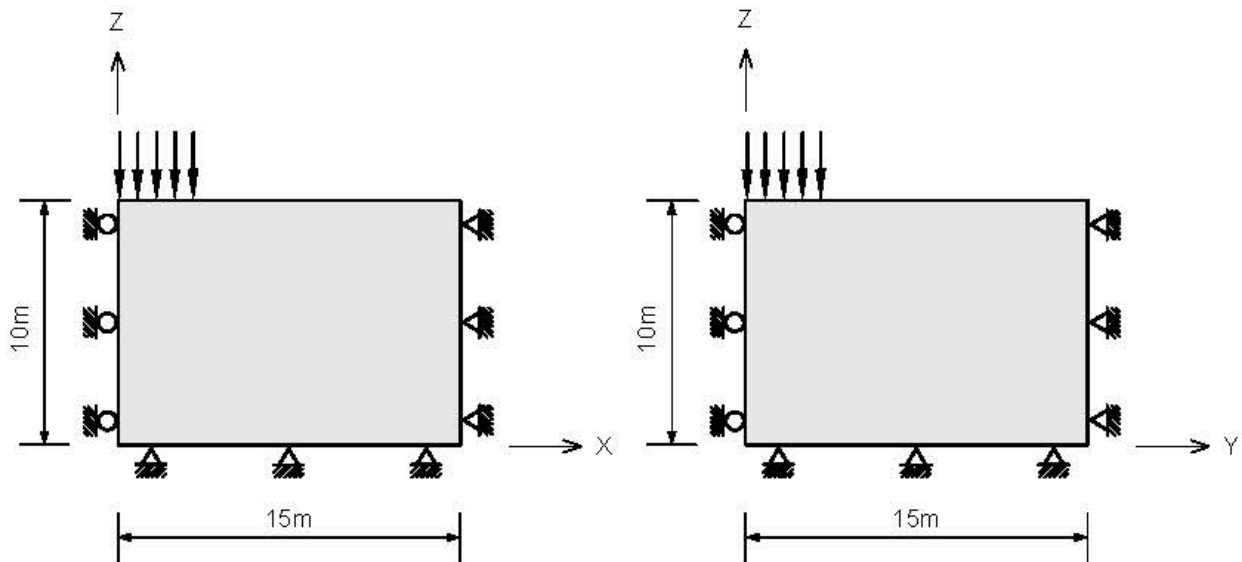


Рисунок 10.2 – Граничные условия для GTS расчетов по четверть-симметричной модели

Перемещения отдаленных от фундамента границ модели ограничены во всех направлениях (X, Y, Z), а перемещения границ симметрии, соответствующие плоскостям при  $x=0$  и  $y=0$ , ограничиваются в X и Y направлениях, соответственно.

Плита гладкая: перемещения свободны в x- и y-направлениях; а заданное перемещение прилагается в z-направлении к узлам в пределах площади 3м x 3м для моделирования нагрузки на фундамент. Модель представлена сеткой из КЭ с количеством 1000 элементов. Площадь, представляющая фундамент, охватывает площадь 3x3 элемента. Для прилагаемой нагрузки, вызывающей перемещение, предполагается, что несущая площадь удлиняется до половины расстояния между последним прилагаемым узлом и следующим узлом. Тогда в этой модели  $a=3,5$  м и  $b=3,5$  м.

Размеры элемента находятся за площадью фундамента согласно геометрической прогрессии с коэффициентом 1,2 в x-, y- и z-направлениях (рис.10.3). Заданное перемещение величиной 0,00125м приложено в узлах в пределах площади фундамента на каждом из 50 этапов расчета.

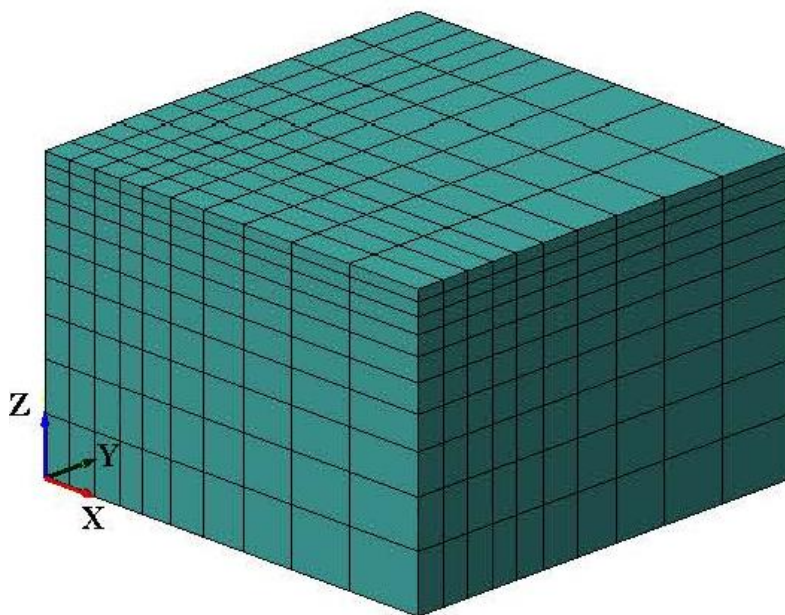


Рисунок 10.3 – Сетка КЭ для четверть-симметричной модели

**Исходные данные**

Тип расчета	Нелинейный расчет по 3D модели	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	20,0м
	Высота	10,0м
КЭ	20-ти узловой шестигранный объемный элемент	
Материал	Модуль упругости	$E=257142,9$ кПа
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,285714$
	Критерий текучести	Мора-Кулона
	Сцепление	$c=100$ кПа
	Угол внутреннего трения	$\varphi=0^\circ$
	Угол дилатансии	$\psi=0^\circ$
Граничные условия	Узлы левой поверхности	Ограничение по Dx
	Узлы фронтальной поверхности	Ограничение по Dy
	Узлы правой, тыльной и нижней поверхностей	Ограничение по Dx, Dy, Dz

Нагрузки	Заданное перемещение -0,0625м на узлы фундамента
----------	--

## Результаты

Кривая перемещения от давления, соответствующая численному моделированию, показана на рис.10.4, где результаты давления нормализуются путем деления на сцепление, с. Значение несущей способности согласно численному моделированию – 560 кПа. Эта величина находится между значением, полученным в аналитическом решении для верхней границы 571 кПа и значением для нижней границы 514 кПа. Изополя перемещений после 50-го этапа численных расчетов показано на рис.10.5.

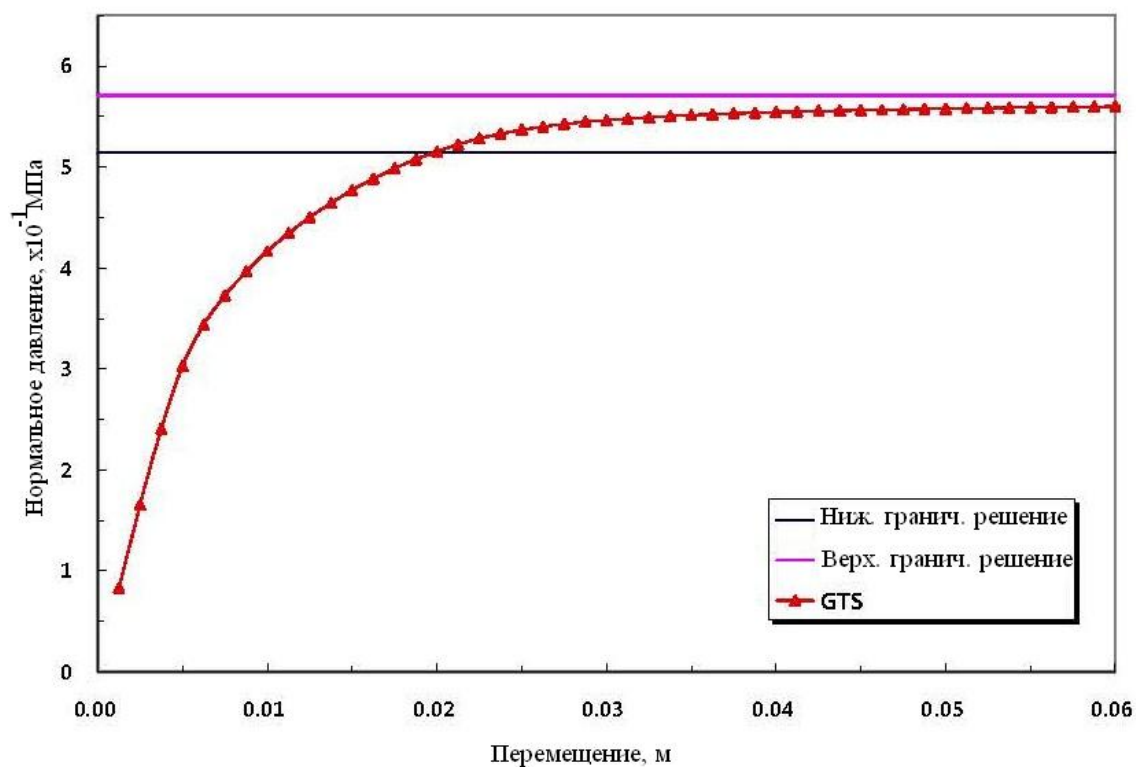


Рисунок 10.4 – Кривая «давление-перемещение (осадка)»

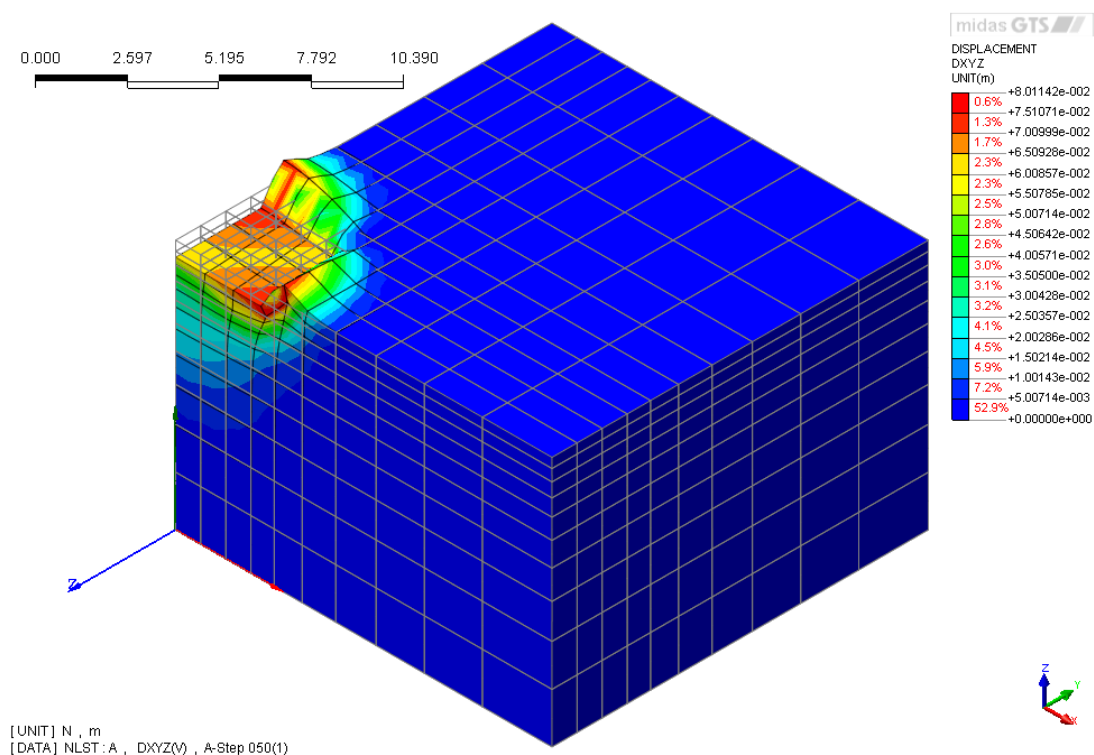


Рисунок 10.5 – Изополя общих перемещений

## Сравнение результатов

### Разрушающая нагрузка для квадратного фундамента

	Верхняя граница	Нижняя граница	GTS	
			Значение	Соответствие
Разрушающая нагрузка	571,0	514,2	560,3	O.K.

### Пример 10. Откопка с применением распорок

Источник	“ <i>PENTAGON-3D User Guide</i> ”, Emerald Soft.
Тип задачи:	Статический нелинейный поэтапный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	8-ми узловой гексаэдр, стержневой балочный изгибаемый элемент

## Описание

Этот простой пример иллюстрирует использование ферменного элемента для моделирования распорки.

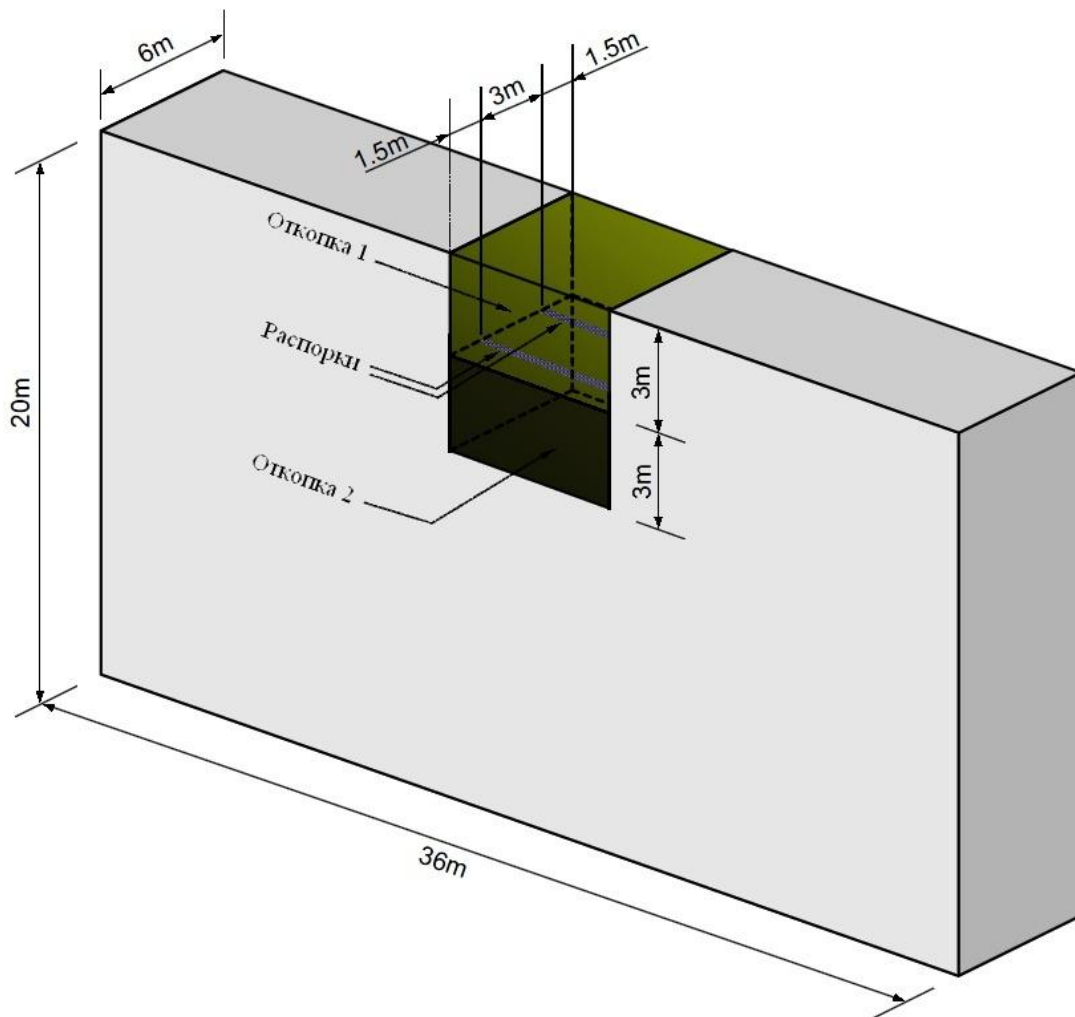


Рисунок 12.1 – Геометрические размеры модели

## Аналитическое решение

Аналитического решения не существует. Поэтому результаты сравниваются с расчетами в программе PENTAGON (3D расчеты). Сравниваются результаты расчета продольного усилия в распорке и горизонтальных перемещений левой стенки траншеи во время последовательной откопки.

## GTS модель

Первым этапом является выполнение расчета для установления начальных напряжений. При расчете методом конечных элементов откопка моделируется приложением усилий на поверхности откопки, что представляет напряжения, которые были в грунте до начала откопки. Чтобы узнать, какие усилия следует прилагать к поверхности откопки, необходимо знать общие напряжения в грунте до откопки. Это является причиной первого определения начальных напряжений. Это делается как отдельная стадия и результаты становятся начальным условием для части задачи – «откопка».

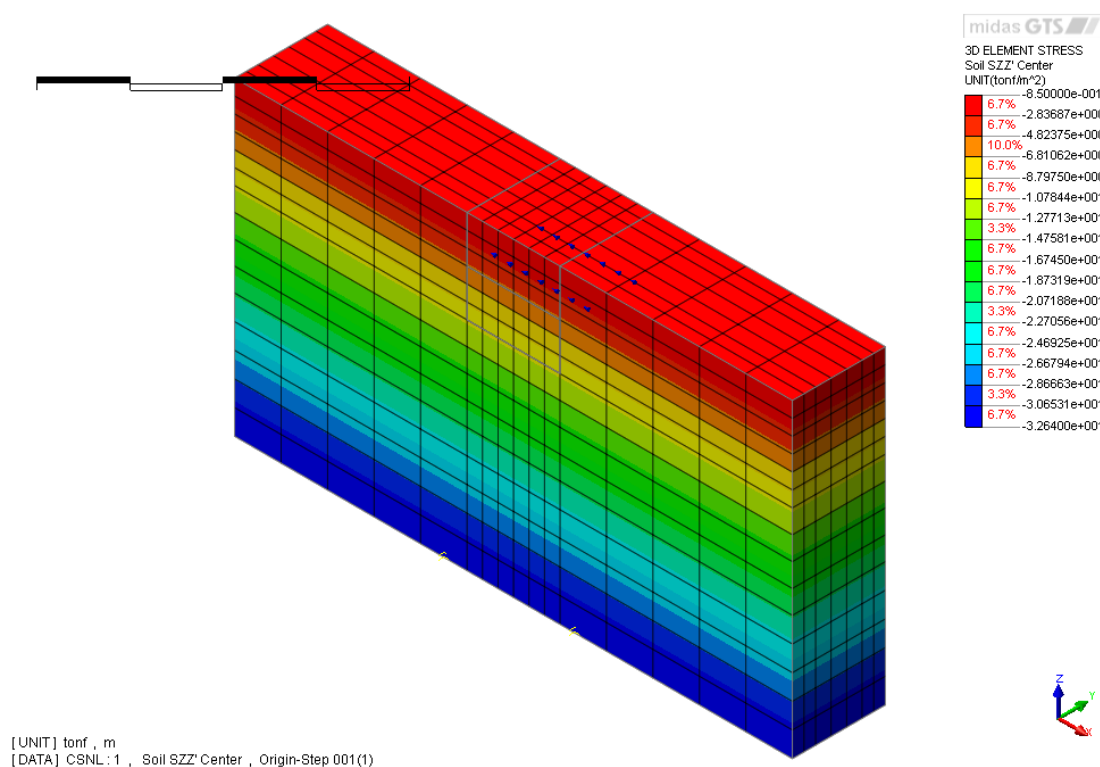


Рисунок 12.2 – Изополя общих начальных напряжений по оси Z

На рис.12.2 показано рассчитанное общее вертикальное напряжение для начальных условий. Также показана сетка конечных элементов, используемая в расчете.

Для этого простого примера выберем условные значения для свойств распорок. Модуль упругости составляет  $21\,000\,000\text{ т/м}^2$ , а площадь поперечного сечения –  $0,1665\text{ м}^2$ . Длина распорки 6м и в элементе нет контролируемого усилия натяжения преднапрягаемой арматуры. Поставлена задача откопки траншеи в 2 этапа, когда распорка становится активной на второй стадии.

### Исходные данные

Тип расчета	Упругий 3D поэтапный расчет	
Единицы измерений	м, Н	
Размеры	Ширина	36,0м
	Высота	20,0м
	Глубина	6,0
КЭ	8-ми узловой шестигранный объемный элемент, стержневой балочный изгибаемый элемент	
Материал	Модуль упругости	$E=7000\text{ т/м}^2$
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,3$
	Плотность	$\gamma=1,7\text{ т/м}^3$
	Сцепление	$c=5\text{ т/м}^2$
	Угол внутреннего трения	$\varphi=38^\circ$
	Угол дилатансии	$\psi=38^\circ$
	$K_0$	$K_0=0,5$
	Модуль упругости распорок	$E=21000000\text{ т/м}^2$
	Коэффициент Пуассона	$\nu=0,3$
	Плотность распорки	$\gamma=2,5\text{ т/м}^3$
	Площадь распорки	$A=0,1665\text{ м}^2$

	Сцепление	$c=5 \text{ т/м}^2$
Граничные условия	Узлы левой и правой поверхности	Ограничение по Dx
	Узлы фронтальной и тыльной поверхности	Ограничение по Dy
	Узлы нижней поверхности	Ограничение по Dz
Нагрузки	Нагрузка от собственного веса по оси Z	

## Результаты

На рис.12.3 показано горизонтальное перемещение левой стороны траншеи при последовательной откопке. Распорка становится активным на втором этапе и фактически ограничивает все дальнейшее горизонтальное перемещение.

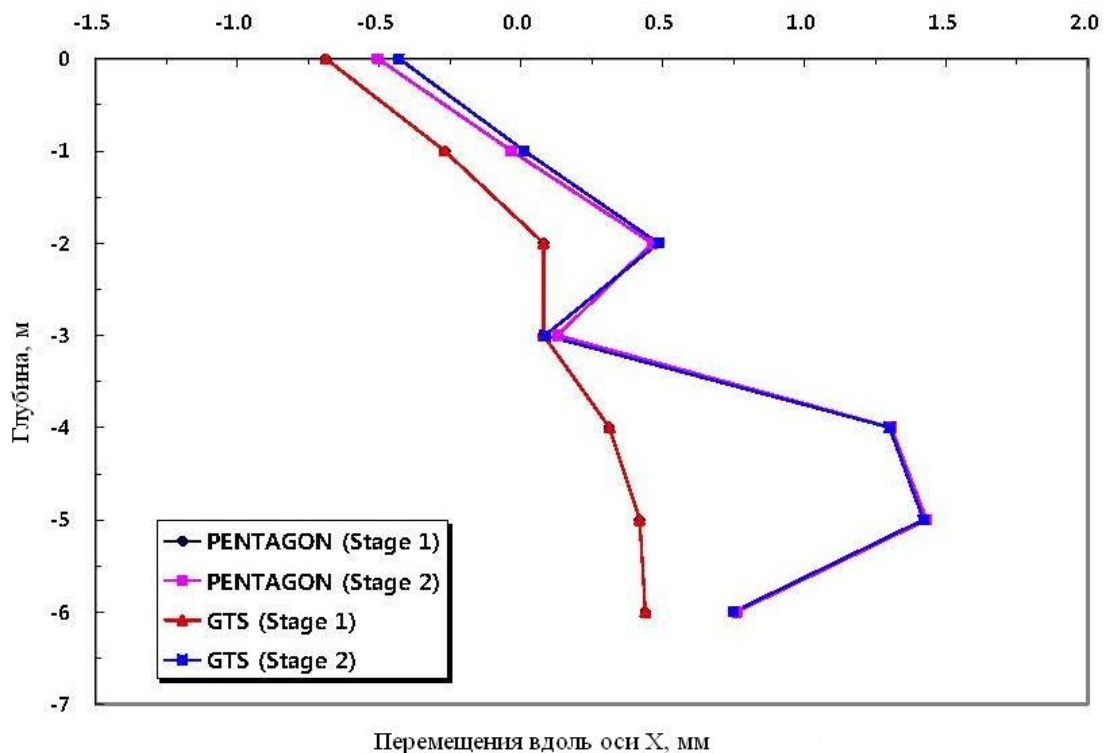


Рисунок 12.3 – График зависимости перемещения левой стороны траншеи вдоль оси X в зависимости от глубины откопки траншеи



## Сравнение результатов

### Продольное усилие в распорке на второй стадии откопок

	PENTAGON 3D	GTS	
		Значение	Погрешность (%)
Продольное усилие, тс	-6,45	-6,84	6,05