



Свидетельство саморегулируемых организаций:
НП «Объединение организаций в сфере проектирования
«Академический Проектный Центр (АПЦ)» от 27.04.2011
№ П-119-18012010-7743578813-0007-4

Утверждаю

Генеральный директор



 С.С.Кнюк

Согласовано

Научный руководитель
докт.техн.наук, проф.

 В.А.Ильичев

**ВЕРИФИКАЦИОННЫЙ ОТЧЕТ
ПО ПРОГРАММНОМУ КОМПЛЕКСУ MIDAS GTS**

ТОМ 3

**Задачи, предложенные экспертами,
и разработанные авторами отчета**

Заказчик: MIDAS Information Technology Co., Ltd. (MIT), Корея, г. Соннам

Москва 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Матрицы верификации.....	4
Пример 1. Статический расчет шарнирно опертой балки	10
Пример 2. Статический расчет пластины, опертой по 3-м сторонам	14
Пример 3. Статический расчет кольцевой пластины	27
Пример 4. Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде	33
Пример 5. Круглый фундамент на упругом полупространстве. Контактная задача.	39
Пример 6. Моделирование испытания на трехосное сжатие	50
Пример 7. Моделирование испытания на одноплоскостной срез	61
Пример 8. Определение активного и пассивного давления грунта на подпорную стенку	67
Пример 9. Расчет устойчивости насыпи	101
Пример 10. Расширение цилиндрической скважины в упруго-пластической среде	110
Пример 11. Пластическое нагружение толстостенного цилиндра.....	115
Пример 12. Статический расчет прямоугольной в плане фундаментной плиты	131
Пример 13. Статический расчет каркасно-монолитного здания на упруго- пластическом основании	140
Пример 14. Моделирование испытания сваи на вертикальную нагрузку	149
Пример 15. Комбинированный свайный фундамент при действии горизонтальной нагрузки	174
Пример 16. Пластическое нагружение балки прямоугольного сечения	184
Пример 17. Тест на большую вычислительную размерность	190

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий том содержит верификацию примеров, предложенных российскими экспертами и разработанные авторами отчетов.

Руководитель работы: акад. РААСН, докт.техн.наук, проф. В.А.Ильичев (РААСН)

Ответственный исполнитель: канд. техн. наук Ю.А. Готман (ООО «Подземпроект»)

Исполнитель: с.н.с. Р.Н. Магзумов (ГУП Институт "БашНИИстрой")

Экспертный состав:

1. докт. техн. наук, проф. Д.М.Шапиро (ВГАСУ, г. Воронеж).
2. канд. техн. наук В.Г.Федоровский (НИИОСП им. Герсевича, г. Москва)
3. канд. техн. наук М.И. Карабаев (ООО «МИГТ», г. Москва)

Матрицы верификации
MIDAS GTS

MIDAS GTS. Матрица верификации №1

№	Наименование теста	Тип проверки результатов	Конечные элементы	Оцениваемые параметры	Погрешность, %
1	Статический расчет шарнирно опертой балки	(1), (2)	Балочный изгибаемый элемент	Максимальное нормальное напряжение	0,066
				Перемещение	0,291
2	Статический расчет прямоугольной пластинки, три края которой защемлены, четвертый свободен	(1)	3-х и 6-ти узловой треугольный изгибаемый элемент (PLATE), 4-х и 8-ми узловой четырехугольный изгибаемый элемент (PLATE)	Изгибающий момент M_x	0,18-9,77
				Изгибающий момент M_y	1,58-10,71
				Реактивная сила V_x	4,18 - 15,08
				Реактивная сила V_y	9,19 - 13,07
				Перемещение	12,93 - 13,67
3	Статический расчет кольцевой пластины	(1)	4-х узловой четырехугольный изгибаемый элемент	Максимальный радиальный изгибающий момент M_r	0,67
				Максимальный тангенциальный изгибающий момент M_θ	4,25
				Перемещение (прогиб) на внутреннем контуре	0,85
4	Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде	(1)	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации	Касательное напряжение в зависимости от коэффициента Пуассона	1.38 - 12.7
5	Круглый фундамент на упругом полупространстве. Контактная задача.	(1)	4-х узловой тетраэдр, жесткие связи.	осадка	4.5-10.5
				напряжение под подошвой	2.8-5.7
			10-ти узловой тетраэдр, жесткие связи. жесткие связи.	осадка	2.6 - 4.9
				напряжение под подошвой	2.8-5.7
6	Моделирование испытания на трехосное сжатие	-	4-х и 10-ти узловой тетраэдр, 4-х и 8-ми узловой КЭ плоской деформации	Предельное вертикальное напряжение	0,1

7	Моделирование испытания на одноплоскостной срез	(1)	4-х узловой тетраэдр, жесткие связи	Сдвиговое усилие	4,3
8	Определение активного и пассивного давления грунта на подпорную стенку	(1)	8-ми узловой КЭ плоской деформации	Активное давление	8.7-3.8
				Пассивное давление	0.1-12.9
9	Расчет устойчивости насыпи на слабом основании	(4)	3-х и 6-ти узловые треугольные элементы плоской деформации, 4-х и 8-ми узловые четырехугольные элементы плоской деформации	Предельная высота отвала	11,1-27,8
10	Расширение цилиндрической скважины в упруго-пластической среде	(1)	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации	Приведенное перемещение стенки скважины	12,35
11	Пластическое нагружение толстостенного цилиндра	(1), (3)	4-х и 8-ми узловой четырехугольный осесимметричный элемент, 8-ми и 20-ти узловой гексаэдр	Упругое радиальное σ напряжение	0,02 - 61,34
				Упругое тангенциальное (кольцевое) σ напряжение	0,02 - 4,97
				Наибольшее касательное напряжение по теории прочности Треска τ_{max}	0,00 - 6,38
12	Статический расчет прямоугольной в плане фундаментной плиты	(2)	6-ти узловой треугольный пластинчатый элемент плоской деформации, 10-ти узловой тетраэдр	Максимальный изгибающий момент M	35,33 / 26,21
				Максимальное перемещение U	2,6 / 0,15
13	Статический расчет каркасно-монолитного здания на упруго-пластическом основании	(2)	8-ми узловой октаэдр, 4-х узловой пластинчатый элемент, стержневой балочный элемент	Максимальный изгибающий момент вдоль плиты	2,7
				Максимальный изгибающий момент поперек плиты M _y	4,4

				кН·м/м	
				Максимальное перемещение U	1,2
				δU	14
14	Моделирование испытания сваи на вертикальную нагрузку	(4)	4-х узловой тетраэдр, 10-ми узловой гексаэдр, 4-х угольный интерфейсный элемент, стержневой балочный элемент, специальный интерфейсный элемент сваи (pile element)	График "нагрузка-осадка"	-
		(2)	Осесимметричный 3-х узловой элемент, интерфейсный 2-х узлой одномерный элемент.	График "нагрузка-осадка"	-
15	Комбинированный свайный фундамент при действии горизонтальной нагрузки	(4)	10-ти узловой тетраэдр, стержневой, балочный элемент, специальный свайный интерфейсный элемент	График "нагрузка-осадка"	-
				Максимальный изгибающий момент в свае	40 - 2.7
16	Пластическое нагружение балки прямоугольного сечения	(1)	8-ми узловой четырехугольный элемент плоской деформации	Длина зоны пластических деформаций	3,23

- (1) - сравнение с аналитическим решением
(2) - сравнение с альтернативными ПС
(3) - в примере анализируется сходимость решения в зависимости от размера сетки
(4) - данные из литературных источников

MIDAS GTS. Типы верифицированных конечных элементов

	3-х узловой треугольный элемент плоской деформации	6-ти узловой треугольный элемент плоской деформации	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации	8-ми узловой четырехугольный элемент плоской деформации	3-х узловой треугольный изгибаемый элемент (PLATE)	6-ти узловой треугольный изгибаемый элемент (PLATE)	4-х узловой четырехугольный изгибаемый элемент (PLATE)	8-ми узловой четырехугольный изгибаемый элемент (PLATE)	3-х узловой треугольный осесимметричный элемент	6-ти узловой треугольный осесимметричный элемент	4-х узловой четырехугольный осесимметричный элемент	8-ми узловой четырехугольный осесимметричный элемент	4-х узловой тетраэдр
Линейная статика			3		2	2	2, 3	2					5
Нелинейная статика	9	9	9, 12, 6	9, 16, 6, 8		12	13		14		11	11	6,7, 14
Расчеты на устойчивость	9	9	9	9									

	10-ти узловой тетраэдр	Жесткие связи	Односторонние связи	8-ми узловой гексаэдр	20-ти узловой гексаэдр	Балочный изгибаемый стержневой элемент	Свайный элемент (PILE)	Интерфейсный элемент (1D)	Интерфейсный элемент (2D)
Линейная статика	5	5				1			
Нелинейная статика	6, 15,12	7	8	11,13,14	11	13,14	14,15	14	14,15
Расчеты на устойчивость									

Пример 1. Статический расчет шарнирно опертой балки

Источник	S. Timoshenko, Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, 3rd Edition, D. Van Nostrand Co., Inc., New York, NY, 1955, pg. 98, problem 4
Тип задачи:	Статический расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	Балочный изгибаемый элемент

Описание

Балка с поперечным сечением A , шарнирно опята и находится под действием равномерно распределенной нагрузки w , как показано на рис.1.1. Требуется определить максимальные нормальные напряжения σ и перемещение δ в середине пролета балки.

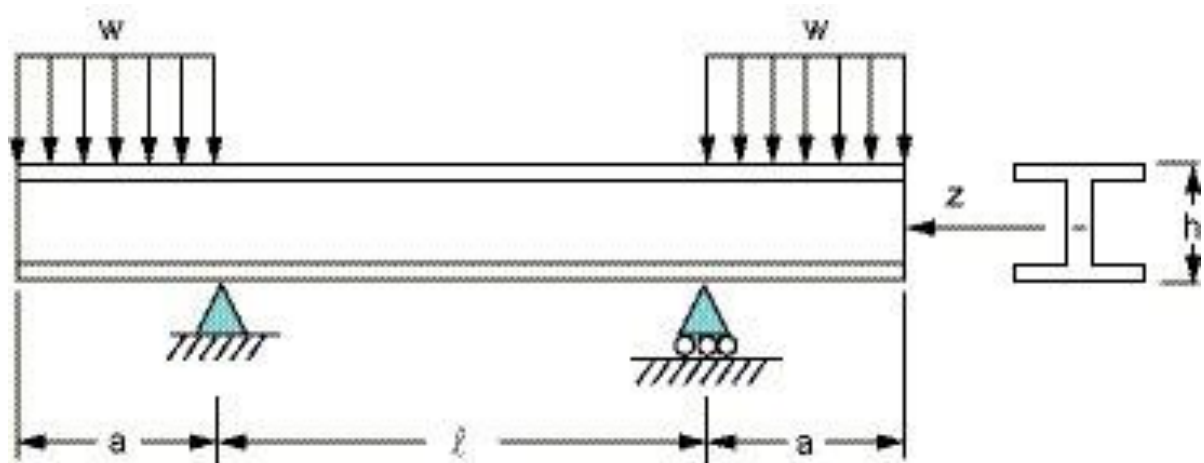


Иллюстрация задачи



Расчетная схема

Рисунок 1.1 – Расчетная схема балки

GTSмодель

Для решения данной задачи применялся 1 тип КЭ – стреловой изгибаемый балочный элемент.

Ось КЭ-модели балки располагается вдоль оси X глобальной декартовой системы. Элементы имеют локальную систему координат, ось x' которой ориентирована вдоль оси элемента, ось y' располагается в плоскости X-Y, ортогонально оси x' .

Проводится линейный статический расчет мультифронтальным решателем.

Исходные данные представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 Исходные данные

Длина пролета l	6,096 м
Длина консольной части a	3,048 м
Высота поперечного сечения h	0,762 м
Площадь поперечного сечения A	0,03268 м ²
Момент инерции поперечного сечения I_z	3285,28×10 ⁻⁶ м ⁴
Граничные условия	при $x = 3,048$ м $U_x = 0; U_y = 0$ при $x = 9,144$ м $U_y = 0$
Модель и физические характеристики балки	Линейно упругая: $E = 2,109 \times 10^7$ тс/м ² , $\nu = 0,3$
Нагрузка	$w = 14,888$ тс/м (приложена к консольным частям)
Тип КЭ	Балочный изгибаемый элемент
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель

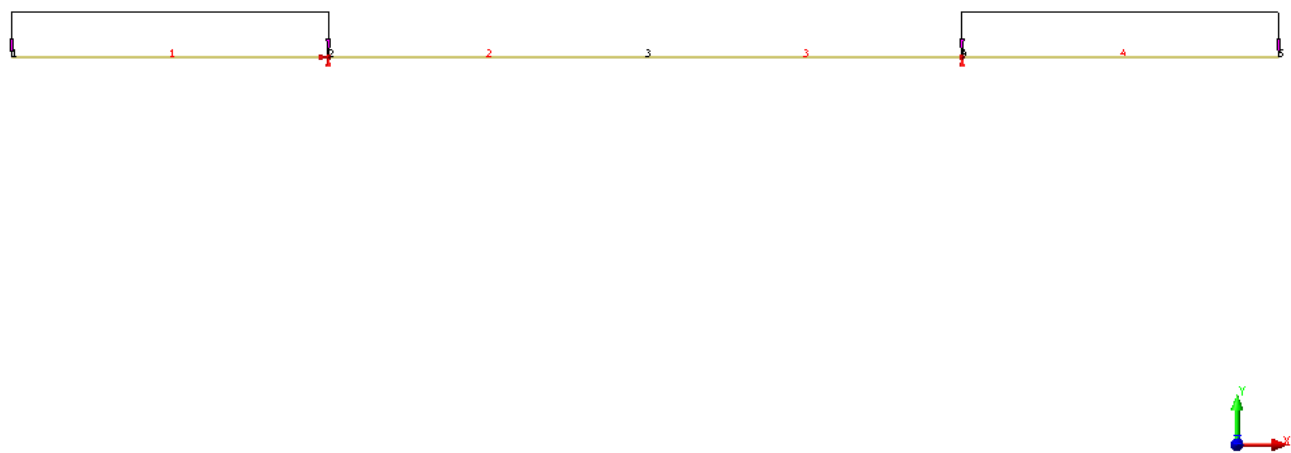


Рисунок 1.2 - КЭ-модель балки с указанием закреплений и нумерацией узлов и элементов

Результаты расчёта

Результатами расчёта являются эпюра нормальных напряжений в сечении балки при изгибе и эпюра перемещений.

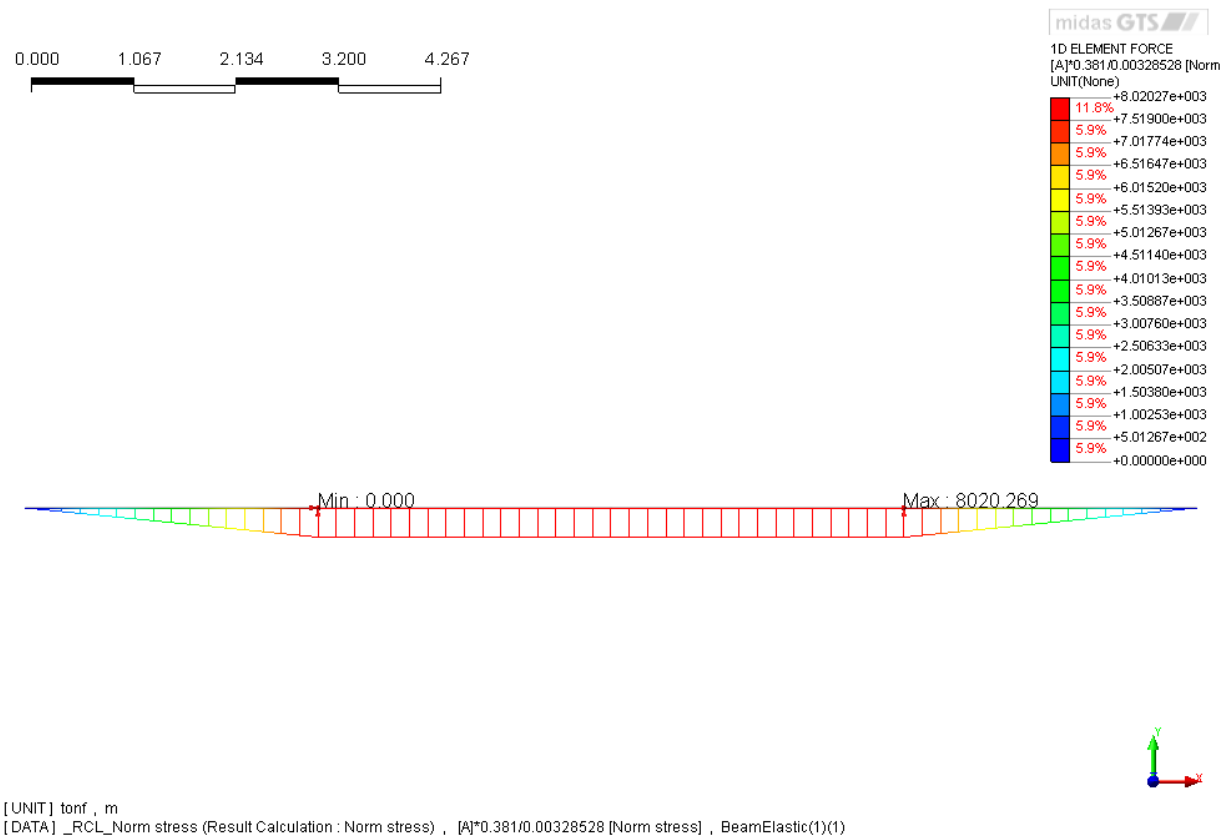


Рисунок 1.3 –Эпюра нормальных сжимающих напряжений в балке (тс/м²)

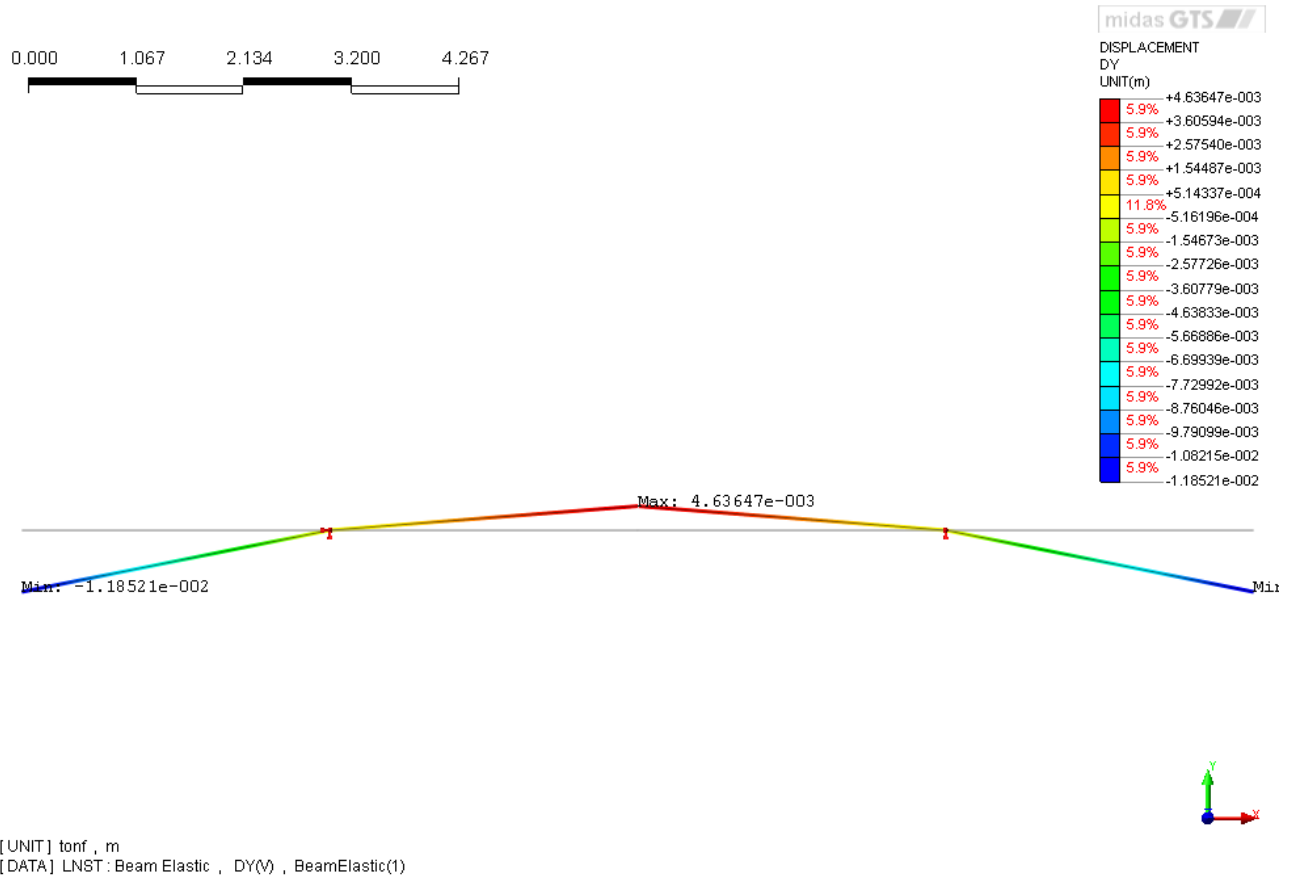


Рисунок 1.4 – Эпюра перемещений балки U_y (м)

Таблица 1.1 Сопоставление результатов расчета

	Источник	ANSYS	MIDAS GTS	Погрешность δ , %
Максимальное нормальное напряжение S_{\max} , тс/м ²	-8015,000	-8020,268	-8020,269	0,066
Перемещение U_y , мм	4,623	4,636	4,636	0,291

Примечание: погрешность расчетов в MIDASGTS определена относительно значений по [источнику].

Пример 2. Статический расчет прямоугольной пластинки, три края которой зашклены, четвертый свободен

Источник	S. Timoshenko, Theory of plates and shells, McGRAW-HILL BGGK Co., Inc., New York, NY, Toronto, London, 1959, pg. 240
Тип задачи:	Статический линейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	3-х и 6-ти узловой треугольный изгибаемый элемент (PLATE), 4-х и 8-ми узловой четырехугольный изгибаемый элемент (PLATE)

Описание

Прямоугольная пластинка с размерами $a \times b$ жестко зашклена с трех сторон и имеет одну свободную сторону. Платинка нагружена равномерно распределенной нагрузкой q , как показано на рисунке 2.1. Требуется определить изгибающие моменты M и перемещение δ для точек с координатами $x=0, y=b$; $x=0, y=b/2$; $x=a/2, y=b$; $x=a/2, y=b/2$; $x=0, y=0$, приняв соотношение $b/a=1$.

Аналитическое решение получено в случае предположения малых прогибов согласно дифференциальному уравнению изогнутой поверхности следующего вида

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}.$$

Точное решение данного дифференциального уравнения в частных производных с заданными краевыми условиями для рассматриваемого примера получить невозможно. Приближенное решение дано в табличном виде в табл. 44 [источника] в зависимости от соотношения b/a и приводится далее для принятого соотношения $b/a=1$ и $\nu=1/6$.

b/a	x=0, y=0		x=0, y=b/2		
	$w = \alpha_1 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_1 qa^2$	$w = \alpha_2 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_2 qa^2$	$M_y = \beta_2' qa^2$
	α_1	β_1	α_2	β_2	β_2'
1,0	0,00333	0,0444	0,0023	0,0317	0,0138

b/a	x=a/2, y=b		x=a/2, y=b/2		x=a/2, y=b/2	
	$M_x = \beta_3 qa^2$	$V_x = \gamma_3 qa$	$M_x = \beta_4 qa^2$	$V_x = \gamma_4 qa$	$M_y = \beta_5 qa^2$	$V_y = \gamma_5 qa$
	β_3	γ_3	β_4	γ_3	β_5	γ_5
1,0	-0,0853	0,628	-0,0614	0,435	-0,051	0,401

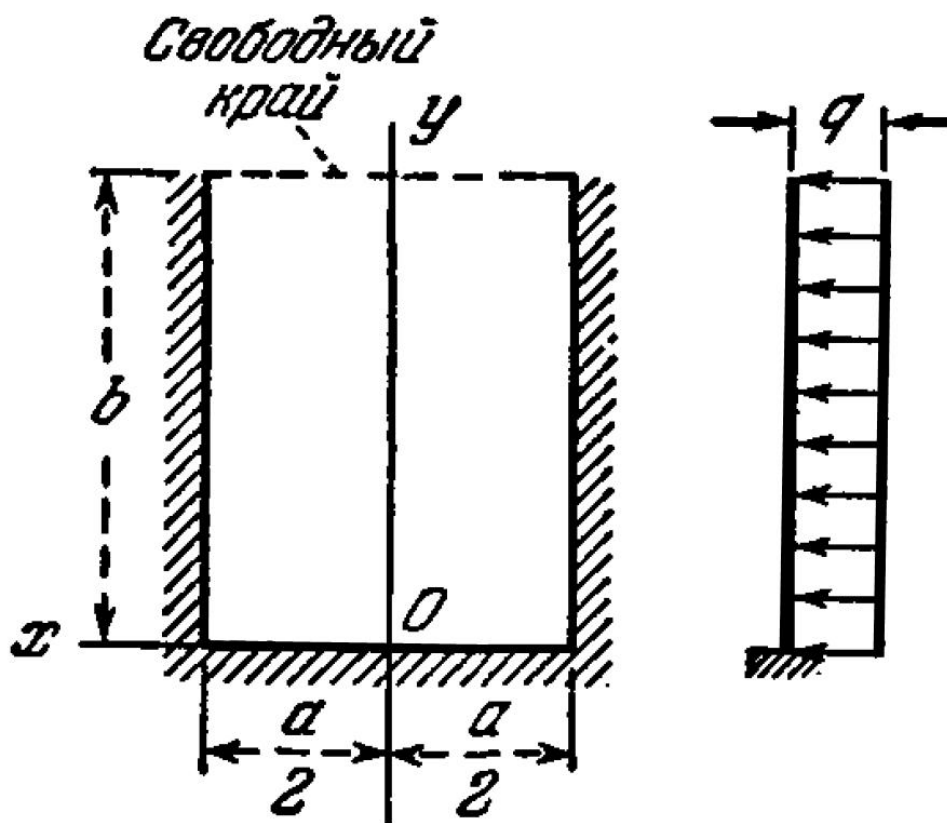


Рисунок 2.1 – Расчетная схема пластинки

Предмет верификации

В настоящей задаче оценивается работа различных изгибаемых КЭ типа PLATE при равномерно распределенном нагружении. Определяются численные

значения изгибающих моментов M и перемещений δ , которые сравниваются со значениями, полученными аналитическим способом.

GTSмодель

Для решения задачи применялись 4 типа КЭ типа PLATE (изгибаемая пластина) и, соответственно, создано 4 расчетных модели для каждого типа КЭ:

- модель 1: 3-х узловой треугольный изгибаемый элемент;
- модель 2: 6-ти узловой треугольный изгибаемый элемент;
- модель 3: 4-х узловой четырехугольный изгибаемый элемент;
- модель 4: 8-ми узловой четырехугольный изгибаемый элемент.

Исходные данные представлены в таблице 2.1

Таблица 2.1 Исходные данные

Геометрические размеры пластинки	10м x 10м x 0,6м ($axb \times h$)
Граничные условия	Левая и правая грани – ограничение деформаций по X, Y, угла поворота по Y Нижняя грань – ограничение деформаций по X, Y, угла поворота по X
Модель и физические характеристики пластинки	Линейно упругая: $E=3,06 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2$, $\nu=1/6$
Нагрузка	$q=400 \text{ кН/м}^2$
Тип КЭ	3-х и 6-ти узловой треугольный изгибаемый элемент, 4-х и 8-ми узловой четырехугольный изгибаемый элемент
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель

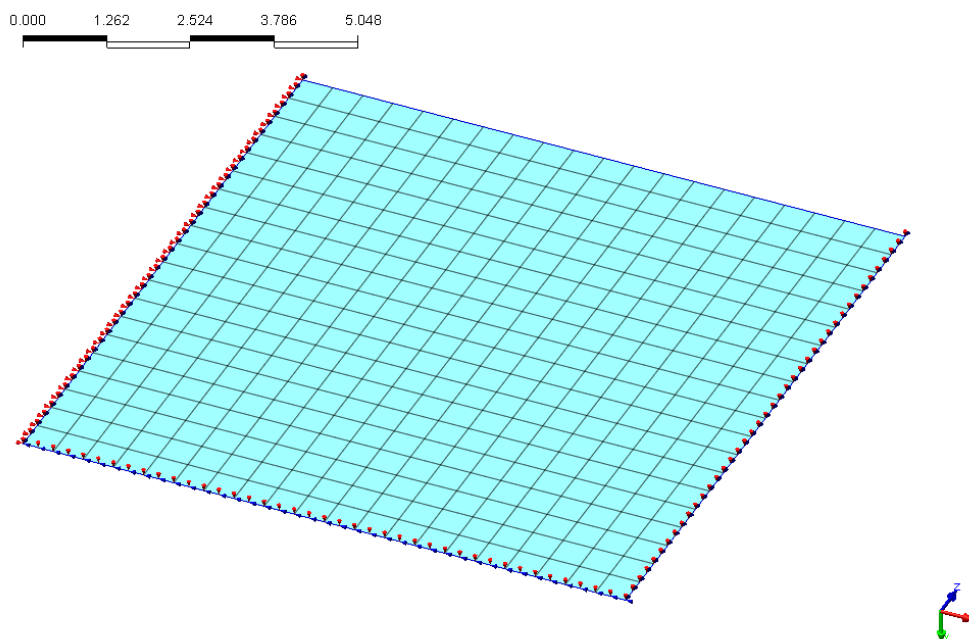


Рисунок 2.2 - КЭ-модель пластинки и граничные условия при использовании 4-х и 8-ми узловых четырехугольных КЭ– модели 3, 4
(400 элементов 441 узлов – модель 3,
400 элементов 1281 узлов – модель 4)

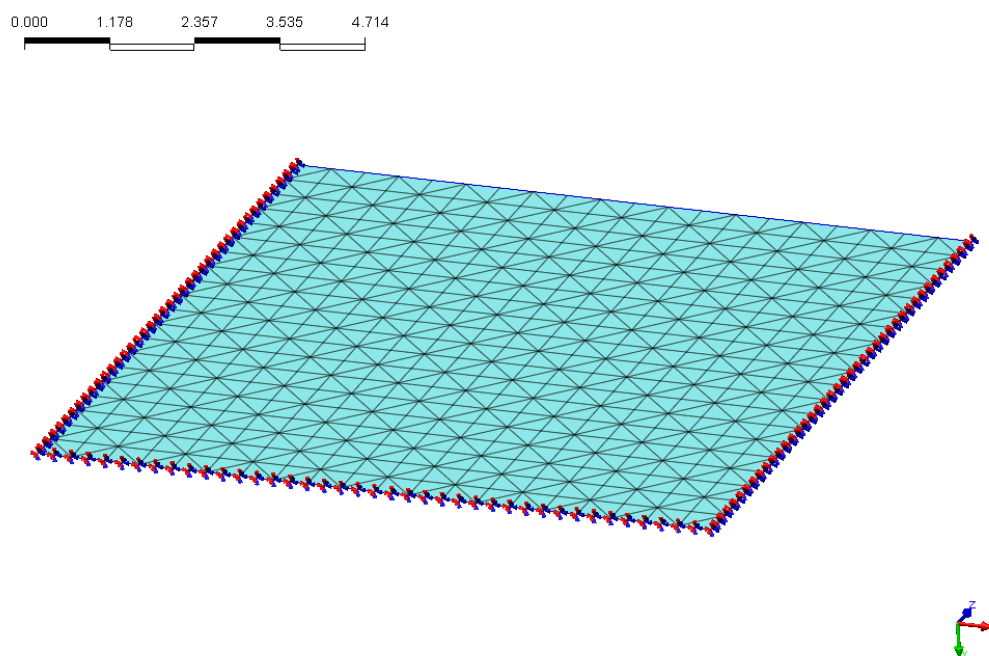


Рисунок 2.3 - КЭ-модель пластинки и граничные условия при использовании 3-х и 6-ти узловых треугольных КЭ– модели 1, 2
(800 элементов 441 узлов – модель 1,
800 элементов 1681 узлов – модель 2)

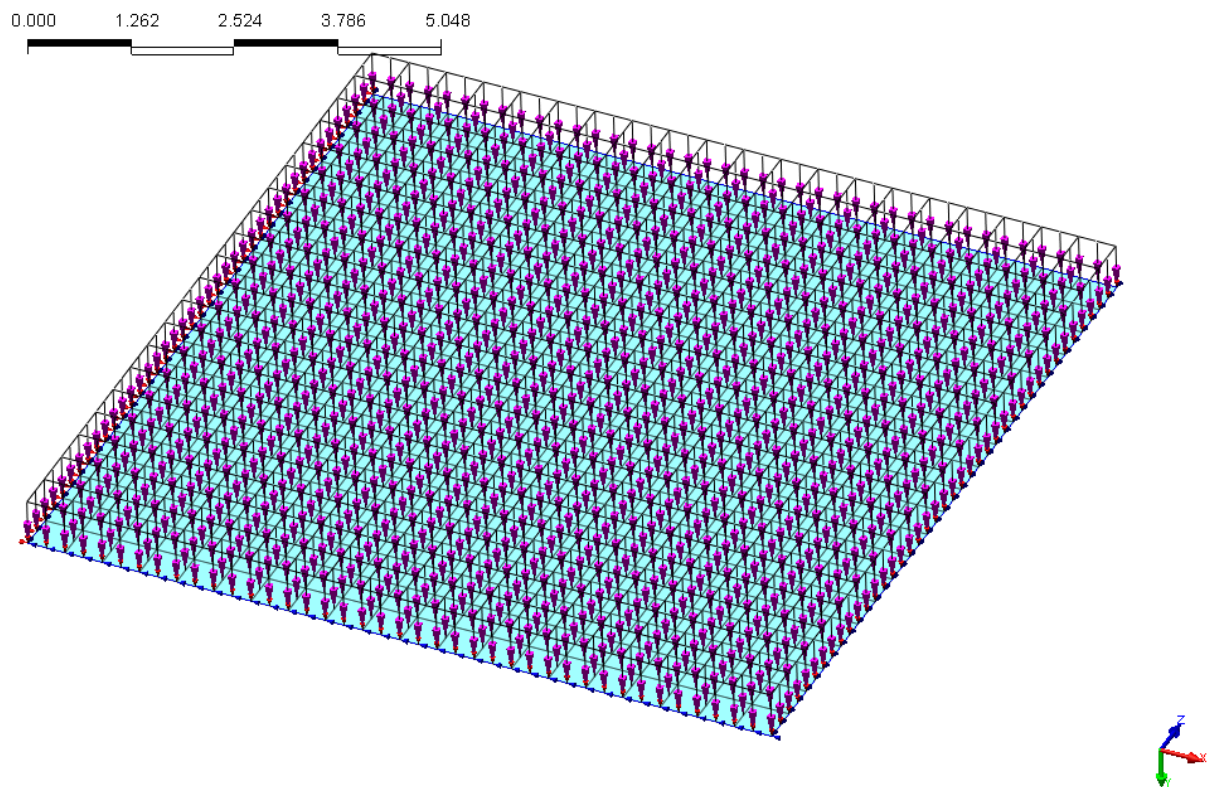


Рисунок 2.4 - КЭ-модель пластинки с нагрузкой q

Результаты расчета

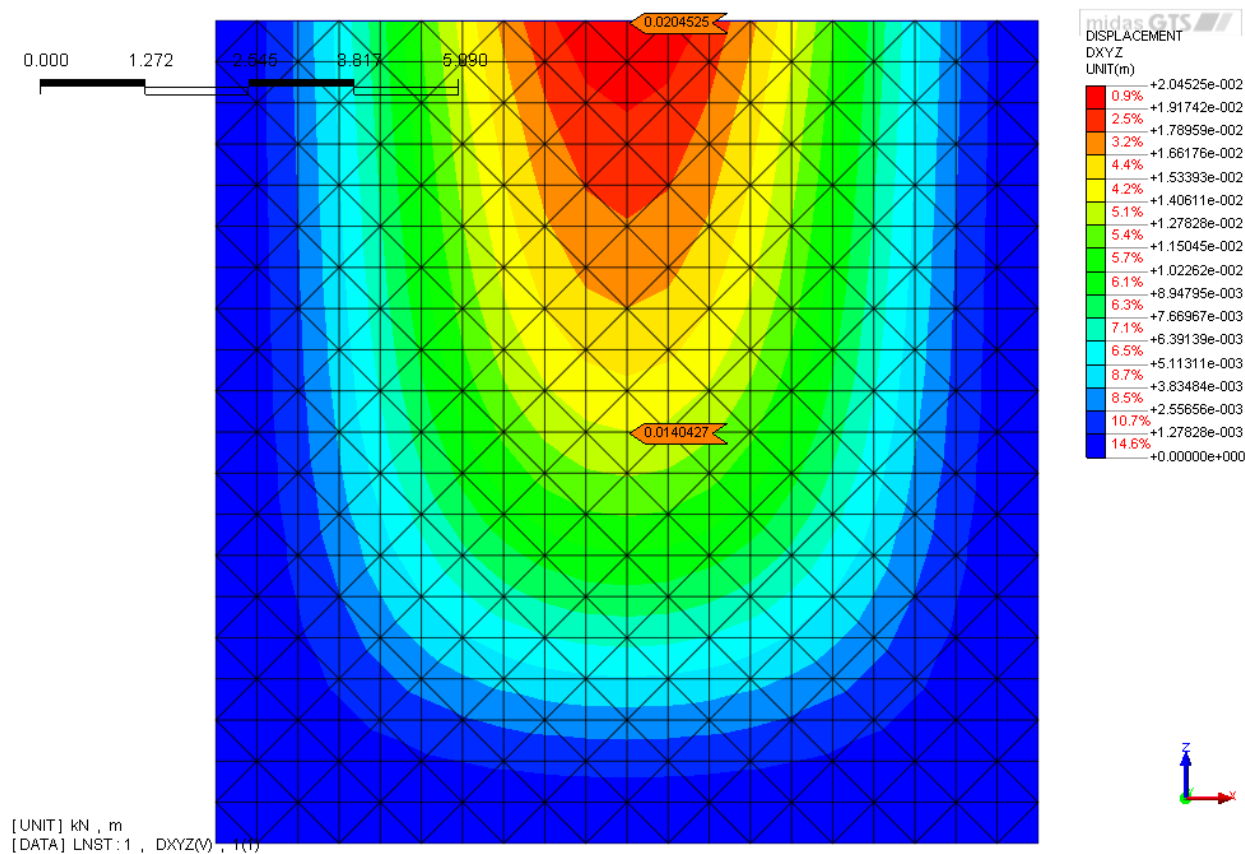


Рисунок 2.5—Изополя перемещений (прогибов) для модели 1 (м)

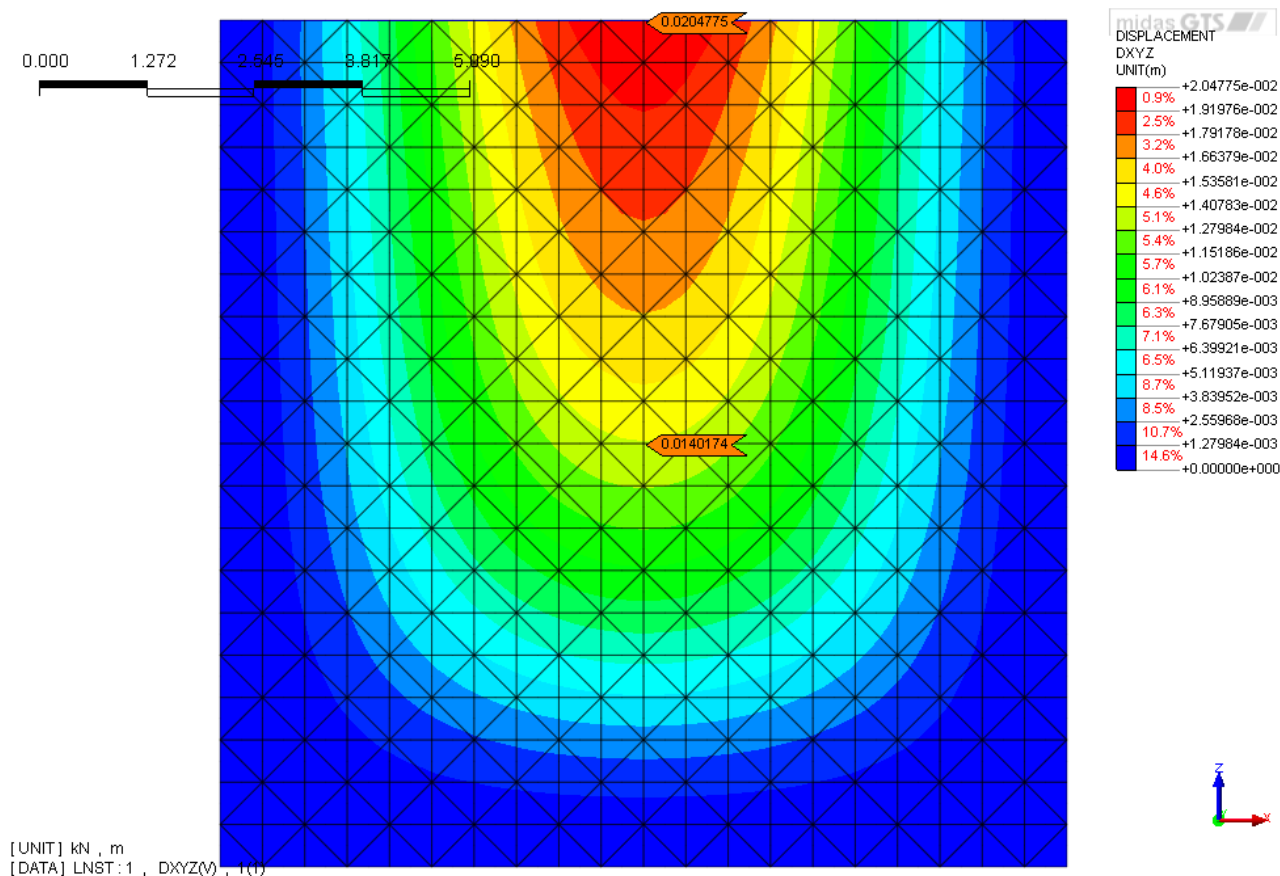


Рисунок 2.6 – Изополя перемещений (прогибов) для модели 2 (м)

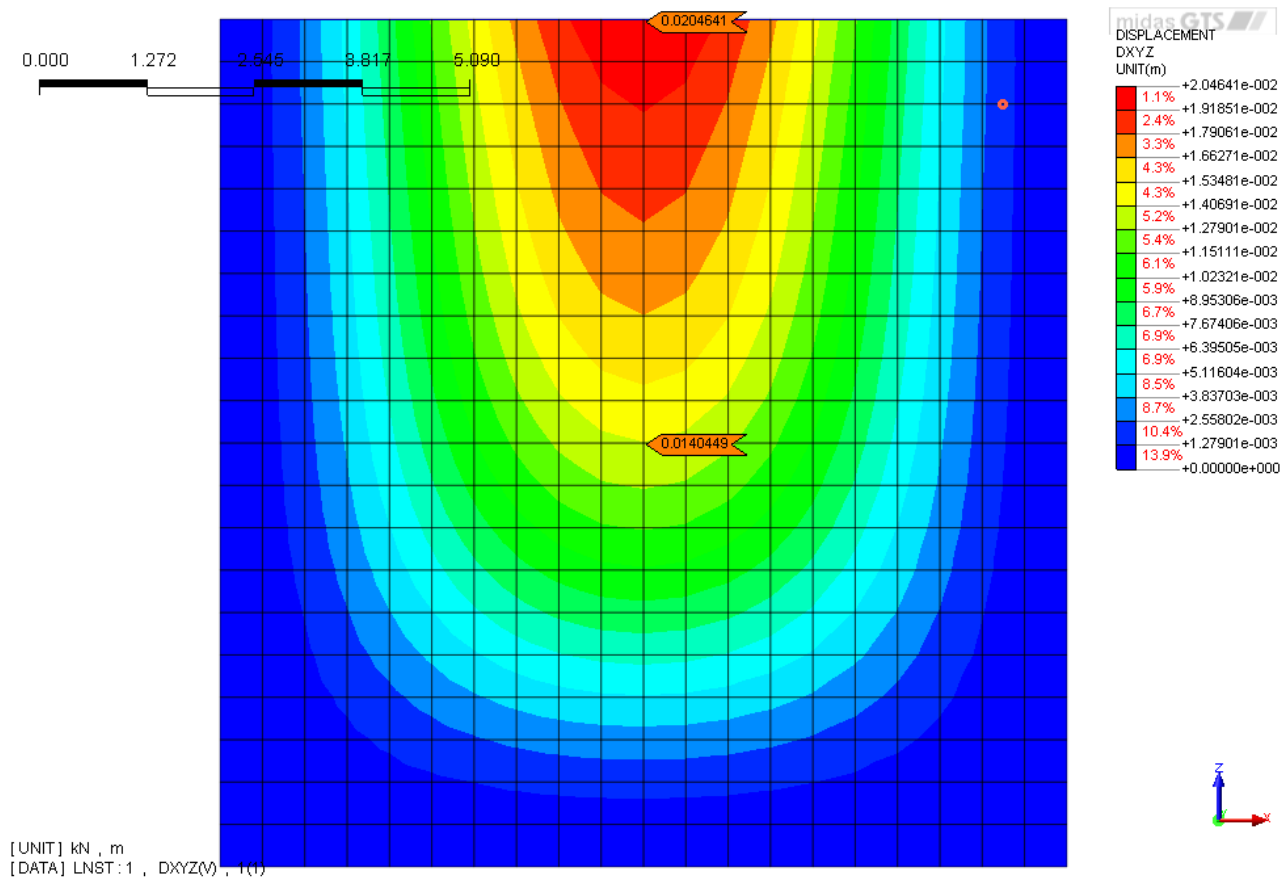


Рисунок 2.7 – Изополя перемещений (прогибов) для модели 3 (м)

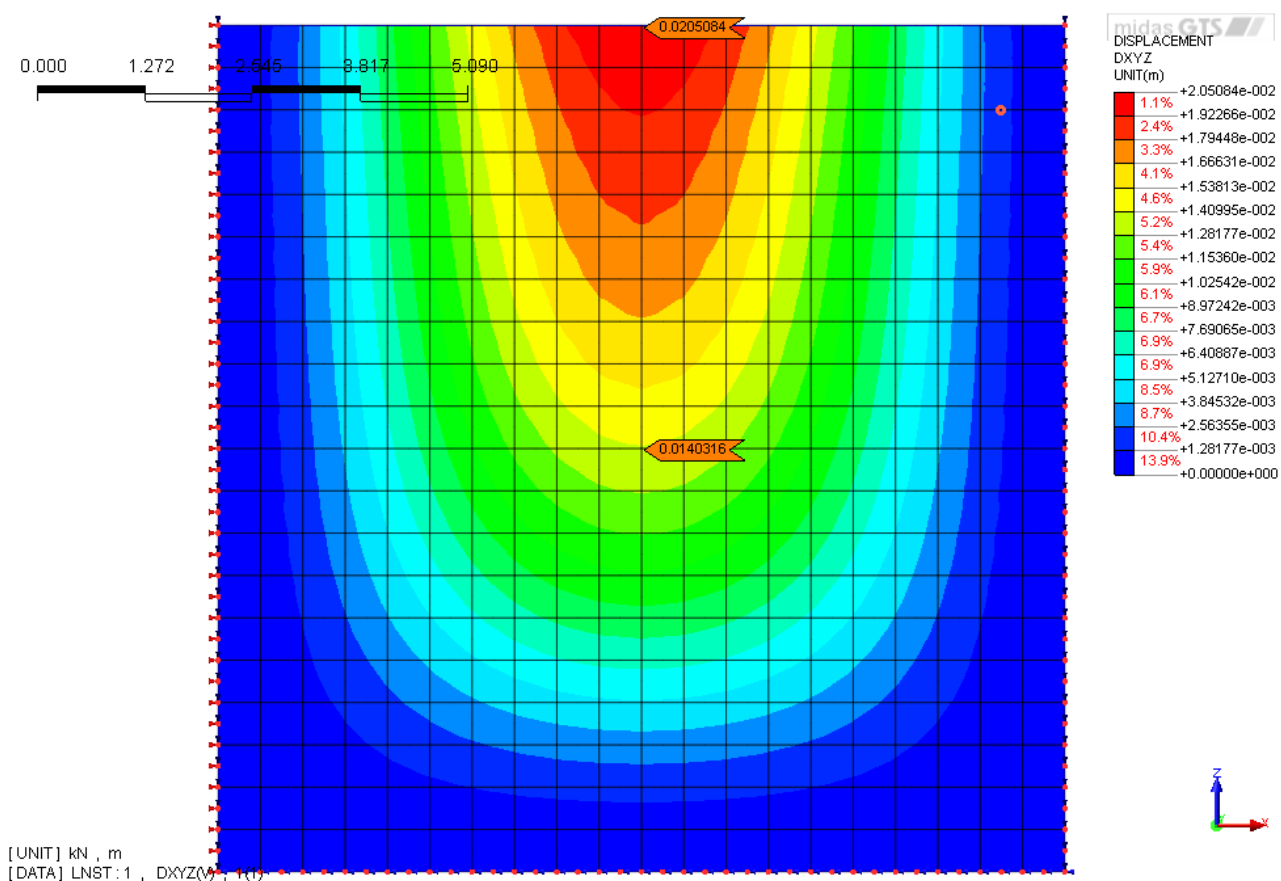


Рисунок 2.8 – Изополя перемещений (прогибов) для модели 4 (м)

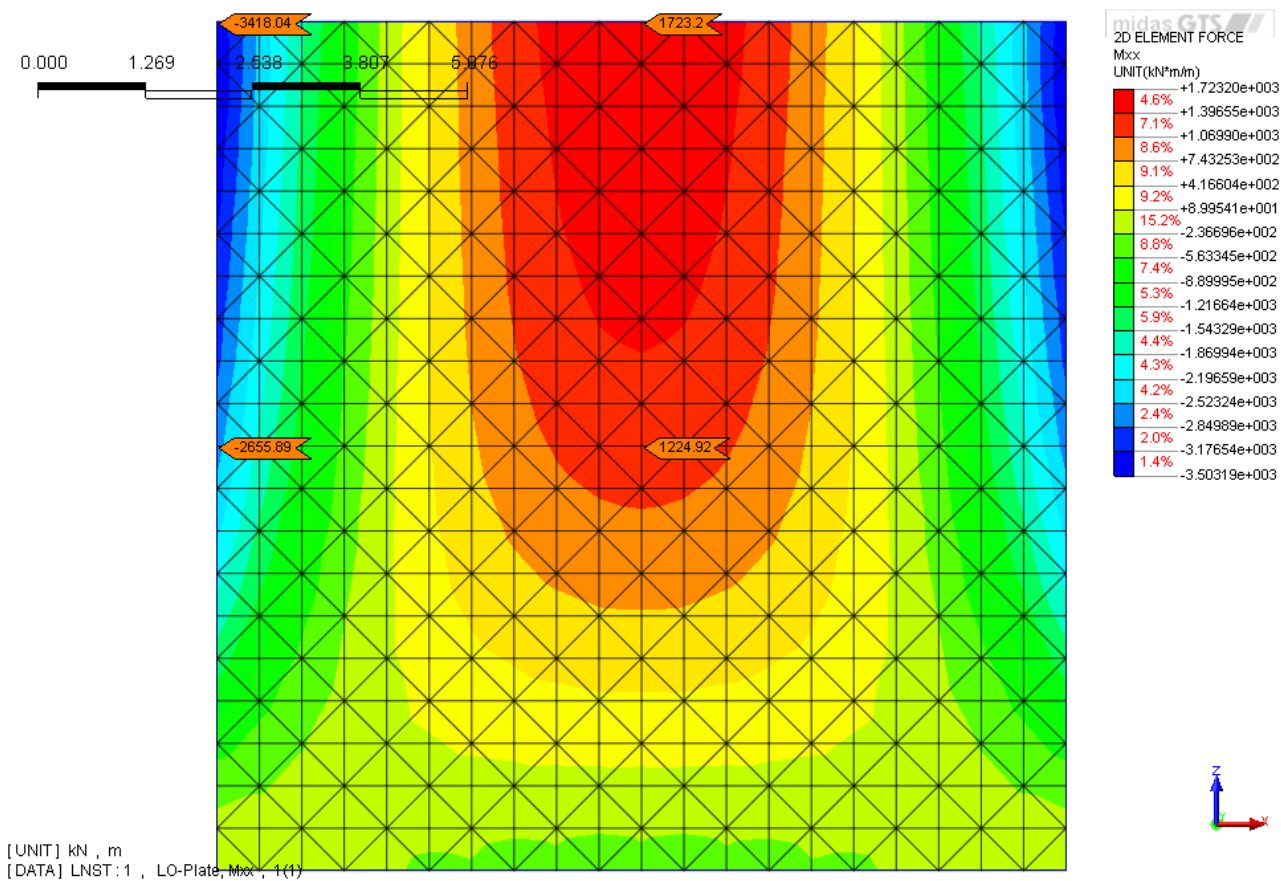


Рисунок 2.9 – Изополя изгибающих моментов M_x для модели 1 (кН·м)

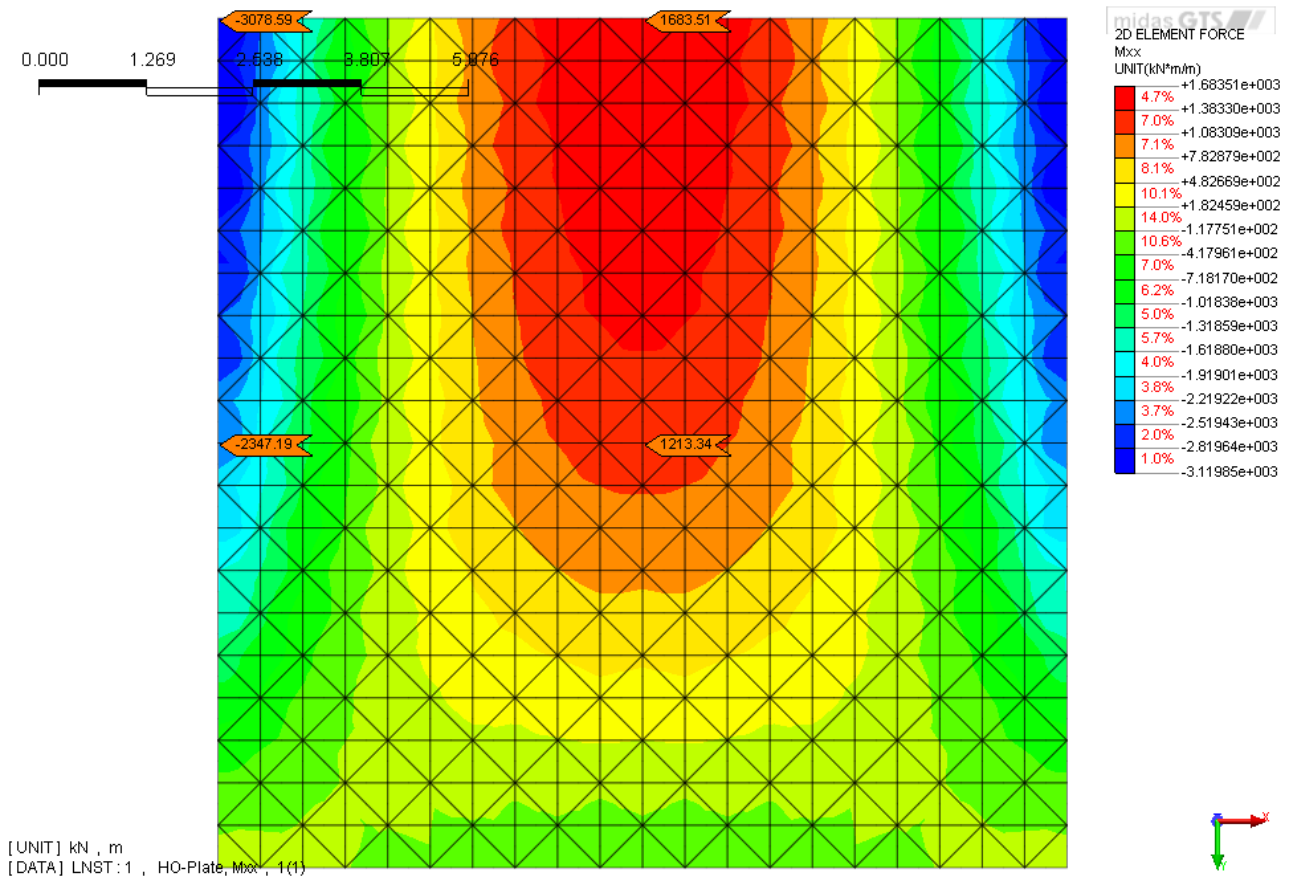


Рисунок 2.10 – Изополя изгибающих моментов M_x для модели 2(кН·м)

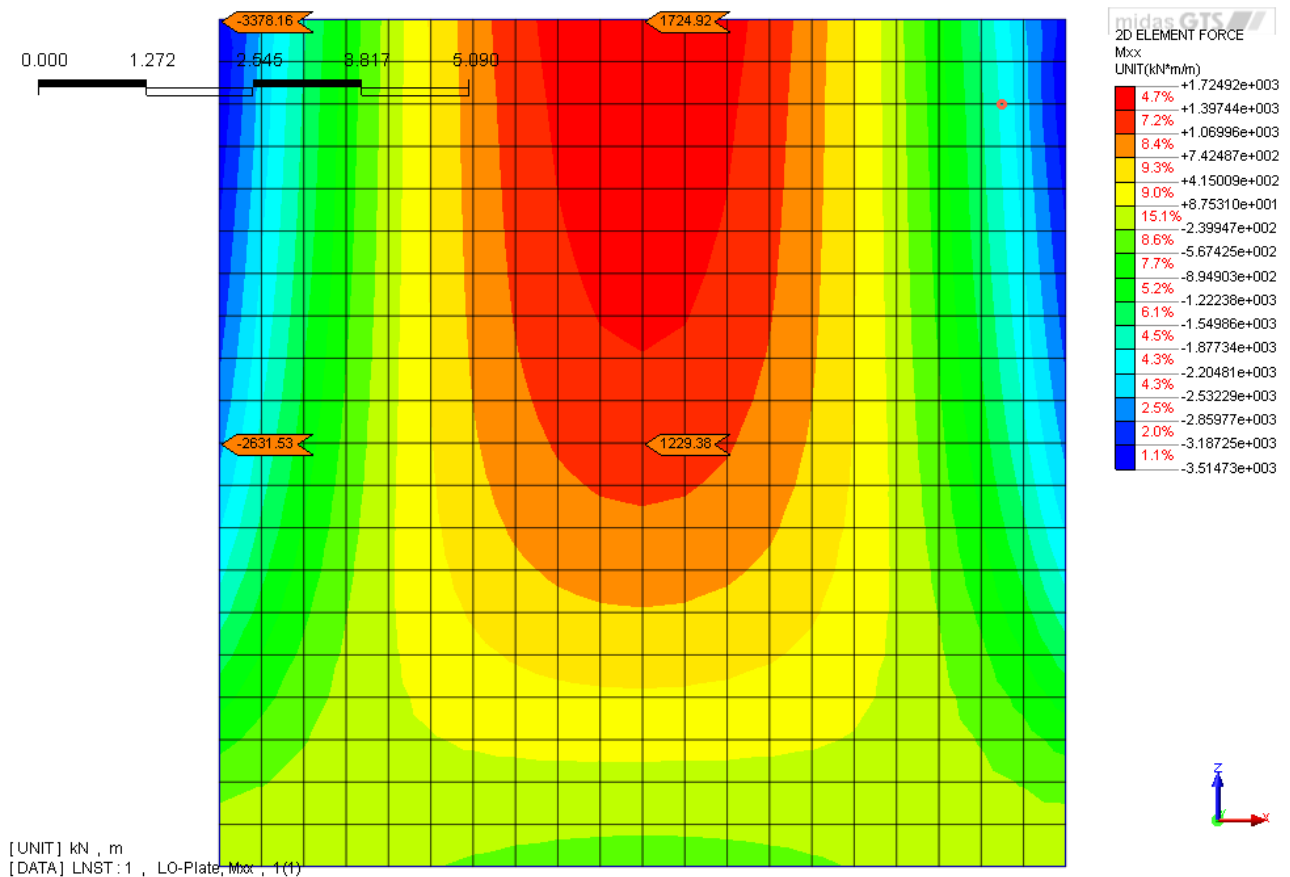


Рисунок 2.11 – Изополя изгибающих моментов M_x для модели 3(кН·м)

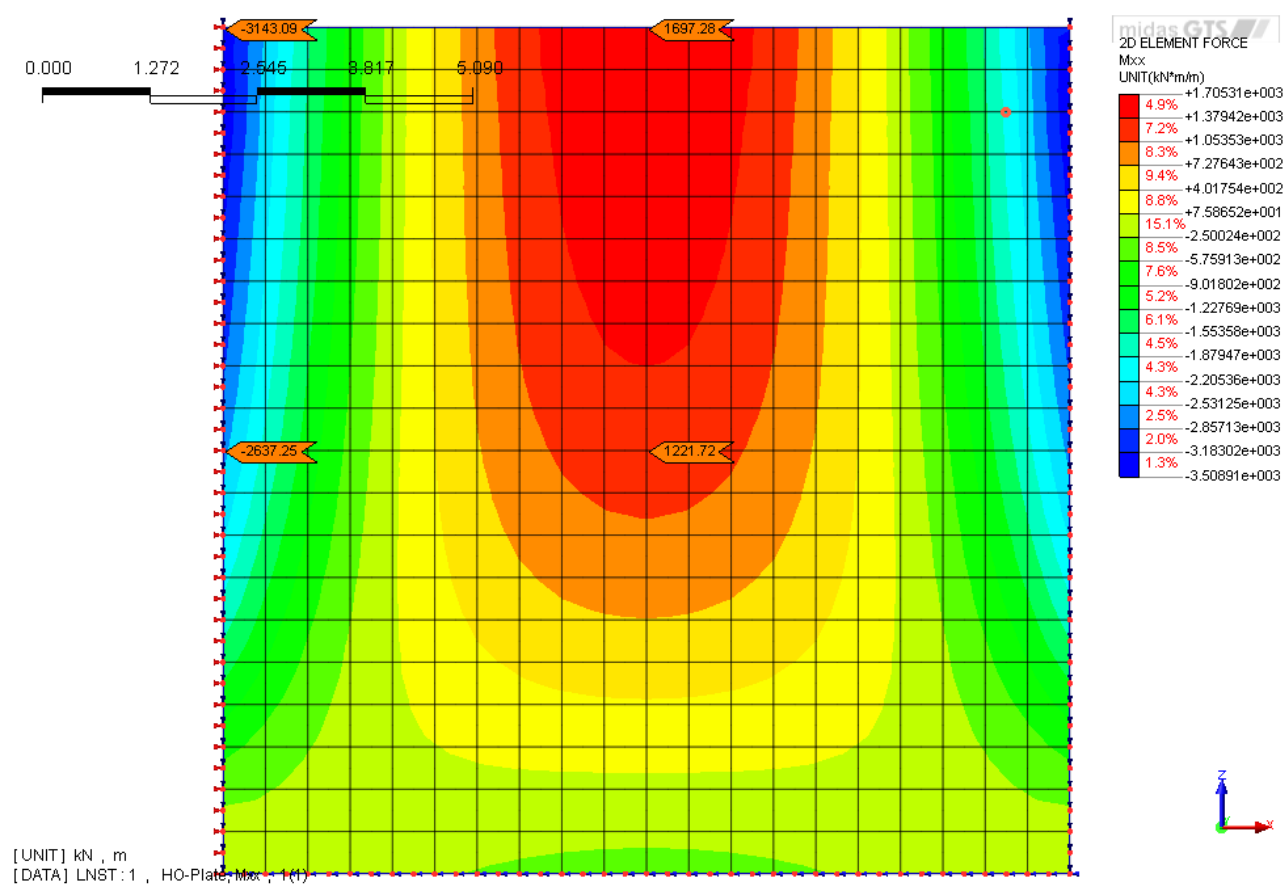


Рисунок 2.12 – Изополя изгибающих моментов M_x для модели 4(кН·м)

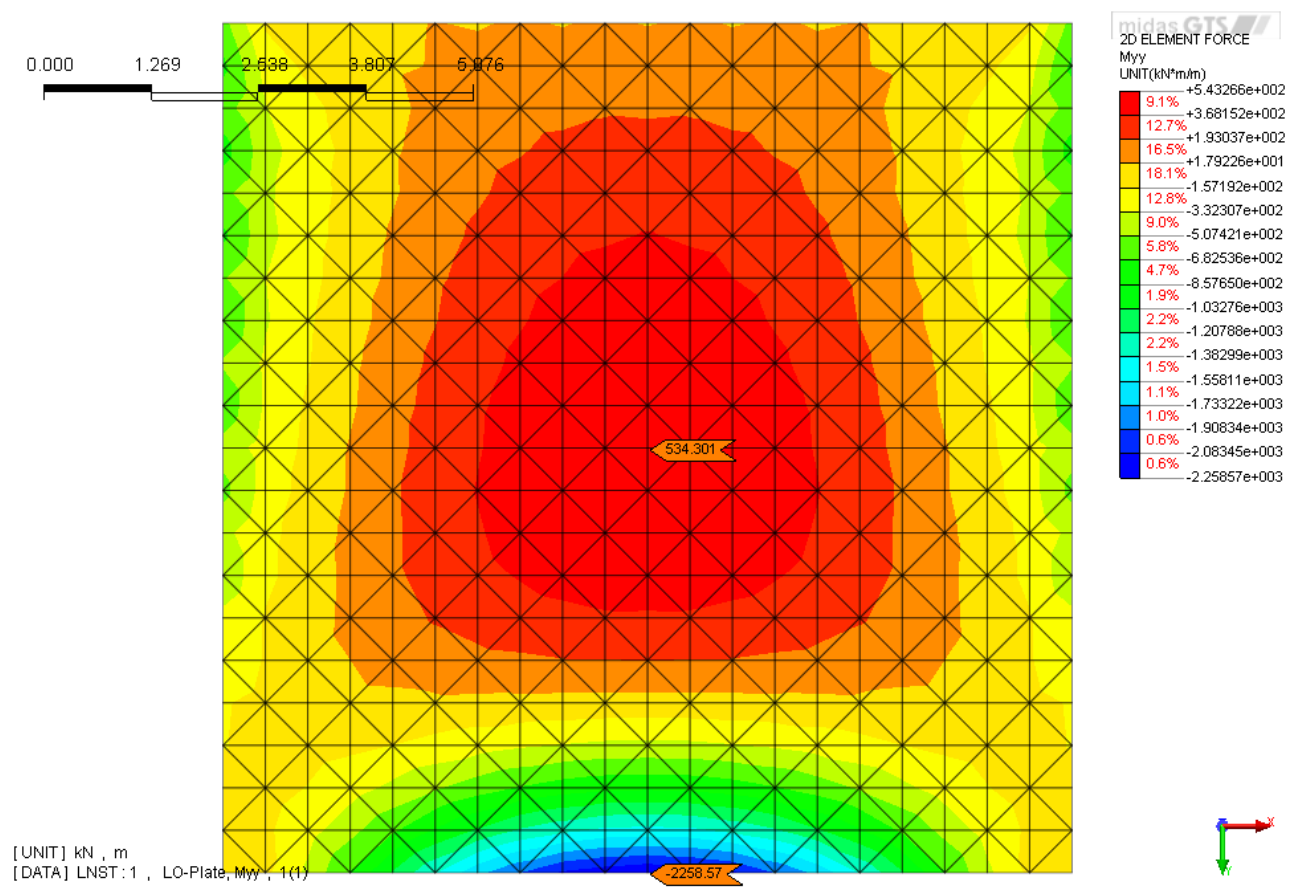


Рисунок 2.13 – Изополя изгибающих моментов M_y для модели 1(кН·м)

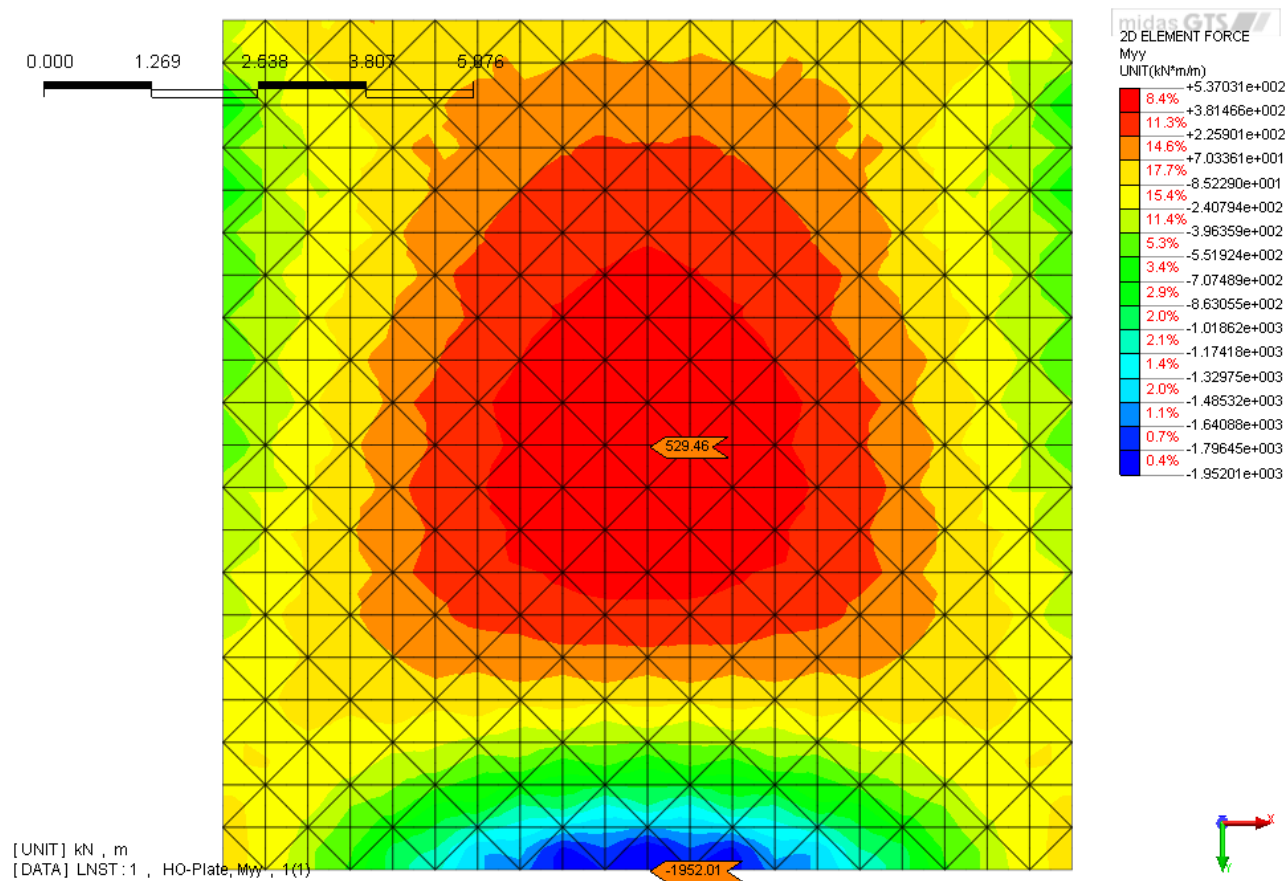


Рисунок 2.14 – Изополя изгибающих моментов M_y для модели 2(кН·м)

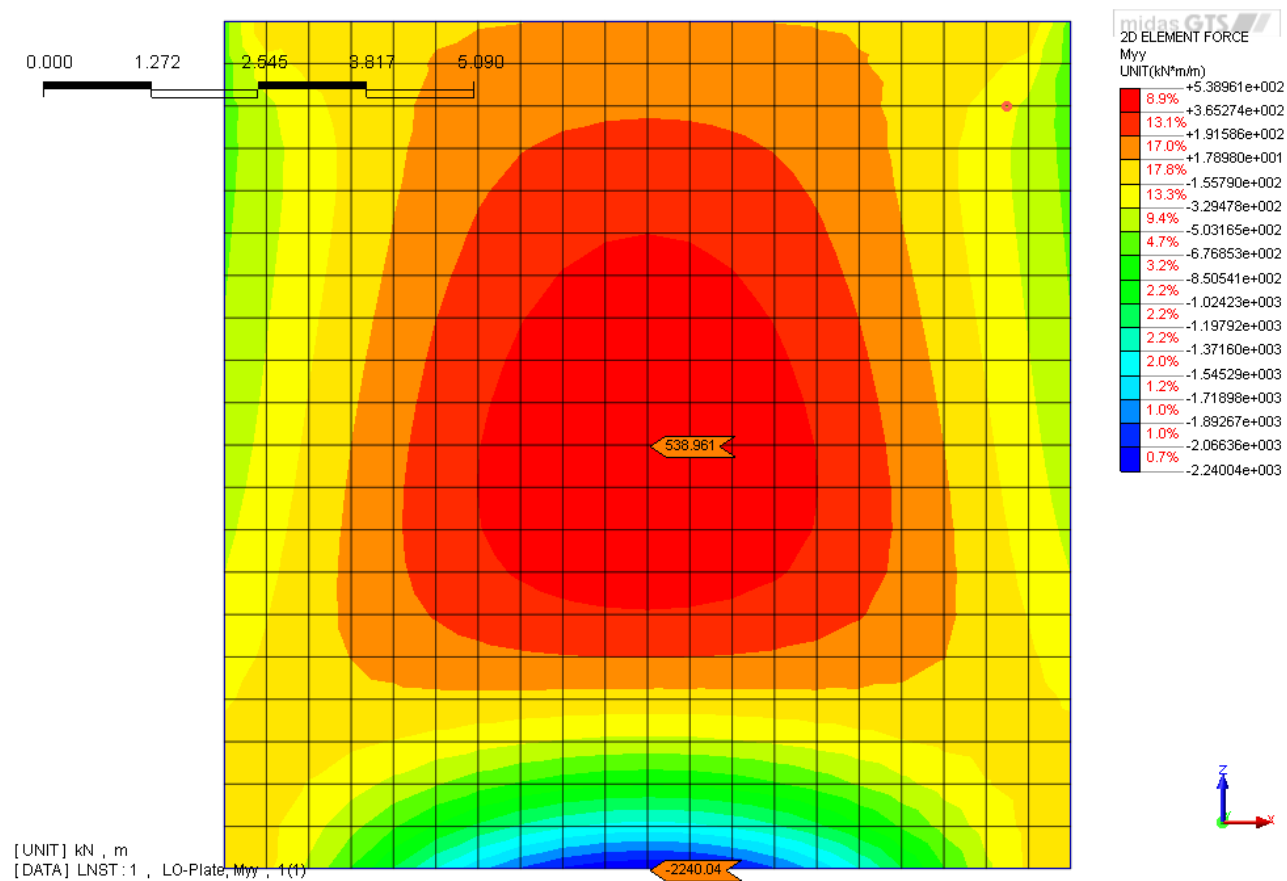


Рисунок 2.15 – Изополя изгибающих моментов M_y для модели 3(кН·м)

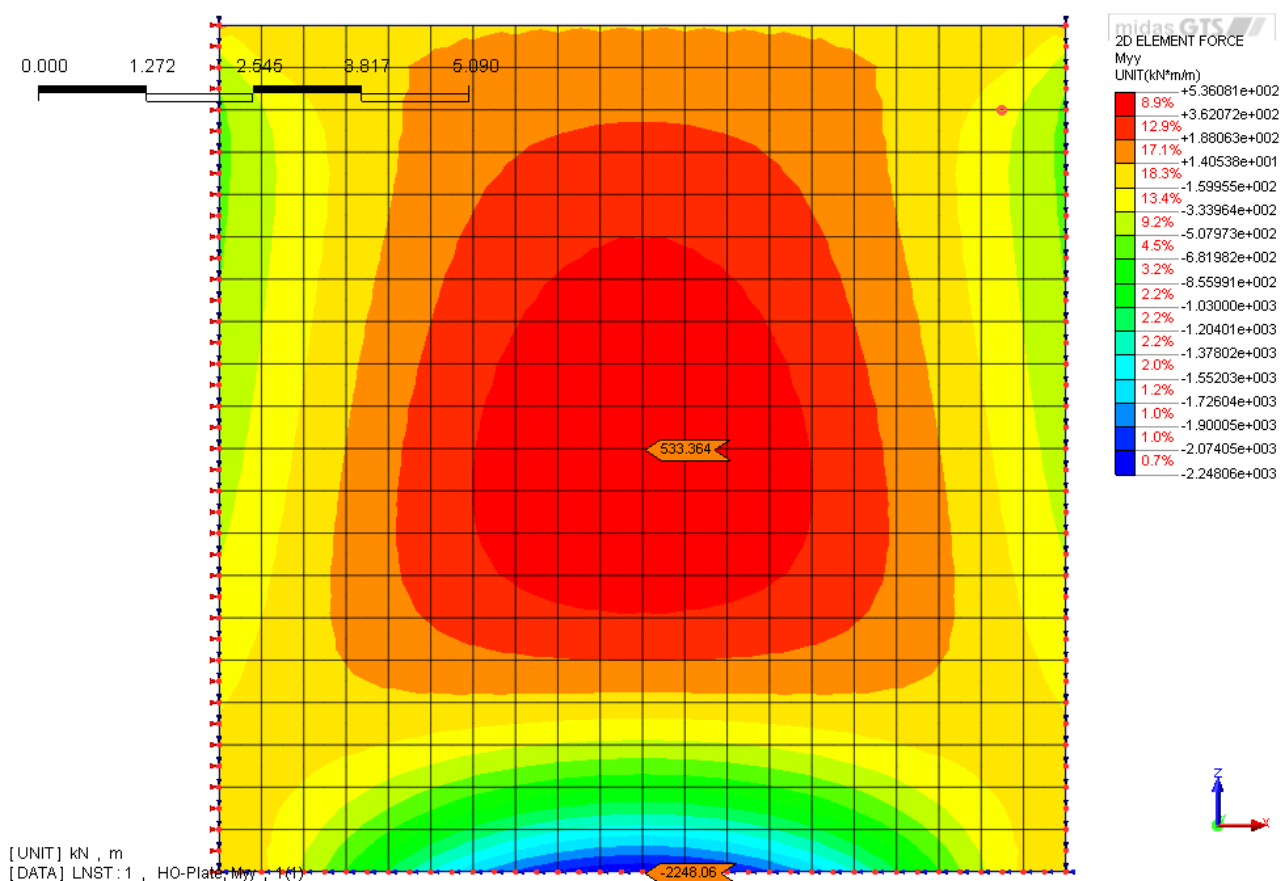


Рисунок 2.16 – Изополя изгибающих моментов M_y для модели 4(кН·м)

Таблица 2.2 Сопоставление результатов расчета для модели 1 (3-х узловые треугольные КЭ)

	Координаты точки	Источник	Midas GTS	Погрешность, %
Перемещение (прогиб), мм	x=0, y=b	23,51	20,45	13,02
	x=0, y=b/2	16,24	14,04	13,55
Изгибающий момент M_x , кН·м	x=0, y=b	1776	1723,2	2,97
	x=0, y=b/2	1268	1224,92	3,40
	x=a/2, y=b	-3412	-3418,04	0,18
	x=a/2, y=b/2	-2456	-2655,89	8,14
Изгибающий момент M_y , кН·м	x=0, y=b/2	552	543,301	1,58
	x=0, y=0	-2040	-2258,57	10,71
Реактивная сила V_x , кН·м	x=a/2, y=b	2512	2137,95	14,89
	x=a/2, y=b/2	1740	1812,84	4,19
Реактивная сила V_y , кН·м	x=0, y=0	1604	1751,41	9,19

Таблица 2.3 Сопоставление результатов расчета для модели 2 (6-ти узловые треугольные КЭ)

	Координаты точки	Источник	Midas GTS	Погрешность, %
Перемещение (прогиб), мм	$x=0, y=b$	23,51	20,47	12,93
	$x=0, y=b/2$	16,24	14,02	13,67
Изгибающий момент M_x , кН·м	$x=0, y=b$	1776	1683,51	5,21
	$x=0, y=b/2$	1268	1213,34	4,31
	$x=a/2, y=b$	-3412	-3078,59	9,77
	$x=a/2, y=b/2$	-2456	-2347,19	4,43
Изгибающий момент M_y , кН·м	$x=0, y=b/2$	552	529,46	4,08
	$x=0, y=0$	-2040	-1952,01	4,31
Реактивная сила V_x , кН·м	$x=a/2, y=b$	2512	2133,52	15,07
	$x=a/2, y=b/2$	1740	1814,3	4,27
Реактивная сила V_y , кН·м	$x=0, y=0$	1604	1756,35	9,50

Таблица 2.4 Сопоставление результатов расчета для модели 3 (4-х узловые четырехугольные КЭ)

	Координаты точки	Источник	Midas GTS	Погрешность, %
Перемещение (прогиб), мм	$x=0, y=b$	23,51	20,46	12,97
	$x=0, y=b/2$	16,24	14,04	13,55
Изгибающий момент M_x , кН·м	$x=0, y=b$	1776	1724,92	2,88
	$x=0, y=b/2$	1268	1229,38	3,05
	$x=a/2, y=b$	-3412	-3378,16	0,99
	$x=a/2, y=b/2$	-2456	-2631,53	7,15
Изгибающий момент M_y , кН·м	$x=0, y=b/2$	552	538,96	2,36
	$x=0, y=0$	-2040	-2240,04	9,81
Реактивная сила V_x , кН·м	$x=a/2, y=b$	2512	2133,27	15,08
	$x=a/2, y=b/2$	1740	1814,81	4,30
Реактивная сила V_y , кН·м	$x=0, y=0$	1604	1755,1	9,42

Таблица 2.5 Сопоставление результатов расчета для модели 4 (8-ми узловые четырехугольные КЭ)

	Координаты точки	Источник	Midas GTS	Погрешность, %
Перемещение (прогиб), мм	$x=0, y=b$	23,51	20,51	12,76
	$x=0, y=b/2$	16,24	14,03	13,61
Изгибающий момент M_x , кН·м	$x=0, y=b$	1776	1697,28	4,43
	$x=0, y=b/2$	1268	1221,72	3,65
	$x=a/2, y=b$	-3412	-3143,09	7,88
	$x=a/2, y=b/2$	-2456	-2637,25	7,38
Изгибающий момент M_y , кН·м	$x=0, y=b/2$	552	533,36	3,38
	$x=0, y=0$	-2040	-2248,06	10,20
Реактивная сила V_x , кН·м	$x=a/2, y=b$	2512	2407	4,18
	$x=a/2, y=b/2$	1740	1837	5,57
Реактивная сила V_y , кН·м	$x=0, y=0$	1604	1813,6	13,07

Пример 3. Статический расчет кольцевой пластинки, свободно опертая по внешнему контуру

Источник	Н.И. Безухов, Основы теории упругости, пластичности и ползучести, Москва, 1961, §14.13, стр. 353
Тип задачи:	Статический линейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	4-х узловой четырехугольный изгибаемый элемент (PLATE)

Описание

Кольцевая пластинка с внешним радиусом a и внутренним b свободно оперта по внешнему контуру. Пластинка нагружена равномерно распределенной нагрузкой q , как показано на рисунке 3.1. Требуется определить радиальный и тангенциальный изгибающие моменты M_r и M_θ и перемещение w для точек на внешнем и внутреннем радиусах (контурах).

Аналитическое решение получено в случае предположения малых прогибов путем интегрирования дифференциального уравнения изгиба упругой пластинки (уравнение Софи Жермена) и перевода уравнения в полярную систему координат. В случае равномерно распределенной нагрузки уравнение упругой поверхности примет вид

$$w = \frac{qa^4}{64D} \left\{ \frac{2}{1+\nu} \left[(3+\nu)(1-2\beta^2) + k \right] (1-\rho^2) - (1-\rho^4) - \frac{4}{1-\nu} k \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho \right\}$$

где ν – коэффициент Пуассона;

$$\rho = \frac{r}{a} \quad (r - \text{радиальная координата});$$

$$\beta = \frac{b}{a}, \quad k = \beta^2 \left[3 + \nu + 4(1+\nu) \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \ln \beta \right].$$

Для исходных данных представленных в таблице 3.1 значения прогиба, радиального и тангенциального моментов будут определяться согласно решению представленного на рисунке 3.2.

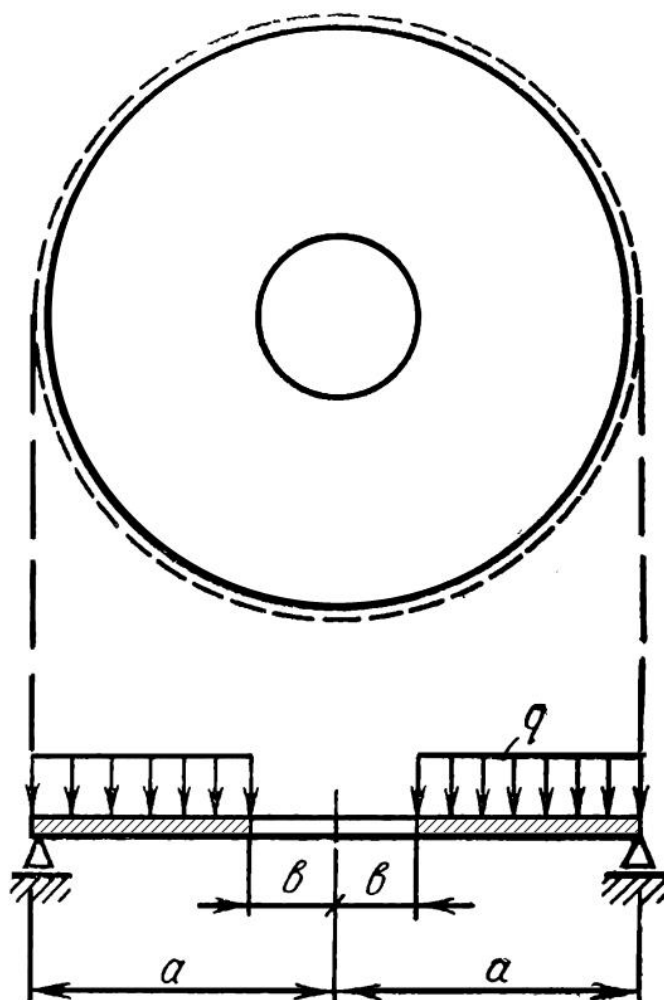


Рисунок 3.1 – Расчетная схема кольцевой пластинки

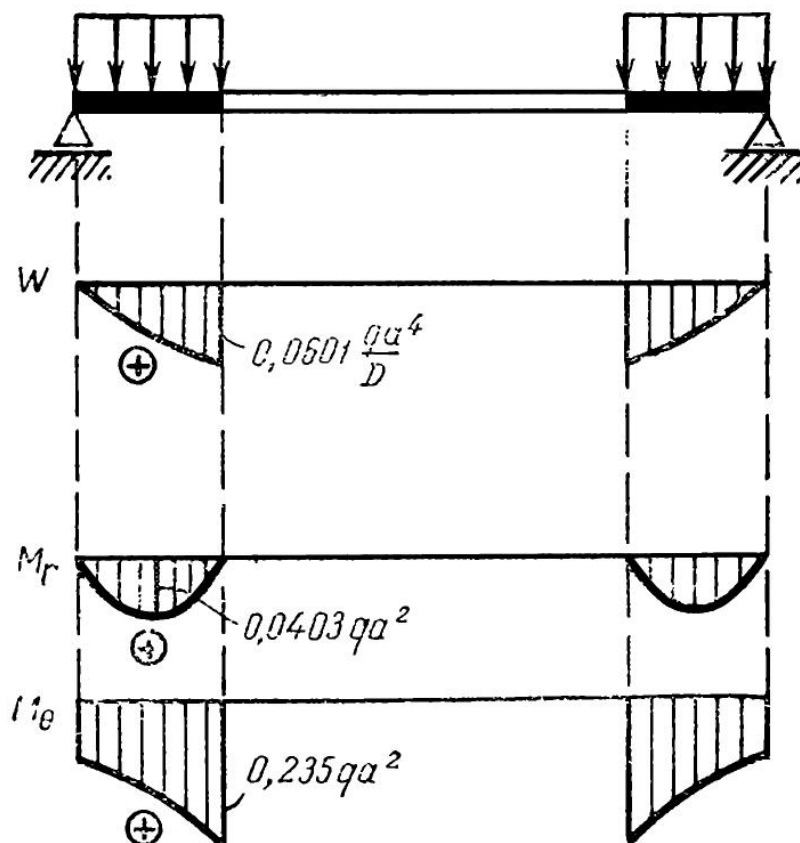


Рисунок 3.2 – Характер эюр w , M_r , M_θ

Предмет верификации

В настоящей задаче оценивается работа различных изгибаемых КЭ типа PLATE при равномерно распределенном нагружении. Определяются численные значения изгибающих моментов M и перемещений δ , которые сравниваются со значениями, полученными аналитическим способом.

GTSмодель

Для решения задачи применялся 4-х узловой четырехугольный изгибаемый элемент типа PLATE.

В расчетной модели сетка КЭ образована по радиально-кольцевому принципу, как показано на рисунке 3.3.

Исходные данные представлены в таблице 3.1

Таблица 3.1 Исходные данные

Внешний радиус a	180см
Внутренний радиус b	90см
Толщина пластинки t	10см
Граничные условия	Рабочая плоскость - ХоУ Внешний контур – ограничение деформаций по Z
Модель и физические характеристики пластинки	Линейная упругая: $E=1,9 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\nu=1/6$
Нагрузка	$q=0,08 \text{ кгс/см}^2$
Тип КЭ	4-х узловой четырехугольный изгибаемый элемент
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель

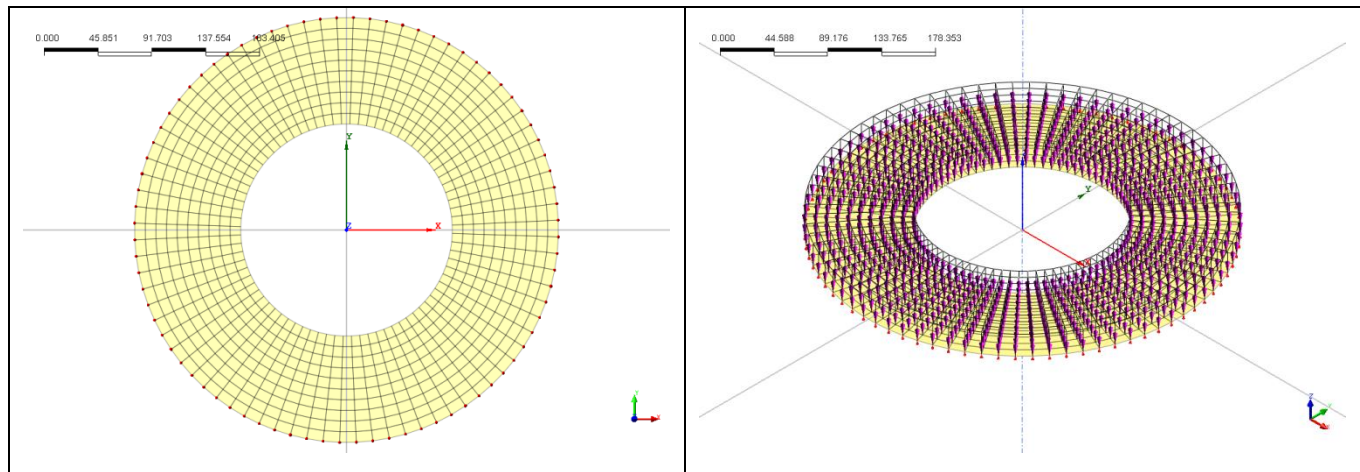


Рисунок 3.3 - КЭ-модель кольцевой пластинки (слева); нагрузка и граничные условия (справа)
(800 элементов 880 узлов)

Результатырасчета

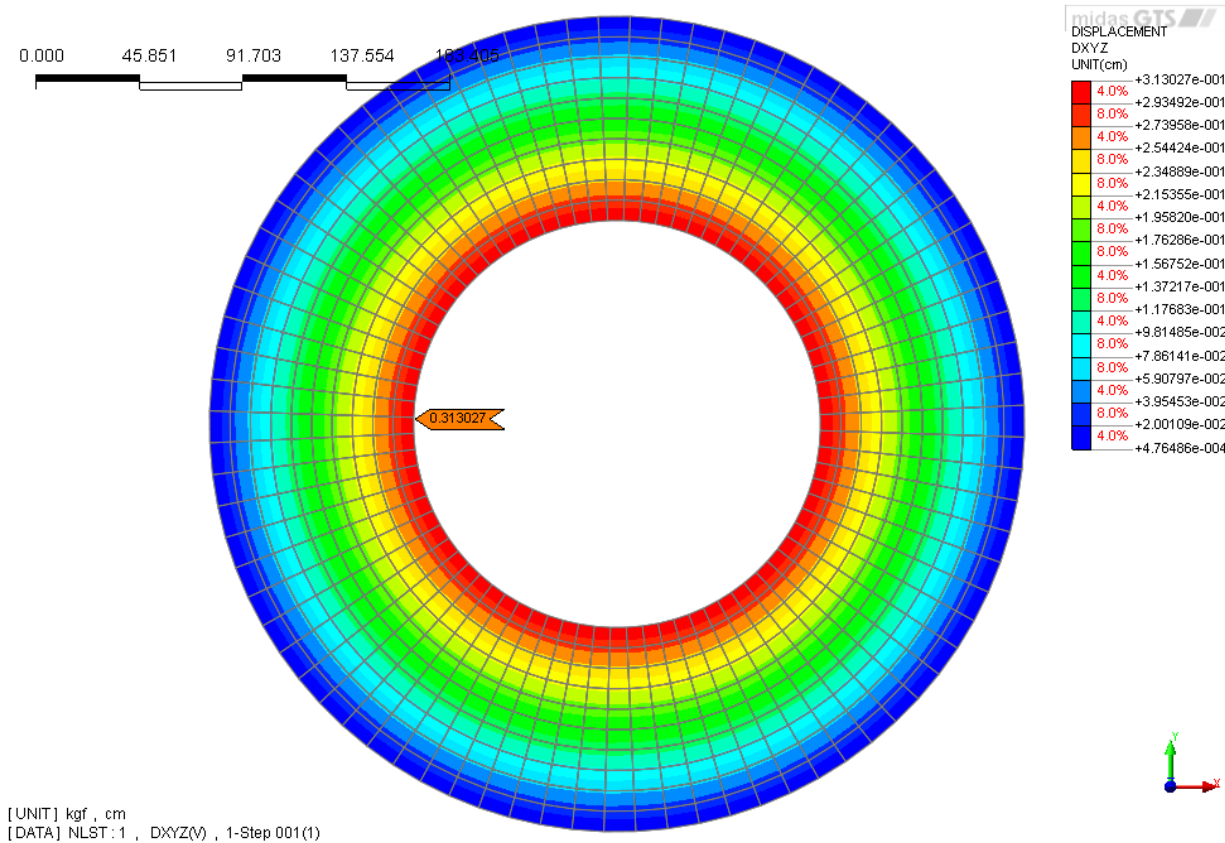


Рисунок 3.4–Изополя перемещений (прогибов) (см)

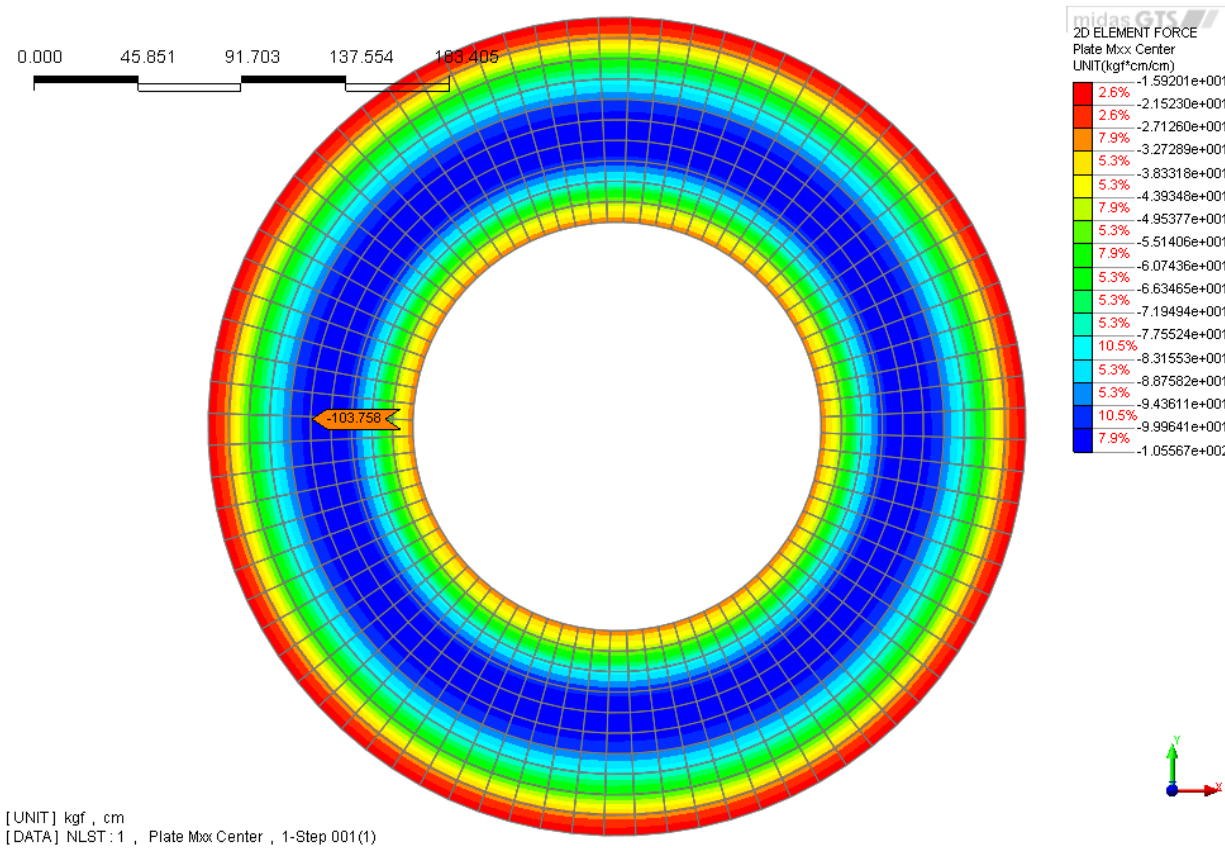


Рисунок 3.5 – Изополя радиальных изгибающих моментов M_r (кгс·см)

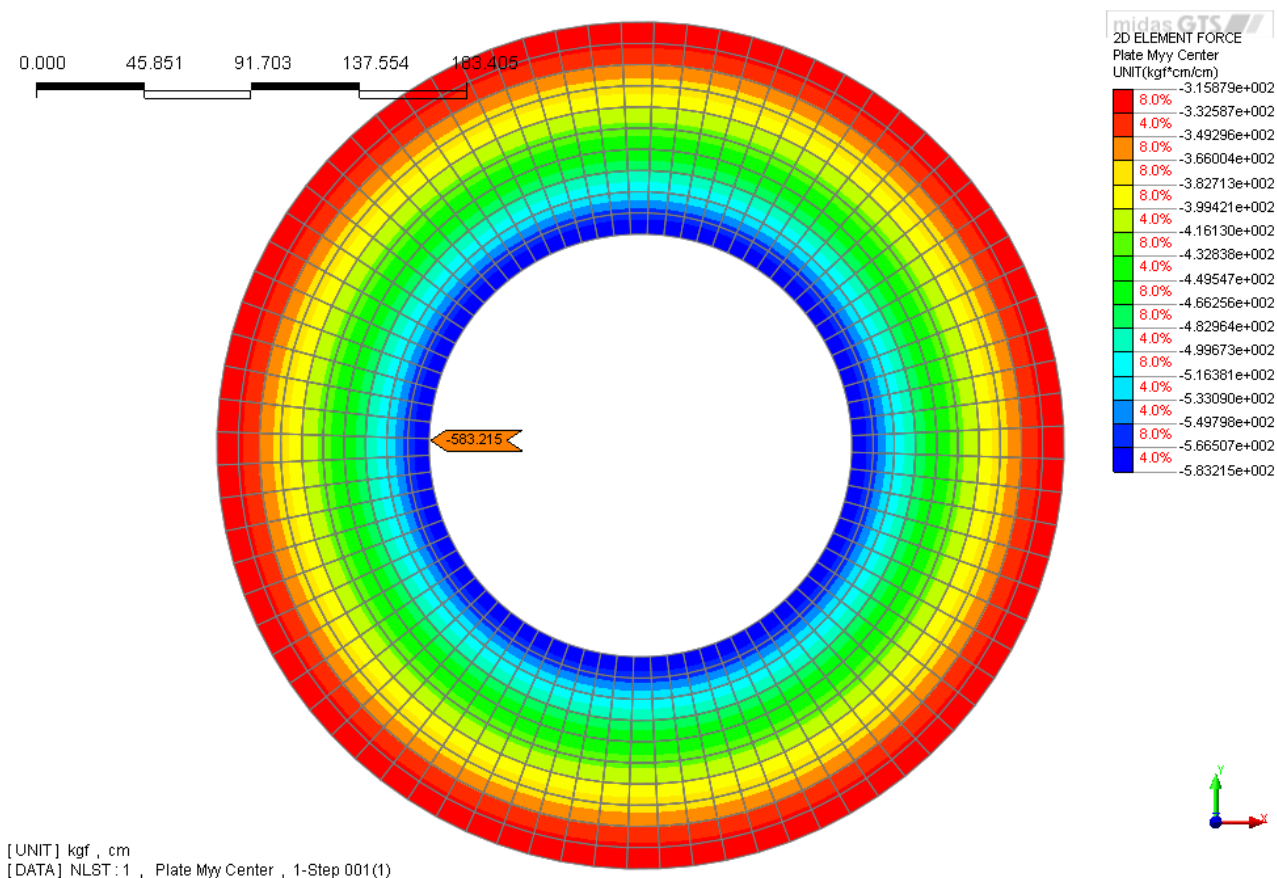


Рисунок 3.6 – Изополя тангенциальных изгибающих моментов M_{θ} (кгс·см)

Таблица 3.2 Сопоставление результатов расчета

	Источник	Midas GTS	Погрешность, %
Перемещение (прогиб) на внутреннем контуре, см	0,3104	0,31303	0,85
Максимальный радиальный изгибающий момент M_r , кгс·см	104,4576	103,758	0,67
Максимальный тангенциальный изгибающий момент M_{θ} , кгс·см	609,12	583,215	4,25

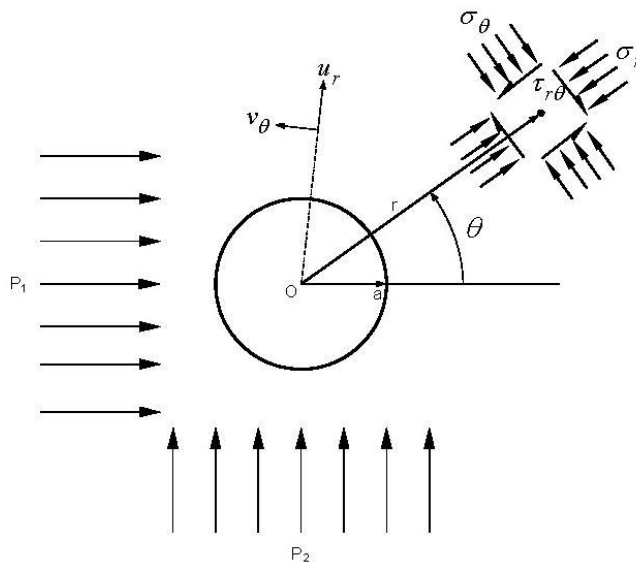
ПРИМЕР 4. Цилиндрическое отверстие в бесконечной упругой среде

Целью рассмотрения данного примера является выявление чувствительности численного решения к входным данным о деформационных характеристиках, а именно к значению коэффициента Пуассона. Имеющееся аналитическое решение теории упругости для данной задачи записывается следующим образом.

$$\sigma_r = \frac{p_1 + p_2}{2} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] + \frac{p_1 - p_2}{2} \left[1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 + p_2}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \right] - \frac{p_1 - p_2}{2} \left[1 + \frac{3a^4}{r^4} \right] \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{p_1 - p_2}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta$$



Как видно из записи значения напряжений не зависят от коэффициента Пуассона. Для расчета рассмотрим пример из Verification manual MIDAS GTS (пример 1). Отверстие диаметром 1 м вырезается в гидростатическом поле напряжений $\sigma_x = \sigma_y = 30 \text{ МПа}$. Расчеты проведем для модели плоской деформации, описанной в томе 2, пример 1.

Рассмотрим результаты расчетов для значений $\nu=0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45$.

Ниже представлены некоторые результаты расчетов.

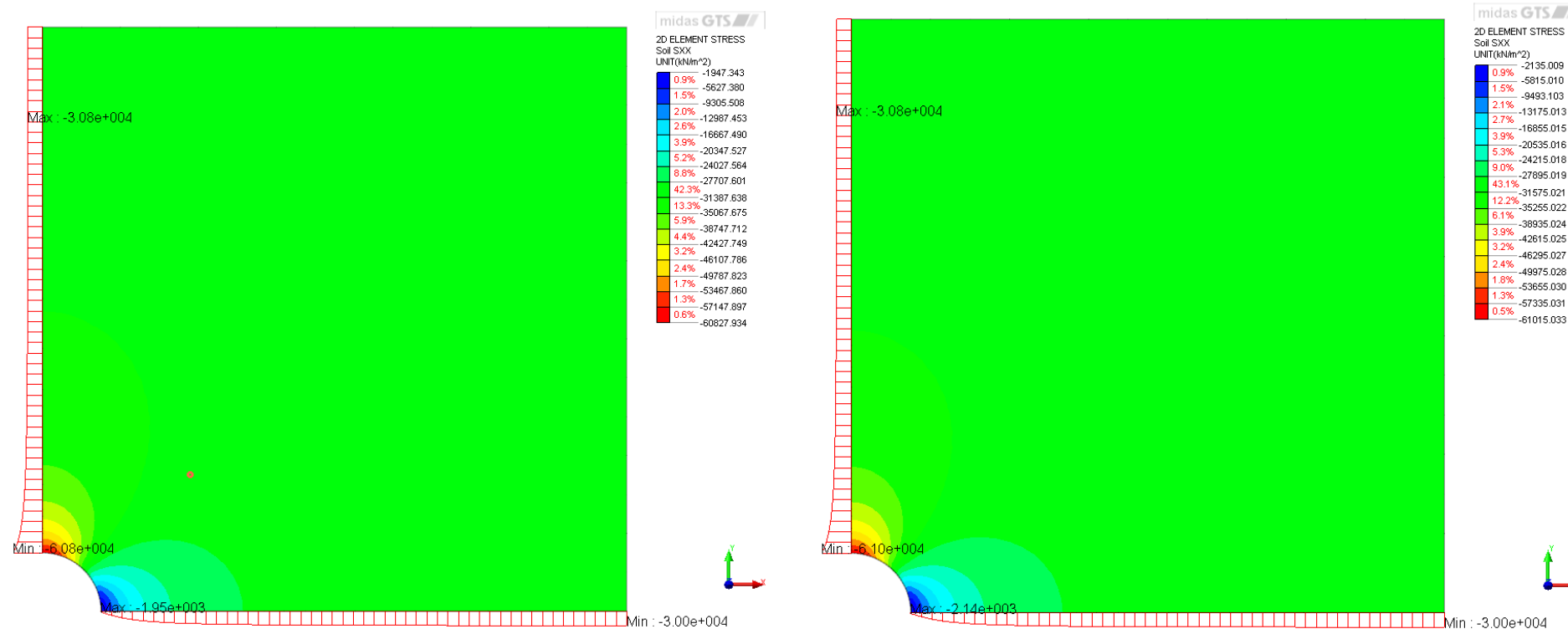


Рисунок 4.1 – Изополе вертикальных напряжений, МПа:
а) коэффициент Пуассона $\nu=0.15$. б) коэффициент Пуассона $\nu=0.2$.

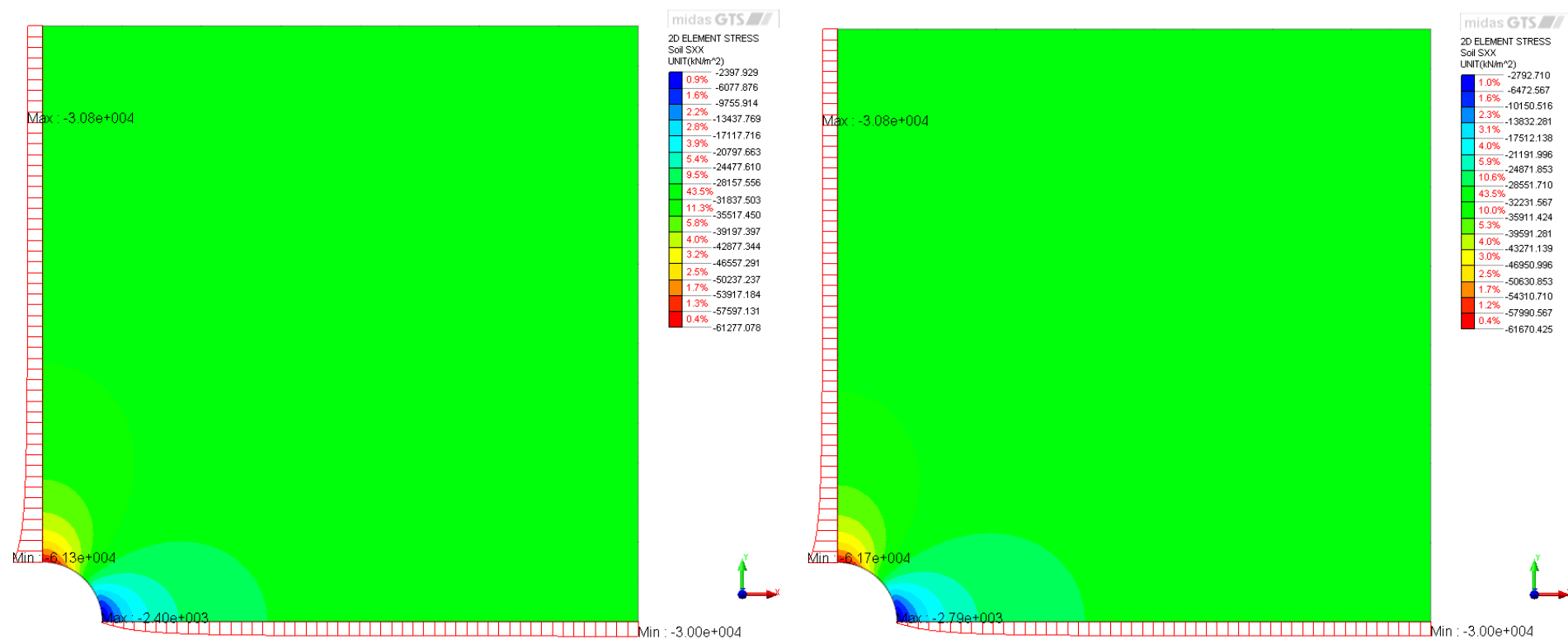


Рисунок 4.2 – Изополе вертикальных напряжений, МПа:
а) коэффициент Пуассона $\nu=0.25$. б) коэффициент Пуассона $\nu=0.3$.

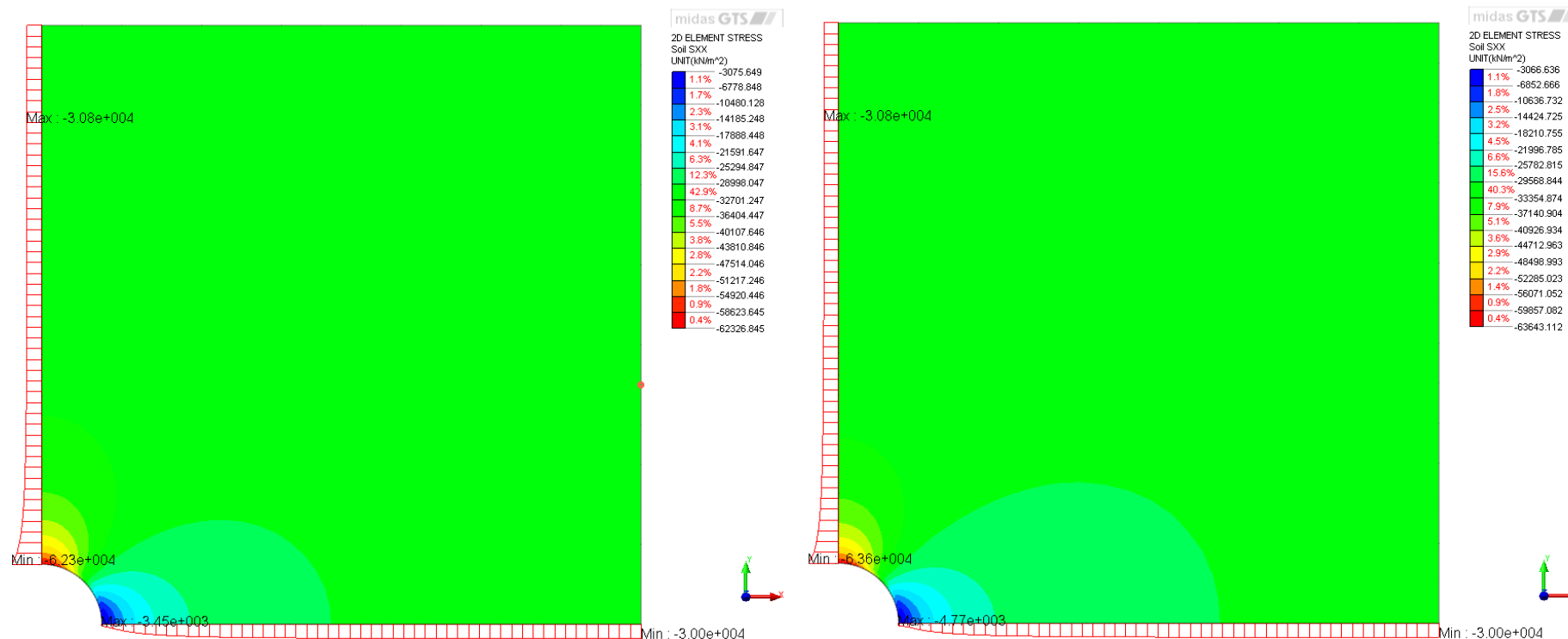


Рисунок 4.3 – Изополе вертикальных напряжений, МПа:

а) коэффициент Пуассона $\nu=0.35$. б) коэффициент Пуассона $\nu=0.4$.

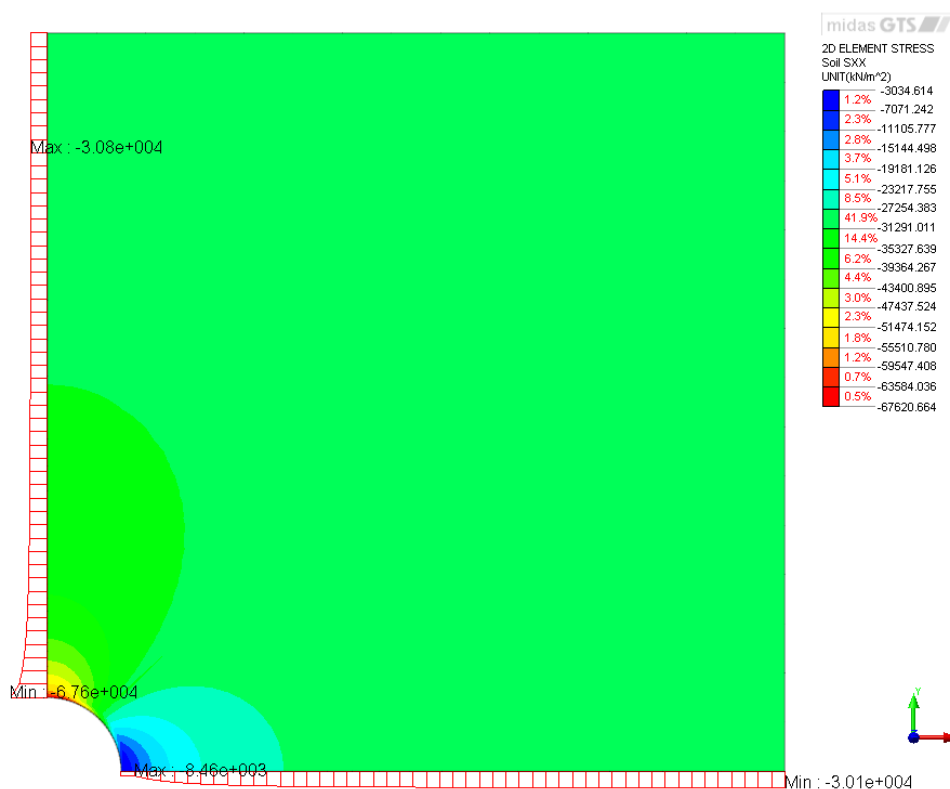


Рисунок 4.4 – Изополе вертикальных напряжений, МПа:
коэффициент Пуассона $\nu=0.45$.

Результаты расчета представлены в таблице 3.1 и на рисунке 3.5.

	Аналитическое решение	GTS						
		$\nu=0.15$	$\nu=0.2$	$\nu=0.25$	$\nu=0.3$	$\nu=0.35$	$\nu=0.4$	$\nu=0.45$
Касат. напряж, МПа	60	60.827	61.015	61.277	61.67	62.326	63.643	67.62
Погрешность, %		1.38	1.69	2.13	2.78	3.88	6.07	12.7

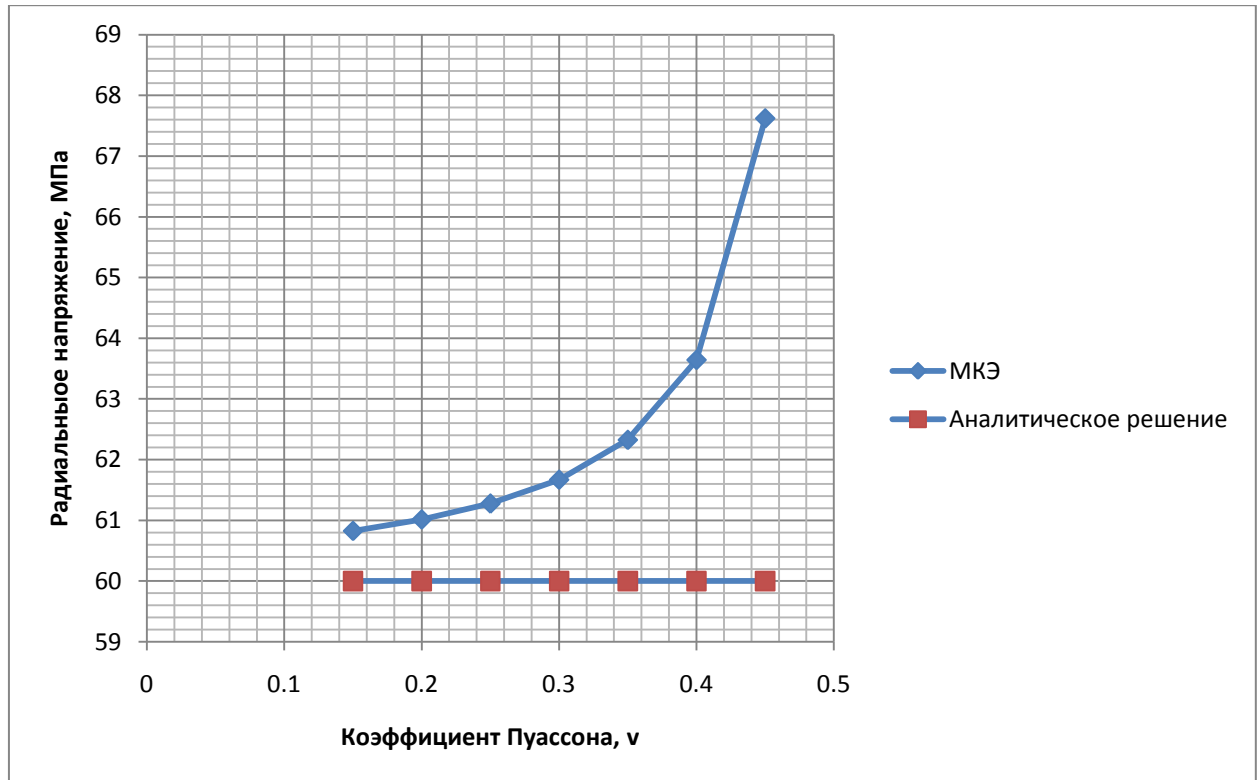


Рисунок 4.5 – График роста погрешности с увеличением коэффициента Пуассона

Как видно из полученных результатов для высоких значений коэффициента Пуассона, характерных, например, для глинистых грунтов ($\nu > 0.4$), рассмотрение решения теории упругости в качестве эталонного для этой задачи вызывает определенные сомнения и требует некоторых уточнений.

Пример 5. Круглый фундамент на упругом полупространстве.

Контактная задача.

Источник	Н. И. Безухов. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Государственное издательство «Высшая школа». Москва – 1961.
Тип задачи	Статический линейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ	4-х узловой тетраэдр, 8-ми узловой тетраэдр, жесткие связи.

Описание

В примере рассматривается абсолютно гибкий – распределенная нагрузка и абсолютно жесткий фундамент – жесткий круглый штамп, лежащий на основании. Данные задачи являются хорошо изученными в научной практике фундаментостроения, где основной интерес представляет осадка и распределение давления под подошвой фундамента.

Жесткий штамп.

Распределение давлений под подошвой (задача Чаплыгина-Садовского):

$$q = \frac{p_m \pi r}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}},$$

Где p_m – равномерно распределенная нагрузка

a - радиус фундамента;

r - расстояние до рассматриваемой точки

Осадка:

$$\omega = \frac{p_m \pi r (1 - \mu^2)}{2Ea}$$

Гибкий фундамент

Вертикальное перемещение в центре круга:

$$\omega_0 = \frac{2p_m a (1 - \mu^2)}{E}$$

Вертикальное перемещение точек лежащих на контуре:

$$\omega_a = \frac{4p_m a (1 - \mu^2)}{\pi E}$$

Предмет верификации

Таким образом, целью данного верификационного примера является определение осадок фундамента, распределения давления под подошвой для линейно деформируемого тела.

GTS модель

Рассматривается пространственная модель КЭ модель (рисунок 5.1).

Моделирование жесткого фундамента осуществляется путем объединения перемещений по вертикальному направлению Z (использование жестких связей, рисунок 5.2). Задание нагрузки осуществляется напрямую в КЭ модели. При использовании такого подхода узлы подошвы фундамента могут свободно перемещаться в горизонтальном направлении.

Таблица 3.1. Исходные данные

Геометрические размеры модели	Расчетная область – 50х50х50 м; Диаметр фундамента - $D = 4$ м.
Граничные условия	Боковые границы – ограничение деформаций по нормали. Нижняя граница – ограничение деформаций по X, Y, Z.
Модель грунта	Линейно-упругая: $E=25000$ кПа, $\nu=0.3, \gamma=0$
Нагрузка	$q = 300$ кПа, $P = 3768$ кН, $q=P/\pi r^2$
Тип КЭ	1. 4-х узловой тетраэдр 2. 8-ми узловой тетраэдр 3. Жесткие связи
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель

Таким образом, для двух типов конечных элементов (4-х и 8-ми узловой тетраэдр) рассматривалось два вида нагружения:

1. Сосредоточенная сила $P = 3768$ кН через жесткие связи по Z – жесткий фундамент;
2. Равномерно распределенная нагрузка $q = 300$ кПа – гибкий фундамент.

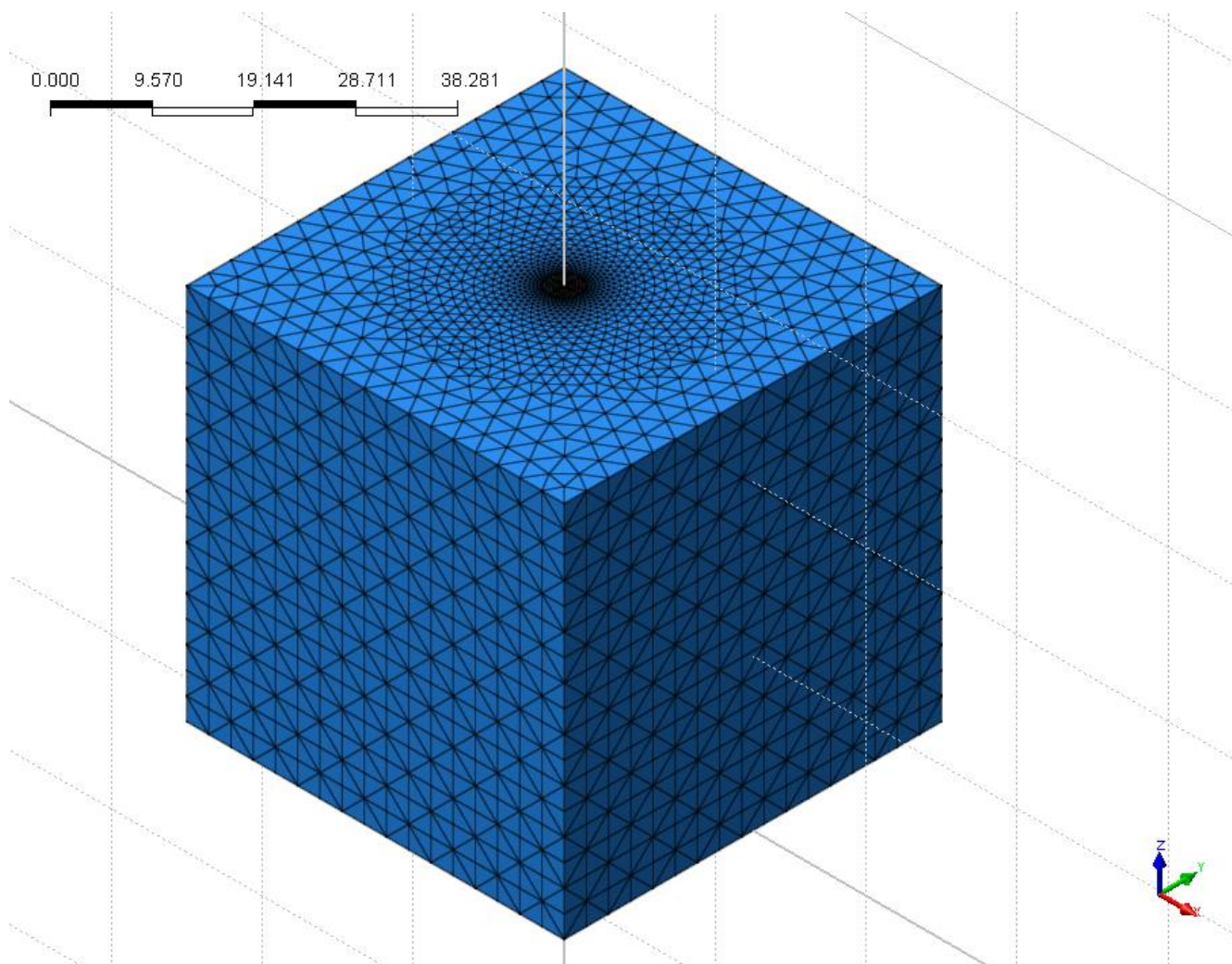


Рисунок 5.1 – КЭ модель.

Для 4-х угольных: число КЭ – 68120, число узлов – 12927.

Для 8-ми угольных: число КЭ – 68120, число узлов – 96879.

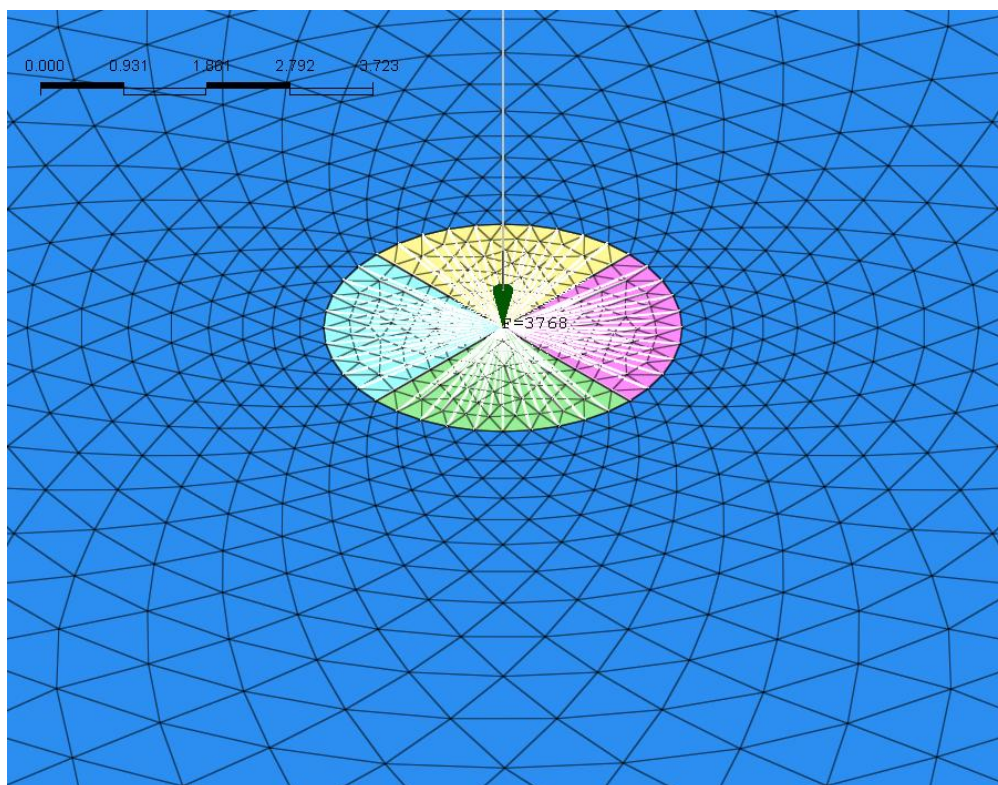


Рисунок 5.2 – Фрагмент КЭ. Жесткие связи

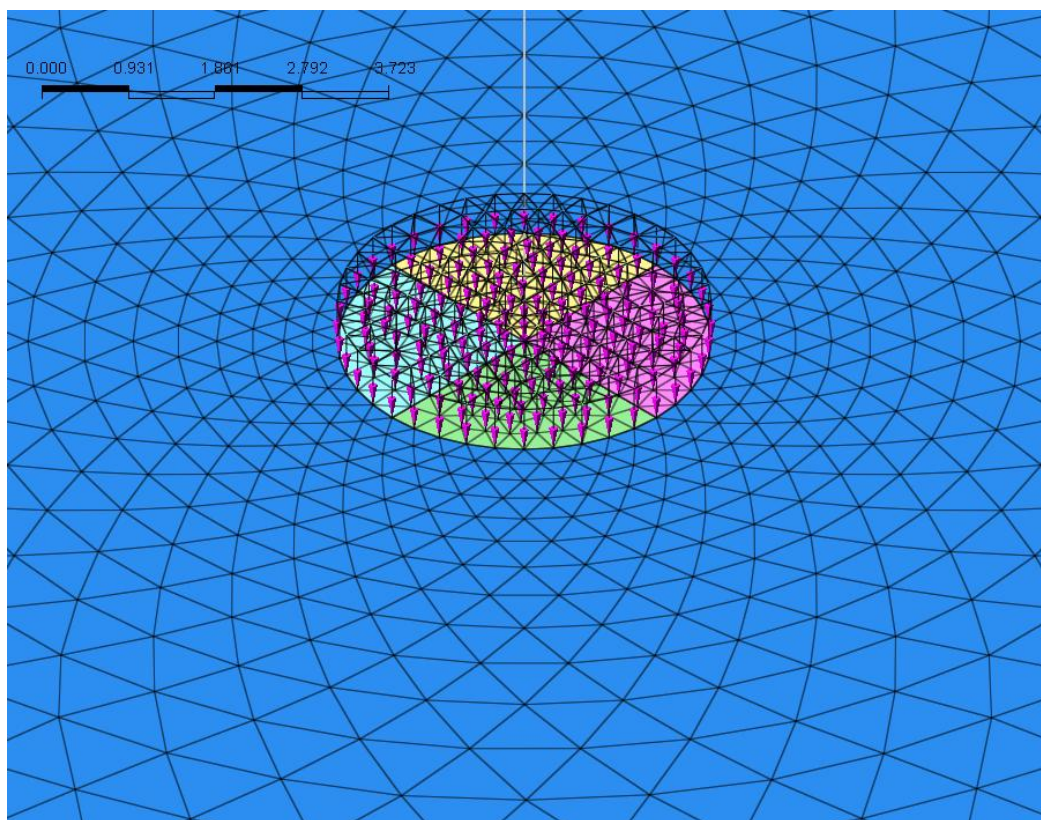


Рисунок 5.3 – Фрагмент КЭ. Гибкий фундамент.

Ниже представлены результаты расчетов.

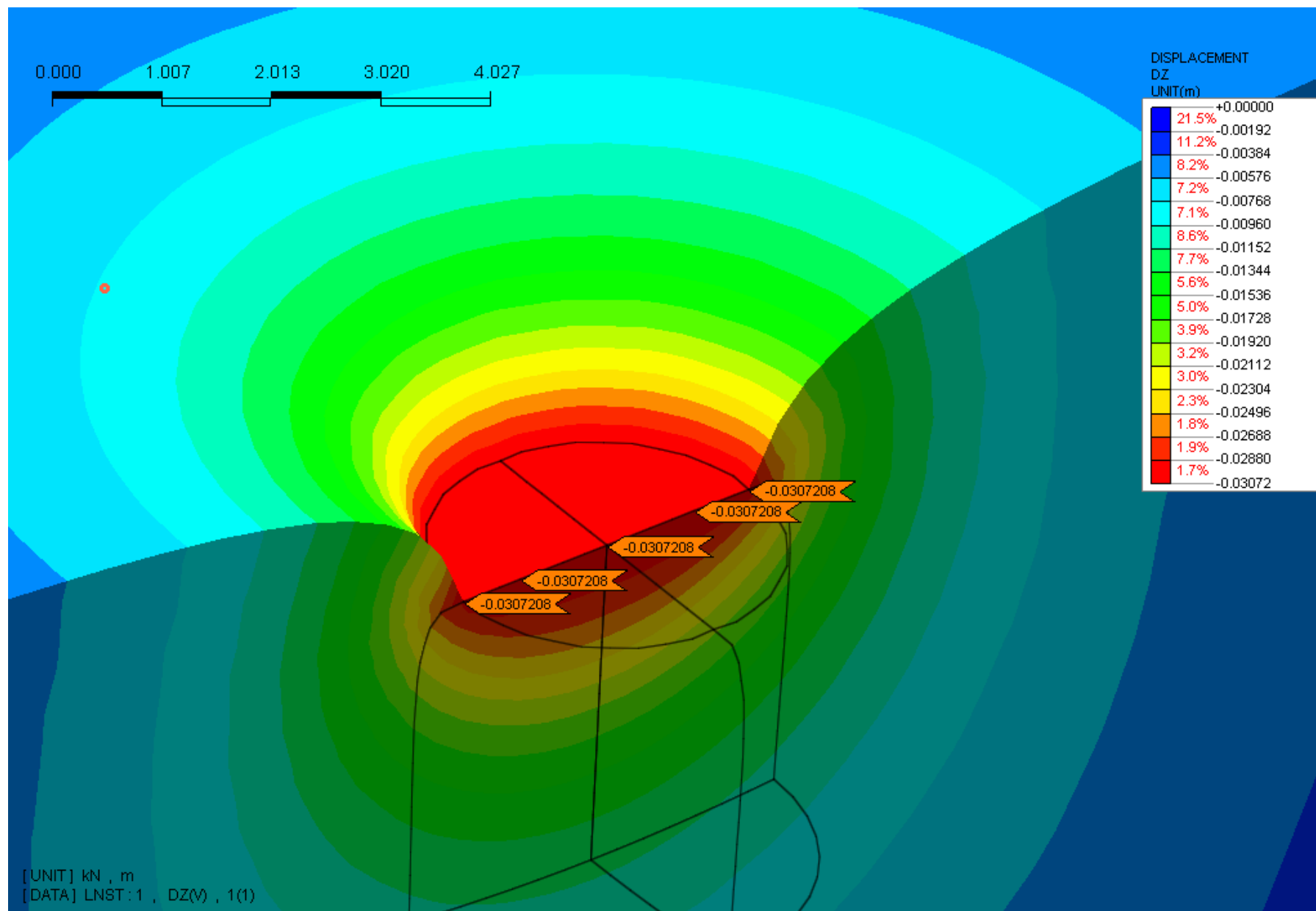


Рисунок 5.4 – Изополе вертикальных перемещений при жестком фундаменте. 4-х узловой КЭ.

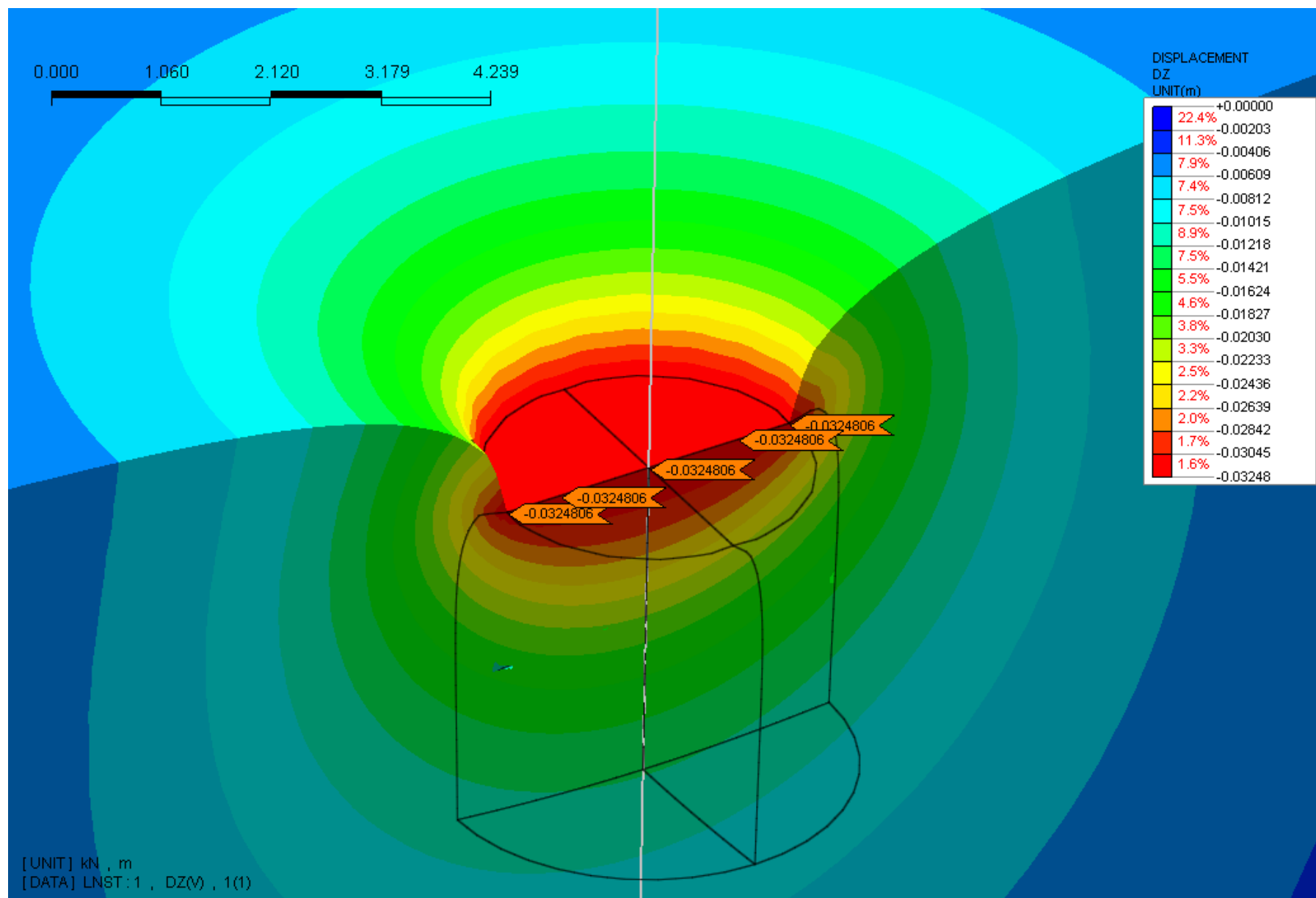


Рисунок 5.5 – Изополе вертикальных перемещений при жестком фундаменте. 8-ми узловой КЭ.

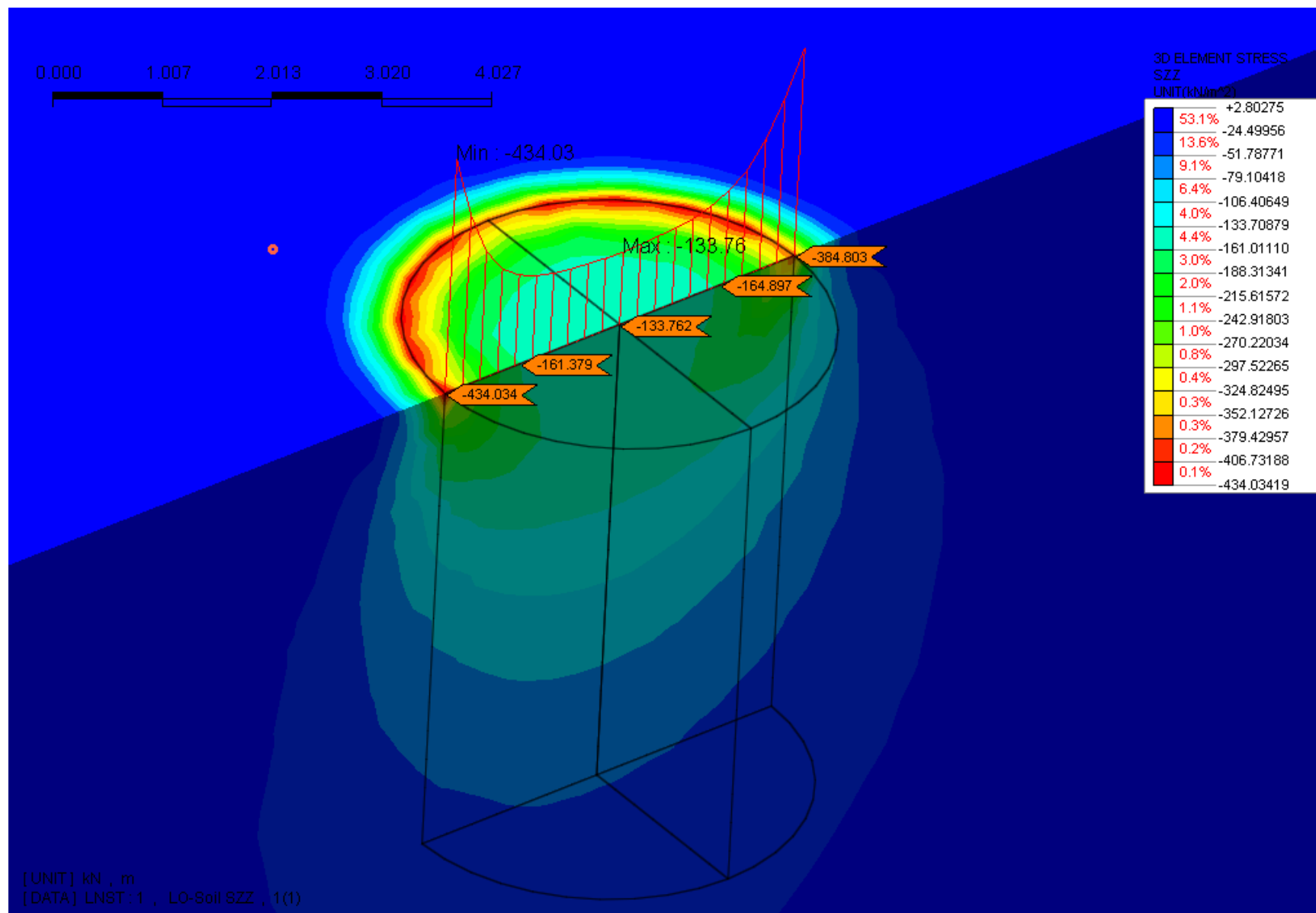


Рисунок 5.6 – Изополе вертикальных напряжений (по Z). 4-х узловой КЭ.

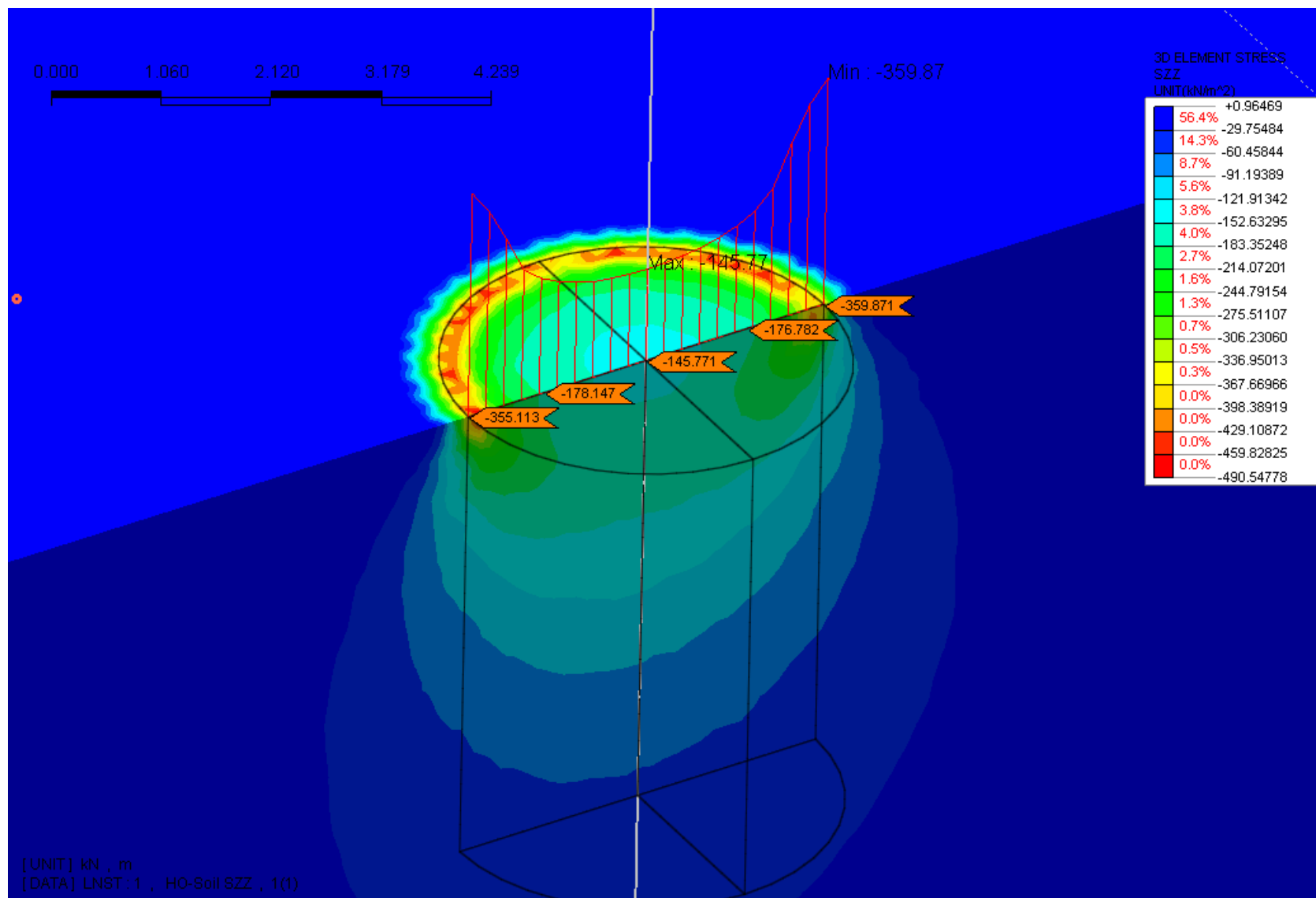


Рисунок 5.7 – Изополе вертикальных напряжений (по Z). 8-ми узловой КЭ.

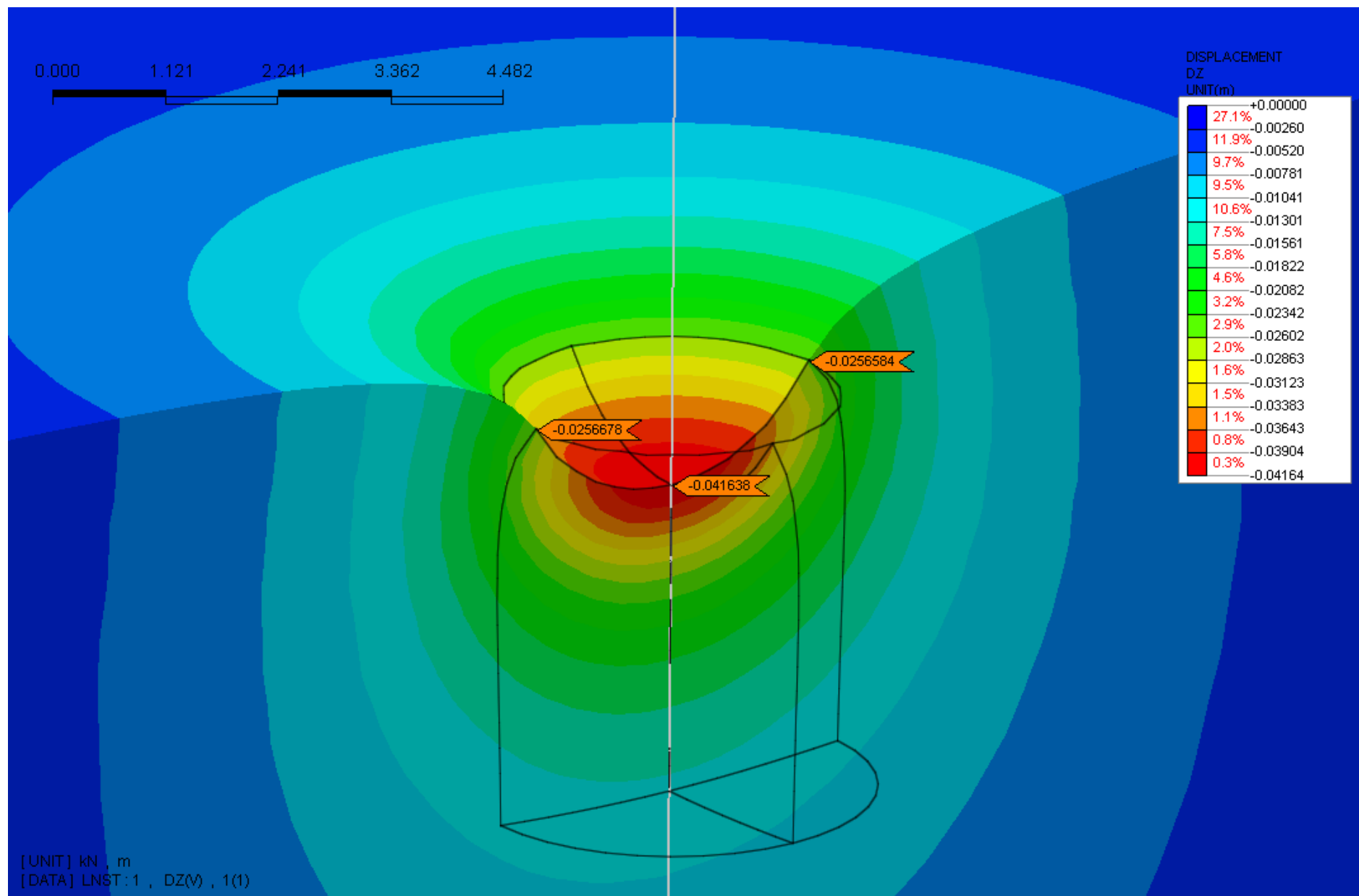


Рисунок 5.8 – Изополе вертикальных перемещений гибкого фундамента. 4-х узловой КЭ.

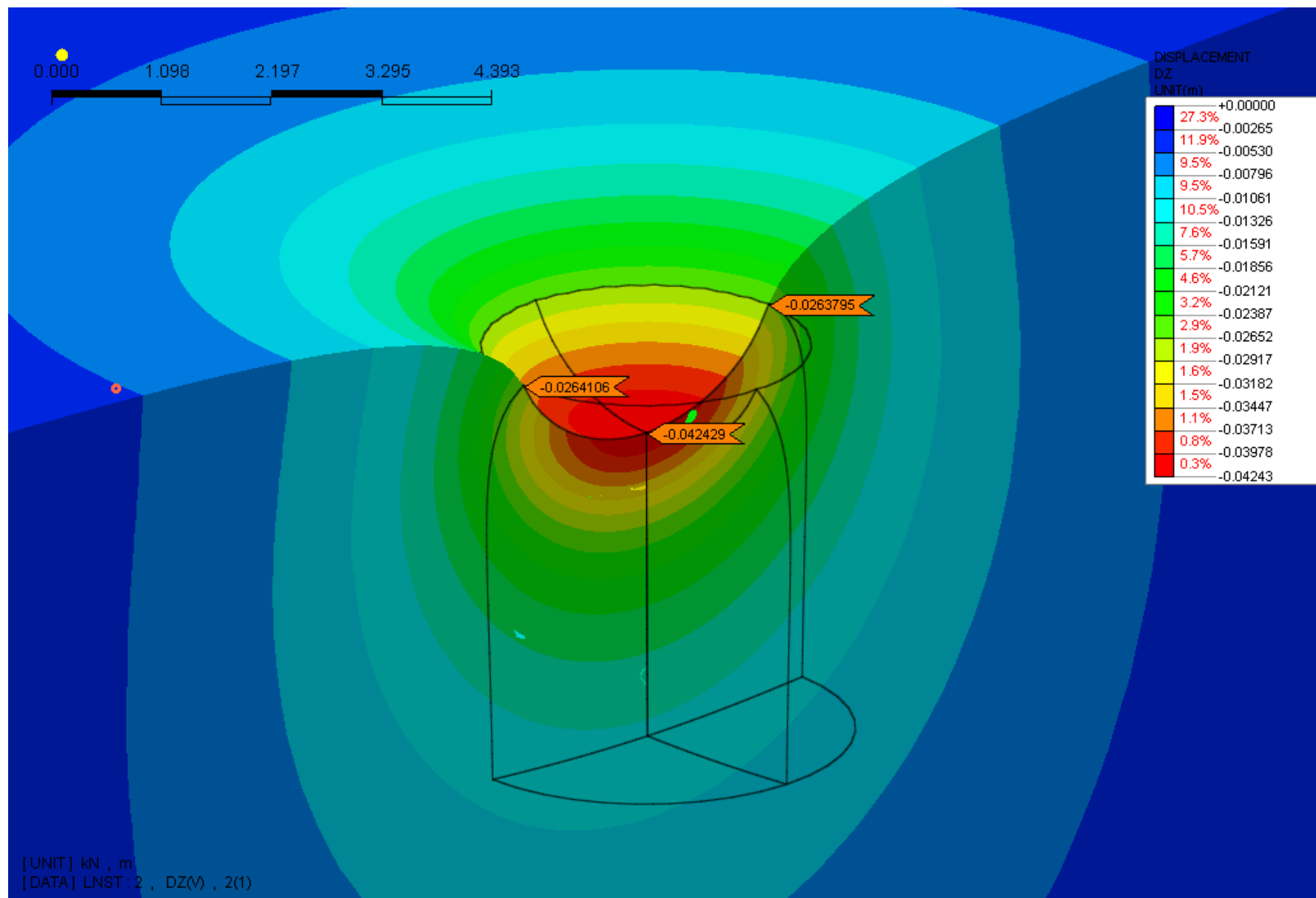


Рисунок 5.9 – Изополе вертикальных перемещений гибкого фундамента. 8-ми узловой КЭ.

Таблица 5.2. Сопоставление результатов расчета

		Осадка, мм		Источник	GTS			
					4-х узловые КЭ	Погреш ность, %	8-ми узловы е КЭ	Погреш ность, %
Линейно упругая модель	Жесткий фундамент	Осадка, мм	-	34.2	30.6	-10.5	32.5	-4.9
		Контактное давление, МПа	($r = 0$)	150	133.3	-11.3	145.8	-2.8
			($r = 1.14$ м)	182.5	160.8	-11.8	176.8	-5.7
			($r = a$)	INF	383	-	359	-
	Гибкий фундамент	Осадка, мм	($r = 0$)	43.6	41.6	-4.5	42.4	-2.6
			($r = a$)	27.8	25.66	-7.7	26.4	-5

Пример 6. Моделирование испытания на трехосное сжатие

Источник	Н. А. Цытович. Механика грунтов. Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. Москва – 1963.
Тип задачи	Статический нелинейный поэтапный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ	4-х узловой тетраэдр, 8-ми узловой тетраэдр, 4-х и 8-ми узловой элемент плоской деформации.

Описание

В основе использования МКЭ для решения задач механики грунтов лежит предположения о том, что грунт является сплошной средой, где НДС в точке описывается как для элементарного объема, напряжения и деформации в котором постоянны. В связи с этим корректное определение НДС в рамках элементарного объема наиболее точно определяет правильность работы той или иной модели материала, или в нашем случае грунтового массива под нагрузкой. Трехосное сжатие образца является примером НДС грунтового массива в точке (элементарном объеме) на глубине и наиболее точно соответствует работе грунта в естественных условиях. Испытание проводят в лаборатории на образцах цилиндрической формы в приборе трехосного сжатия. Принципиальная схема приведена на рисунке 6.1. Образец грунта диаметром не менее 38 мм и высотой $(2..2.5)D$ подвергается всестороннему давлению $\sigma_2 = \sigma_3$ и получает объемные деформации. После этого при постоянном боковом давлении $\sigma_2 = \sigma_3 = const$ вертикальное давление σ_1 увеличивается до момента потери устойчивости образца.

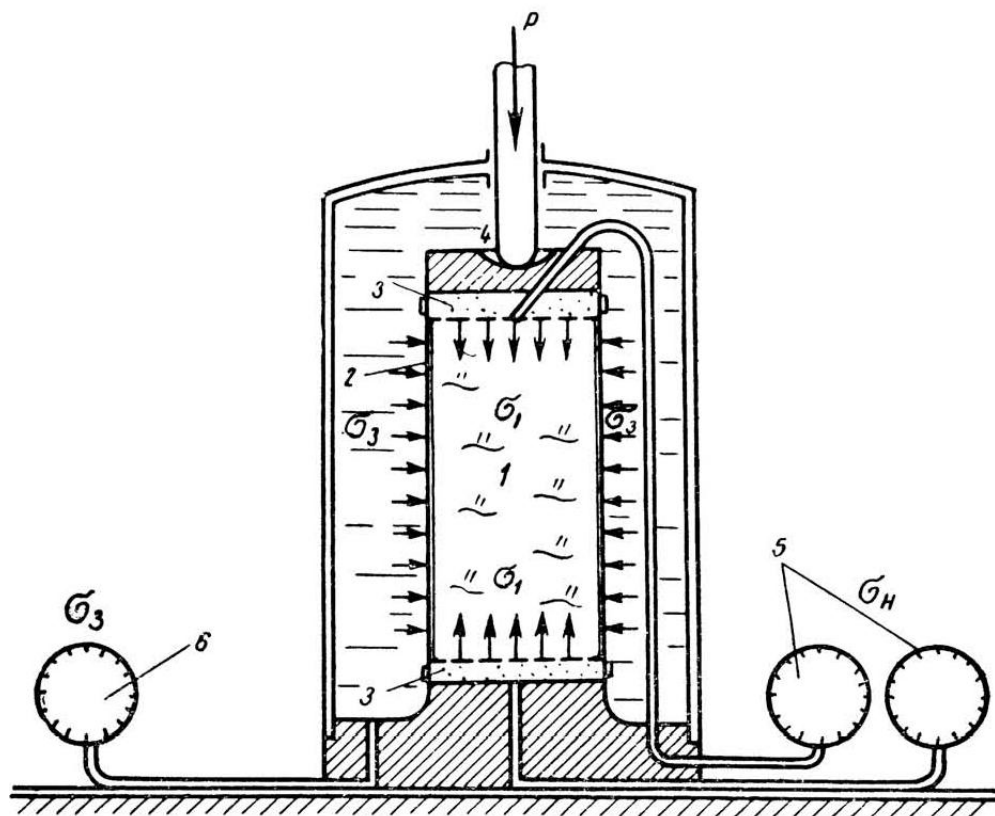


Рисунок 6.1 – Схема прибора на трехосное сжатие

В результате испытаний для нескольких значений бокового давления $\sigma_2 = \sigma_3$ (например, 3-х) определяется соответствующее предельное вертикальное давление σ_1 .

Предмет верификации

Таким образом, целью данного верификационного примера является моделирование трехосного испытания для оценки корректности работы верифицируемых моделей грунта Мора-Кулона и Друккера-Прагера в рамках элементарного объема.

Задача сводится к определению НДС при осесимметричном нагружении образца - пространственная задача.

При этом также рассматривается плоское НДС в случае когда $\sigma_2 \neq \sigma_3$. Данный случай не отражает реальных условий испытаний, однако позволяет оценить работу модели в условиях плоской деформации.

GTS модель

Основной задачей моделирования является определение предельного вертикального давления на образец $\sigma_1^{пред}$ при различном боковом давлении

$\sigma_2 = \sigma_3$ при осесимметричном нагружении. При плоской деформации задается боковое давление σ_2 , а σ_3 остается неизвестным определяется по результатам решения КЭ модели.

Положительным результатом верификации будет получение равенства уравнения условия текучести для каждой модели при подстановке полученных значений давлений $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, где $\sigma_1 = \sigma_1^{пред}$.

Условия текучести для модели Мора-Кулона ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ – главные напряжения):

$$\sigma_1 \frac{1 - \sin\varphi}{2c \cos\varphi} - \sigma_3 \frac{1 + \sin\varphi}{2c \cos\varphi} = 1$$

Условия текучести для модели Друккера-Прагера:

$$\sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k = 0$$

J_2 - второй инвариант девиатора напряжений;

I_1 - первый инвариант тензора напряжений;

$$k = \frac{6c \cos\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)};$$

$$\alpha = \frac{2 \sin\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)}.$$

Методика моделирования. Исходные данные для проведения данного численного эксперимента приведена в таблице 6.1.

Таблица 6.1. Исходные данные

Геометрические размеры модели	H=100 мм, D=50 мм
Граничные условия	Для пространственного НДС: Нижняя грань – ограничение деформаций по Z Для плоского НДС: Нижняя грань – ограничение деформаций по Y
Модель грунта	Мора-Кулона: E=25000 кПа, $\nu=0.3$, $c=45 \text{ кПа}$, $\varphi=25$ град., $\psi=25$, $\gamma=0 \text{ кН/м}^3$ Друккера-Прагера: E=25000 кПа, $\nu=0.3$, $c=45 \text{ кПа}$, $\varphi=25$ град., $\psi=25$, $\gamma=0 \text{ кН/м}^3$
Нагрузка	Всестороннее давление: 1. 100 кПа

	2. 200 кПа 3. 300 кПа Дополнительное вертикальное: 1000 кПа
Тип КЭ	4-х узловой тетраэдр, 8-ми узловой тетраэдр, 4-х и 8-ми узловой элемент плоской деформации.
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона-Рафсона

Решение состоит из двух расчетных этапов:

1. Всестороннее обжатие образца $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.
2. Приложение дополнительной вертикальной нагрузки $\Delta\sigma_1$, заведомо больше ее предельного значения.

Определение предельной нагрузки $\sigma_1^{пред} = \sigma_1 + \Delta\sigma_1$ осуществляется с использованием процедуры автоматического задания шага приращения нагрузки, где с установленной точностью определяется доля нагрузки, при которой система имеет устойчивое решение (условия сходимости выполняются)

Конечно-элементные модели для объемного и плоского напряженного состояния представлены на рисунке 6.2.

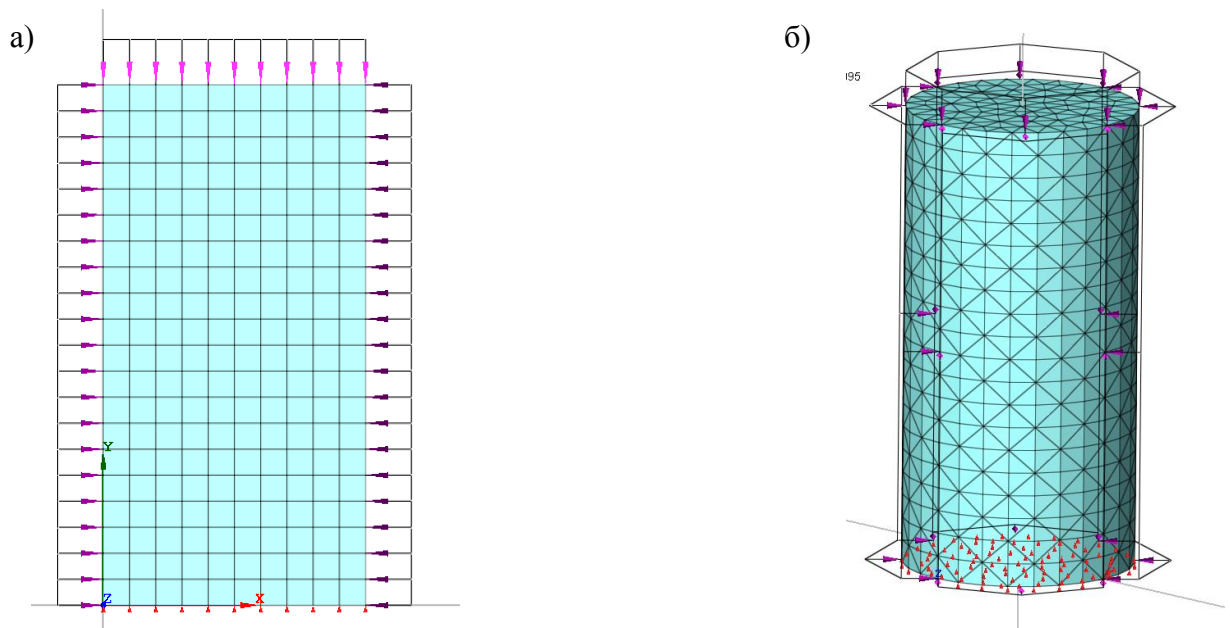


Рисунок 6.2 – КЭ модель: а) – плоская деформация, б) – пространственное НДС

Результаты расчетов представлены ниже.

Результаты расчетов

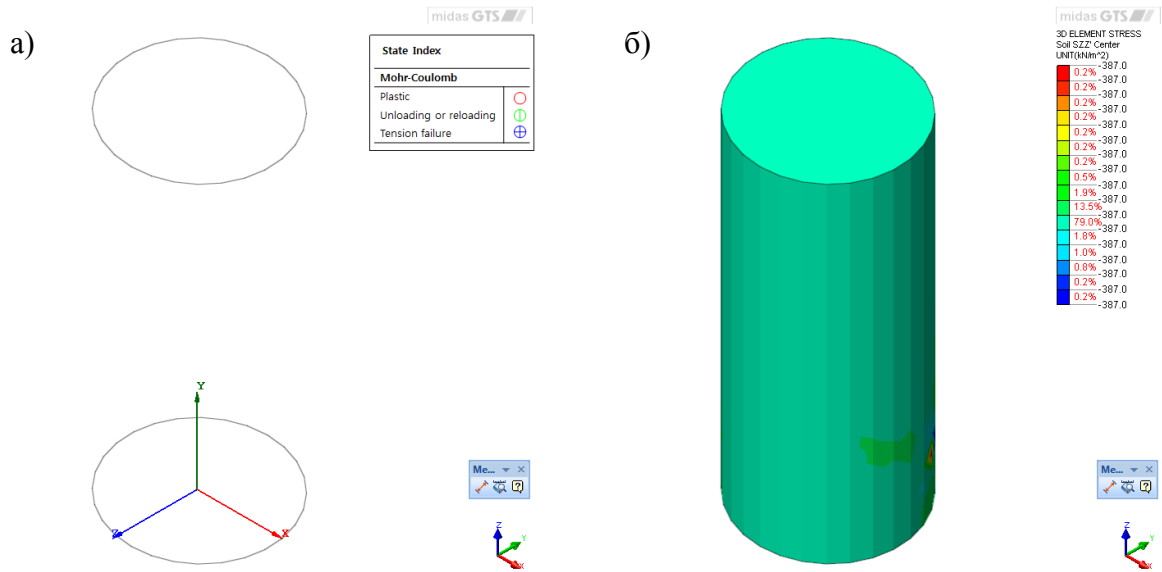


Рисунок 6.3 – Модель Мора-Кулона (пространственное НДС) при $\sigma_2 = \sigma_3 = 100 \text{ кПа}$:

а) – индикатор состояния КЭ, б) – изополе $\sigma_1 = 387 \text{ кПа}$

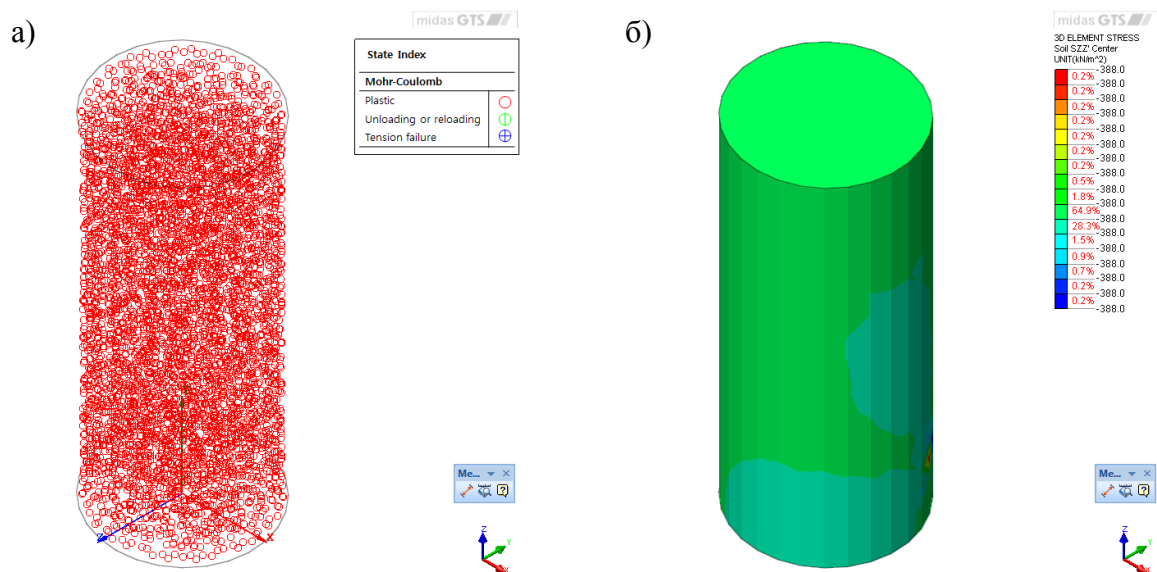


Рисунок 6.4 – Модель Мора-Кулона (пространственное НДС) при $\sigma_2 = \sigma_3 = 100 \text{ кПа}$:

а) – индикатор состояния КЭ, б) – изополе $\sigma_1 = 388 \text{ кПа}$

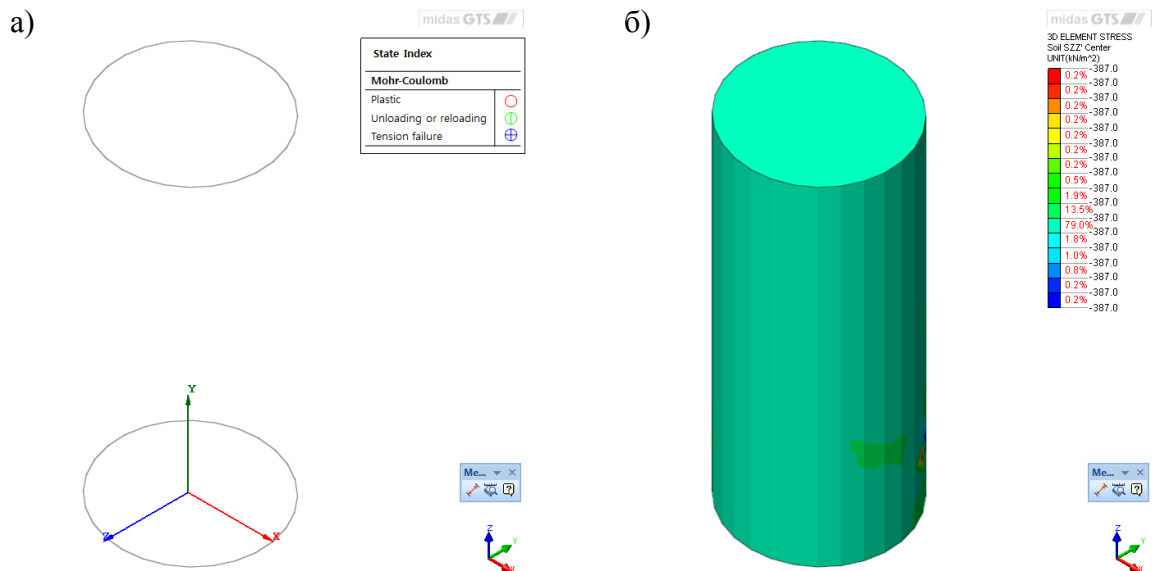


Рисунок 6.5 – Модель Друккера-Прагера (пространственное НДС) при

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 100 \text{ кПа:}$$

а) – индикатор состояния КЭ, б) – изополе $\sigma_1 = 387 \text{ кПа}$

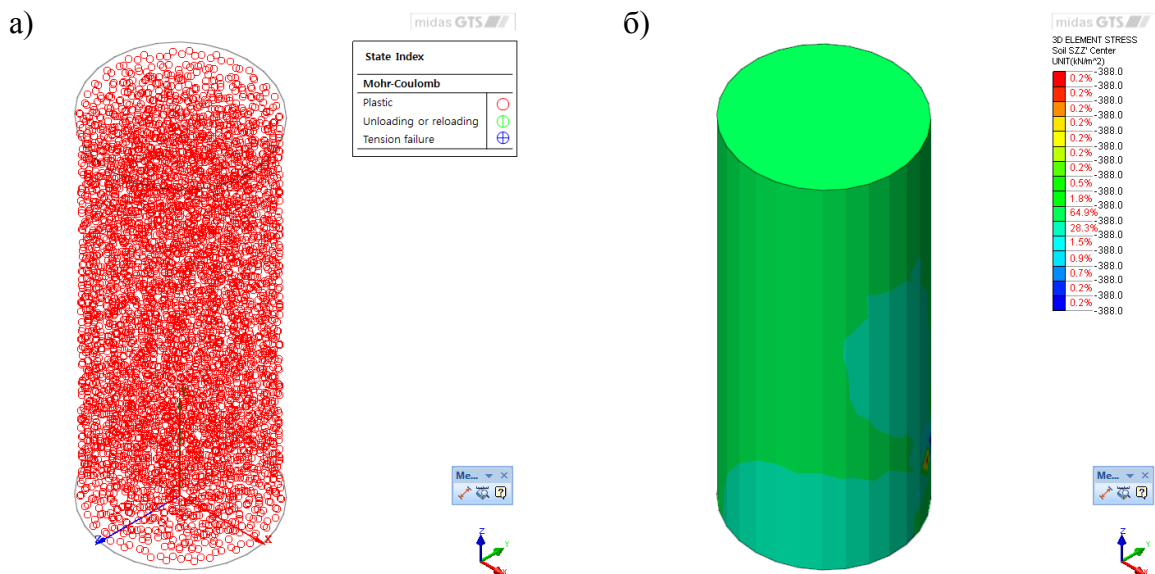


Рисунок 6.6 – Модель Друккера-Прагера (пространственное НДС) при

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 100 \text{ кПа:}$$

а) – индикатор состояния КЭ, б) – изополе $\sigma_1 = 388 \text{ кПа}$

По результатам расчетов на рисунке 6.3 при вертикальном давлении $\sigma_1 = 387 \text{ кПа}$ образец грунта находится в упругом состоянии. При увеличении нагрузки на 1 кПа $\sigma_1 = 388 \text{ кПа}$ образец полностью переходит в пластическое

состояние (рисунок 6.4). Полностью аналогичная картина получается при использовании КЭ более высокого порядка (10-ти узловой тетраэдр) и при применении модели Друккера-Прагера. Результаты определения предельного вертикального давления для бокового давления $\sigma_2 = \sigma_3 = 200 \text{ кПа}$ и $\sigma_2 = \sigma_3 = 300 \text{ кПа}$ приведены в таблице 6.2.

Проведем подобный расчет для элементов плоской деформации.

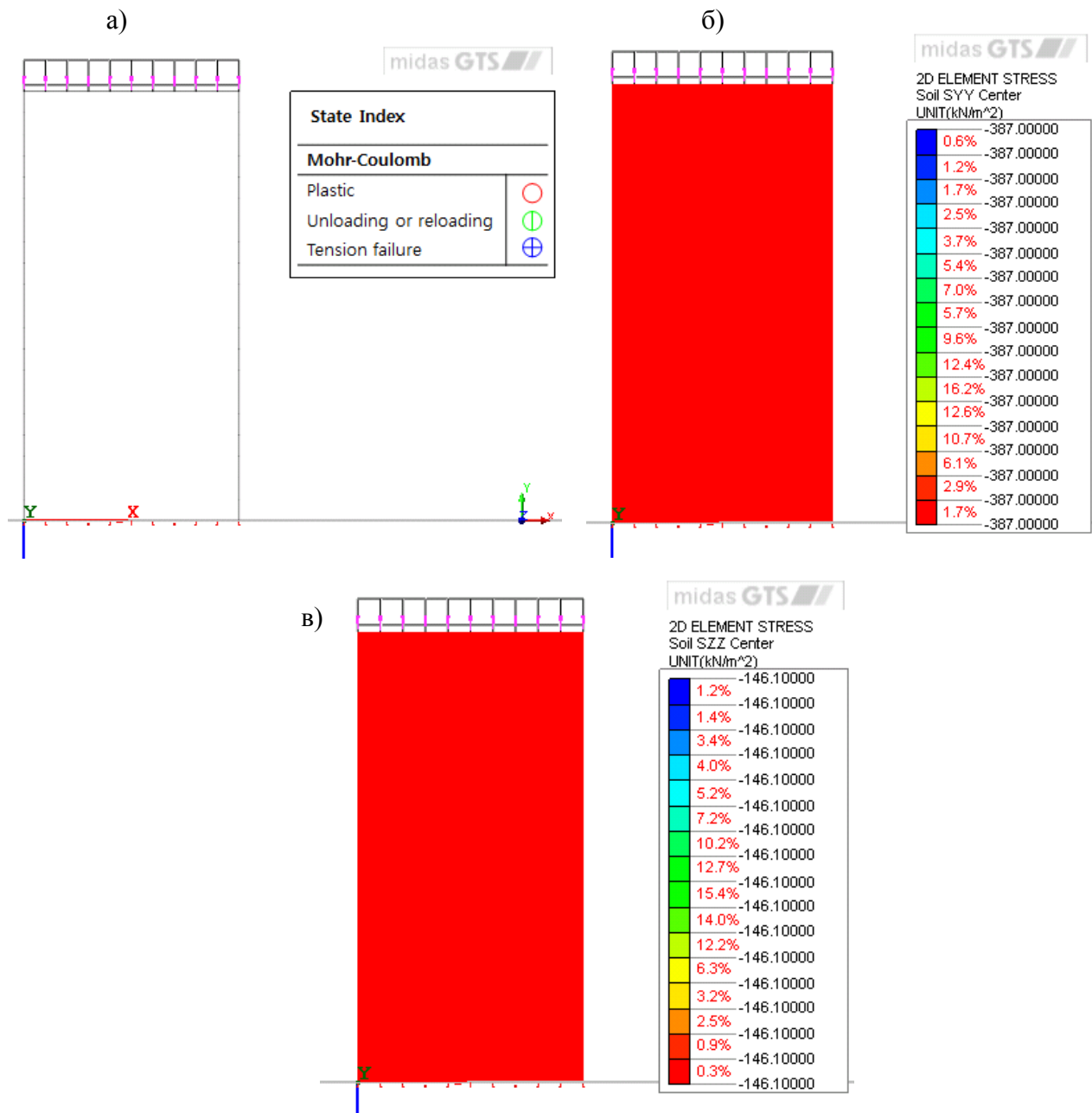


Рисунок 6.7 – Модель Мора-Кулона (плоская деформация) при $\sigma_3 = 100 \text{ кПа}$:

а) – индикатор состояния КЭ, б) – изополе $\sigma_1 = 387 \text{ кПа}$, в) – изополе $\sigma_2 = 146 \text{ кПа}$

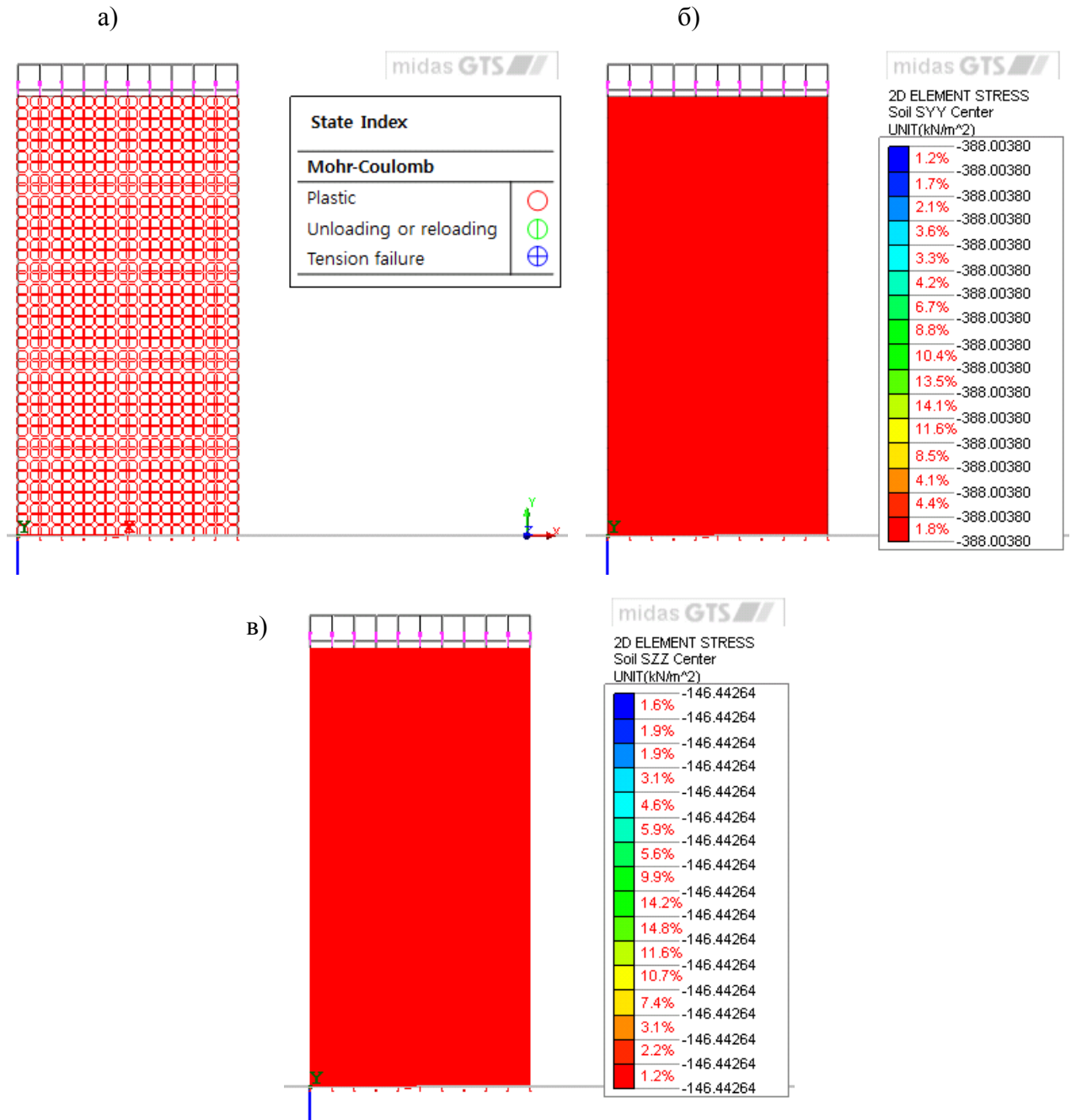


Рисунок 6.8 – Модель Мора-Кулона (плоская деформация) при $\sigma_3 = 100 \text{ кПа}$:

а) – индикатор состояния КЭ, б) – изополе $\sigma_1 = 388 \text{ кПа}$, в) – изополе

$$\sigma_2 = 146.4 \text{ кПа}$$

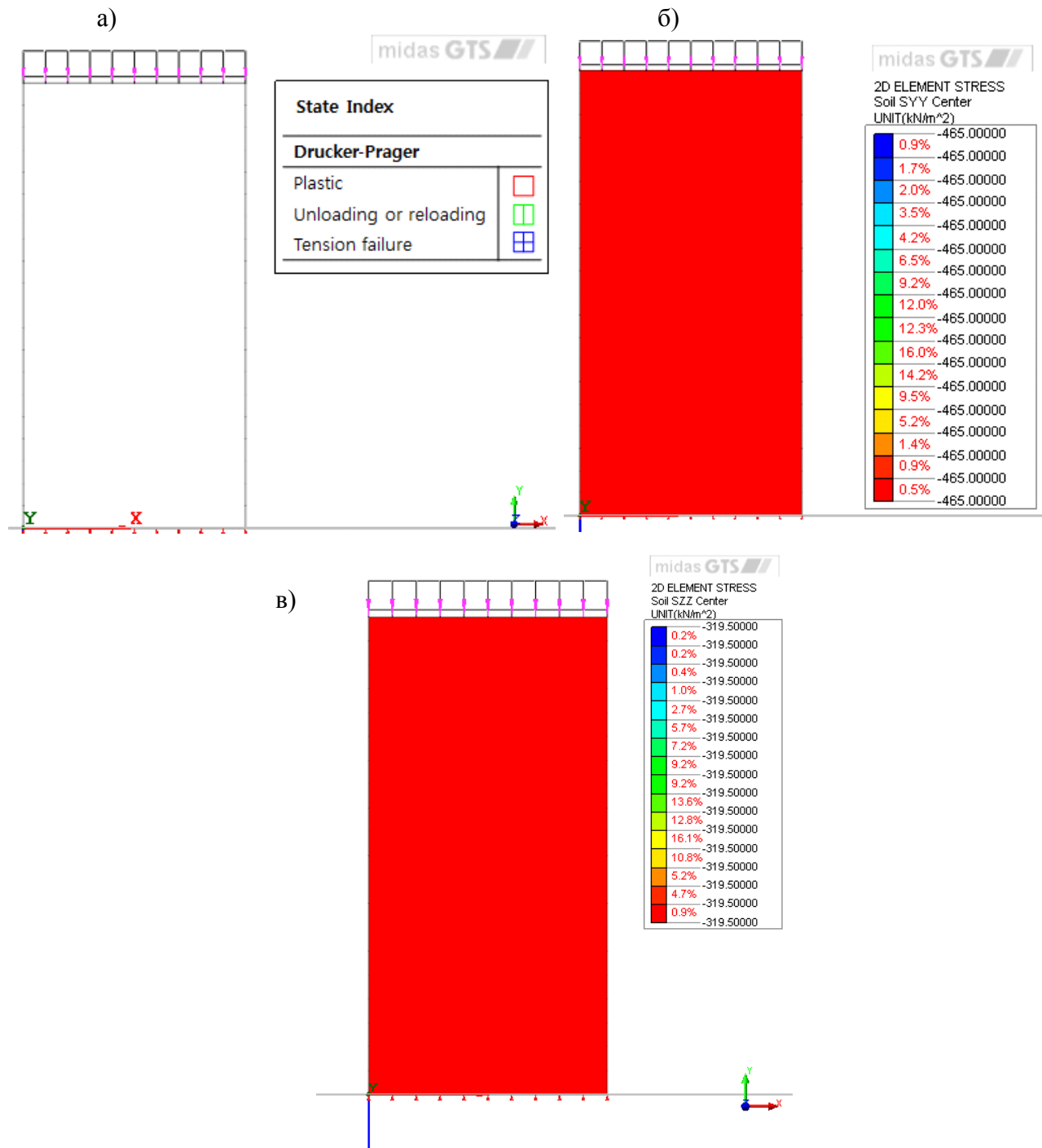


Рисунок 6.9 – Модель Друккера Прагера (плоская деформация) при $\sigma_3 = 100 \text{ кПа}$:

а) – индикатор состояния КЭ, б) – изополе $\sigma_1 = 465 \text{ кПа}$, в) – изополе $\sigma_2 = 319.5 \text{ кПа}$

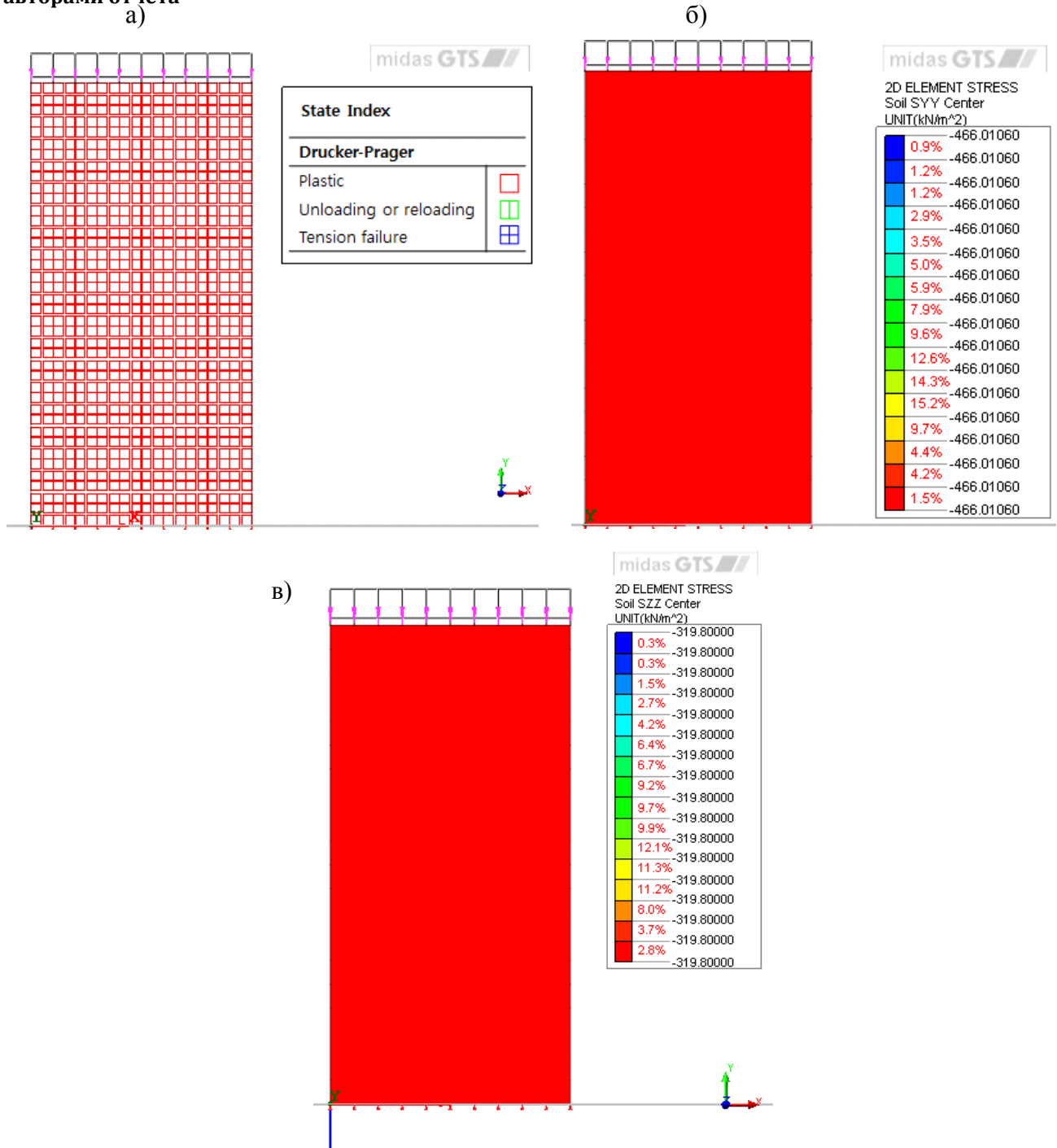


Рисунок 6.10 – Модель Друккера-Прагера (плоская деформация) при $\sigma_3 = 100 \text{ кПа}$:

а) – индикатор состояния КЭ, б) – изополе $\sigma_1 = 466 \text{ кПа}$, в) – изополе $\sigma_2 = 319.8 \text{ кПа}$

Для модели Мора-Кулона по результатам расчетов на рисунке 6.7 при вертикальном давлении $\sigma_1 = 387 \text{ кПа}$ образец грунта находится в упругом состоянии. При увеличении нагрузки на 1 кПа $\sigma_1 = 388 \text{ кПа}$ образец полностью переходит в пластическое состояние (рисунок 6.8). Полностью аналогичная

картина получается при использовании КЭ более высокого порядка (8-ми узловой четырехугольник). При применении модели Друккера-Прагера при вертикальном давлении $\sigma_1 = 388 \text{ кПа}$ образец грунта продолжает находиться в упругом состоянии, что сохраняется при увеличении давления до 465 кПа . При увеличении нагрузки на 1 кПа $\sigma_1 = 466 \text{ кПа}$ образец полностью переходит в пластическое состояние (рисунок 6.10), однако процесс сходится при последующем увеличении до 680 кПа . Далее наступает расхождение решения. Таким образом, из этого следует, что применение модели Друккера-Прагера для плоской деформации не вполне корректно, ввиду полученных результатов. Результаты определения предельного вертикального давления для бокового давления $\sigma_2 = 200 \text{ кПа}$ и $\sigma_2 = 300 \text{ кПа}$ приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2. Сопоставление результатов расчета

Тип КЭ	4-х, 8-ми узловой КЭ плоской деформации, 4-х и 8-ми узловой тетраэдр							
Боковое давление, кПа	Мора-Кулона				Друккера-Прагера			
	Плоское НДС		Пространственное НДС		Плоское НДС		Пространственное НДС	
	$\sigma_1^{\text{пред}}$	Условие текучести	$\sigma_1^{\text{пред}}$	Условие текучести	$\sigma_1^{\text{пред}}$	Условие текучести	$\sigma_1^{\text{пред}}$	Условие текучести
100	388	1=1.003	388	1=1.003	465	1=1.02	388	1=1.02
200	636	1=1.003	636	1=1.003	722	1=1.02	636	1=1.02
300	882	1=1.003	882	1=1.003	977	1=1.02	882	1=1.02

Пример 7. Моделирование испытания на одноплоскостной срез.

Источник	Н. А. Цытович. Механика грунтов. Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. Москва – 1963.
Тип задачи	Статический нелинейный поэтапный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ	4-х узловой тетраэдр, жесткие связи

Описание

Испытания грунтов методом одноплоскостного среза является наиболее распространенным испытанием в результате которого можно получить основные параметры теории прочности Мора-Кулона c – сцепление и φ – угол внутреннего трения. В отличие от трехосного испытания одноплоскостной срез приводит к возникновению в образце сложного напряженного состояния, поэтому успешный результат проведения испытания на конечно-элементной модели может свидетельствовать о корректности работы вычислений в рамках заданной модели грунта. Испытания грунтов на срез проводят в сдвиговом приборе, принципиальная схема которого представлена на рисунке 7.1. При испытании одна половина образца остается неподвижной, а другая имеет возможность перемещаться параллельно самой себе путем применения двух металлических цилиндрических обойм. Целью испытания является установление функциональной зависимости сопротивлением грунтов сдвигу и величиной нормального давления.

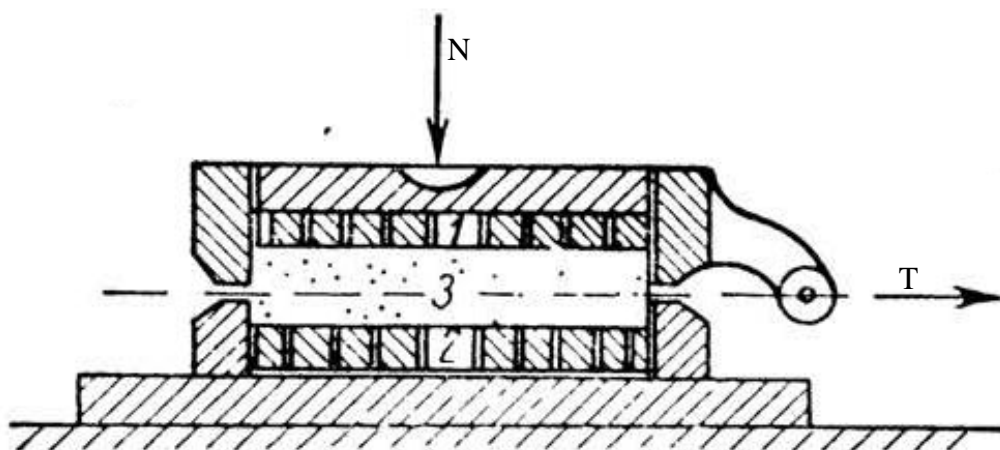


Рисунок 7.1 – Схема прибора на трехосное сжатие

Зависимость выражается через закон Кулона:

$$T = N \operatorname{tg}(\varphi) + c * F,$$

где F - площадь среза образца.

Предмет верификации

Таким образом, целью данного верификационного примера является определение сдвигающего усилия T при различных значениях вертикальной силы N .

В задаче требуется для 3-х значений N определить силу T , при которой происходит разрушение цилиндрического образца по поверхности сдвига.

GTS Модель

Расчет производится в пространственной постановке. КЭ модель представлена на рисунке 7.2. Неподвижная часть модели закреплена по краям по X, Y . Нижняя грань по X, Y, Z . Перемещения узлов по краям подвижной части объединены с перемещениями жесткого кольца по направлениям X, Y .

Методика моделирования. Исходные данные для проведения данного численного эксперимента приведен в таблице 7.1.

Таблица 7.1 Исходные данные

Геометрические размеры модели	Расчетная область – $D = 70$ мм, $H = 30$ мм
Граничные условия	Края модели неподвижной части - ограничение деформаций по X, Y . Нижняя грань – ограничение

	деформаций по X, Y, Z. Узлы ограждения ограничены по X,Y.
Модель грунта	Мора-Кулона: $E=8200$ кПа, $\nu=0.3$, $\gamma=0$ кН/м ³ , $c=45$ кПа, $\phi=25$ град, $\psi=0$ град.
Нагрузка	Вертикальная нагрузка: 1. $N=0$ кН 2. $N=0.384$ кН 3. $N=0.763$ кН Горизонтальная нагрузка: $T=2$ кН
Тип КЭ	<i>Грунтовый массив:</i> 4-х узловой тетраэдр; <i>Жесткое кольцо:</i> 8-ми узловой гексаэдр <i>Связь кольца с образцом грунта:</i> Жесткие связи по направлению X, Y.
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона-Рафсона

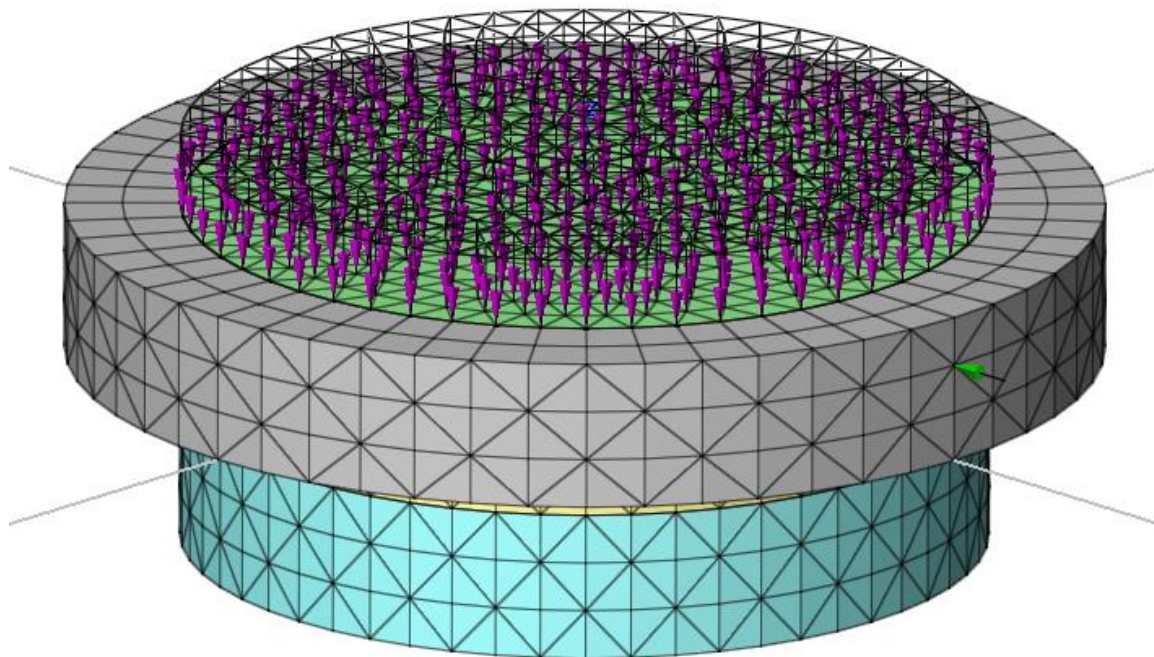


Рисунок 7.2 – КЭ модель

Решение состоит из двух расчетных этапов:

1. Приложение вертикальной сжимающей силы N .
2. Приложение горизонтальной силы T

Определение предельной нагрузки T осуществляется с использованием процедуры автоматического задания шага приращения нагрузки, где с установленной точностью определяется доля нагрузки, при которой система имеет устойчивое решение (условия сходимости выполняются).

Результаты

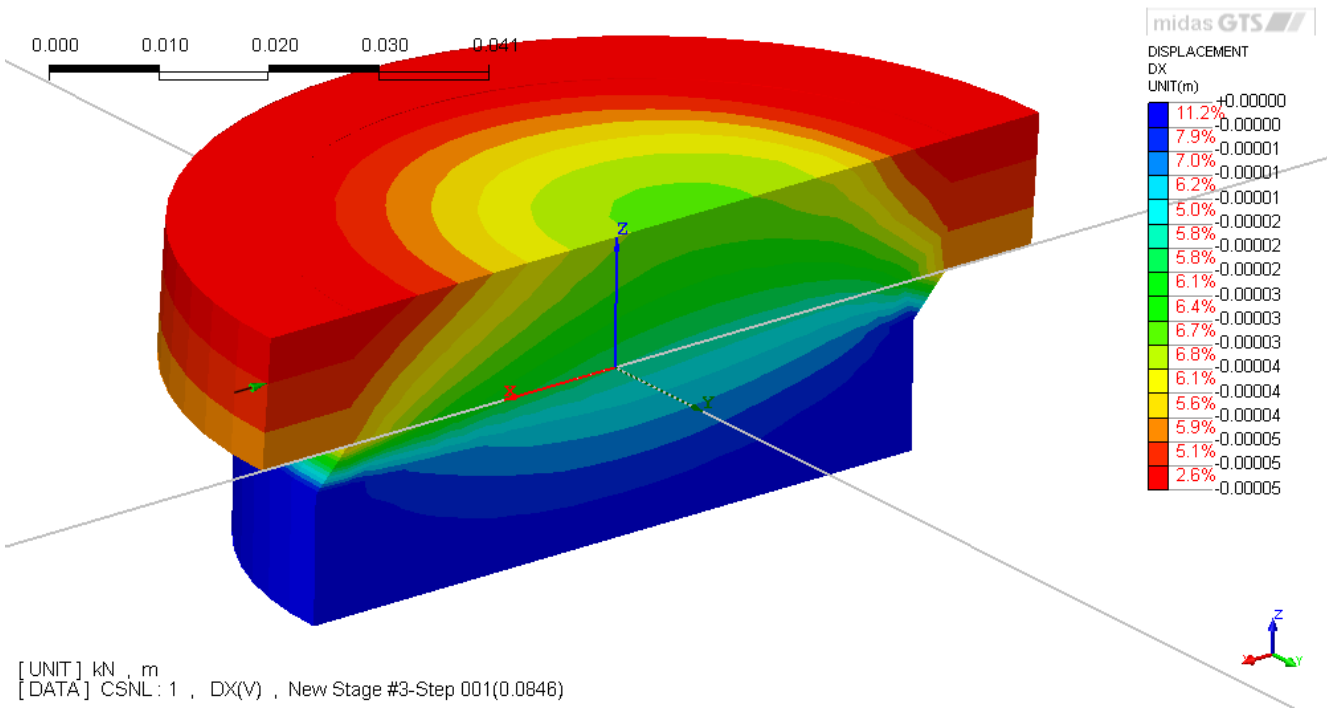


Рисунок 7.2 – Изополе горизонтальных перемещений. N=0

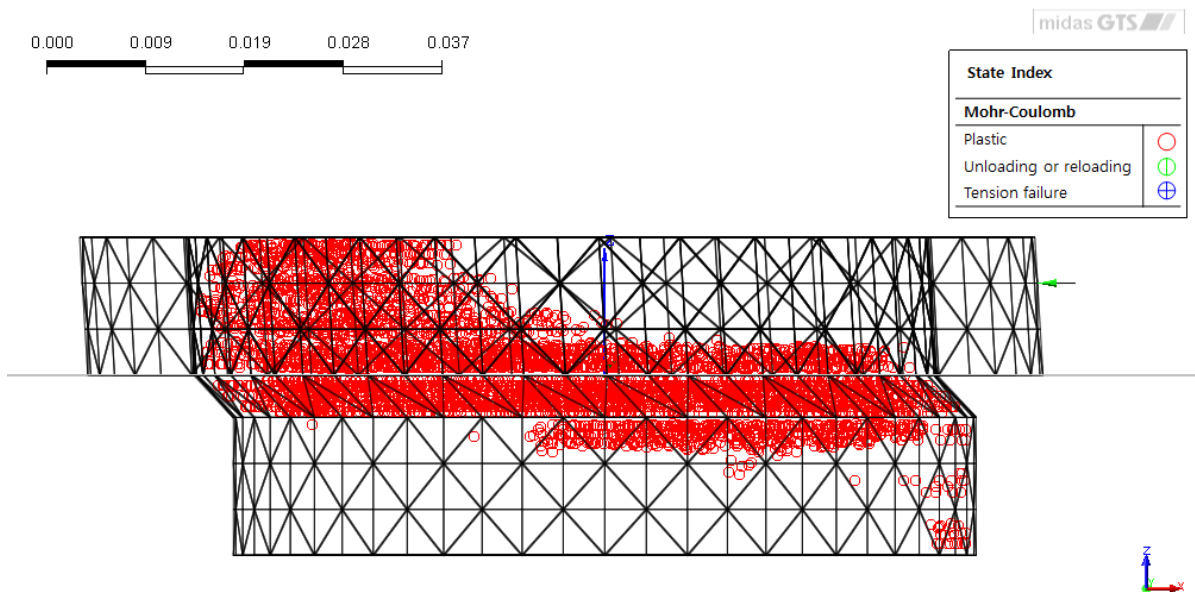


Рисунок 7.4 – Индикатор состояния элементов (красные точки – предельное НДС). N=0

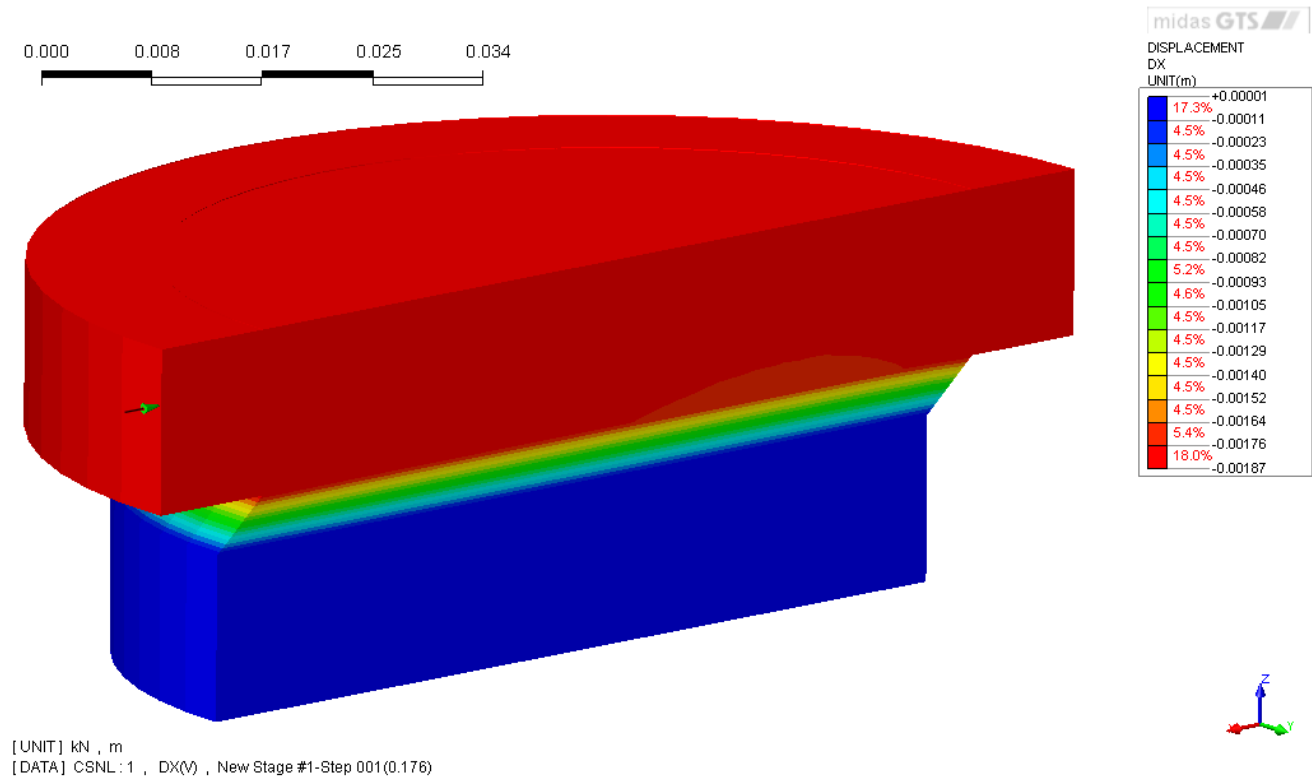


Рисунок 7.5 – Изополе горизонтальных перемещений. N=0.384 кН.

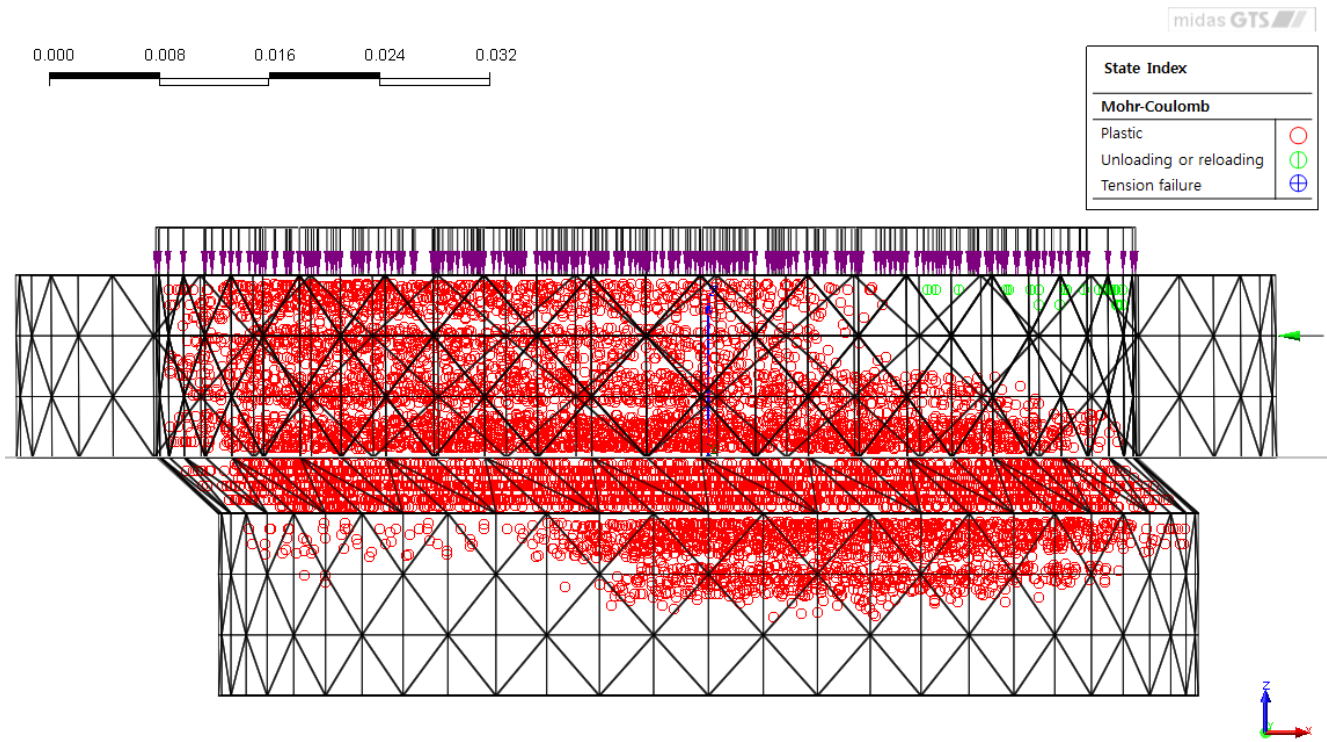


Рисунок 7.6 – Индикатор состояния элементов (красные точки – предельное НДС). N=0.384 кН.

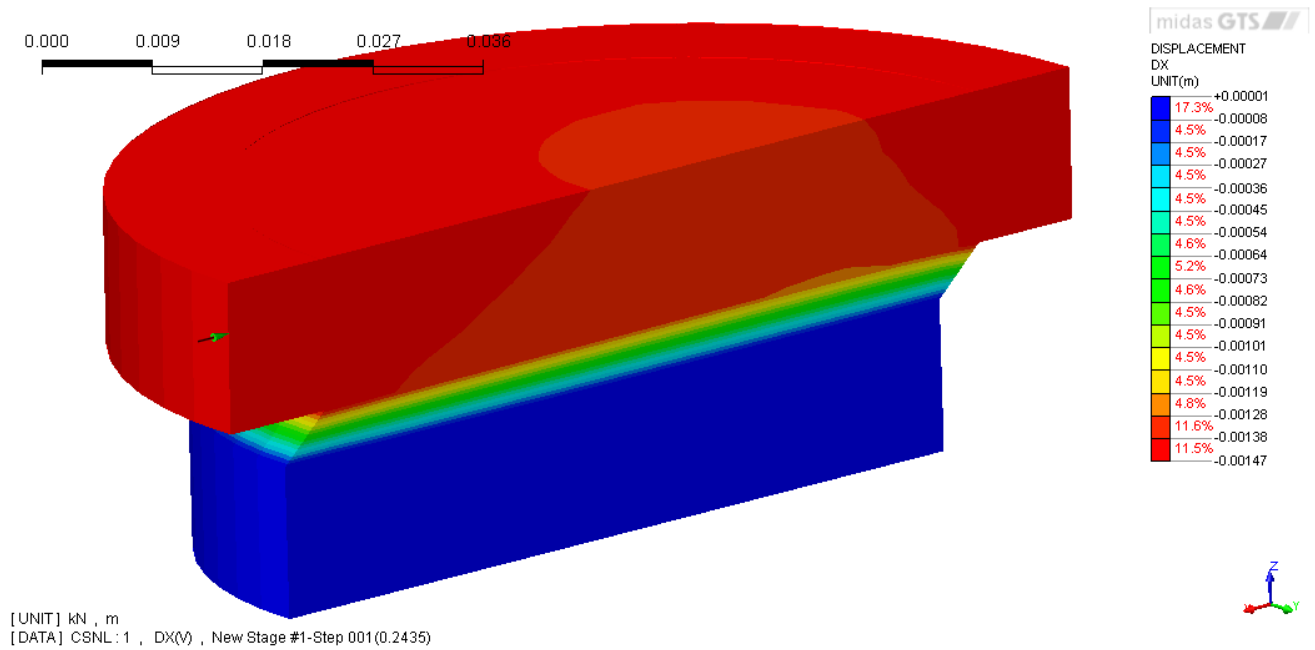


Рисунок 7.7 – Изополе горизонтальных перемещений. N=0.743 кН.

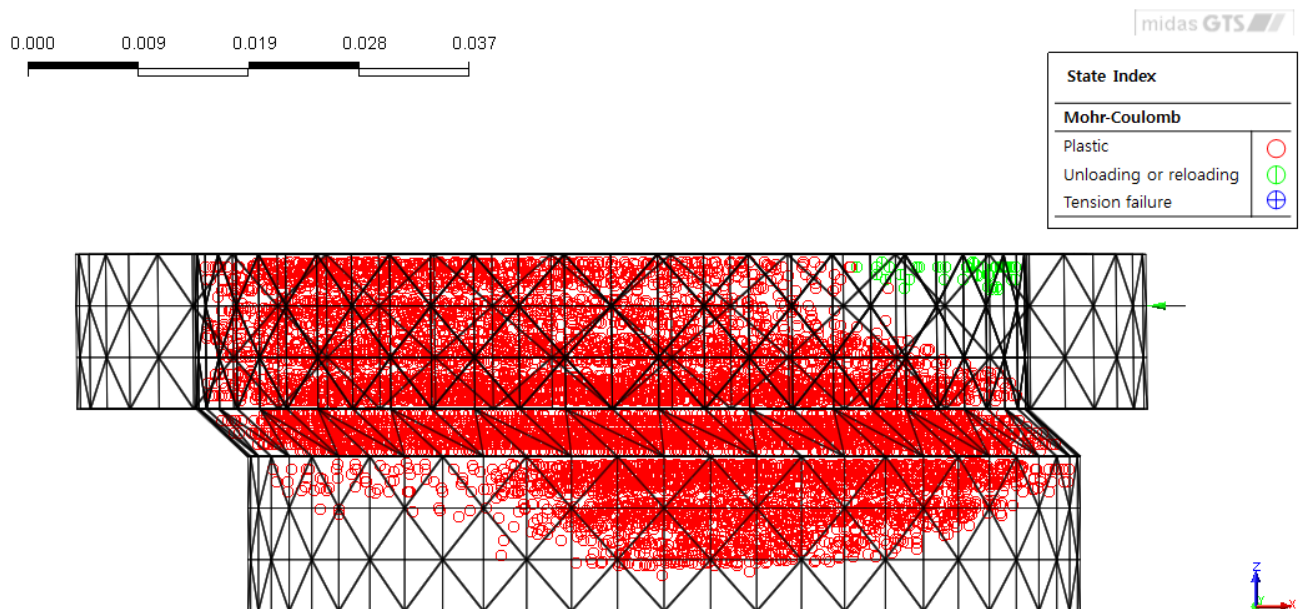


Рисунок 7.8 – Индикатор состояния элементов (красные точки – предельное НДС). N=0.743 кН.

Таблица 7.2. Сопоставление результатов расчета

	Сдвиговое усилие, кН при вертикальном давлении:		
	N = 0	N = 0.384	N = 0.763
Источник (закон Кулона)	0.173	0.35	0.51
GTS	0.169	0.352	0.488
Погрешность, %	-2.3	+0.57	-4.3

Пример 8. Определение активного и пассивного давления грунта на подпорную стенку

Источник	Chang-Yu Ou. Deep Excavations. Theory and Practice. – London, Taylor & Francis, 2006. – 532 p.
Тип задачи	Статический нелинейный поэтапный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ	4-х угольный 8-ми узловой элемент плоской деформации, односторонние связи

Описание

Известно давление грунта на подпорные стены зависит от их перемещений. На рисунке 8.1 приведена диаграмма зависимости давления грунта от горизонтального перемещения ограждения.

Следуя диаграмме после достижения перемещениями стены определенного значения, грунтовый массив с внешней стороны переходит в предельное состояние, и формируется поверхность сдвига активной зоны грунта (рисунок 1.2), что соответствует возникновению активного давления грунта. С внутренней стороны формируется поверхность сдвига пассивной зоны давления грунта, что соответствует возникновению пассивного давления.

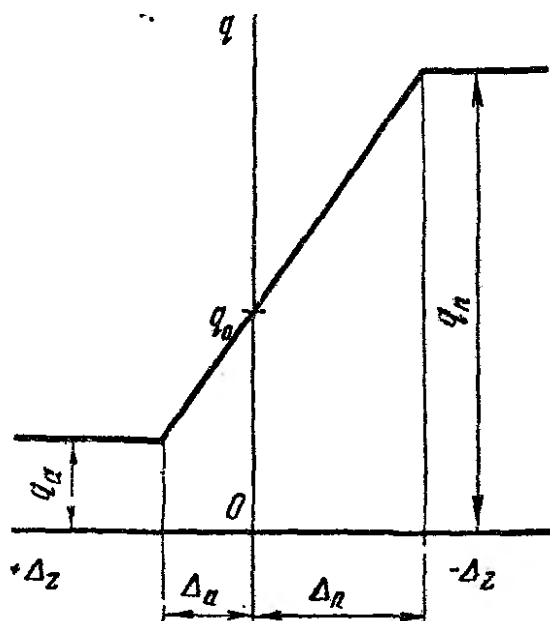


Рисунок 8.1 – Диаграмма зависимости давления грунта от горизонтального перемещения ограждения

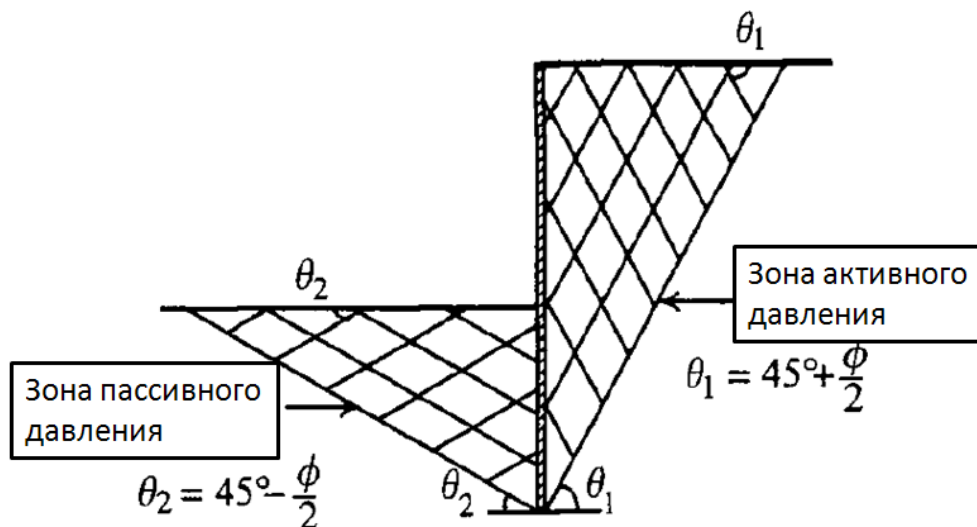


Рисунок 8.2 – Зоны пластического (предельного) состояния

Активное давление грунта в точке, соответствующее предельному состоянию по теории прочности Кулона:

$$q_a = \gamma H t g^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) - 2c * t g \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Пассивное давление грунта в точке, соответствующее предельному состоянию по теории прочности Кулона:

$$q_p = \gamma H t g^2 \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right) + 2c * t g \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right).$$

φ, c - прочностные характеристики грунта;

H – ордината точки, в которой определяется давление;

γ - удельный вес грунта.

Как правило, для возникновения пассивного давления требуется гораздо большее перемещение, чем для возникновения активного.

Предмет верификации

Таким образом, целью данного верификационного примера является определение зон активного и пассивного давлений грунта, а также вычисление численных значений давления грунта при нарастающем перемещении ограждения. Исходя из принятых предпосылок теории давления грунта на подпорные стены после достижения ограждением определенных перемещений,

давление должно оставаться постоянным при последующем увеличении перемещений.

Задача сводится к расчету КЭ модели на заданные перемещения.

GTS модель

Рассматривается модель плоской деформации. КЭ модель приведена на рисунке 1.4. Расчет производится для двух случаев нагрузки:

1. Вычисление пассивного давления. Заданные перемещение узлов ограждения – 0.1 м внутрь КЭ модели.

2. Вычисление активного давления. Заданные перемещение узлов ограждения – 0.05 м в обратную сторону от КЭ модели.

Соединение узлов ограждения с грунтовым массивом осуществляется с использованием односторонних горизонтальных связей (рисунок 1.3), которые могут работать только на сжатие. Это позволит избежать эффект притягивания грунта к стенке при перемещении в случае активного давления.

Исходные данные для проведения данного численного эксперимента приведена в таблице 1.1.

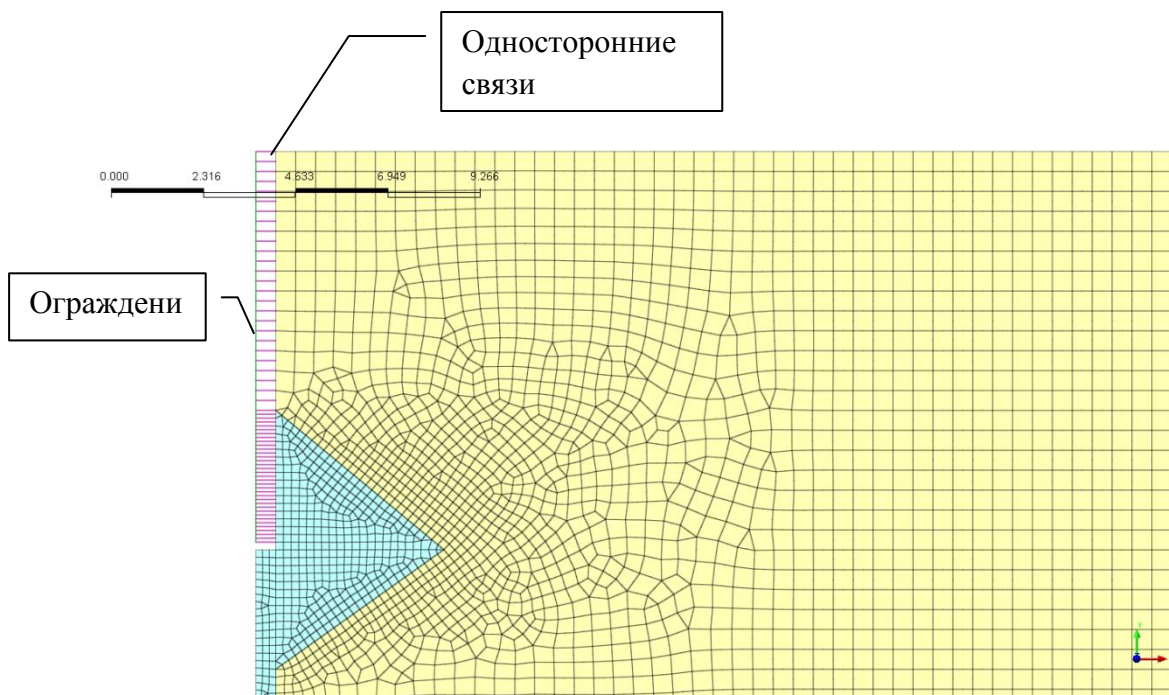


Рисунок 8.3 – Фрагмент КЭ модели.

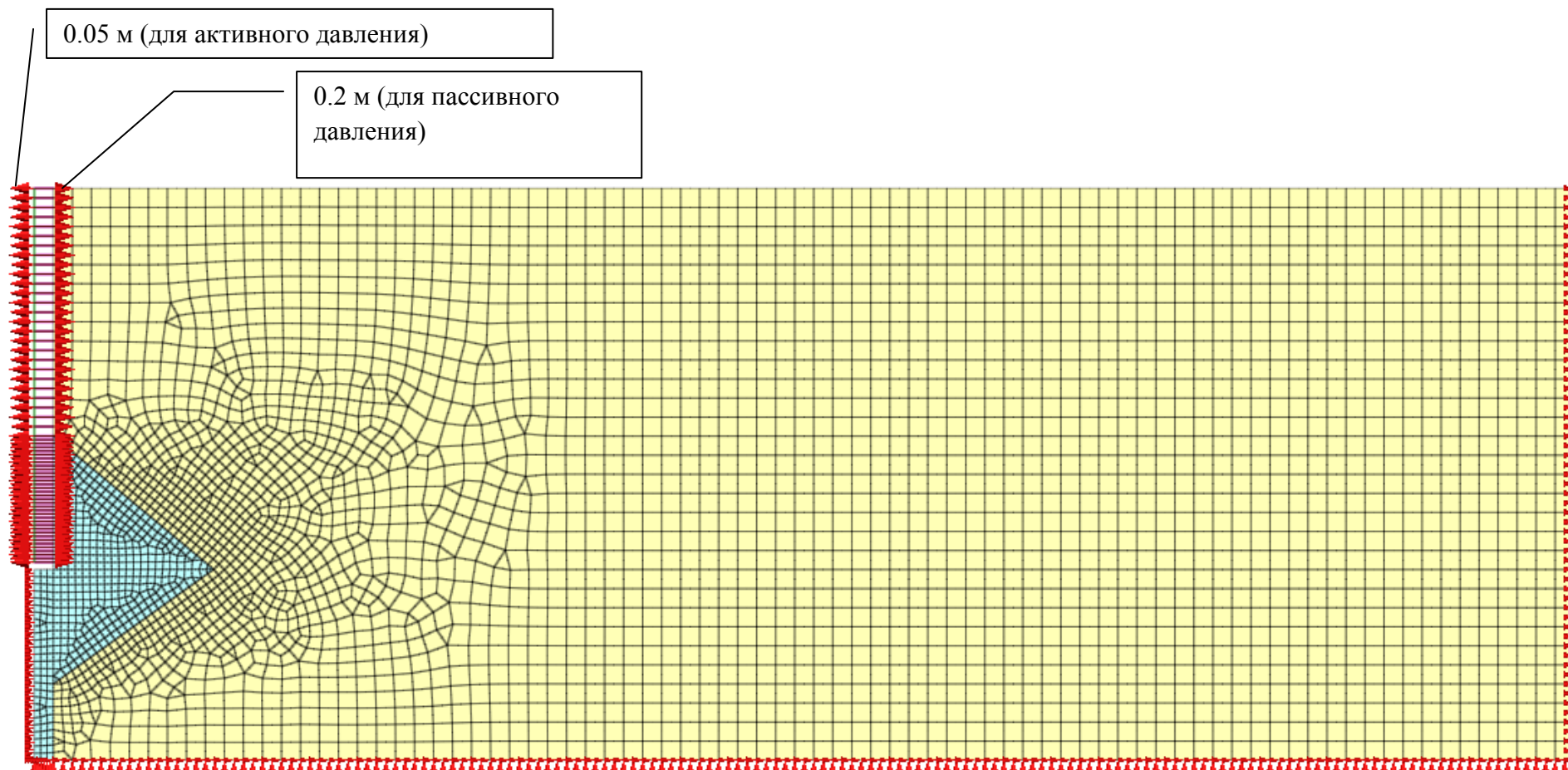


Рисунок 8.4 – КЭ модель. 2 варианта задания нагрузки.

Ниже в таблице 8.1 представлены входные данные для расчета.

Таблица 8.1. Исходные данные

Геометрические размеры модели	Расчетная область – 50х50х50 м; Глубина ограждения (щели) - Н = 5 м.
Граничные условия	Левая и правая грани – ограничение деформаций по X Нижняя грань – ограничение деформаций по X, Y Узлы ограждения ограничены по X,Y.
Модель грунта	Мора-Кулона: E=25000 кПа, ν=0.3, γ=20 кН/м ³ , c=5 кПа, φ=30 град, ψ=0 град.
Нагрузка	Заданное перемещение: Для пассивного давления: 0.1 м (по 0,002 м за 50 шагов) Для активного давления: 0.05 м (по 0,001 м за 50 шагов)
Тип КЭ	<i>Грунтовый массив:</i> 4-х узловой элемент плоской деформации; <i>Ограждение:</i> балочный изгибаемый стержневой элемент <i>Связь грунта и ограждения:</i> Односторонние упругие связи - жесткость при сжатии 1*10 ⁹ кН/м
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона-Рафсона

Расчет проводился в два этапа:

1. Задание начального НДС грунтового массива

Формирование начального НДС производился по негидростатическому закону

$$\sigma_x = \beta \sigma_y, \text{ где}$$

β - коэффициент бокового давления грунта в состоянии покоя, $\beta = 1 - \sin \varphi$

2. Приложение нагрузки – заданные перемещения.

Результаты расчетов представлены ниже.

Вычисление активного давления. Заданное перемещение 0.05 м внутрь модели.

Начальное НДС.

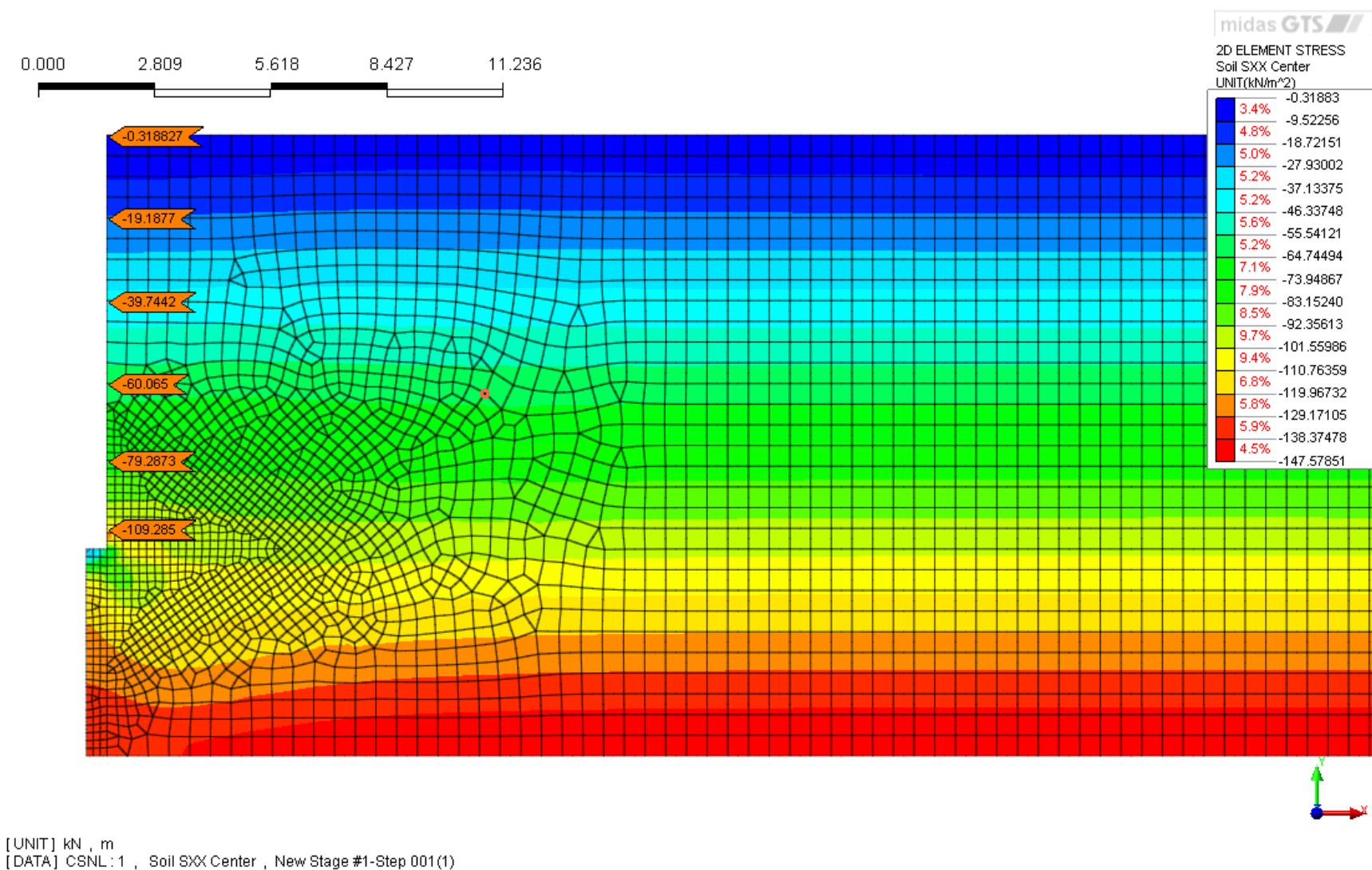


Рисунок 8.5 – Изополе горизонтальных напряжений. Начальное НДС.

Перемещение ограждения 0.001 м

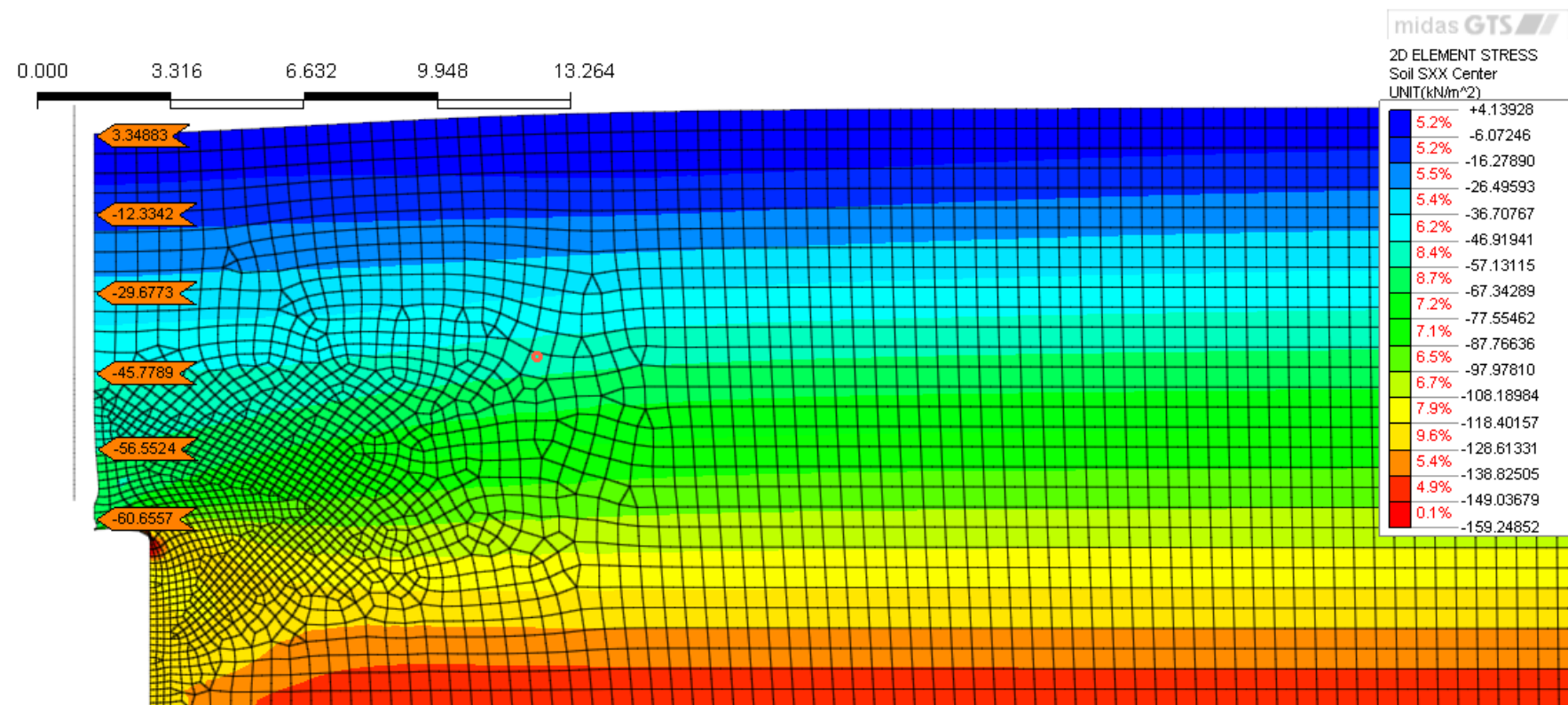


Рисунок 8.6 – Изополе горизонтальных напряжений. Перемещение 0.001 м

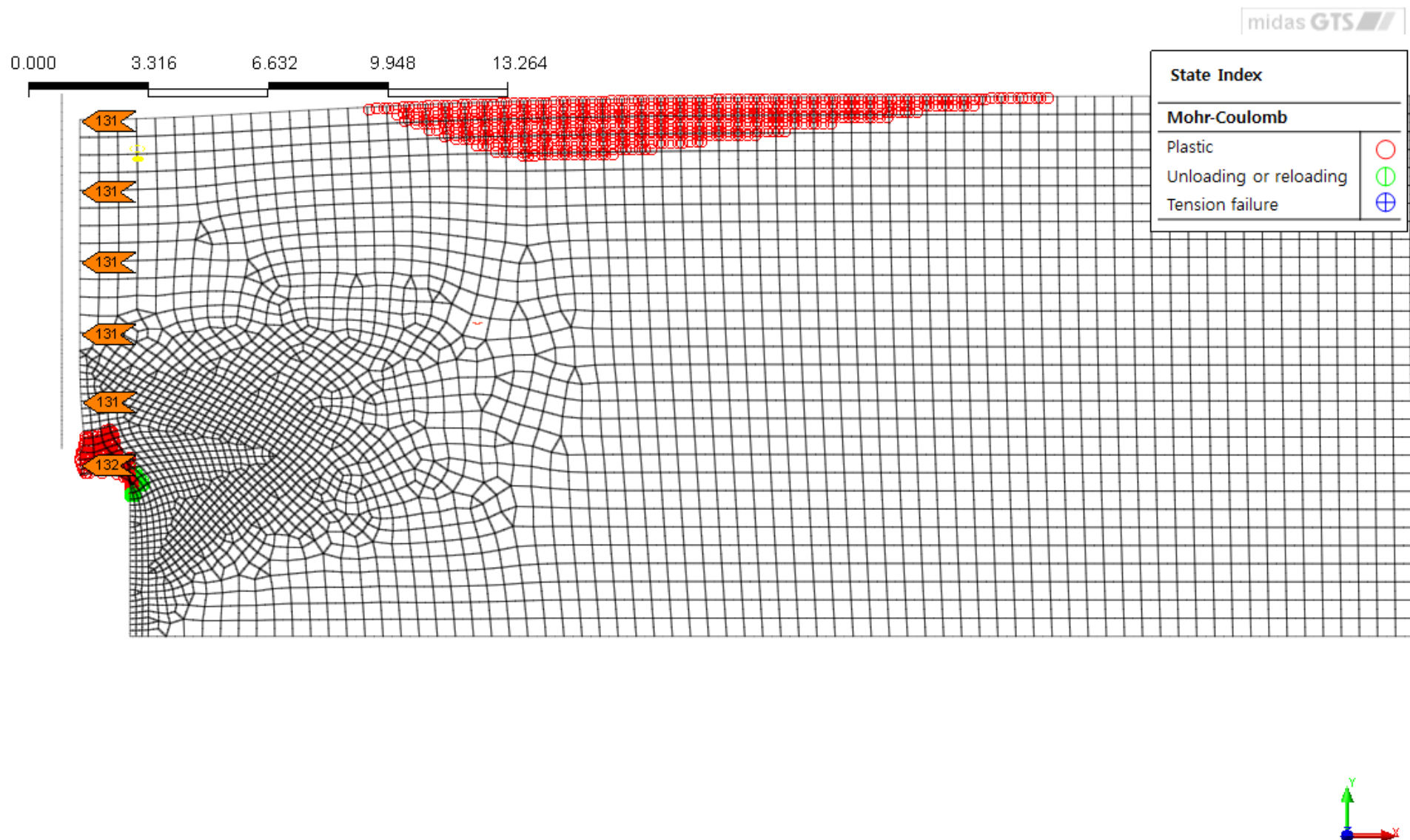


Рисунок 8.6 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.001 м

Перемещение ограждения 0.002 м

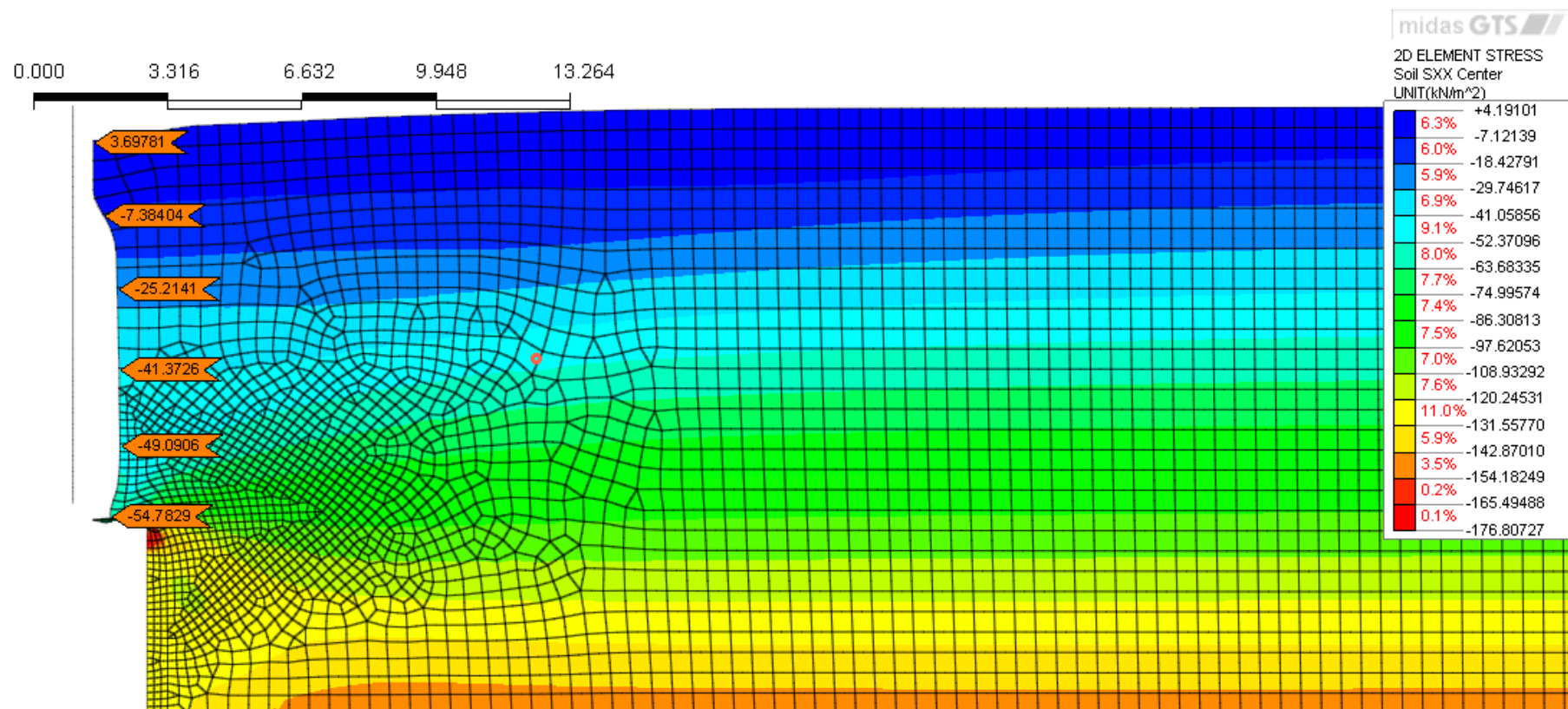


Рисунок 8.7 – Изополе горизонтальных напряжений. Перемещение 0.002 м

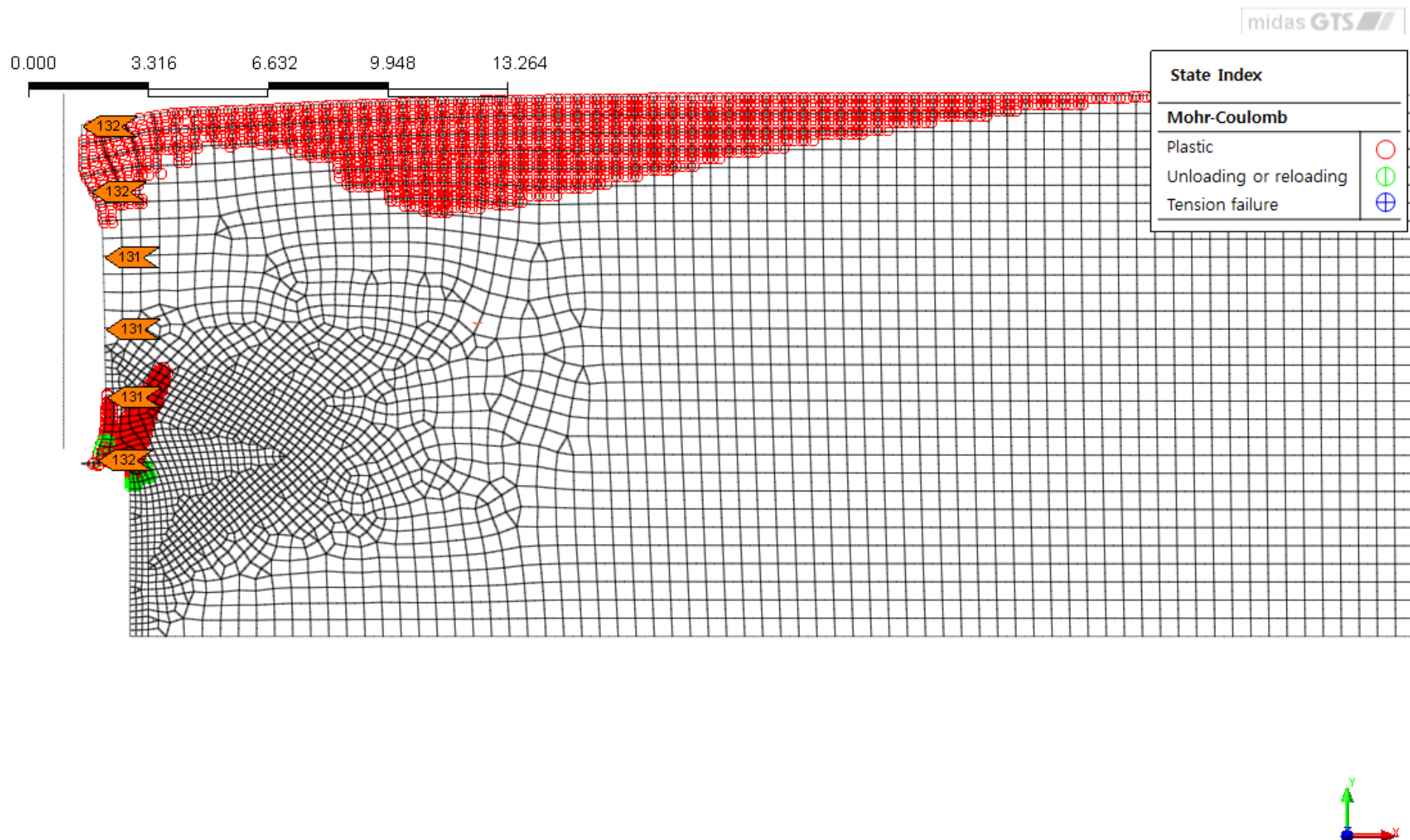


Рисунок 8.8 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.001 м

Перемещение ограждения 0.003.

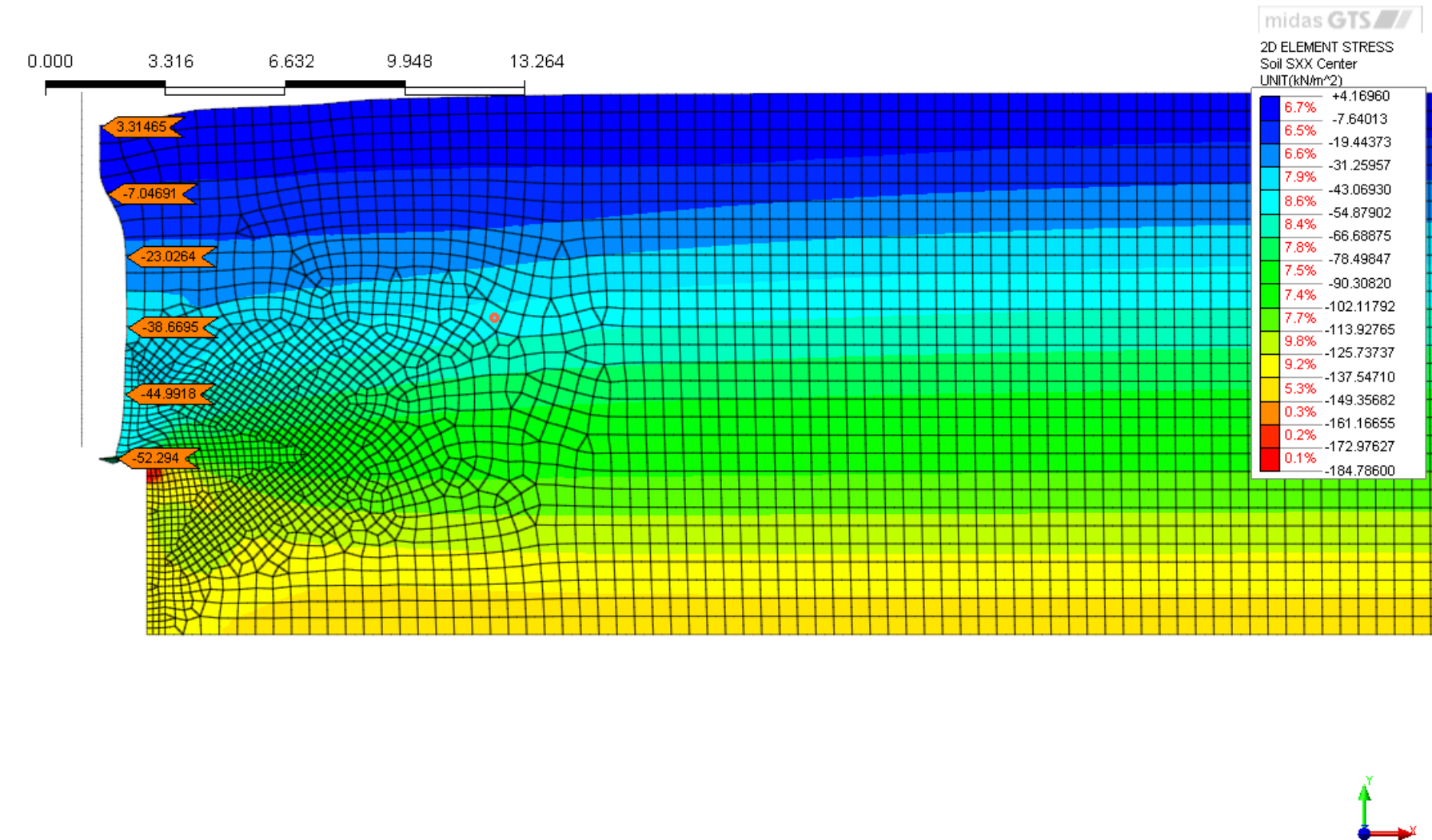


Рисунок 8.9 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.028 м

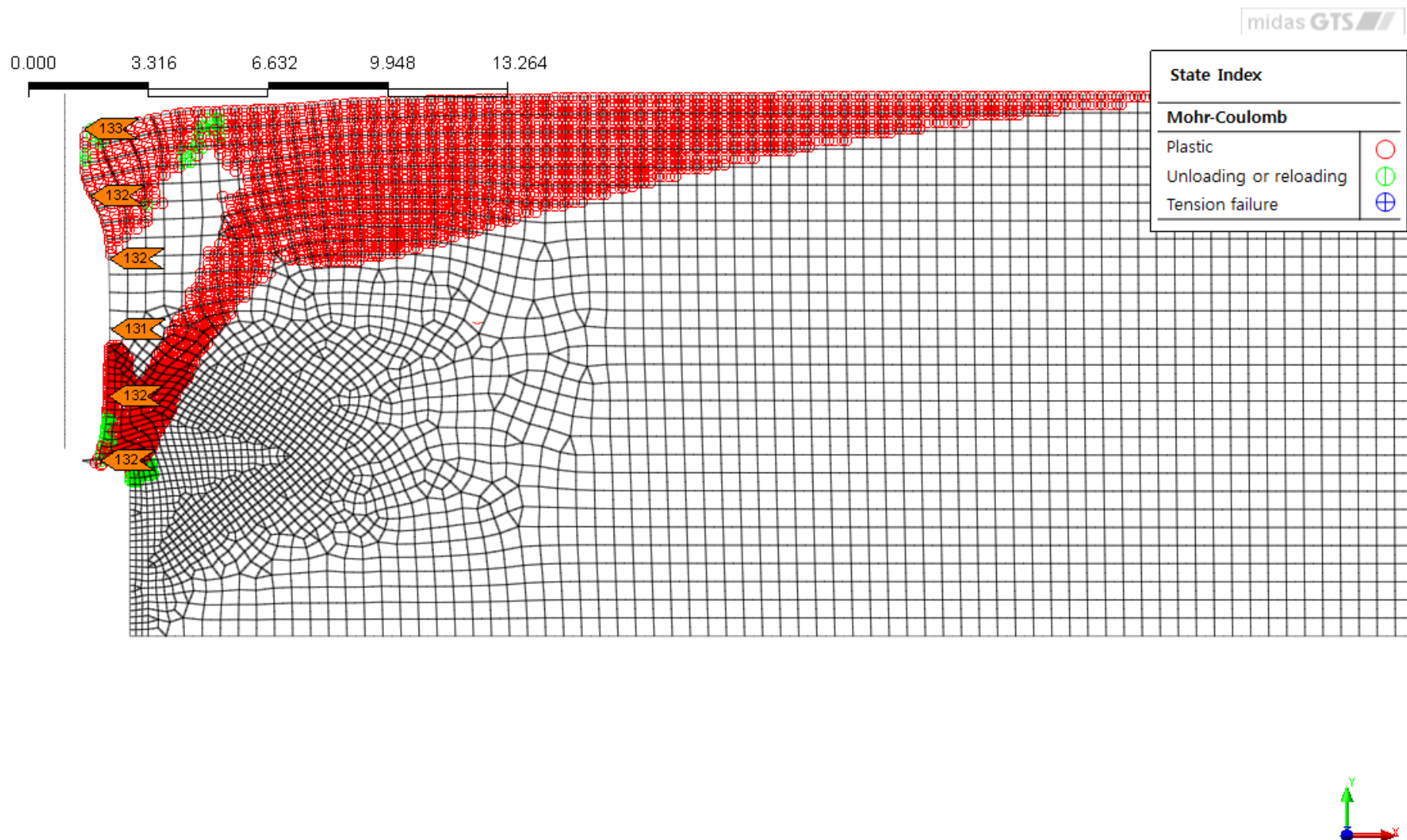


Рисунок 8.10 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.003 м.

Перемещение ограждения 0.005.

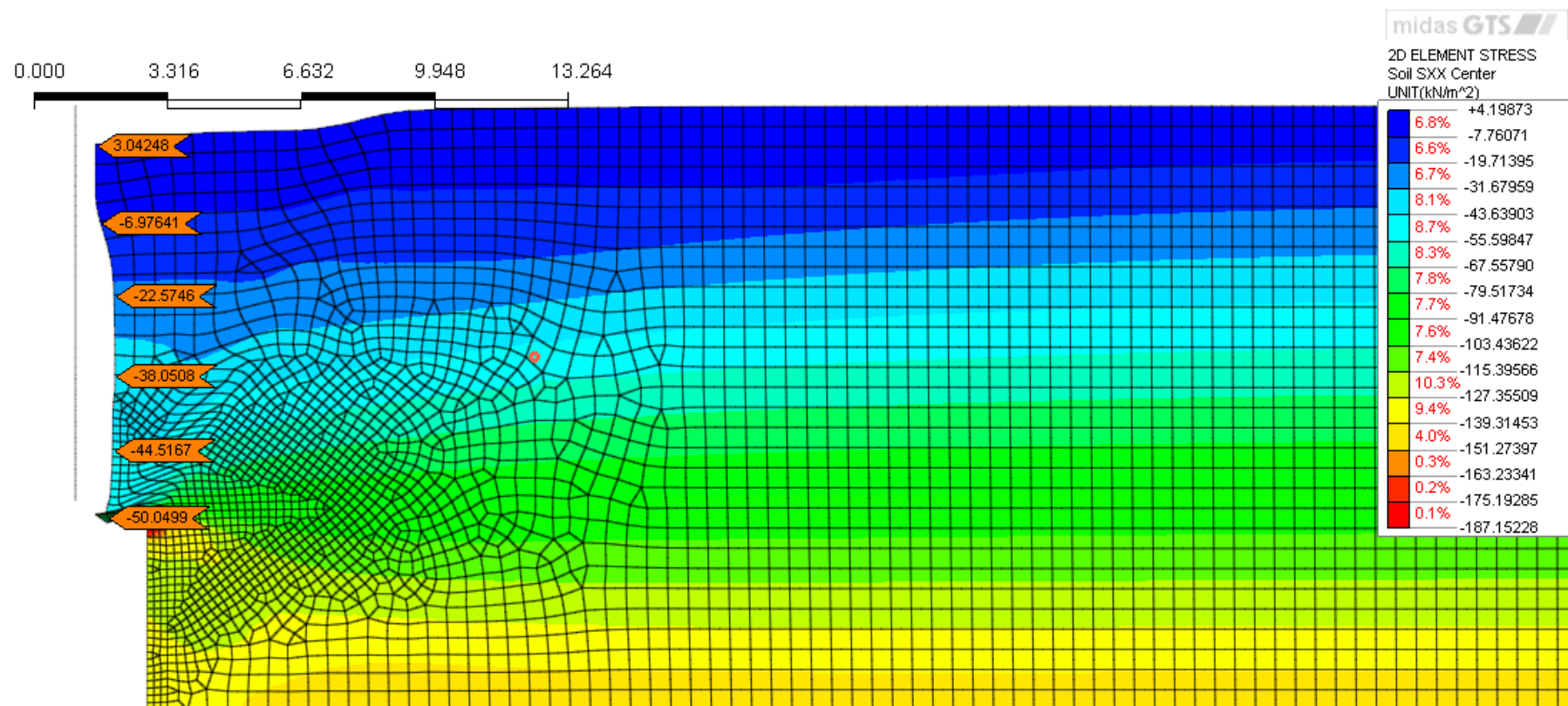


Рисунок 8.11 – Изополе горизонтальных напряжений. Перемещение 0.005 м

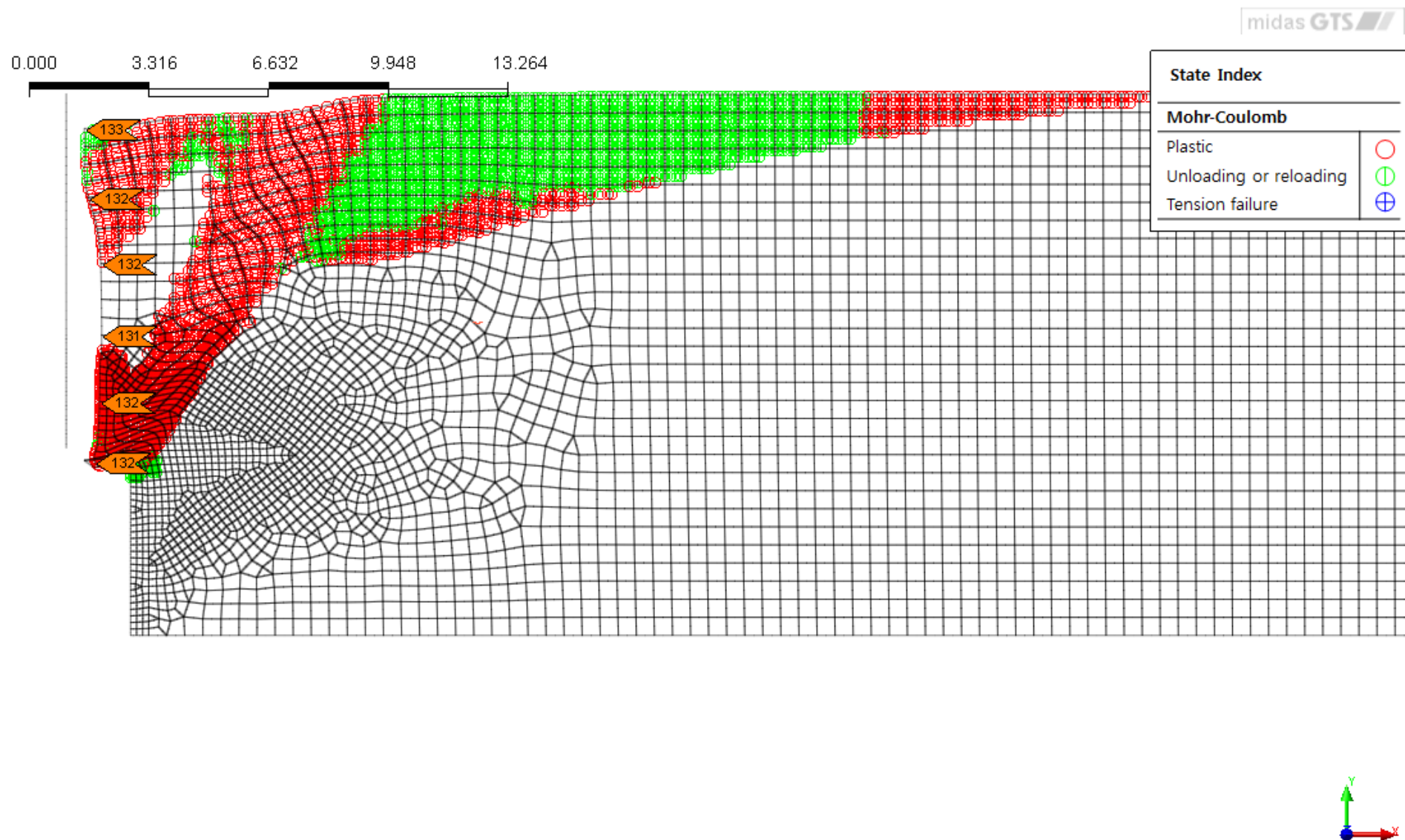


Рисунок 8.12 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.005 м.

Перемещение ограждения 0.010.

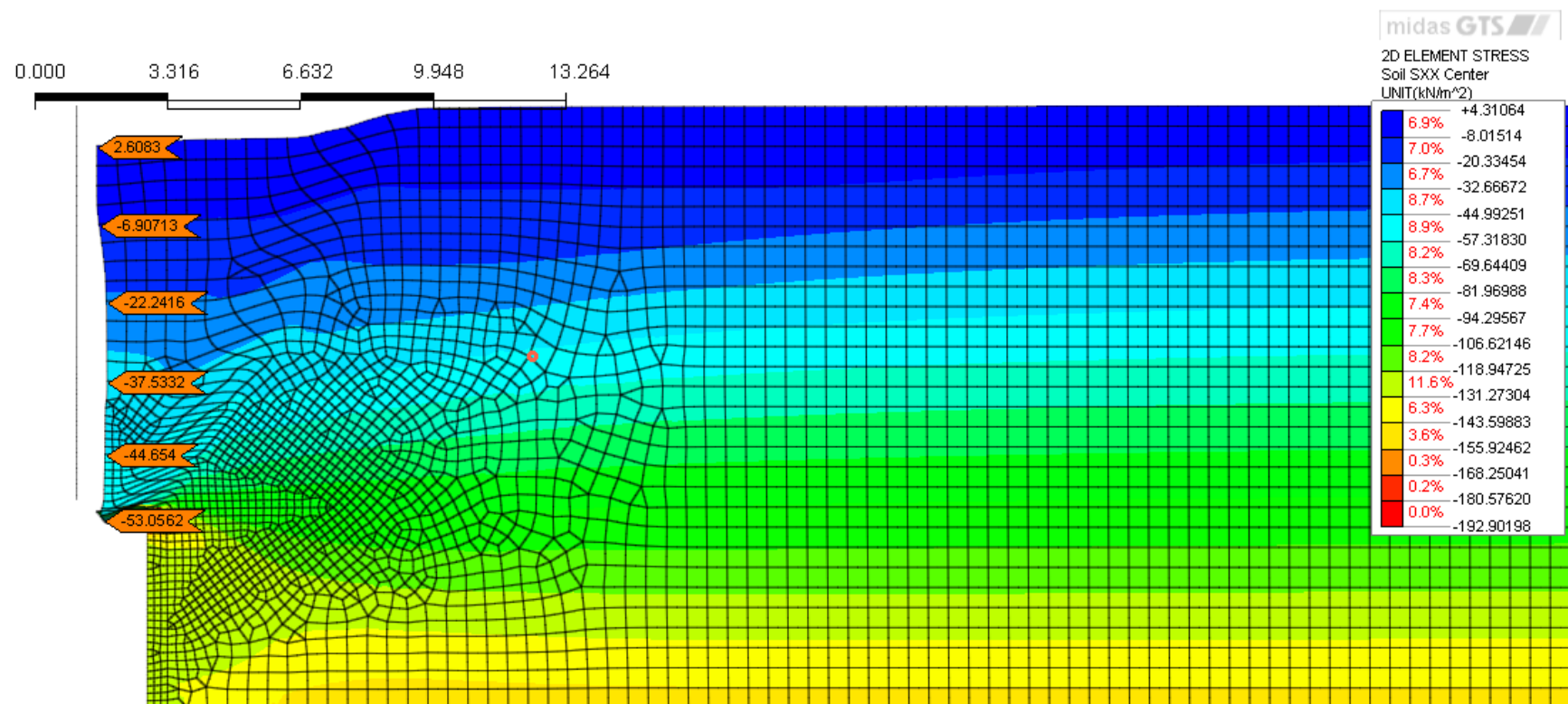


Рисунок 8.13 – Изополе горизонтальных напряжений. Перемещение 0.01 м

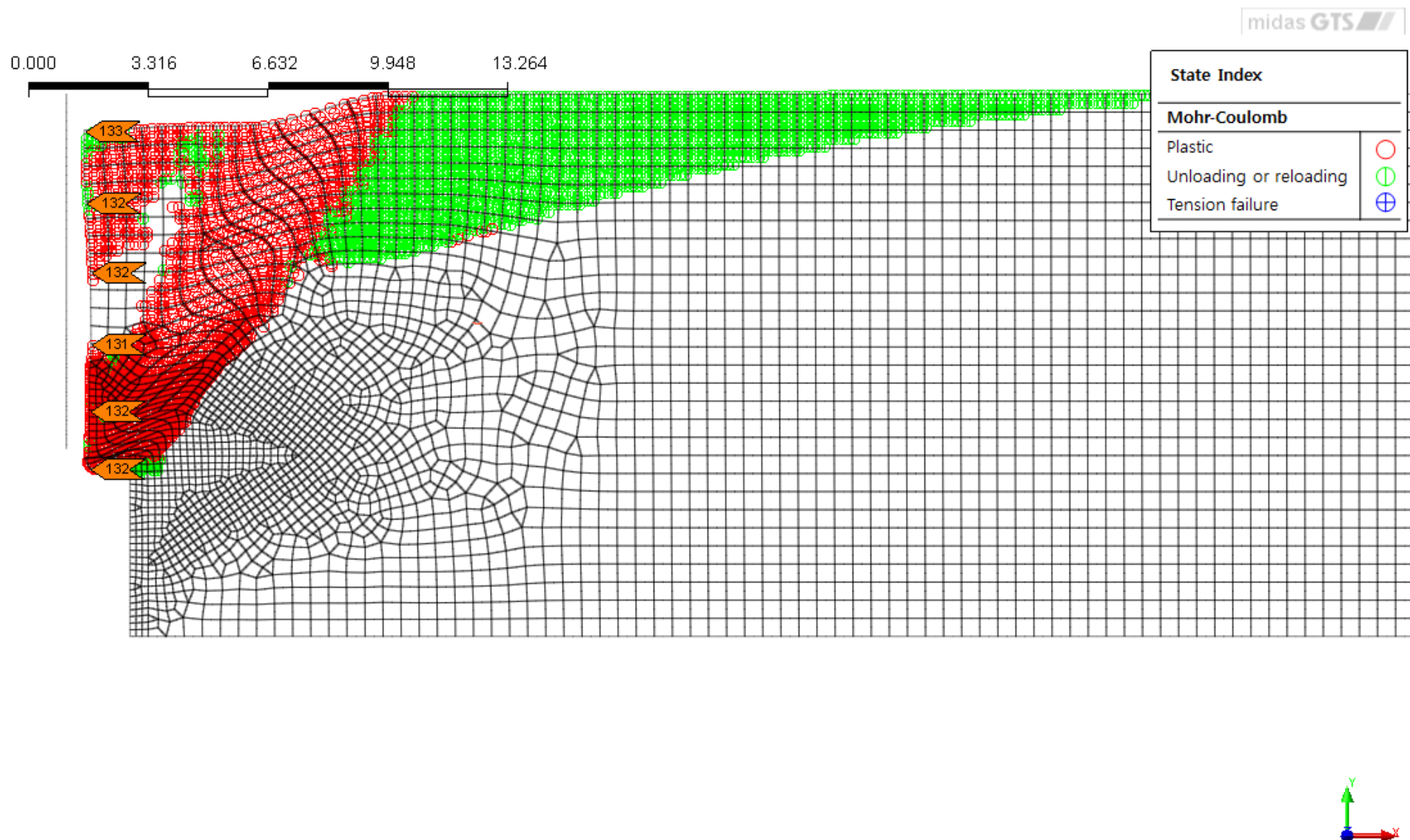


Рисунок 8.14 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.01 м.

Перемещение ограждения 0.02.

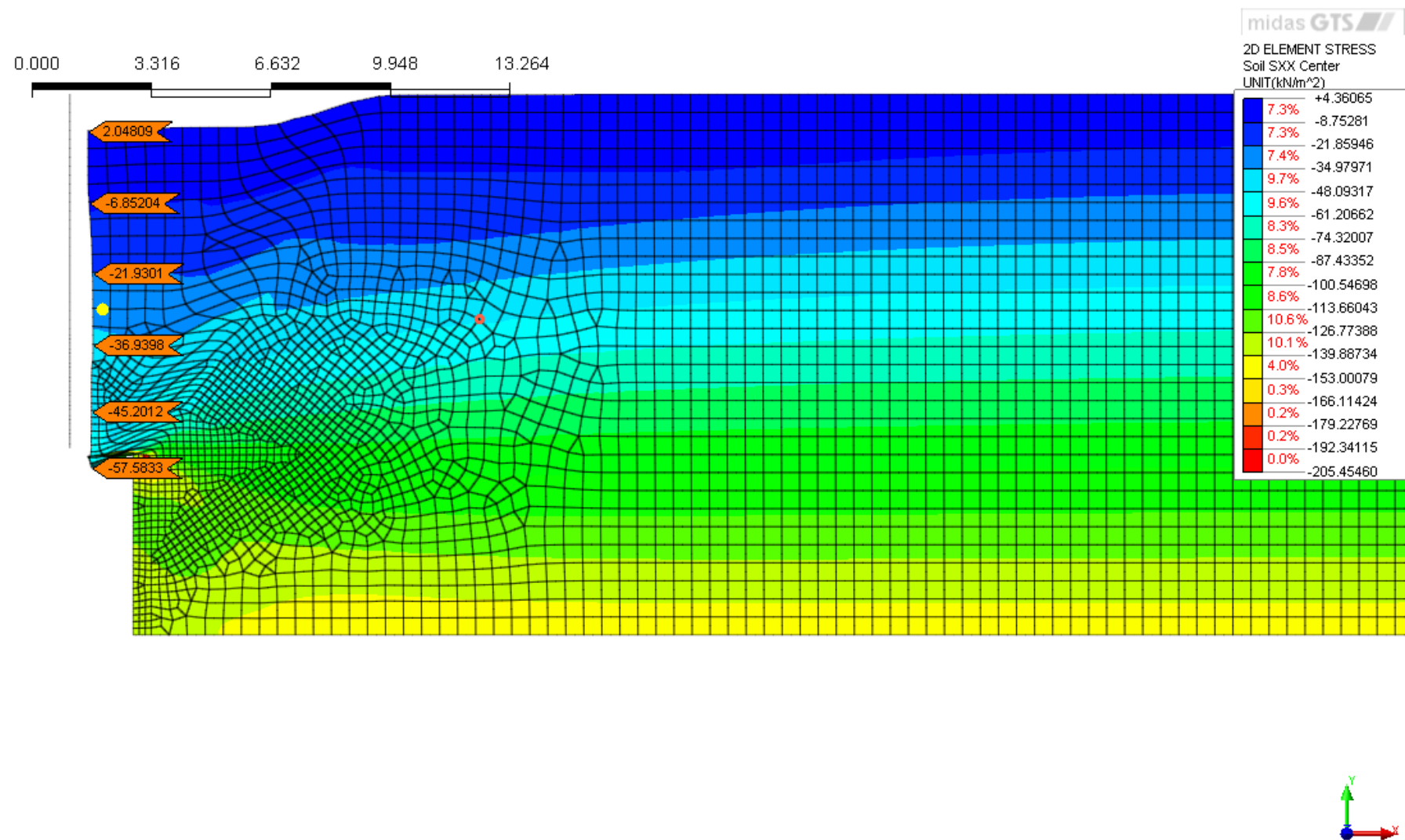


Рисунок 8.15 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.02 м

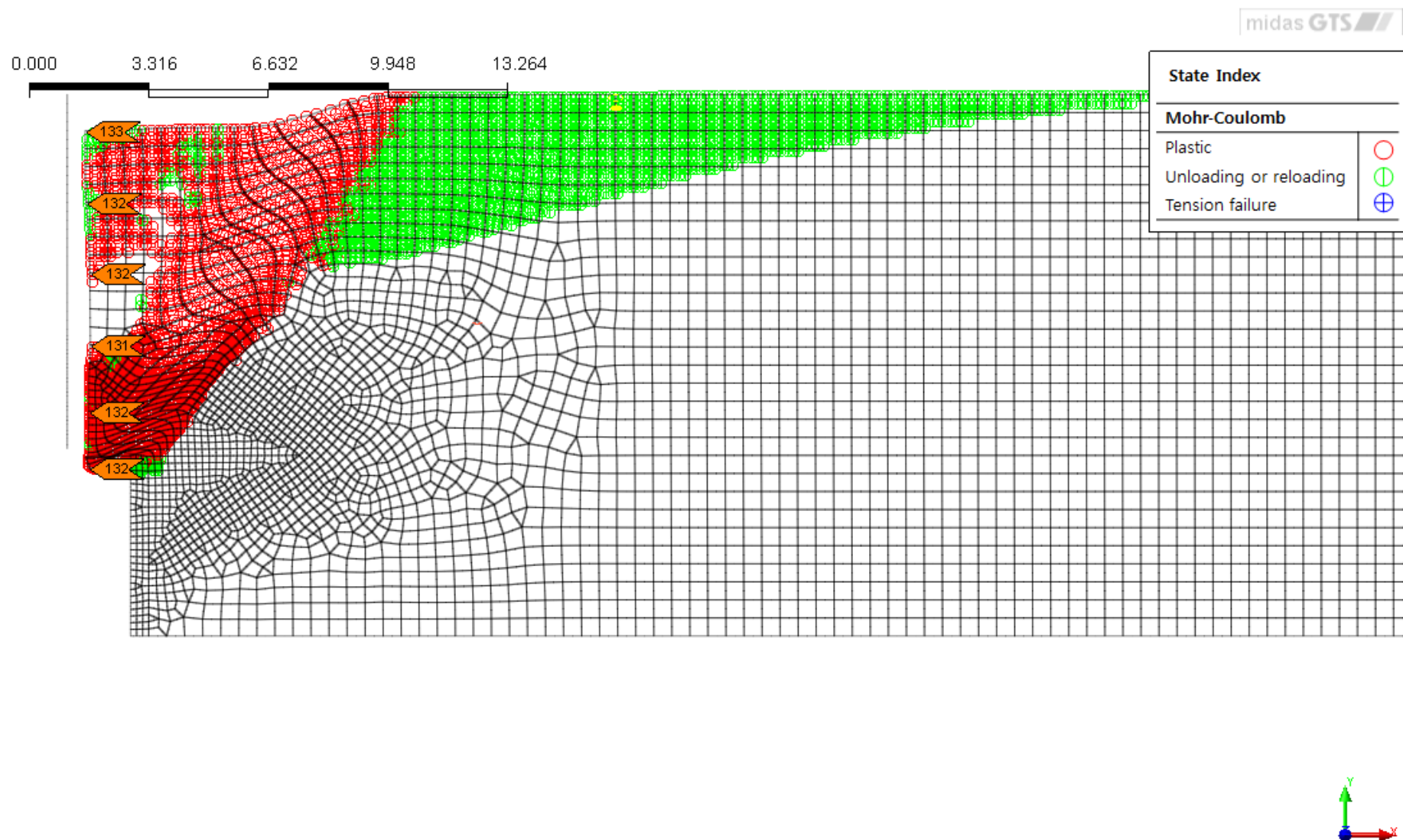


Рисунок 8.16 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.02 м.

Дальнейшее увеличение перемещений не приводит к изменению горизонтальных напряжений.

Продольные усилия в односторонних связях. Перемещение 0.02 м.

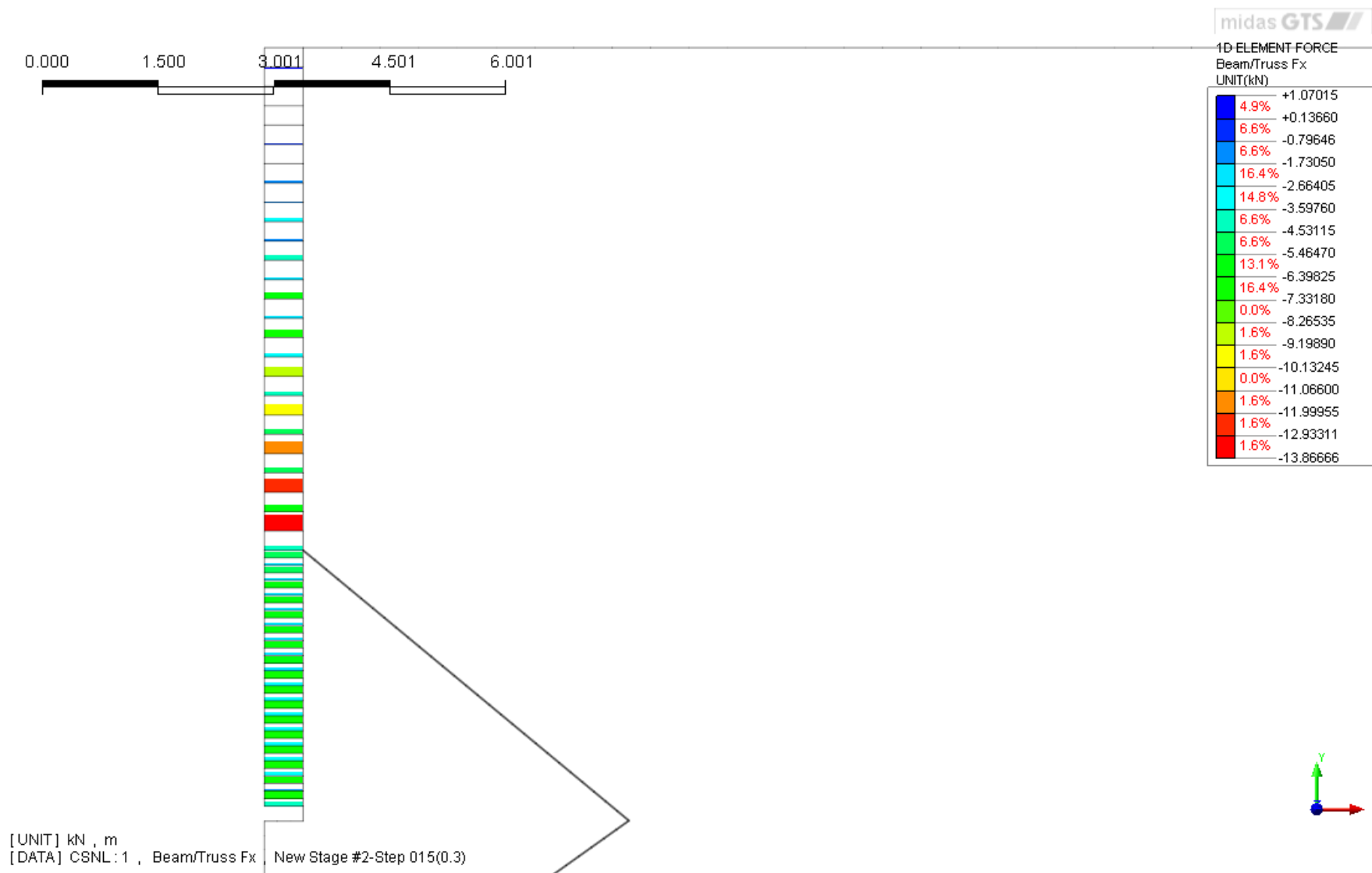


Рисунок 8.17 – Изополе усилий в односторонних связях

Вычисление пассивного давления. Заданное перемещение 0.2 м наружу от модели.

Начальное НДС.

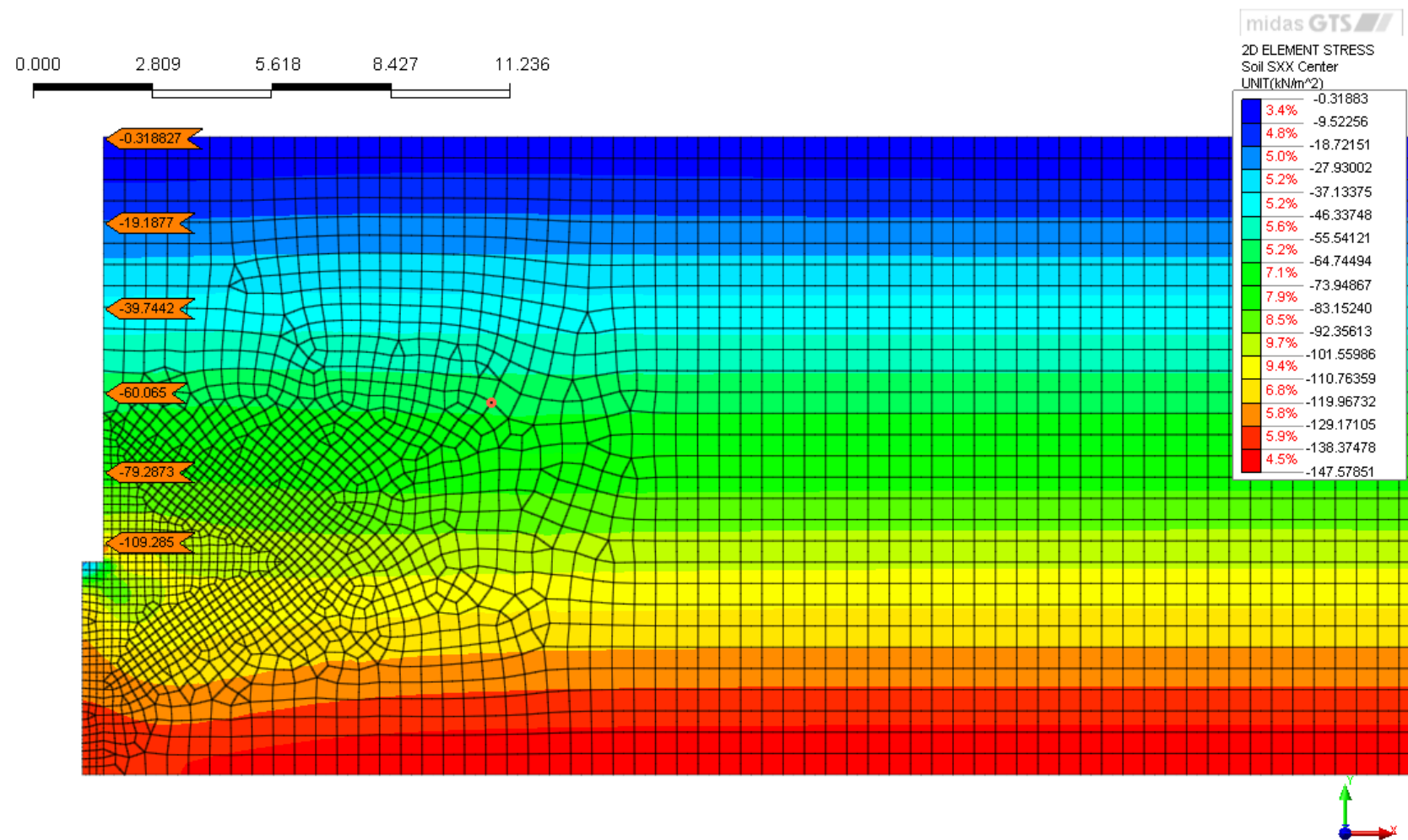


Рисунок 8.18 – Изополе горизонтальных напряжений. Начальное НДС.

Перемещение ограждения 0.012

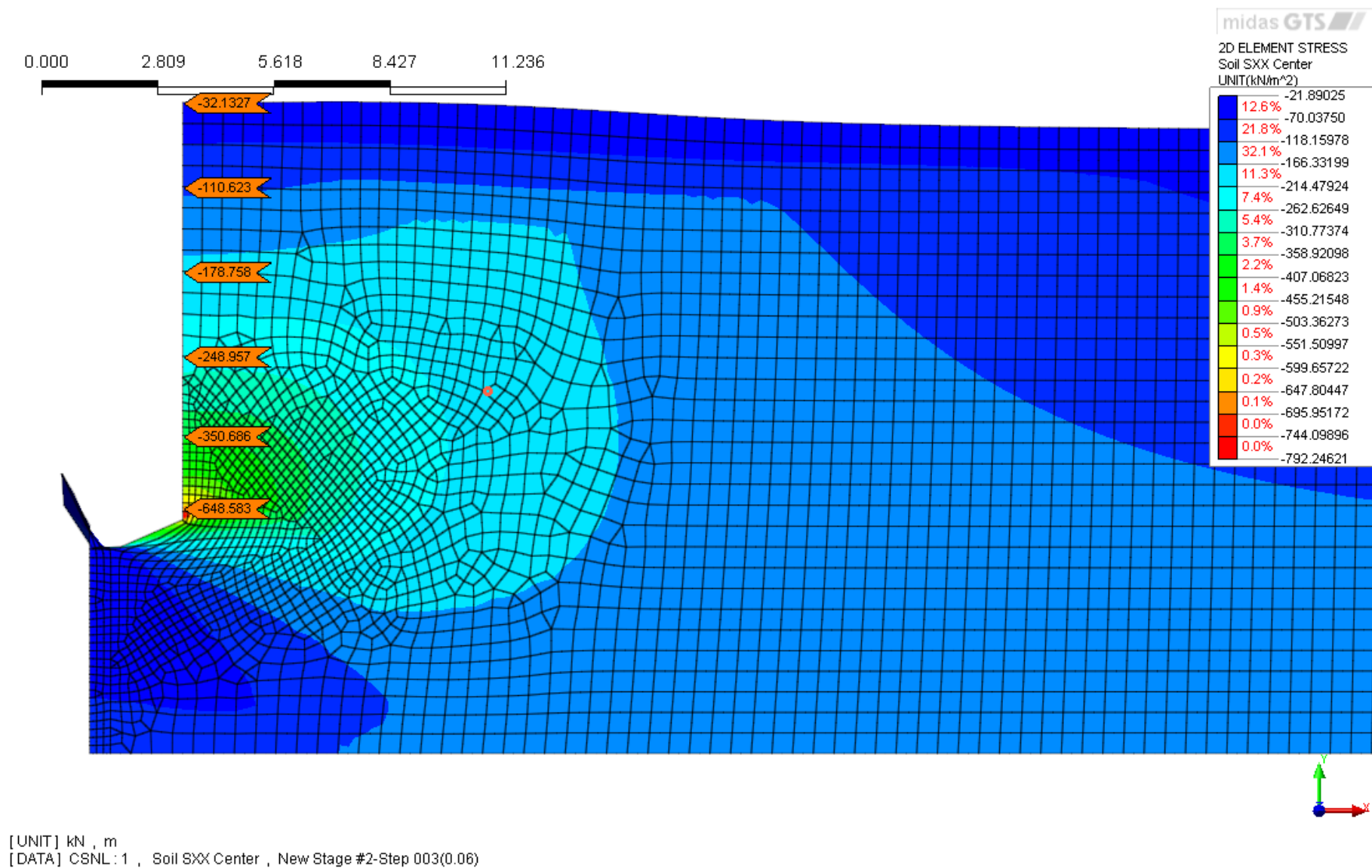


Рисунок 8.19 – Изополе горизонтальных напряжений. Перемещение 0.012 м

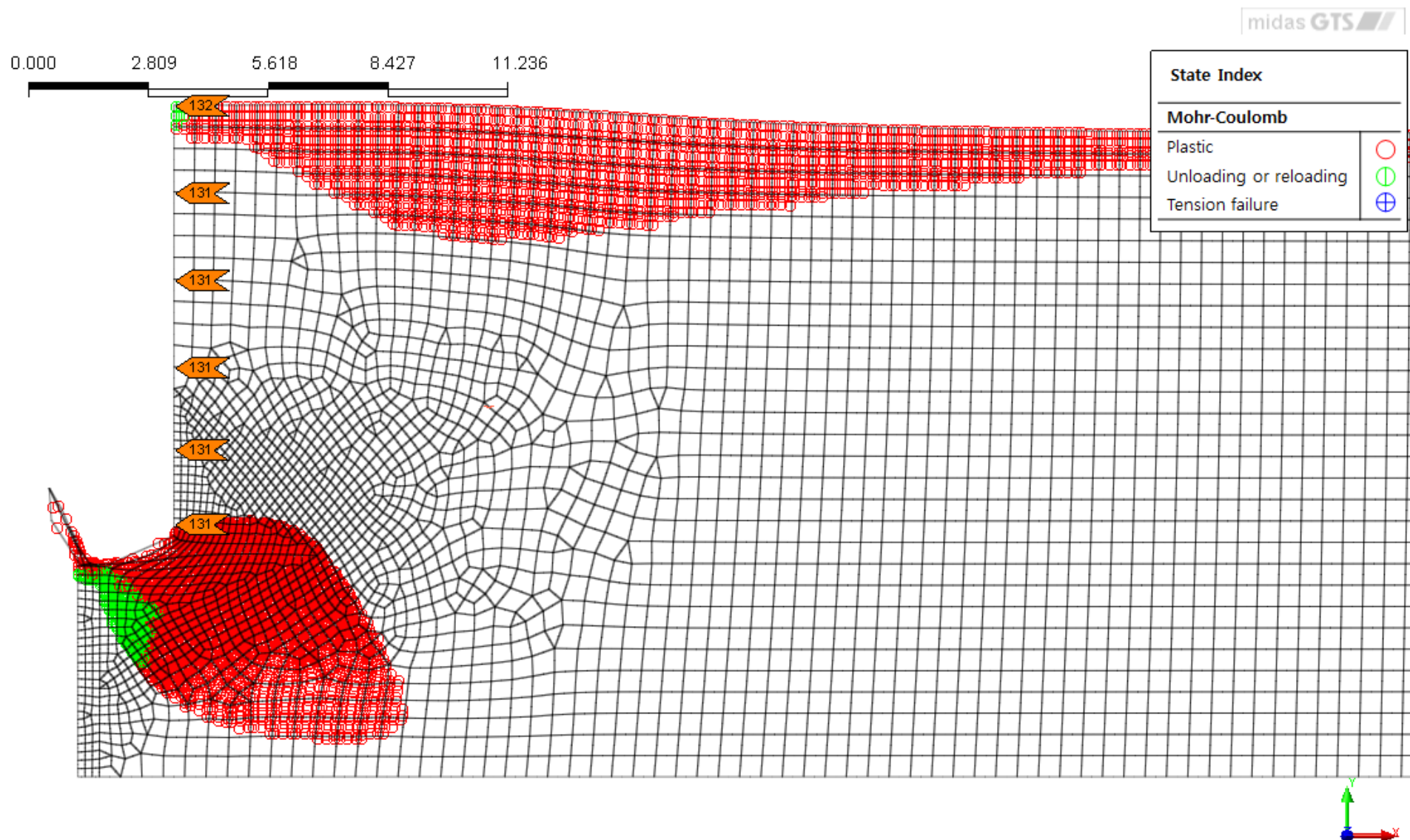


Рисунок 8.20 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.012 м

Перемещение ограждения 0.024 м

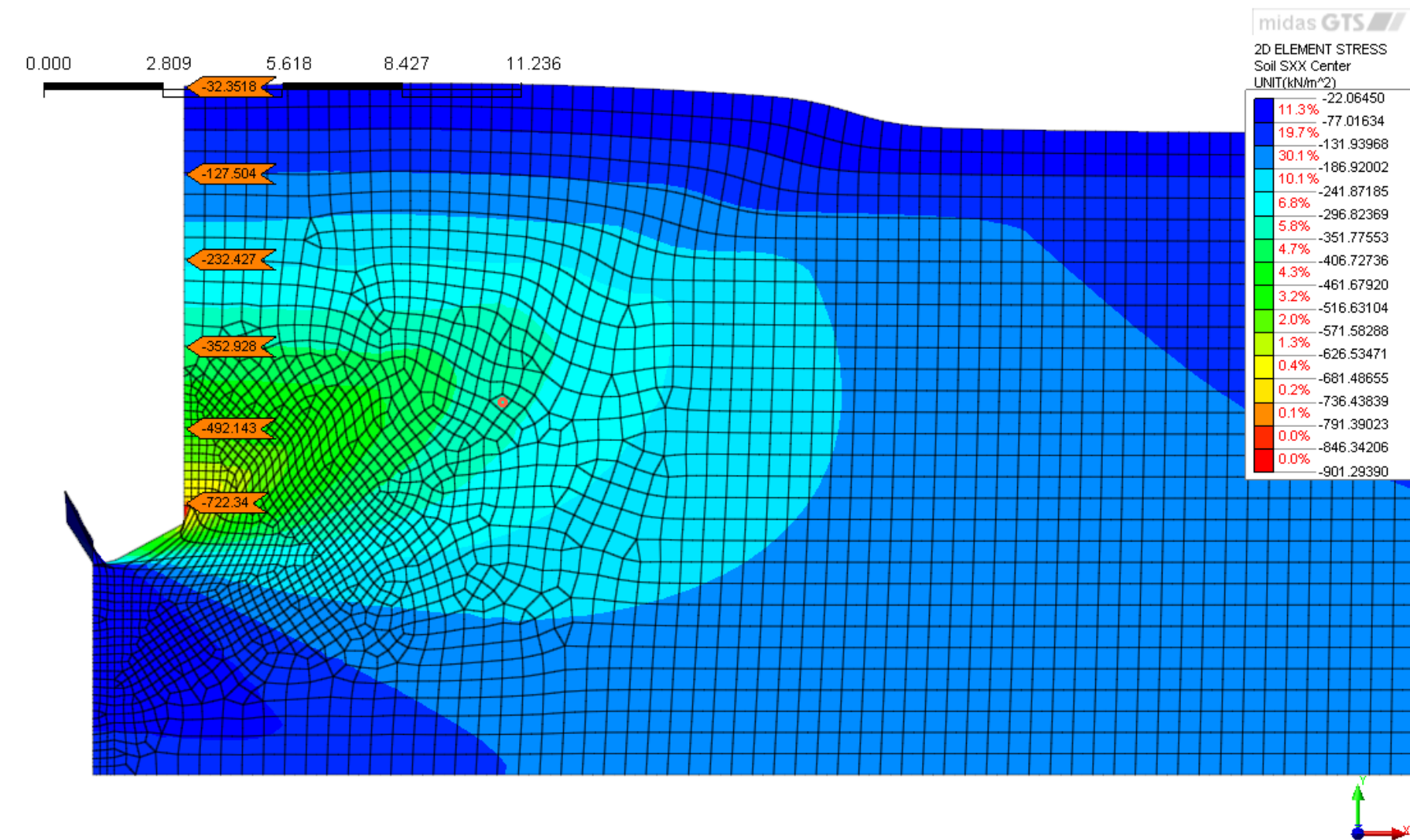


Рисунок 8.21 – Изополе горизонтальных напряжений. Перемещение 0.024 м

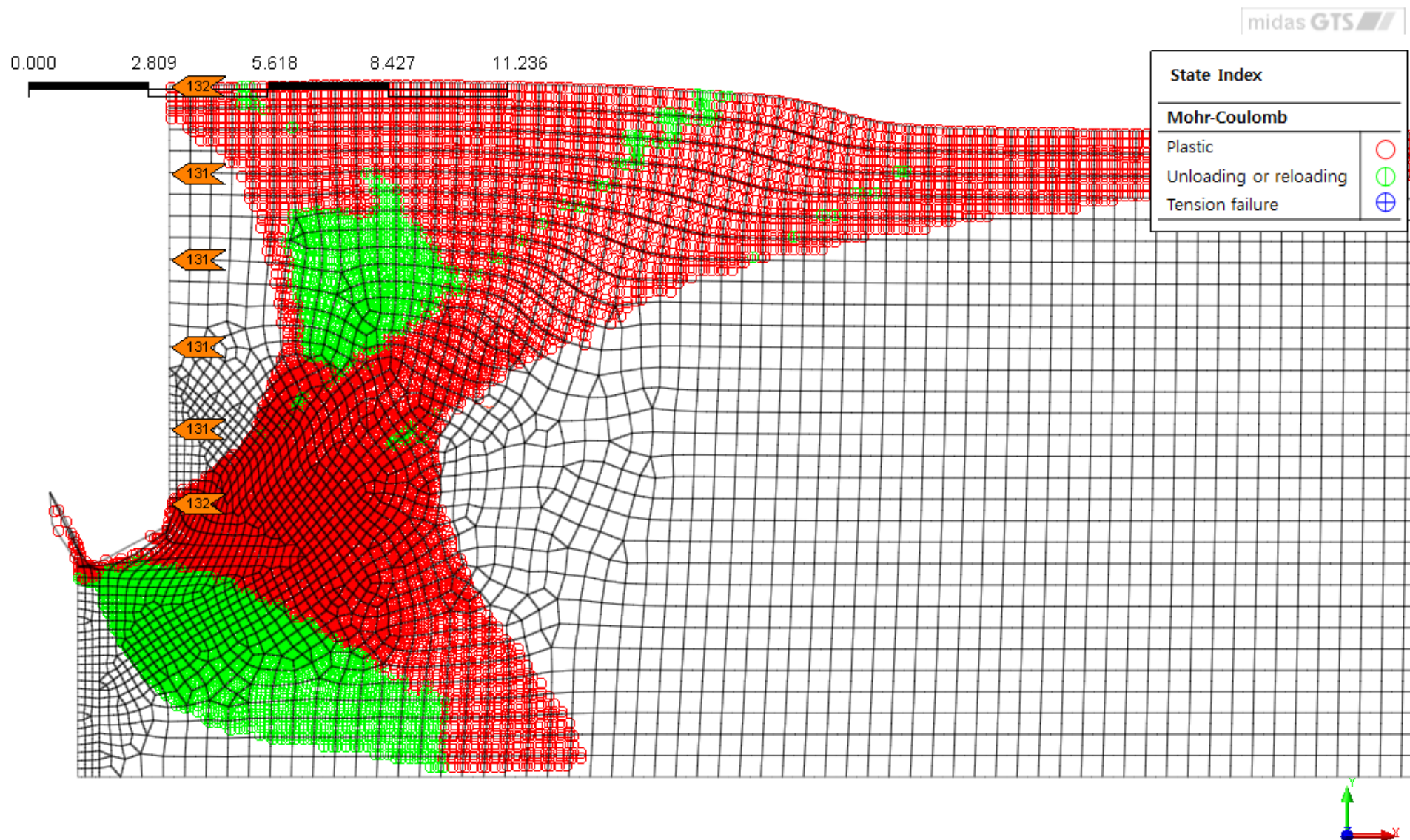


Рисунок 8.22 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.03 м

Перемещение ограждения 0.036.

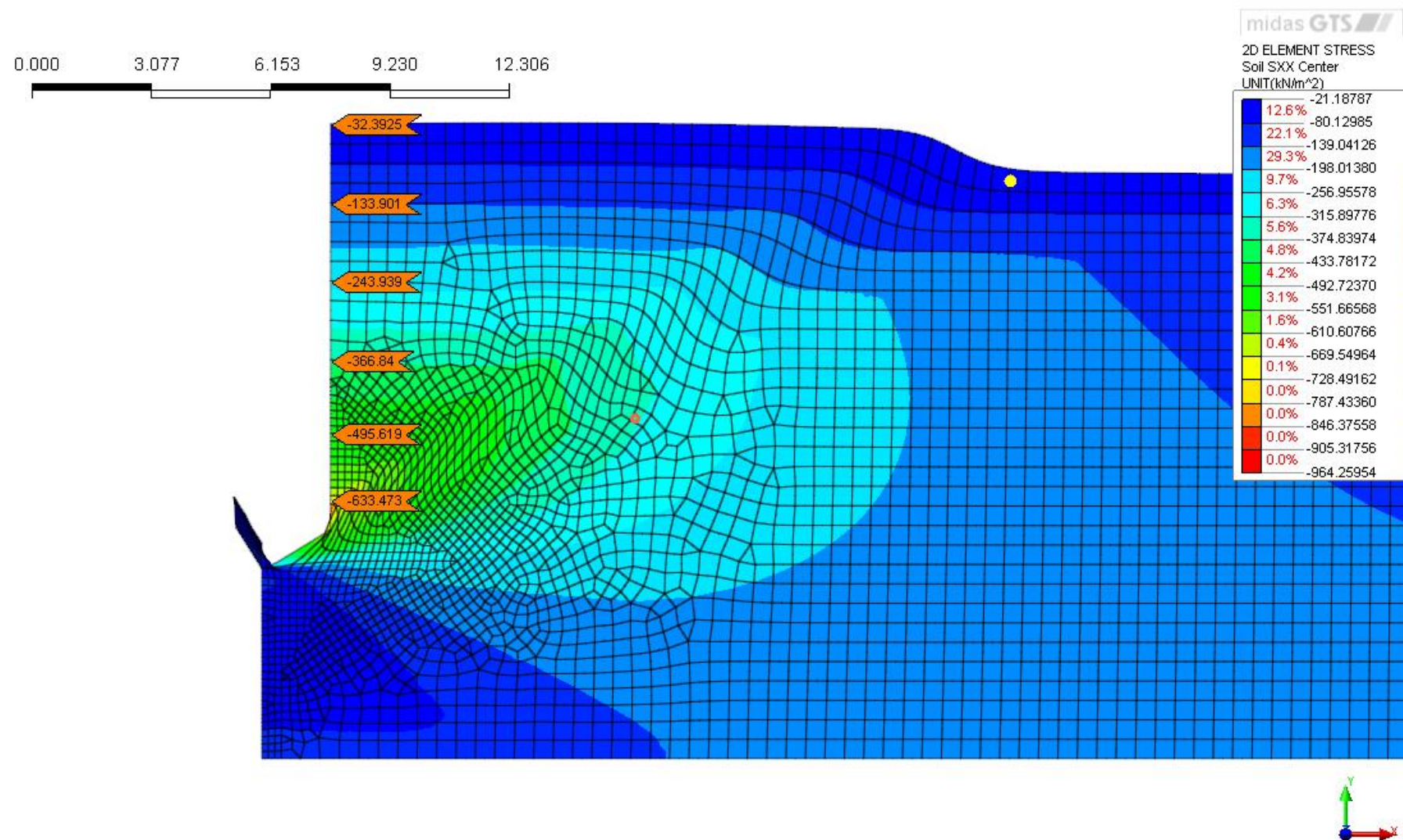


Рисунок 8.23 – Изополе горизонтальных напряжений. Перемещение 0.036 м

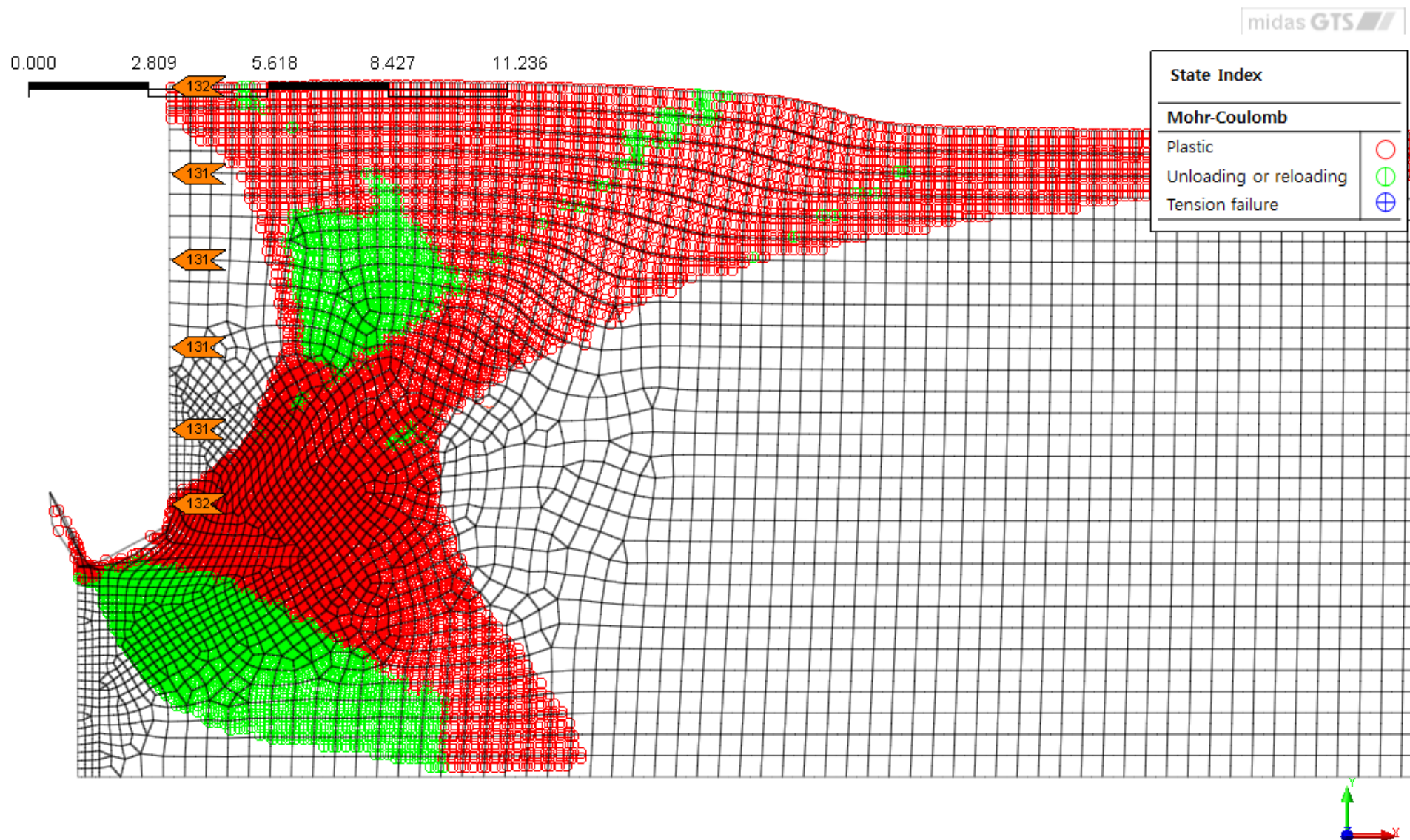


Рисунок 8.24 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.036 м.

Перемещение ограждения 0.048.

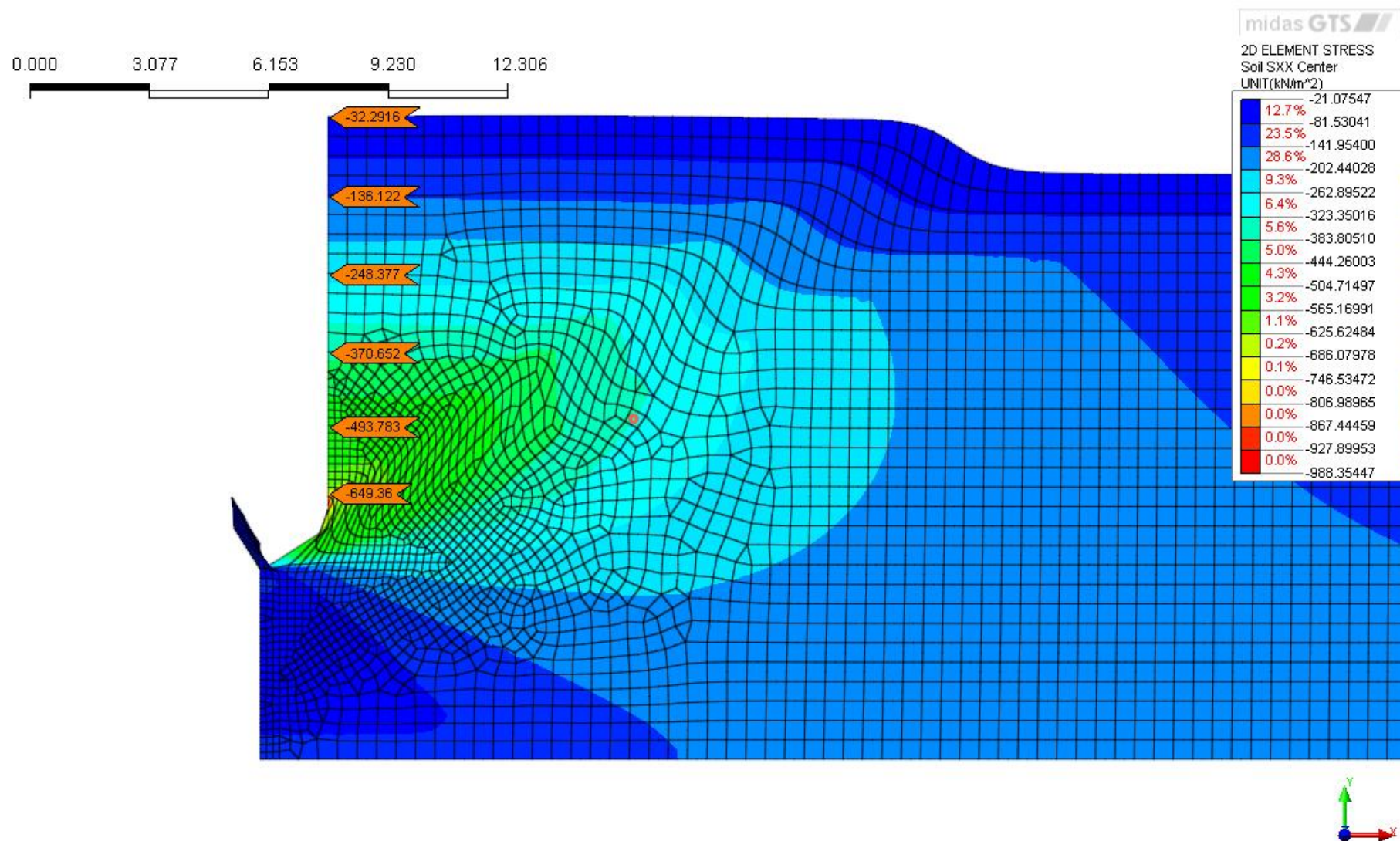


Рисунок 8.25 – Изополе горизонтальных напряжений. Перемещение 0.048 м

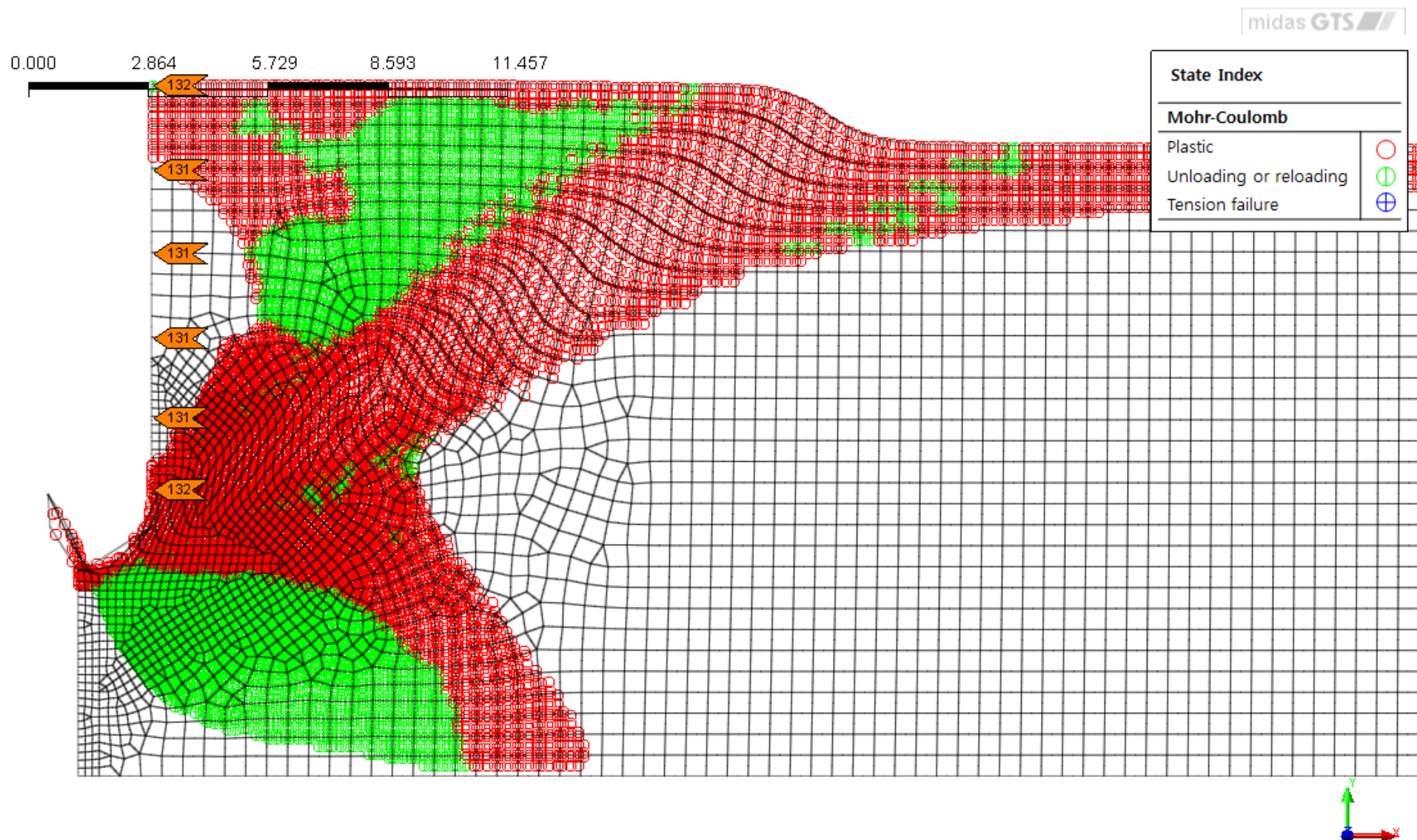


Рисунок 8.26 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.048 м.

Перемещение ограждения 0.06.

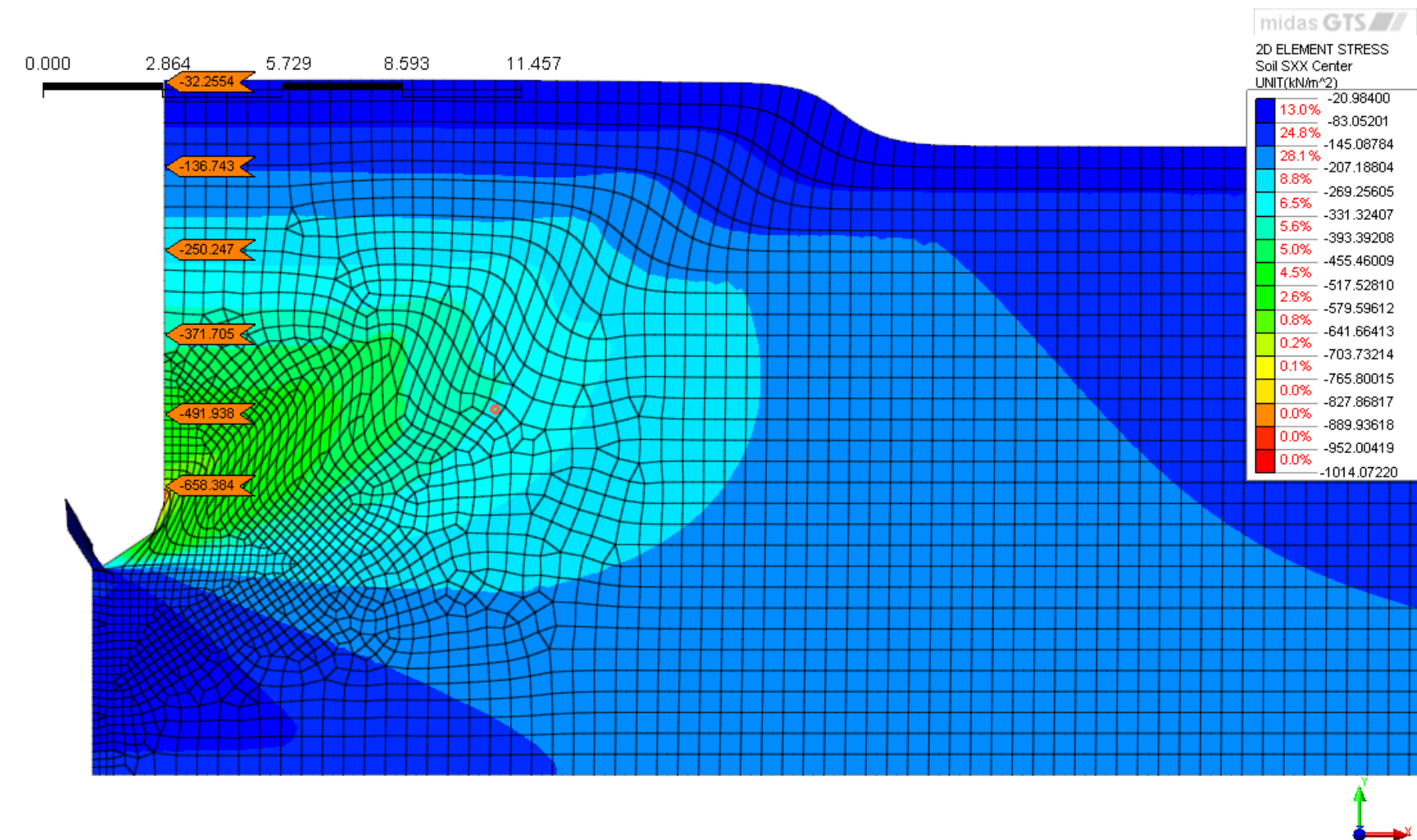


Рисунок 8.27 – Изополе горизонтальных напряжений. Перемещение 0.06 м

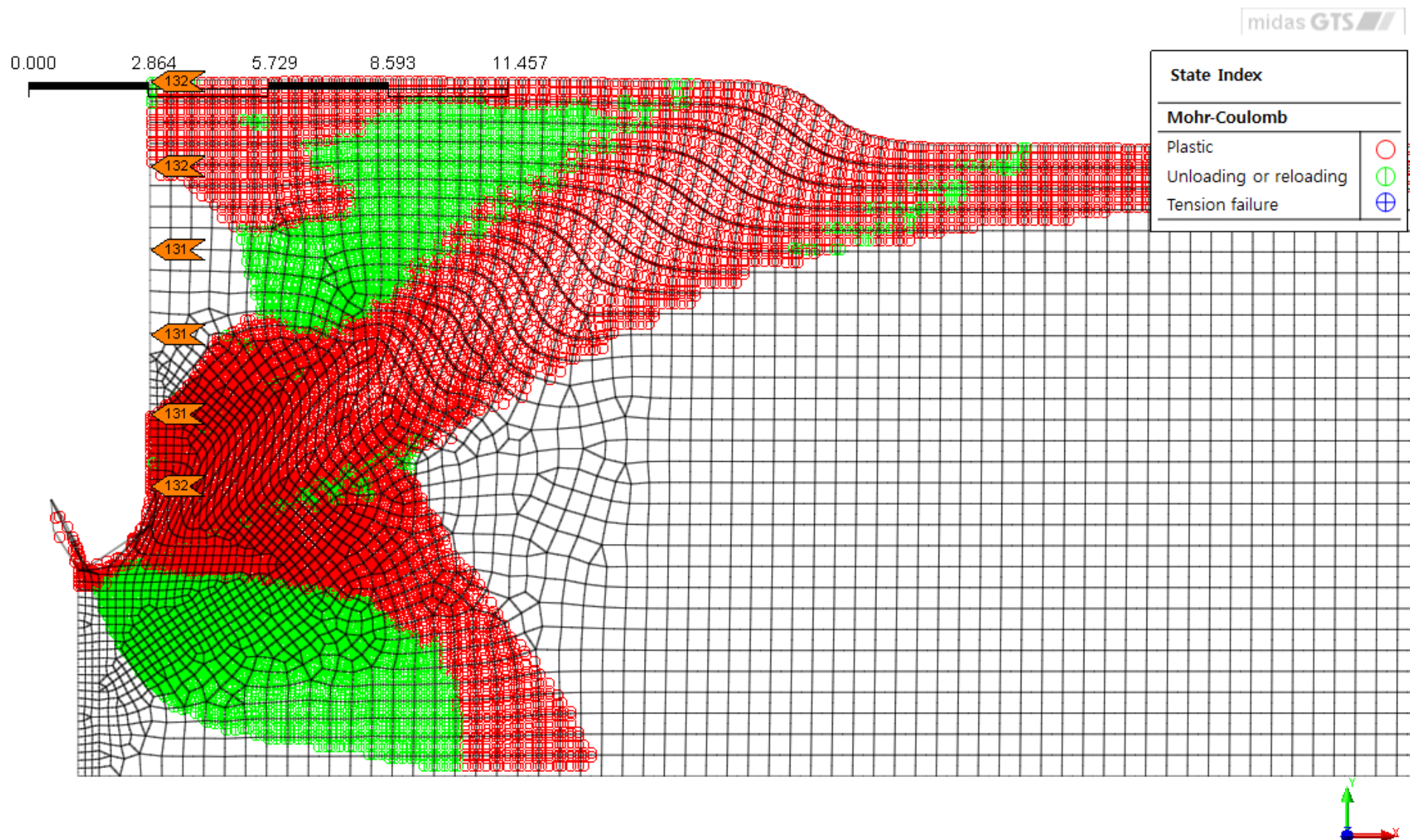


Рисунок 8.28 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.06 м.

Перемещение ограждения 0.06.

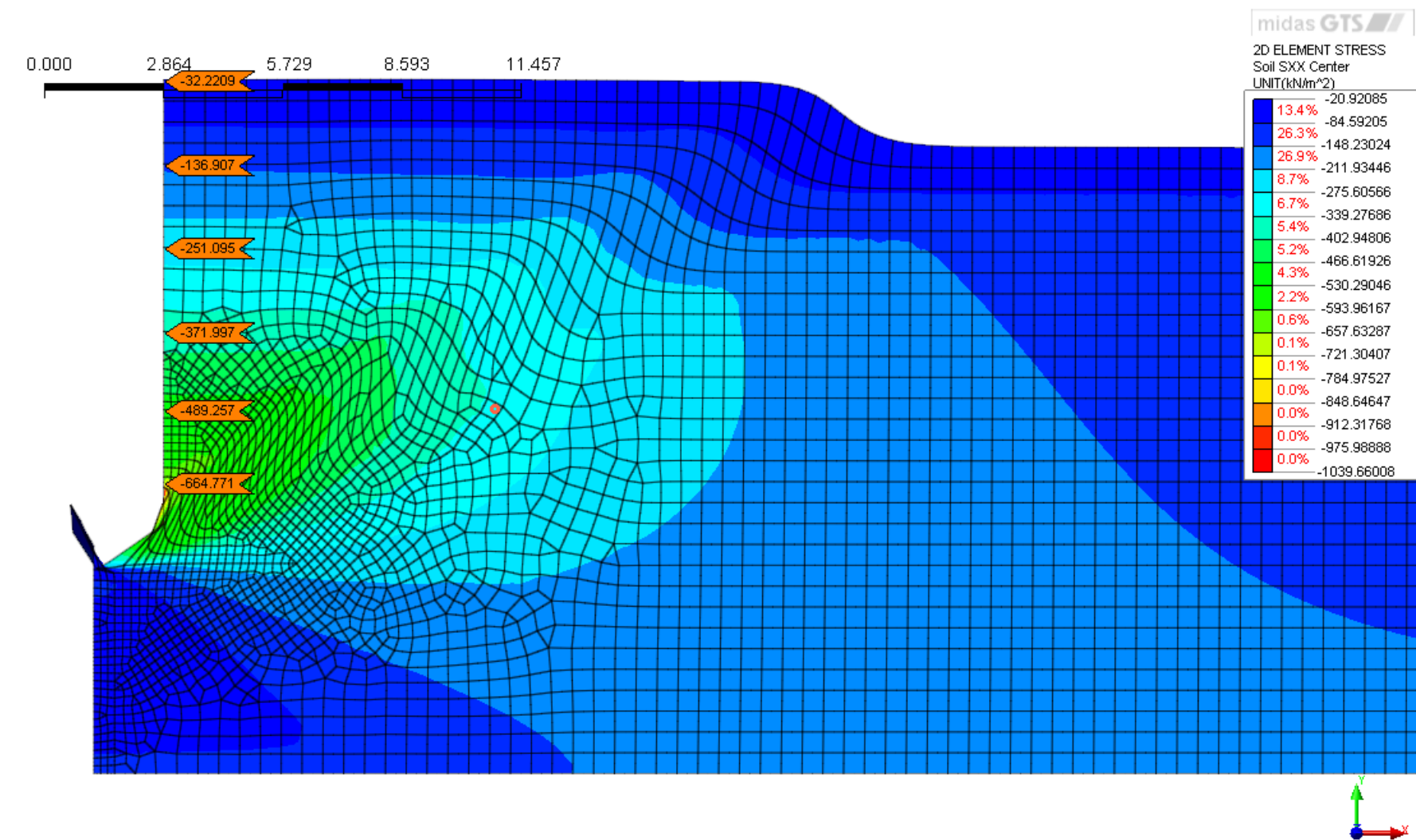


Рисунок 8.29 – Изополе горизонтальных напряжений. Перемещение 0.06 м

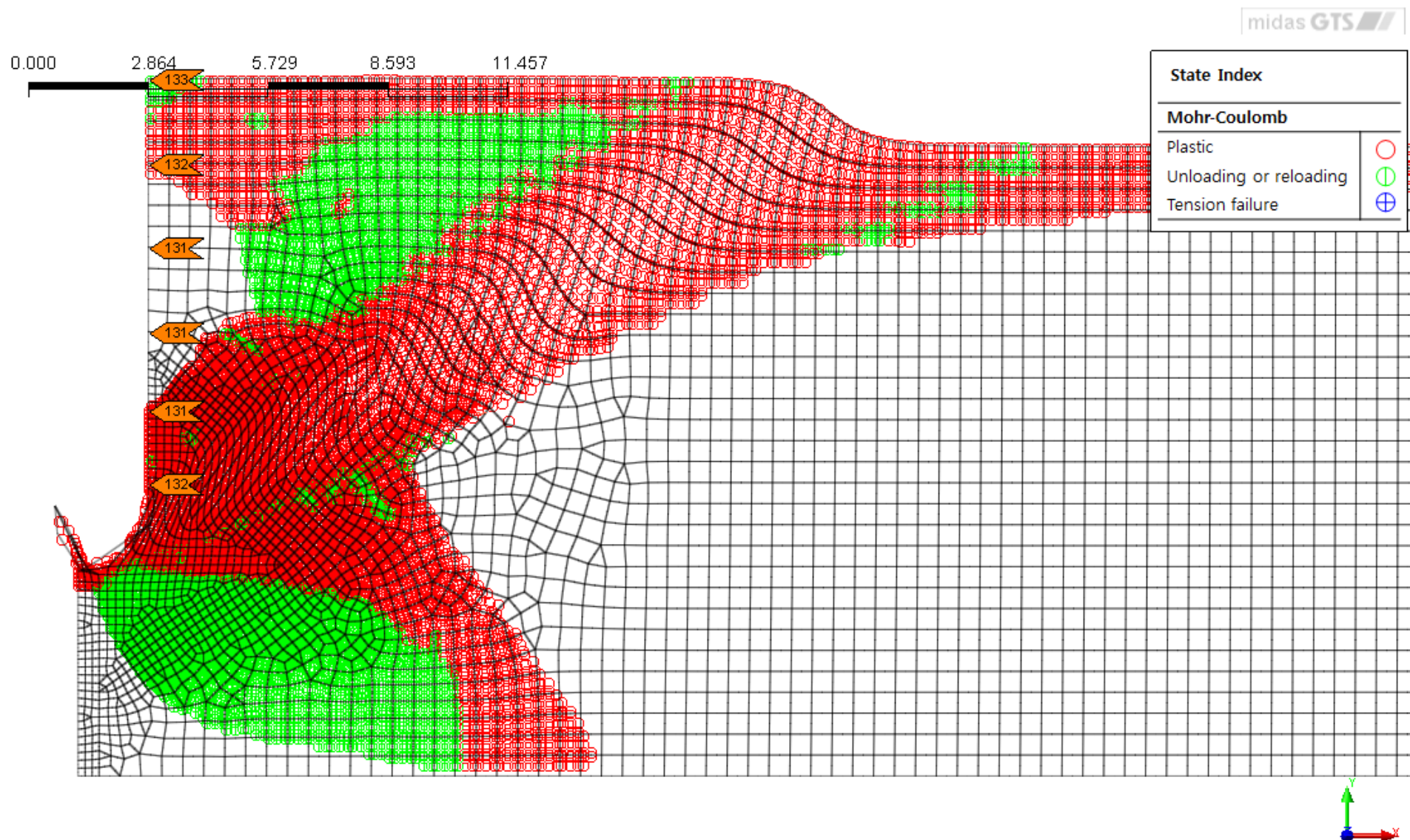


Рисунок 8.30 – Индикатор состояния элементов (Красные точки предельное НДС). Перемещение 0.072 м.

Таблица 8.2 Определение пассивного давления

Перемещение стенки, м		Давление на глубине, кН/м ²					
		H = 0	H = 2	H = 4	H = 6	H = 7.86	H = 9.52
GTS	0						
	0.012	32	110.6	178.8	249	350	648
	0.024	32	127.5	232.5	353	492	722
	0.036	32	134	244	366	495	633
	0.048	32	136	248	370.6	493	650
	0.06	32	136.7	250	371.7	492	658
	0.072	32.2	137	251	372	489.2	664.7
Источник	Пассивное давление по Кулону	17.32	137.3	257.3	377.3	488.9	588.5

Таблица 8.3 Определение активного давления

Перемещение стенки, м		Давление на глубине, кН/м ²					
		H = 0	H = 2	H = 4	H = 6	H = 7.86	H = 9.52
GTS	0						
	0.001	32	12.3	29.7	45.77	56.55	60.6
	0.002	32	7.38	25.2	41.3	49	54.7
	0.003	32	7	23	38.7	45	52.3
	0.005	32	7	22.5	38	44.5	50
	0.01	32	6.9	22.3	37.5	44.6	53
	0.02	32.2	6.9	22	37	44.9	55.4
Источник	Активное давление по Кулону	0	7.56	20.88	34.2	46.6	57.6

Таблица 8.4. Сопоставление результатов расчета

		Давление на глубине, кН/м ²					
		H = 0	H = 2	H = 4	H = 6	H = 7.86	H = 9.52
Источни	Активное давление, кПа	0	7.56	20.88	34.2	46.6	57.6
	Пассивное давление, кПа	17.32	137.3	257.3	377.3	488.9	588.5
GTS	Активное давление, кПа	-3	6.9	22	37	44.9	55.4
	Погрешность, %	-	-8.7	5.4	8.2	-3.6	-3.8
	Пассивное давление, кПа	32.2	137	251	372	489.2	664.7
	Погрешность, %	-	-0.2	-2.4	-1.4	0.1	12.9

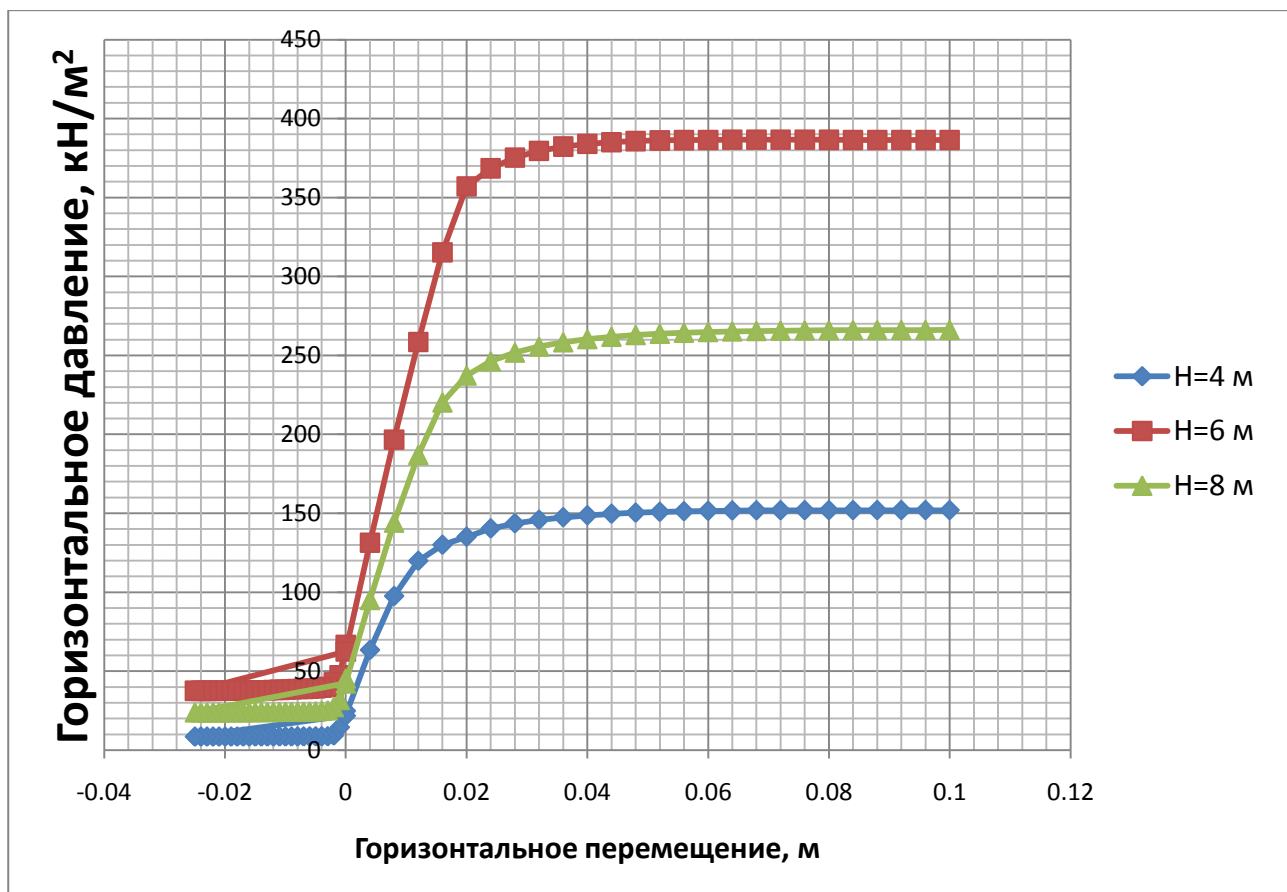


Рисунок 8.31 – График зависимости давлений подпорную стенку от горизонтальных перемещений

Пример 9. Расчет устойчивости насыпи

Источник	А.Б. Фадеев “Метод конечных элементов в геомеханике”. (М. Недра, 1987, стр. 128-130)
Тип задачи:	Статический нелинейный расчет НДС, расчет устойчивости склона (ϕ - c reduction)
Тип верифицируемых КЭ:	3-х и 6-ти узловые треугольные элементы плоской деформации, 4-х и 8-ми узловые четырехугольные элементы плоской деформации

Описание

Для одного из горнодобывающих предприятий следовало определить допустимую высоту внутреннего автомобильного отвала. В основание отвала залегают твердые глины, однако фильтрующая в основании вода замачивает поверхностный слой глины и переводите его в пластическое состояние. Тело отвала сложено грунтами типа супеси. Прочностные показатели отвальной массы и контактного слоя определены крупномасштабными испытаниями. Упругие характеристики выбраны приближенно по таблицам СНиП.

Требуется определить допустимое значение высоты отвала – значение, при котором происходит сильное «оползневое» нарастание перемещений (изменение начальной формы). На практике имел место оползень, когда высота отвала была увеличена до 45м.

Предмет верификации

В настоящей задаче определяется наибольшее допустимое значение высоты отвала до возникновения «оползня» с использованием 3-х узлового треугольного и 4-х узлового четырехугольного элементов плоской деформации. Для этого построены 3 расчетные модели:

- модель 1 с применением преимущественно 4-х узловых КЭ;
- модель 2 с применением 3-х узловых КЭ;

- модель 3 с применением преимущественно 4-х узловых КЭ (поэтапный расчет);
- модель 4 с применением преимущественно 8-ми узловых КЭ.

GTS модель

Задача решена в модели плоской деформации. Для решения задачи применялись 3-х и 6-ти узловые треугольные элементы плоской деформации, 4-х и 8-ми узловые четырехугольные элементы плоской деформации.

Выполнены 4 расчетные модели.

Модель 1. Применены 3-х узловой треугольный и 4-х узловой четырехугольный элементы плоской деформации. Поскольку напряжения на уровне подошвы пропорциональны плотности и высоте, для упрощения моделирования координаты узлов были подготовлены исходя из высоты откоса 10 м и не пересчитывались. Увеличивалось значение ускорения силы тяжести при постоянной плотности. Первоначально ускорение силы тяжести задано равным 5g, что соответствует высоте отвала 50м. Подбор высоты, при котором наблюдается сходимость решения определяется методом Ньютона-Рафсона путем задания вручную шага приращения нагрузки (в данном случае собственного веса) равным 0,25 (т.е. 20 шагов от 0 до 5g). Предельной считается высота на последнем этапе расчета для которой удовлетворен критерий сходимости (достигнуто равновесие системы).

Для полученной высоты отвала выполнялся проверочный расчет устойчивости методом « ϕ - c reduction».

Модель 2. Применены только 3-х узловые треугольные КЭ плоской деформации. В данной модели расчеты выполняются аналогично модели 1.

Модель 3. КЭ сетка для данной модели идентична модели 1. В данной модели увеличение высоты отвала производится постепенно в несколько этапов

(используется поэтапный тип расчета *Construction stage*). Данная модель выполнена для сравнения, насколько отличаются результаты, полученные по модели 1 с принятыми допущениями от результатов расчета, в которых учтена история образования (нагрузки) отвала.

Модель 4. Данная модель имеет ту же КЭ-сетку что и модель 1. Но в отличие от модели 1 здесь применены КЭ более высокого порядка – 6-ти узловые треугольные и 8-ми узловые четырехугольные элементы плоской деформации.

Также предельная высота отвала, при котором отвал находится в устойчивом состоянии определялась методом подбора в программе «ОТКОС» программного комплекса SCAD Office 11.5 (Федоровского-Курилло), реализующая метод отсеков с переменной степенью мобилизации сдвигов.

Исходные данные для расчетов представлены в таблице 9.1.

Таблица 9.1 Исходные данные

Угол откоса отвала	45°
Граничные условия	Рабочая плоскость - ХоУ Левая грань – ограничение деформаций по X Правая грань – ограничение деформаций по X, Y
Модель грунта отвальной массы	Мора-Кулона: $E=100$ МПа, $\nu=0,3$, $\gamma_{\text{unsat}}=20\text{кН/м}^3$, $\gamma_{\text{sat}}=20\text{кН/м}^3$, $c=70$ кПа, $\phi=17$ град, $\psi=0$ град. Тип поведения - дренированный
Модель грунта контактного слоя	Мора-Кулона: $E=100$ МПа, $\nu=0,4$, $\gamma_{\text{unsat}}=20\text{кН/м}^3$, $\gamma_{\text{sat}}=20\text{кН/м}^3$, $c=20$ кПа, $\phi=10$ град, $\psi=0$ град. Тип поведения - дренированный
Нагрузка	Собственный вес

Тип КЭ	3-х и 6-ти узловые треугольные элементы плоской деформации, 4-х и 8-ми узловые четырехугольные элементы плоской деформации
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона-Рафсона

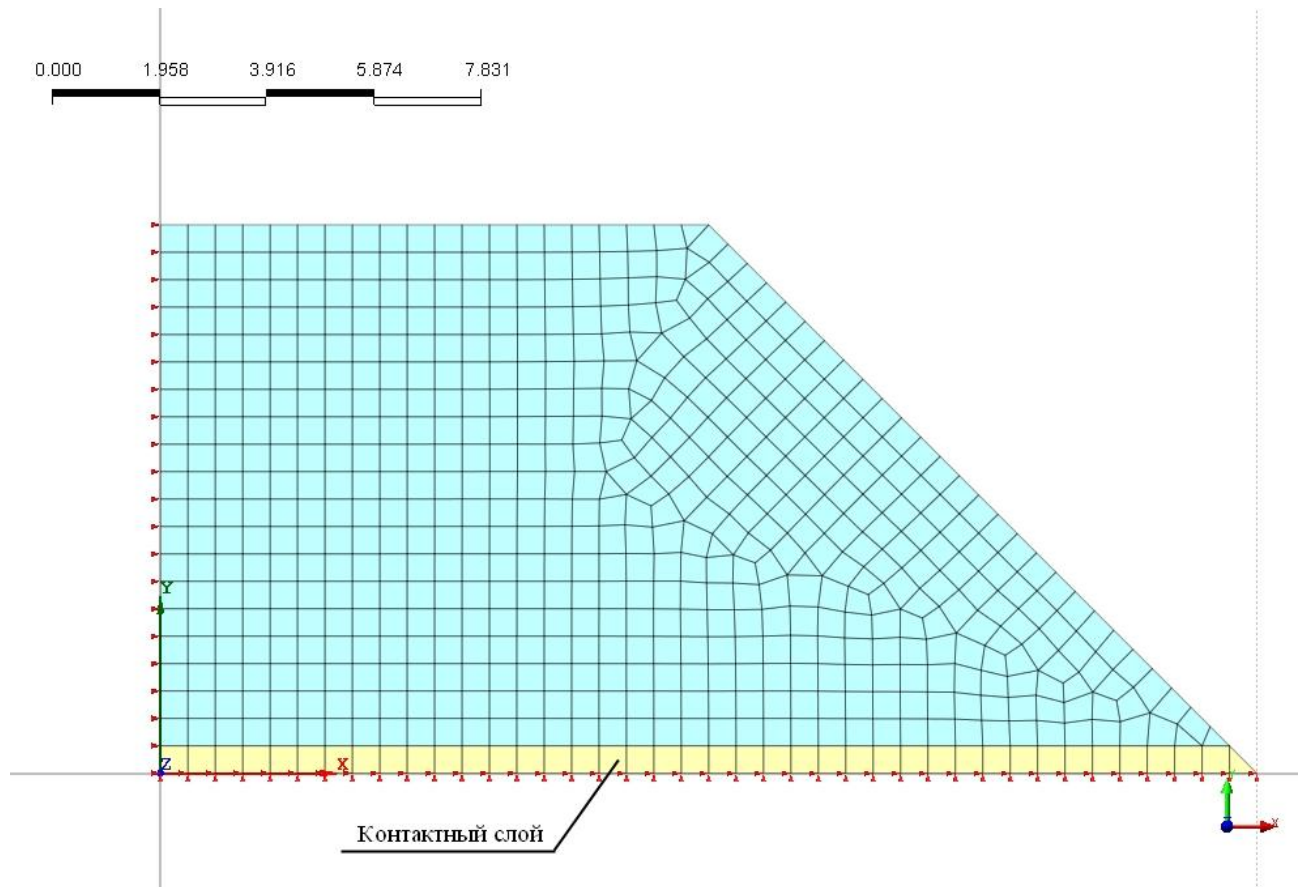


Рисунок 9.1 – КЭ сетка для моделей 1, 4
(611 элементов 661 узлов – для модели 1,
611 элементов 1932 узла – для модели 4)

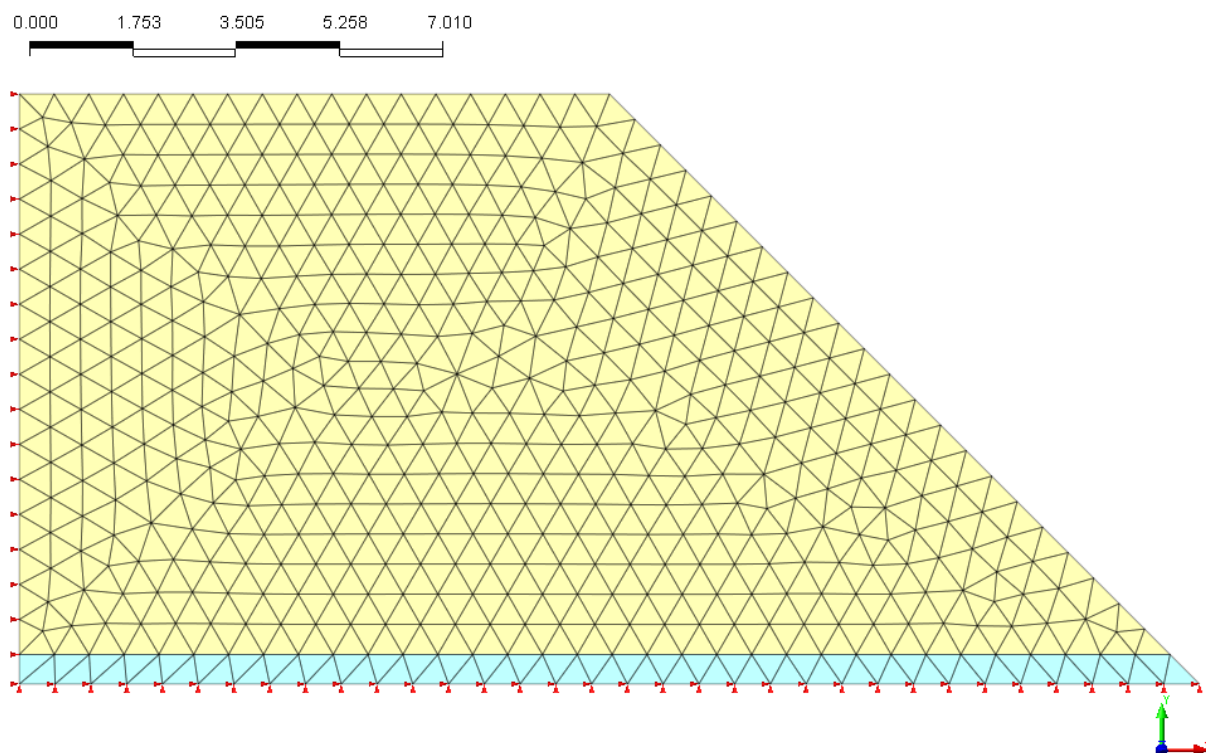


Рисунок 9.2 – КЭ сетка для модели 2
(982 элементов 537 узлов)

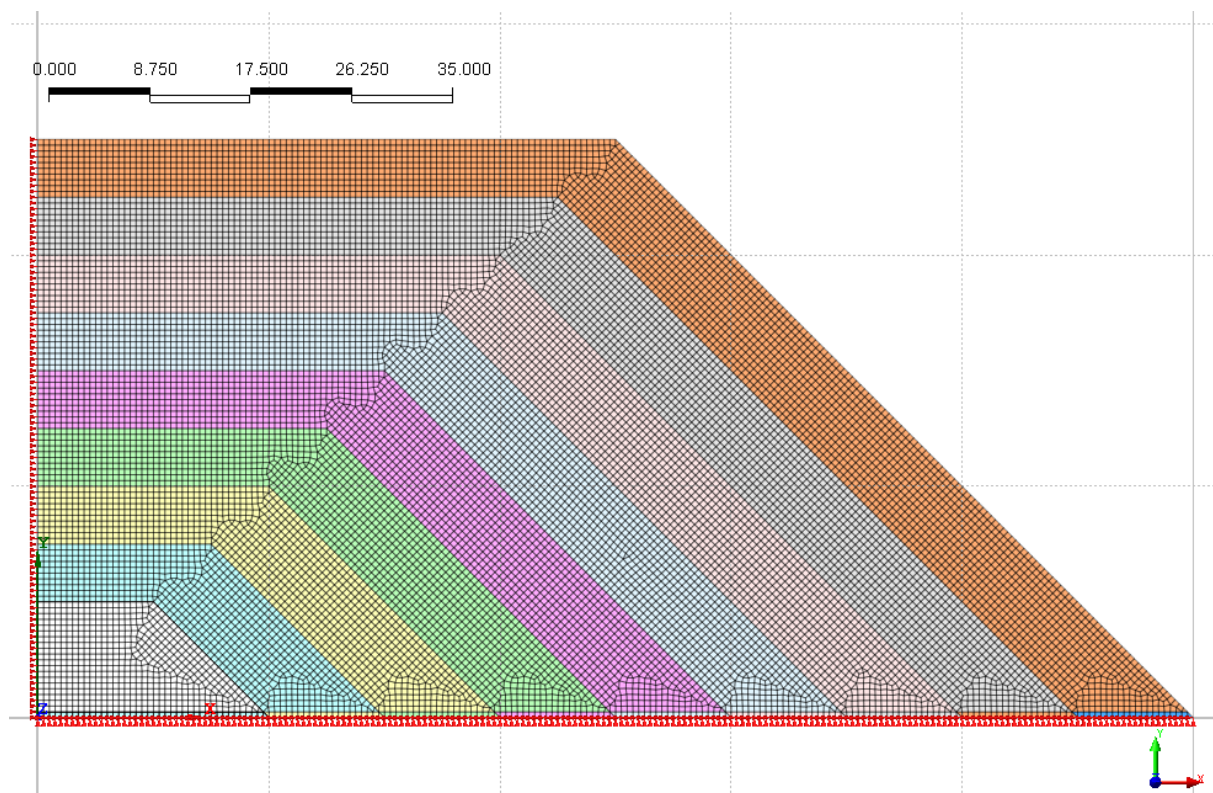


Рисунок 9.3 – КЭ сетка для модели 3
(15072 элементов 15232 узла)

Результаты расчета

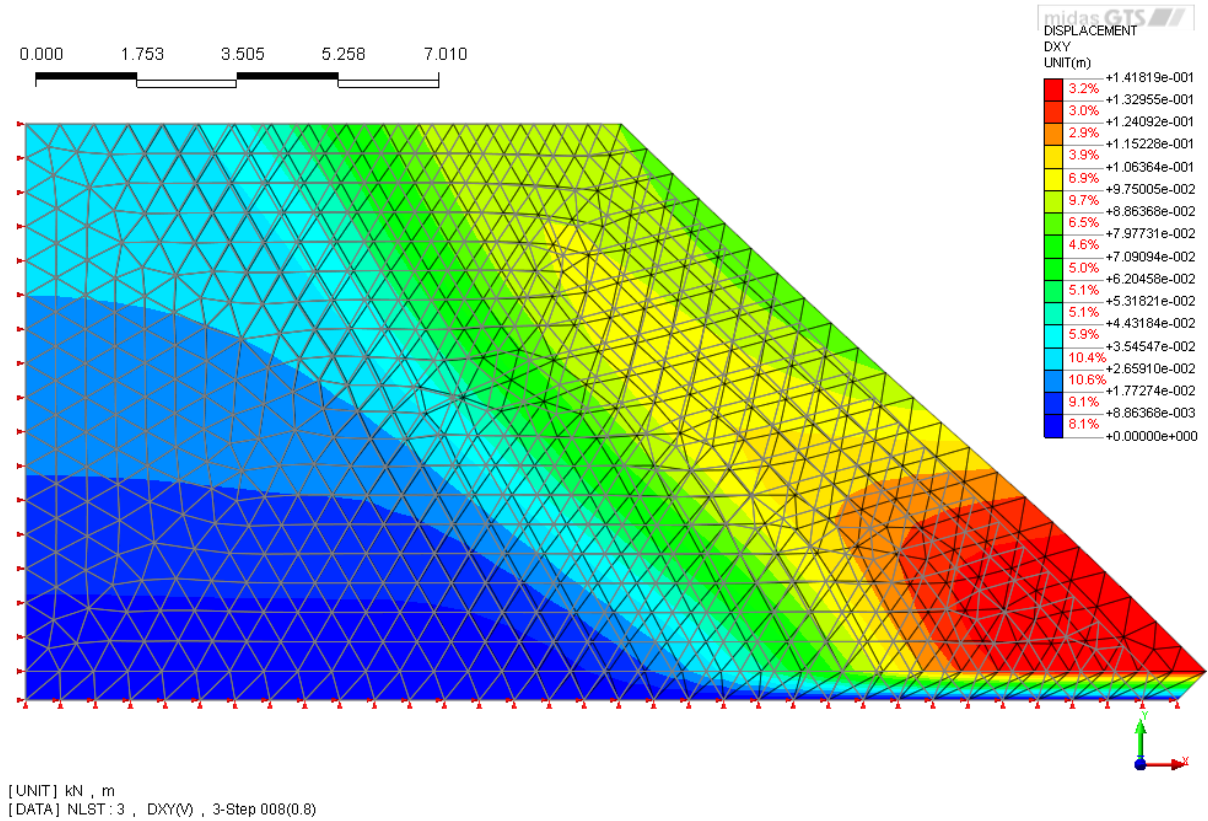
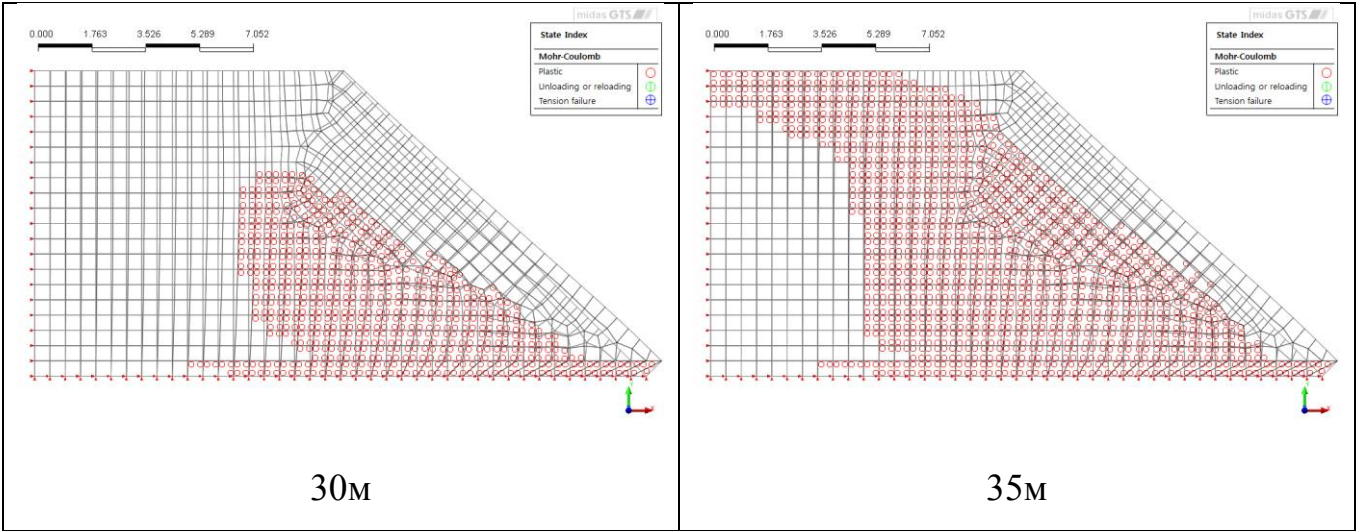


Рисунок 9.4 – Начальная и деформированная сетка КЭ для высоты отвала 40м (по модели 2)



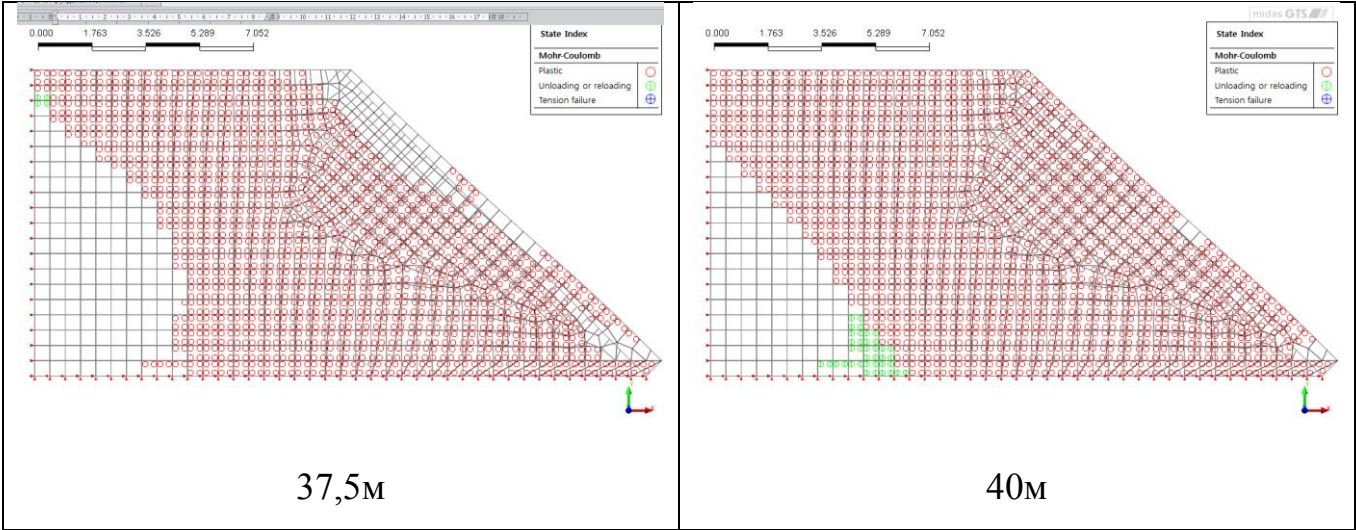


Рисунок 9.5 – Зоны развития пластических деформаций (модель 1)

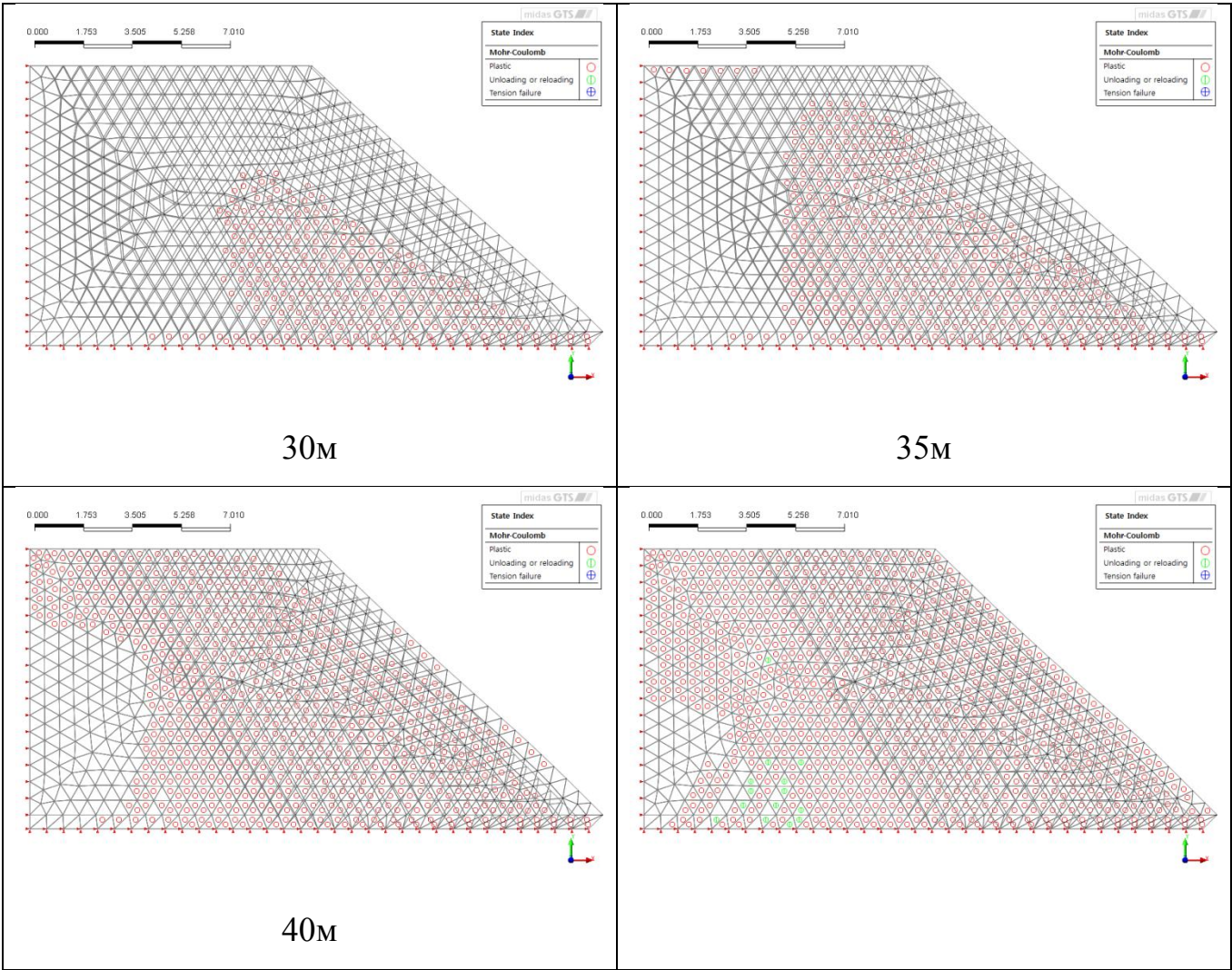


Рисунок 9.6 – Зоны развития пластических деформаций (модель 2)

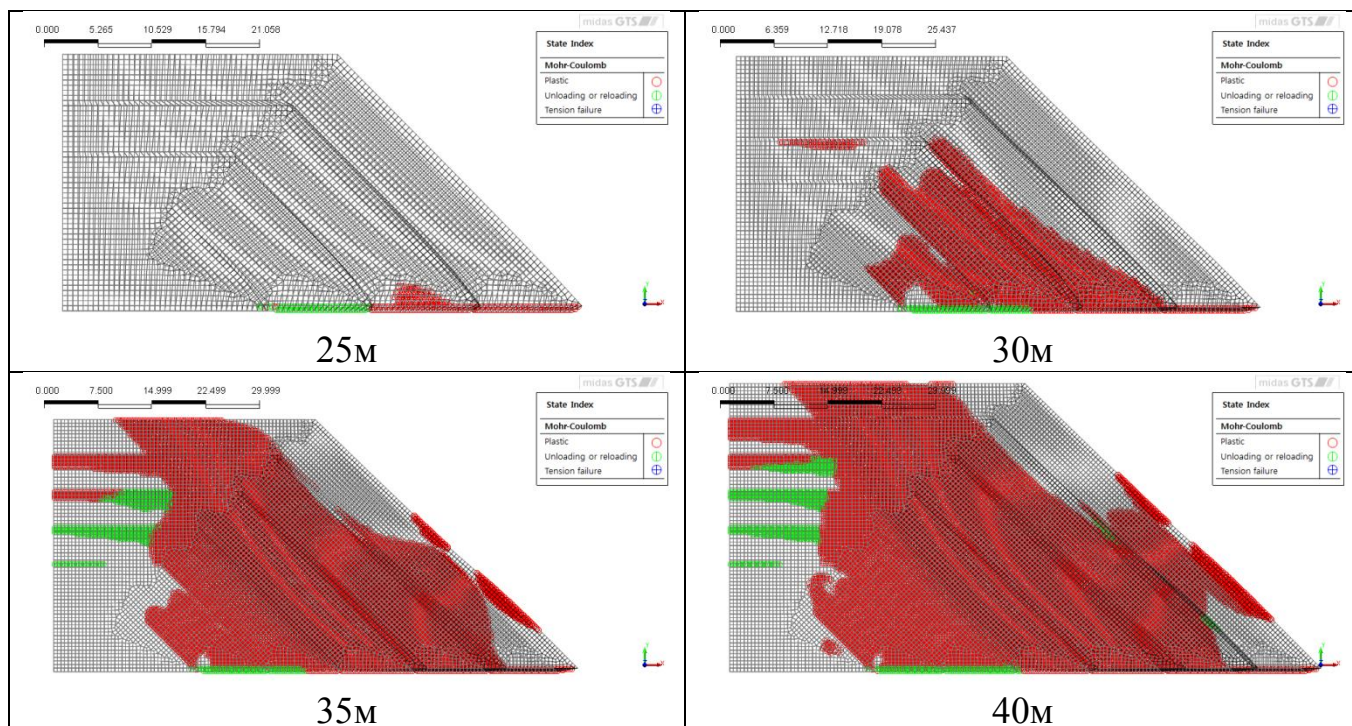


Рисунок 9.7 – Зоны развития пластических деформаций (модель 3)

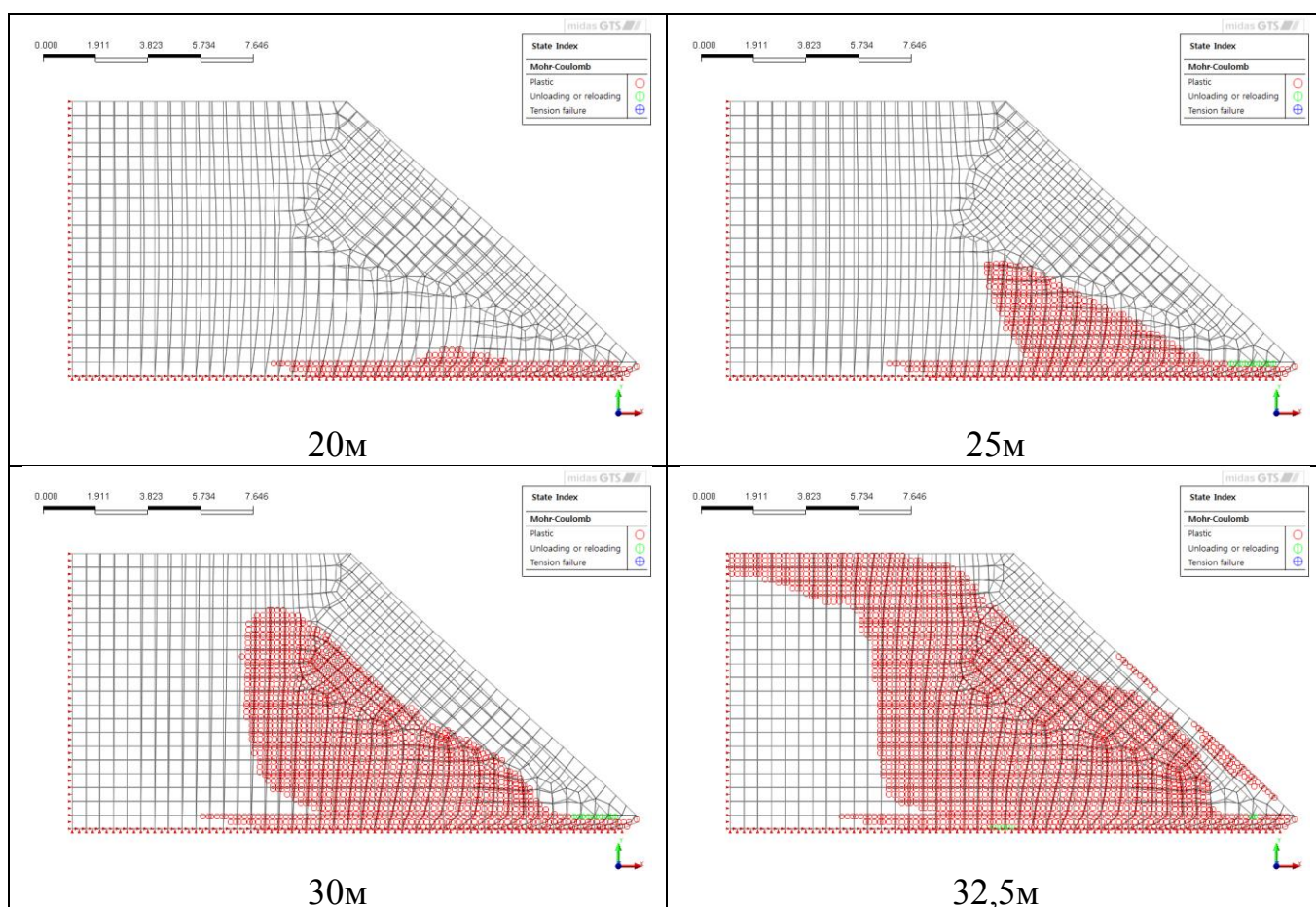


Рисунок 9.8 – Зоны развития пластических деформаций (модель 4)

Таблица 9.2 Сопоставление результатов расчета

	Источник (натура)	Геомеханика (А. Б. Фадеев)	Midas GTS								ОТКОС
			Модель 1	Погреш- ность, %	Модель 2	Погреш- ность, %	Модель 3	Погреш- ность, %	Модель 4	Погреш- ность, %	
Предельная высота отвала	45	40	37,5	16,7	40	11,1	37,5	16,7	32,5	27,8	35
Коэффициент устойчивости (φ-с reduction)	-		1,0125	-	1,0125	-	-	-	0.98	-	0.985

Пример 10. Расширение цилиндрической скважины в упруго-пластической среде

Источник	В.Г. Федоровский, О расширении цилиндрической скважины в упруго-пластической среде. Основания, фундаменты и механика грунтов. стр. 28-30
Тип задачи:	Статический нелинейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	4-х узловой четырехугольный изгибаемый элемент (PLATE)

Описание

Одной из главных задач теории прессиометра является установление зависимости между давлением, и их радиальным перемещением. Задача решается в предположении, что грунт является упруго-пластической средой с условием пластичности (предельного состояния) Кулона-Мора. Решение задачи при отсутствии бытового давления можно написать в виде связи между давлением p на стенки скважины и их радиальным перемещением u . Переходя к безразмерным переменным $\bar{p} = \frac{p}{c \cdot \cos \varphi}$, $\bar{u} = \frac{uE}{R(1+\nu)c \cdot \cos \varphi}$, получаем

при $\bar{p} \leq 1$

$$\bar{u} = \bar{p}$$

при $\bar{p} > 1$

$$\bar{u} = \frac{2(1-\nu)}{1-\sin \varphi} \left(\frac{\bar{p} \sin \varphi + 1}{1 + \sin \varphi} \right)^{\frac{1}{\sin \varphi}} - \frac{\bar{p}(1-2\nu + \sin^2 \varphi) + 2 \sin \varphi(1-\nu)}{1 - \sin^2 \varphi},$$

где c – удельное сцепление,

φ – угол внутреннего трения,

E – модуль деформации; ν – коэффициент Пуассона.

Предмет верификации

В настоящей задаче определялись перемещения стенки скважины в зависимости от прикладываемой нагрузки с учетом пластичности среды. Также определялись размеры расчётной модели, которые сводят к минимуму влияние на получаемые результаты.

GTS модель

Задача смоделирована в двухмерной постановке в модели плоской деформации, используя четвертную симметрию. Для решения задачи применялся 4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации. Сетка КЭ вблизи скважины (отверстия) смоделирована в радиальной структуре. Такое разбиение сводит к минимуму влияние от краевых эффектов. Также в данном примере проводился подбор размеров модели с целью минимизации влияния размеров модели на получаемые результаты. Окончательные граничные размеры модели составили 400х400м. Дальнейшее увеличение размеров модели приводит к изменению величин получаемых результатов менее чем на 1%.

Исходные данные представлены в таблице 10.1

Таблица 10.1 Исходные данные

Размеры модели $a \times b$	400х400м
Радиус скважины R	1м
Граничные условия	Рабочая плоскость - ХоУ Левая и правая грани – ограничение деформаций по Х Нижняя и верхняя грани – ограничение деформаций по У
Модель и физические характеристики пластины	Мора-Кулона: $E=25000$ кПа, $\nu=0,451$, $c=20$ кПа, $\phi=15$ град, $\psi=15$ град. Тип поведения - дренированный
Нагрузка	$q=290,7$ кН/м ²

Тип КЭ	4-х узловой четырехугольный элемент плоской деформации
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона-Рафсона

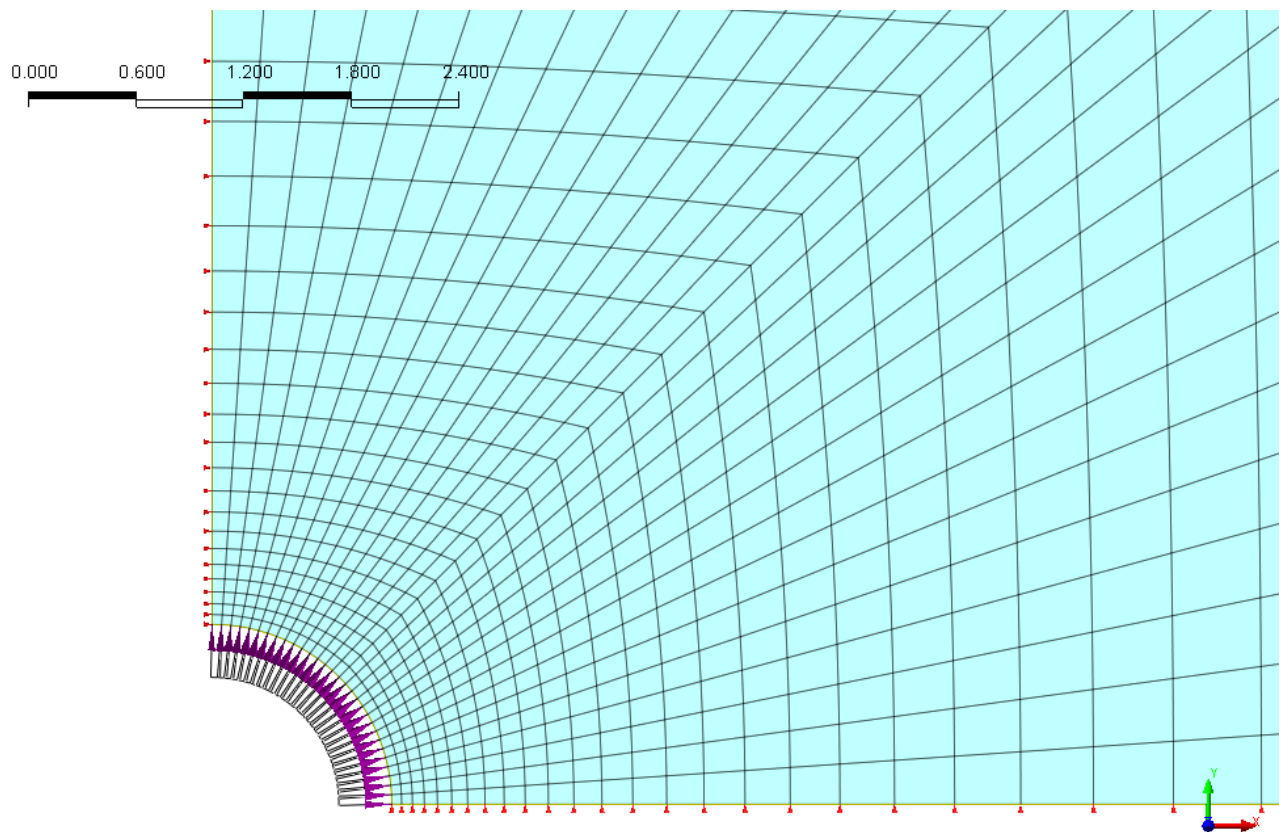


Рисунок 10.1 – Фрагмент КЭ-модели вблизи скважины
(5179 элементов 5326 узлов)

Результаты расчета

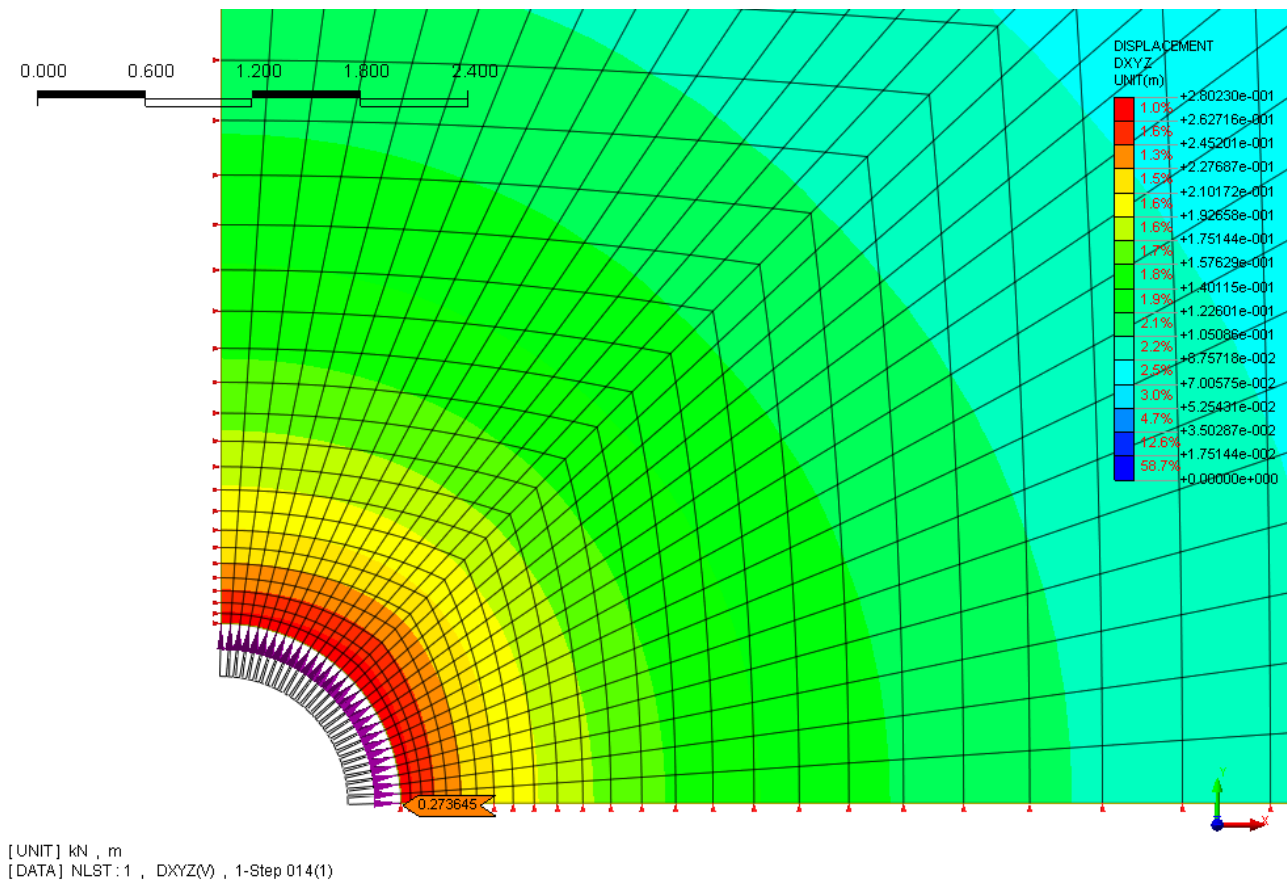
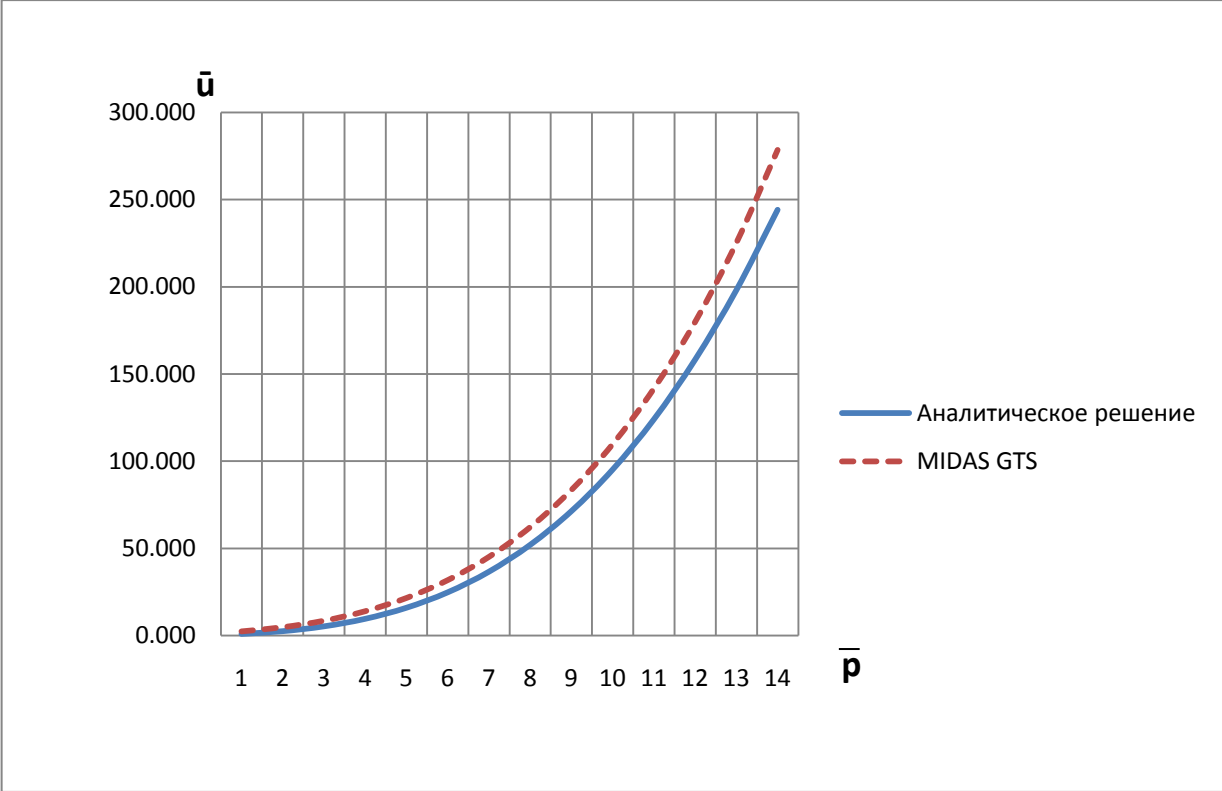


Рисунок 10.2 – Изополя перемещений при нагрузке $q=290,7 \text{ кН/м}^2 \text{ (м)}$

Таблица 10.2 Сопоставление результатов расчета



	Источник	MIDAS GTS	Погрешность, %
Приведенное перемещение стенки скважины \bar{u} при $\bar{p} = 15$	278,44	244,05	12,35

Пример 11. Пластическое нагружение толстостенного цилиндра

Источник	<i>S. Timoshenko, Strength of Material, Part II, Elementary Theory and Problems</i> , 3rd Edition, D. Van Nostrand Co., Inc., New York, NY, 1956, pg. 388, article 70
Тип задачи:	Статический нелинейный расчет НДС с учетом пластичности
Тип верифицируемых КЭ:	4-х и 8-ми узловой четырехугольный пластинчатый осесимметричный элемент, 8-ми и 20-ти узловой гексаэдр

Описание

Бесконечно длинный толстостенный цилиндр подвержен действию внутреннего давления p .

Необходимо определить:

1) упругие радиальное σ_r и тангенциальное (кольцевое) σ_t напряжения вблизи внешней и внутренней поверхностей цилиндра под действием давления p_{el} (чуть ниже предела текучести p_T).

$$p_T = \tau_T \frac{b^2 - a^2}{b^2},$$

где a , b – соответственно внутренний и внешний радиус цилиндра;

2) наибольшее касательное напряжение по теории прочности Треска $\tau_{max} = \tau_T$ в тех же зонах под давлением p_{ult} , которое вызывает во всей стенке цилиндра пластическое течение.

$$p_{ult} = p_{пред} = 2\tau_T \ln \frac{a}{b}.$$

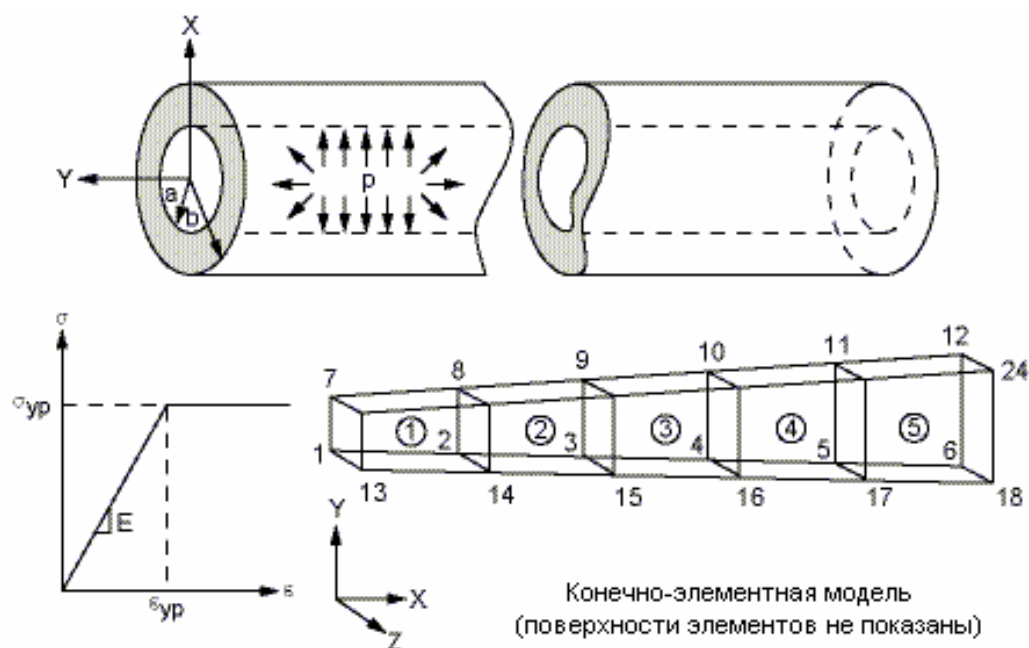


Рисунок 11.1 – Задача для толстостенного цилиндра

Упругие радиальное σ_r и тангенциальное (кольцевое) σ_t напряжения в радиальном расстоянии r от оси цилиндра выражаются формулами

$$\sigma_r = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \sigma_t = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right),$$

где a и b – внутренний и внешний радиусы цилиндра соответственно.

Касательное напряжение по теории прочности Треска τ_{\max} при условии пластического течения определяется следующим образом

$$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \tau_t = \tau_{\max}$$

Предмет верификации

В данном примере определяются упругие радиальное σ_r и тангенциальное (кольцевое) σ_t напряжения вблизи внешней и внутренней поверхностей цилиндра под действием давления p_{el} (чуть ниже предела текучести), наибольшее касательное напряжение по теории прочности Треска τ_{\max} в тех же зонах под давлением p_{ult} , которое вызывает во всей стенке цилиндра пластическое течение.

Также определяется влияние размера элементов КЭ сетки (крупности разбиения) на получаемые результаты.

GTS модель

Для моделирования поведения материала используется модель Мора-Кулона. Если принять $\varphi=0$, то условие Мора-Кулона переходит в условие Треска–Сен-Венана $\sigma_1 - \sigma_2 = 2c = \sigma_T \Rightarrow c = \sigma_T/2$. Т.к. по теории Треска–Сен-Венана $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_m$, то $\sigma_m = 2\tau_m = 2c$.

Расчет выполняется в осесимметричной и трехмерной постановке. Для решения задачи применялись 4 типа КЭ. Создано 4 расчетных модели для каждого типа КЭ:

- осесимметричная модель (модели 1, 1а): 4-х узловой четырехугольный пластинчатый осесимметричный элемент;
- осесимметричная модель (модель 2): 8-ми узловой четырехугольный пластинчатый осесимметричный элемент;
- трехмерная модель (модели 3, 3а): 8-ми узловой гексаэдр;
- трехмерная модель (модель 4): 20-ти узловой гексаэдр.

В моделях 3, 4 расчетной областью является четверть цилиндра (по сечению) длиной $l=2,54\text{см}$.

Приложение нагрузки осуществлялось за 1 подшаг.

Исходные данные представлены в таблицах 3.1, 3.2.

С целью уточнения результатов расчета и выявления зависимости задачи от крупности КЭ сетки на основе моделей 1 и 3 выполнены модели с более мелкой сеткой КЭ (модели 1а и 3а).

Таблица 11.1 Исходные данные (для моделей 1, 1а, 2)

Геометрические размеры модели	<p>Внутренний радиус $a=10,16\text{см}$</p> <p>Внешний радиус $b=20,32\text{см}$</p> <p>Длина $l=2,54\text{см}$</p>
Граничные условия	<p>Рабочая плоскость - ХоУ</p> <p>Верхняя и нижняя грани – ограничение деформаций по У</p>

Модель пластины	Мора-Кулона: $E = 2,10921 \times 10^6$ кгс/см ² , $\nu=0,3$, $c=\sigma_{yp}/2= 1054,605$ кгс/см ² , $\varphi=0$ град, $\psi=0$ град.
Нагрузка	$P_{el}=790$ кгс/см ² $P_{ult}=1470$ кгс/см ²
Тип КЭ	<i>Модель 1:</i> 4-х узловой четырехугольный пластинчатый осесимметричный элемент <i>Модель 2:</i> 8-ми узловой четырехугольный пластинчатый осесимметричный элемент
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона-Рафсона

Таблица 11.2 Исходные данные (для моделей 3, 3а, 4)

Геометрические размеры модели	Внутренний радиус $a=10,16$ см Внешний радиус $b=20,32$ см Длина $l=2,54$ см
Граничные условия	Плоскости ХоУ – ограничение деформаций по Z Плоскость ХоZ ограничение деформаций по Y Плоскость YoZ ограничение деформаций по X
Модель пластины	Мора-Кулона: $E = 2,10921 \times 10^6$ кгс/см ² , $\nu=0,3$, $c=\sigma_{yp}/2= 1054,605$ кгс/см ² , $\varphi=0$ град, $\psi=0$ град.

Нагрузка	$P_{el}=790 \text{ кгс/см}^2$ $P_{ult}=1470 \text{ кгс/см}^2$
Тип КЭ	<i>Модель 3:</i> 8-ми узловой гексаэдр <i>Модель 4:</i> 20-ти узловой гексаэдр
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона-Рафсона

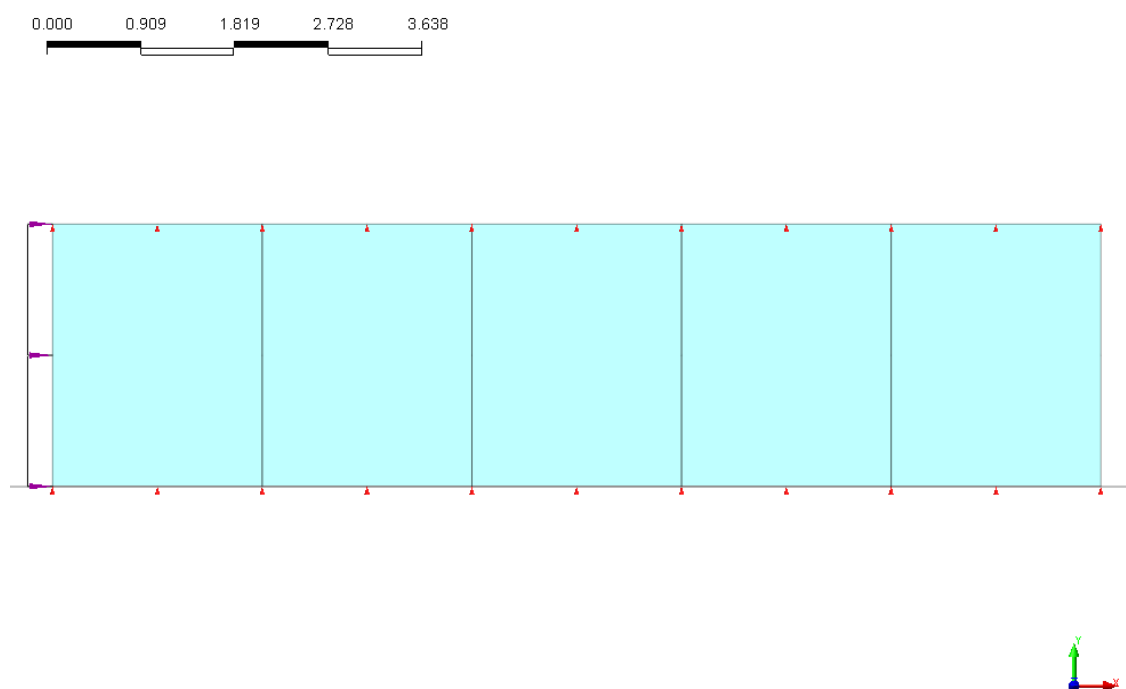


Рисунок 11.2 – Осесимметричная КЭ-модель цилиндра – модели 1, 2
 (5 элементов 12 узлов – модель 1
 5 элементов 28 узлов – модель 2)

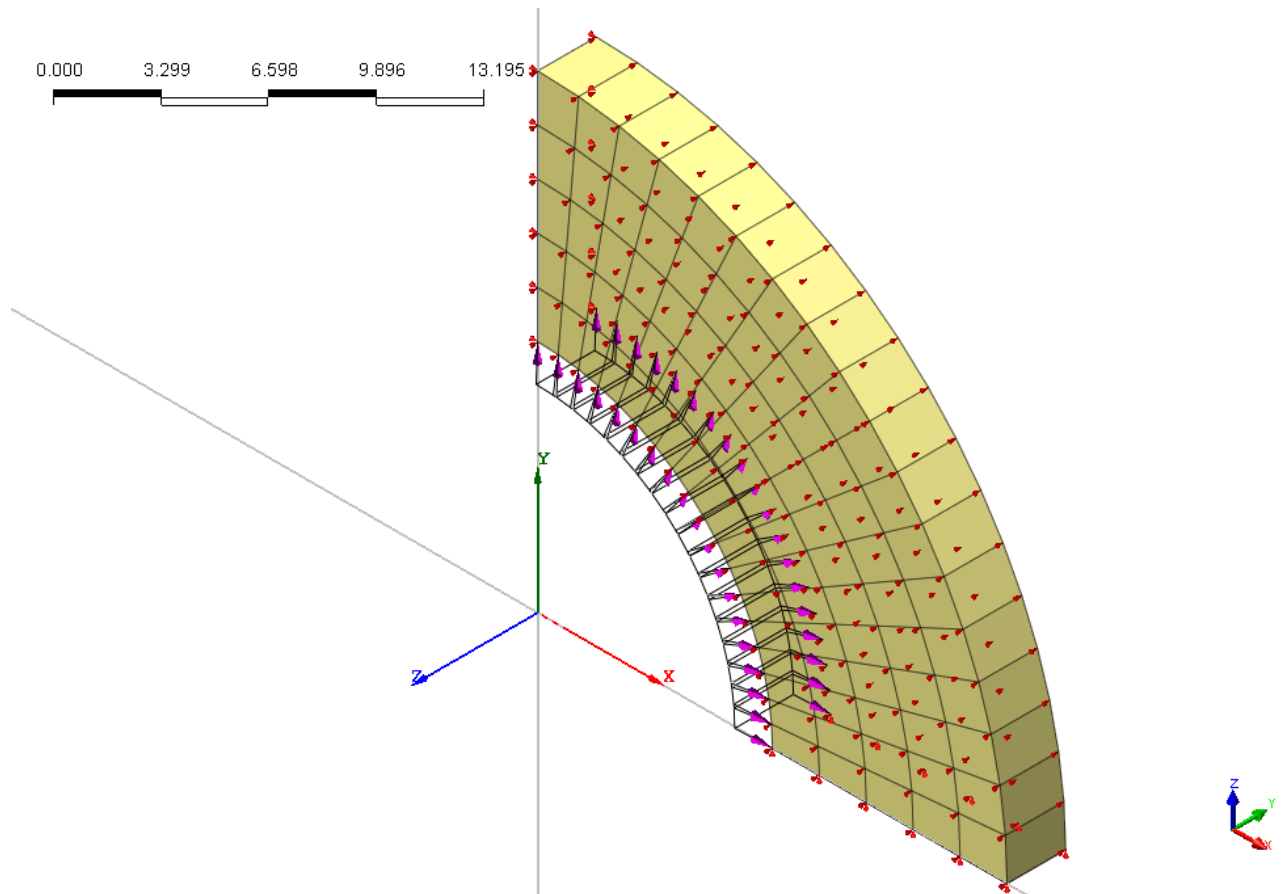


Рисунок 11.3 – Трехмерная КЭ-модель цилиндра – модели 3, 4
(90 элементов 228 узлов – модель 3
90 элементов 748 узлов – модель 4)

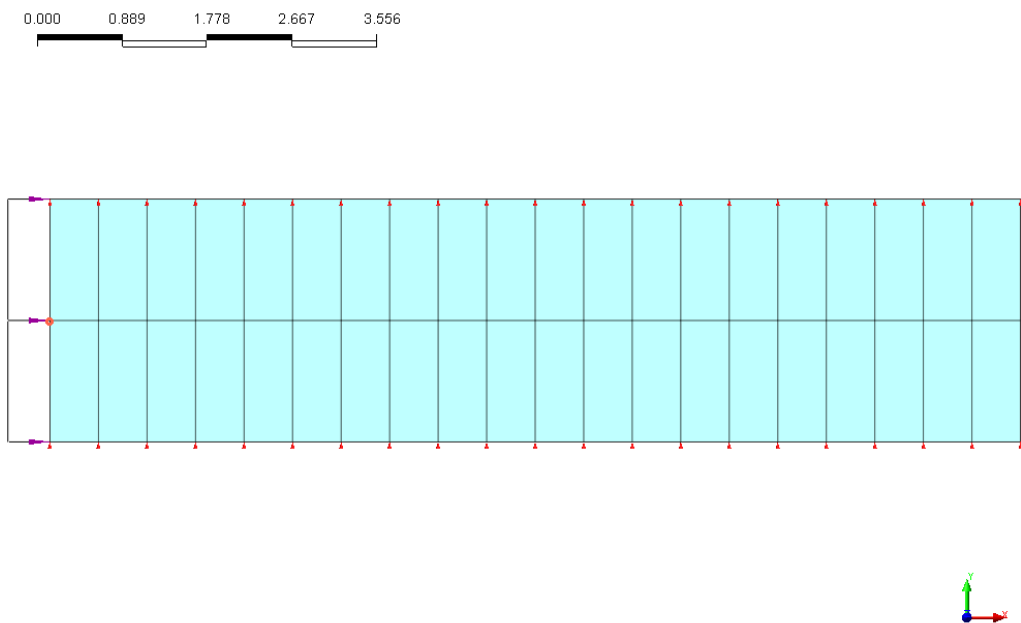


Рисунок 11.4 – Осесимметричная КЭ-модель цилиндра – модель 1а
(40 элементов 63 узла)

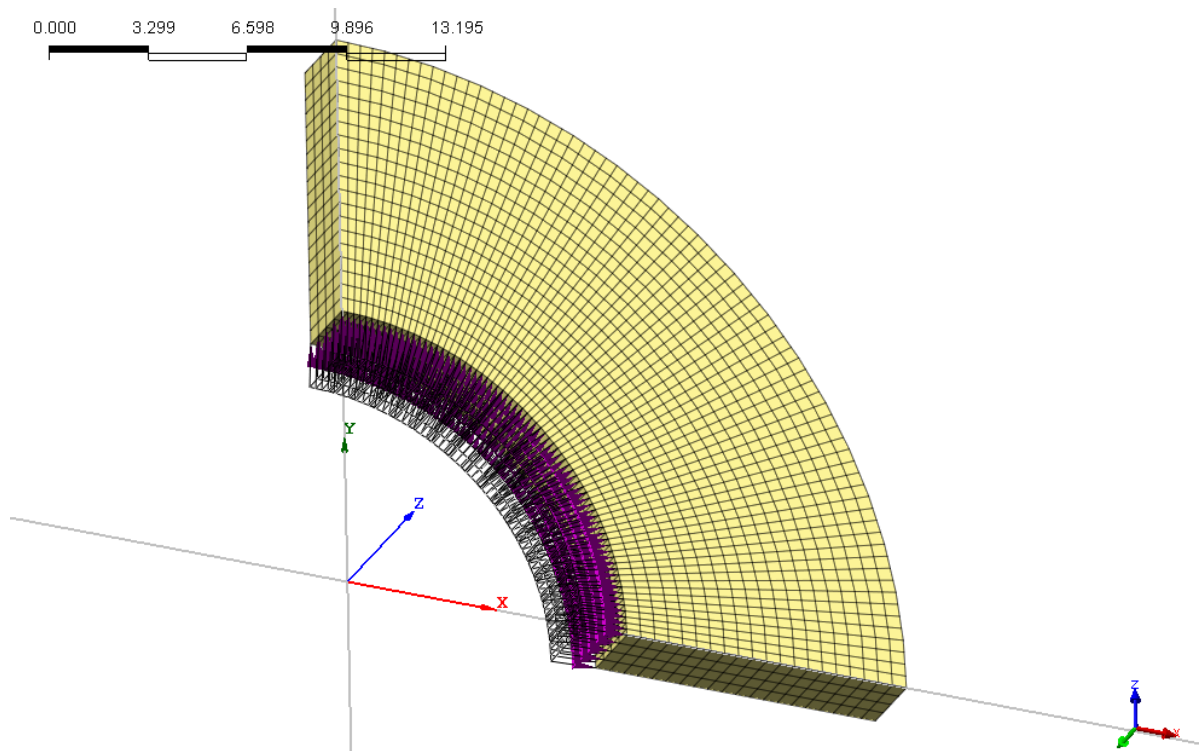


Рисунок 11.5 – Трехмерная КЭ-модель цилиндра – модель 3а
(5760 элементов 7665 узлов)

Результаты расчётов

Результаты расчетов для моделей 1, 2, 3, 4

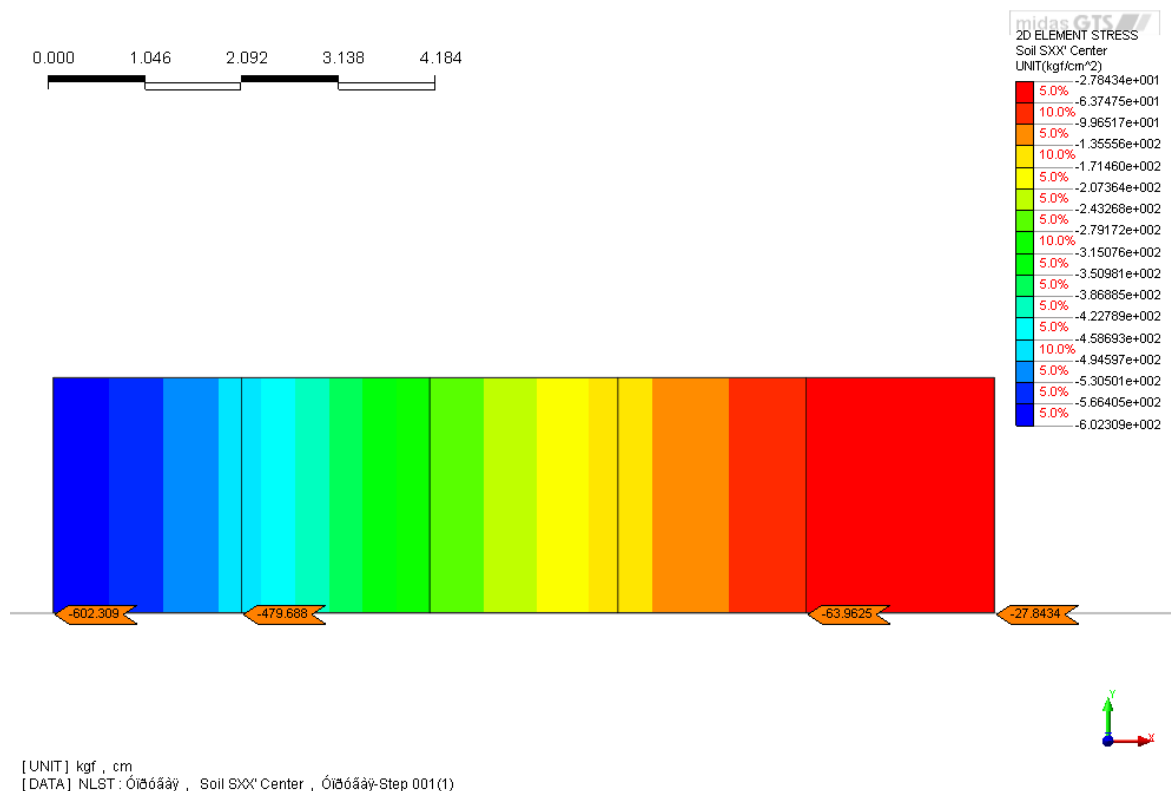


Рисунок 11.6 – Изополя радиальных напряжений σ_r – модель 1 (кгс/см²)

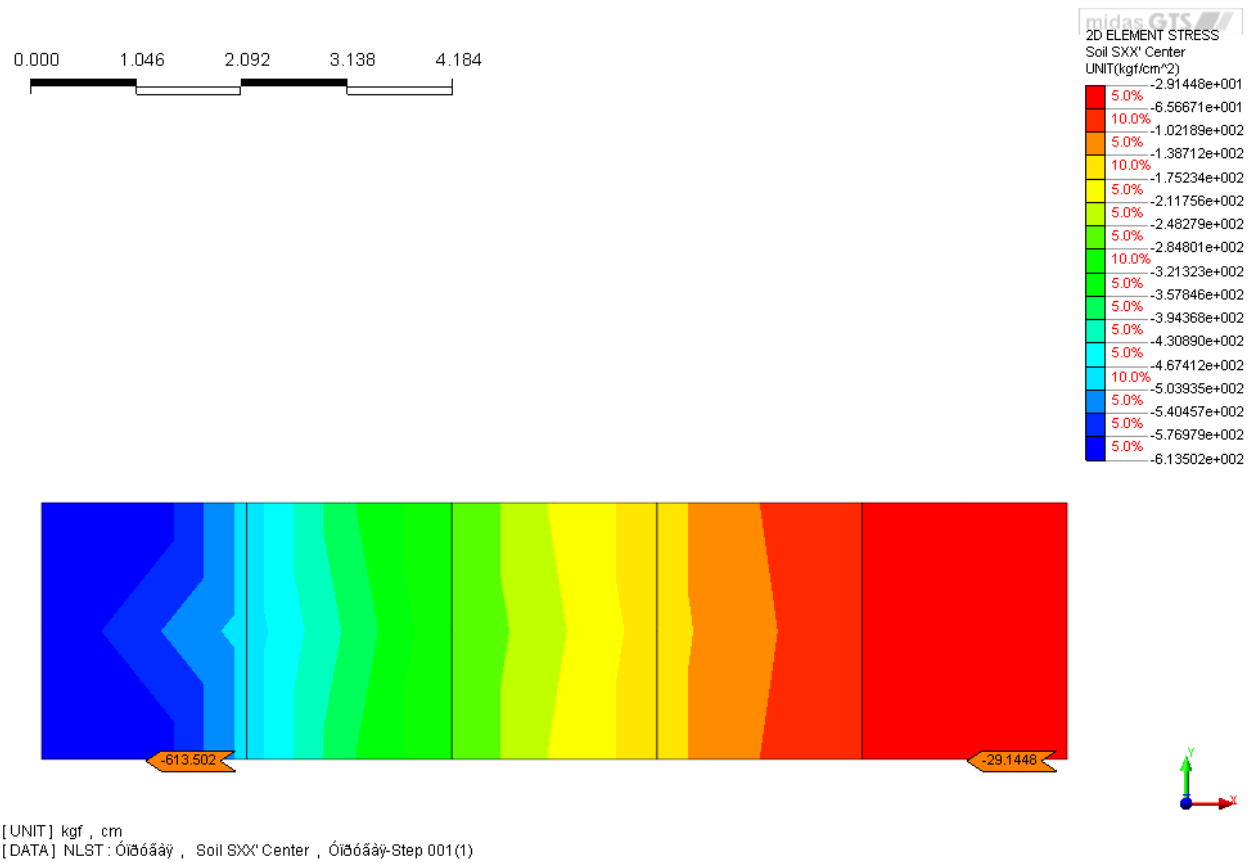


Рисунок 11.7 – Изополя радиальных напряжений σ_r – модель 2 (кгс/см²)

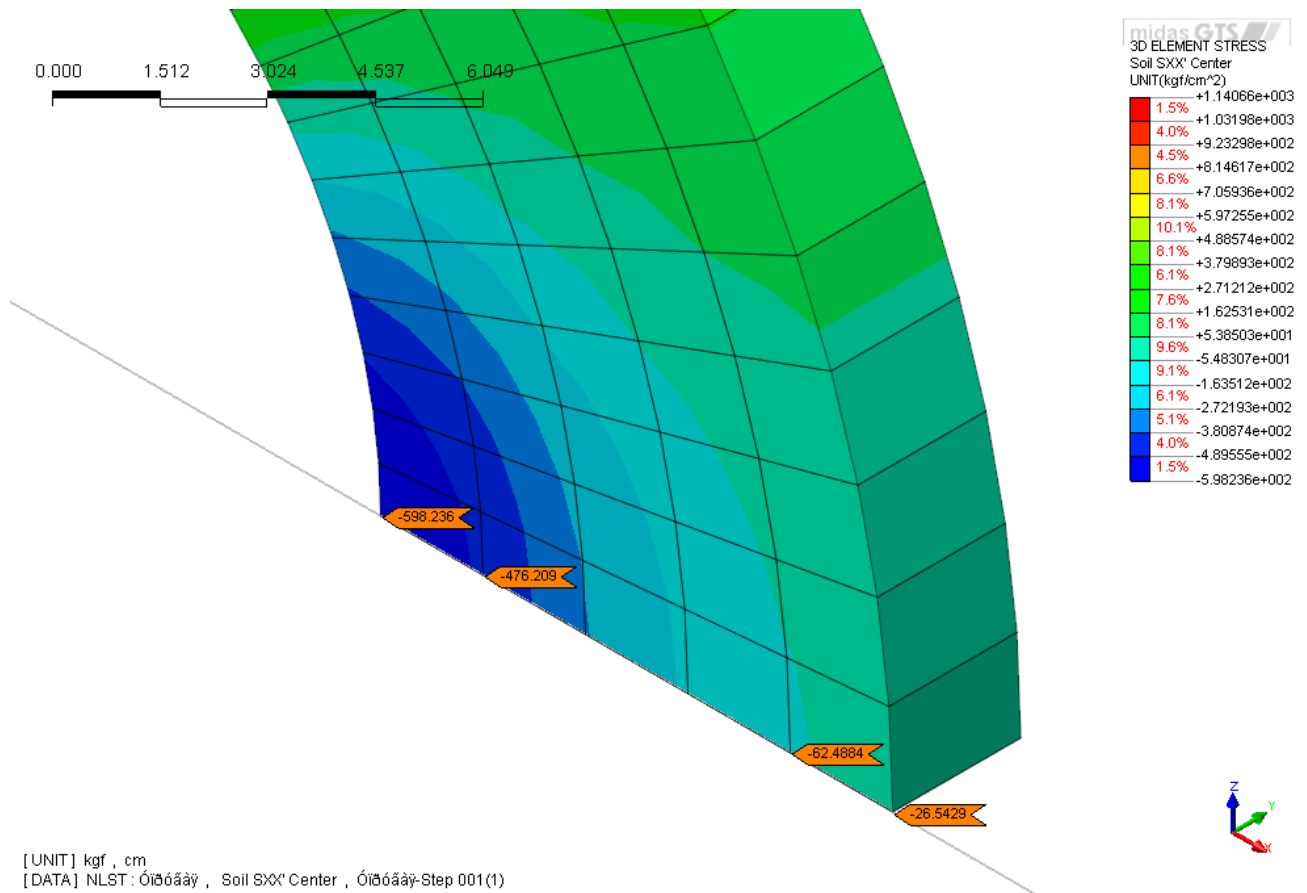


Рисунок 11.8 – Изополя радиальных напряжений σ_r – модель 3 (кгс/см²)

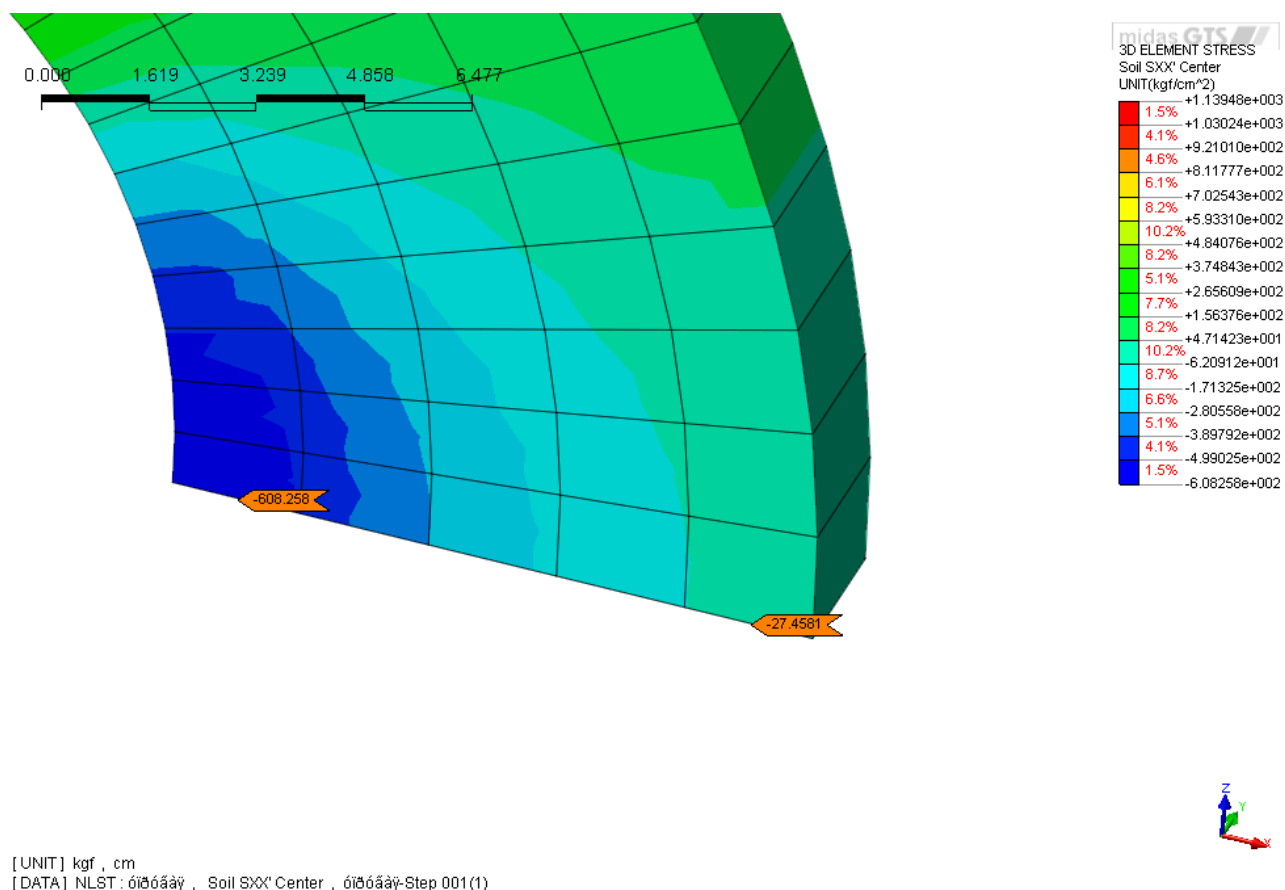


Рисунок 11.9 – Изополя радиальных напряжений σ_r – модель 4 (кгс/см²)

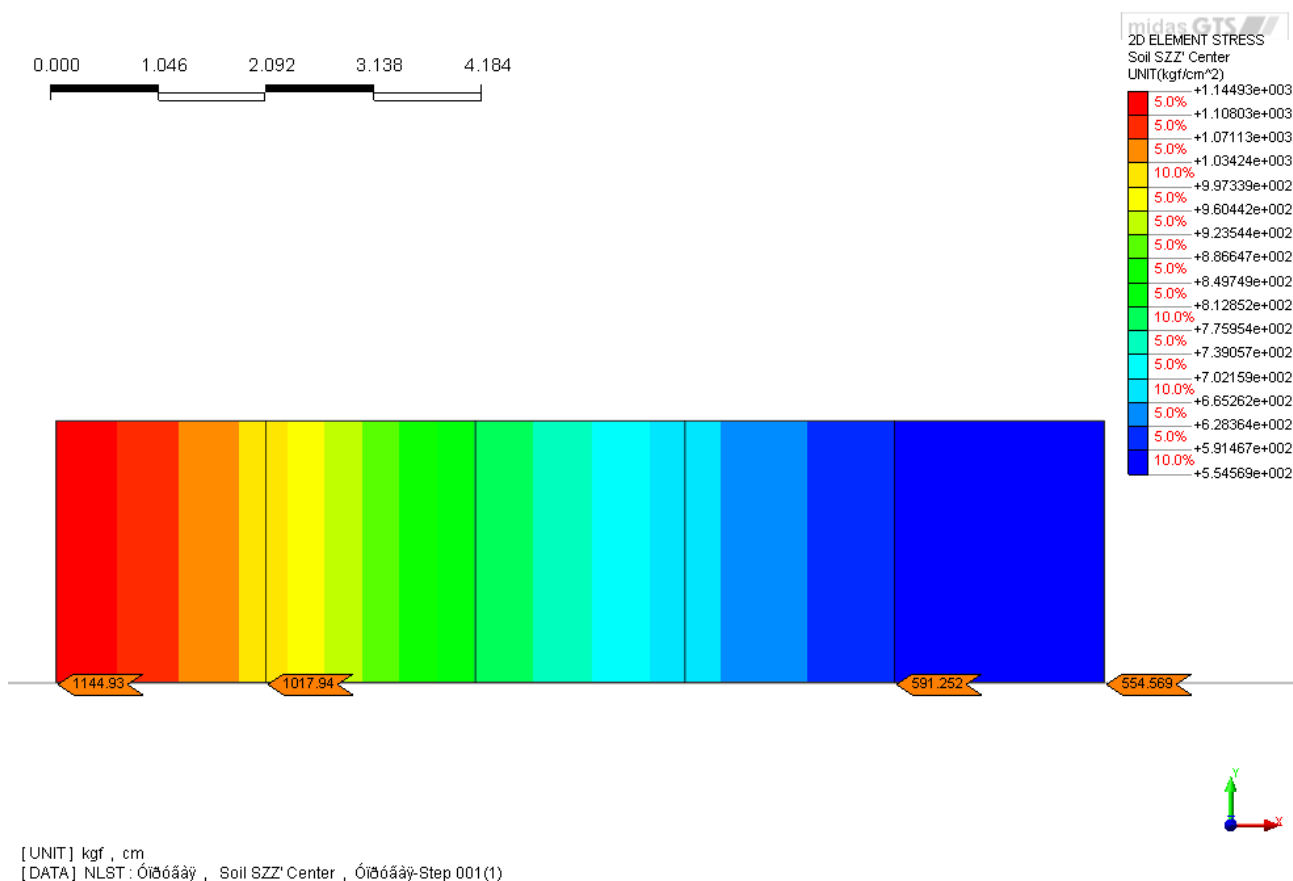


Рисунок 11.10 – Изополя тангенциальных напряжений σ_t – модель 1 (кгс/см²)

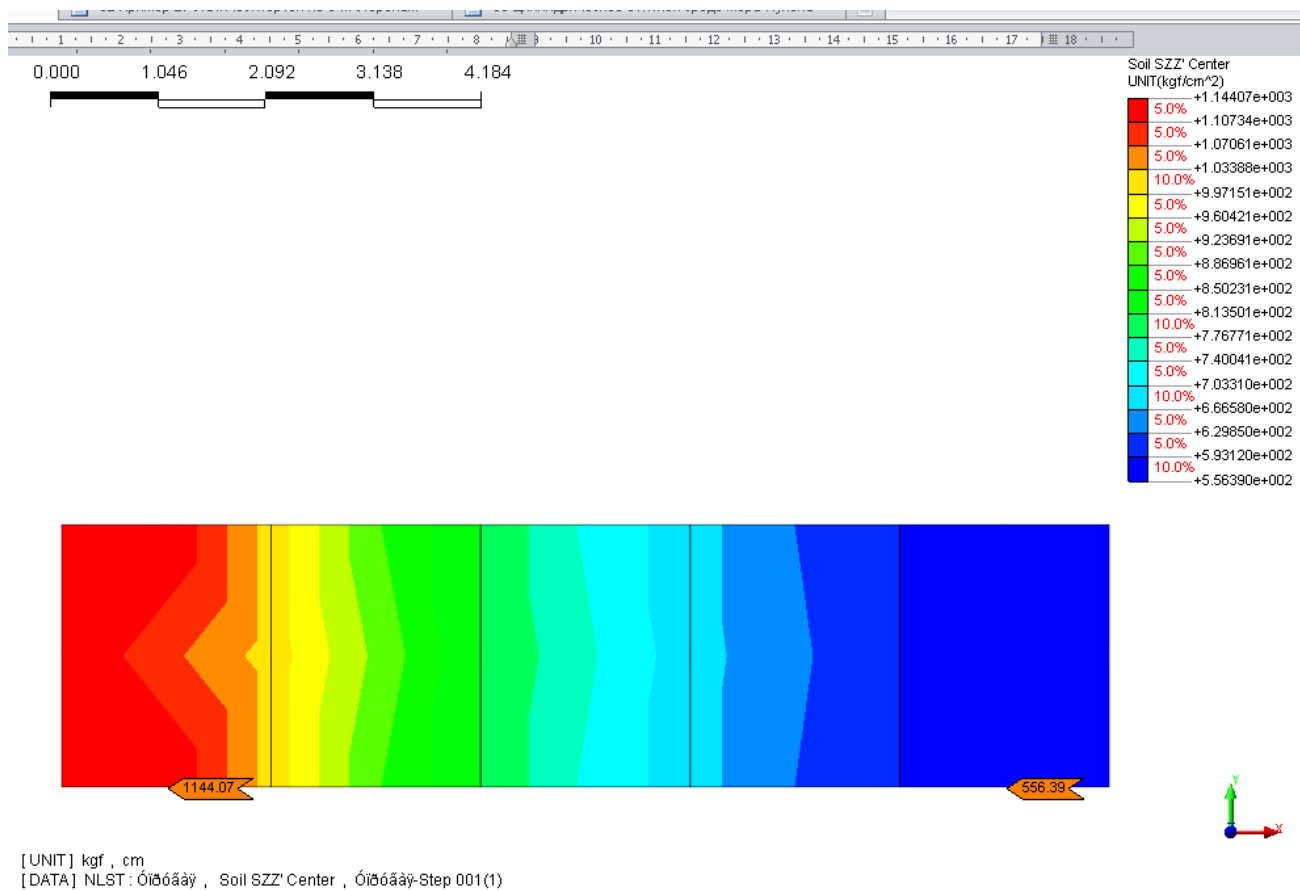


Рисунок 11.11 – Изополя тангенциальных напряжений σ_t – модель 2 (кгс/см²)

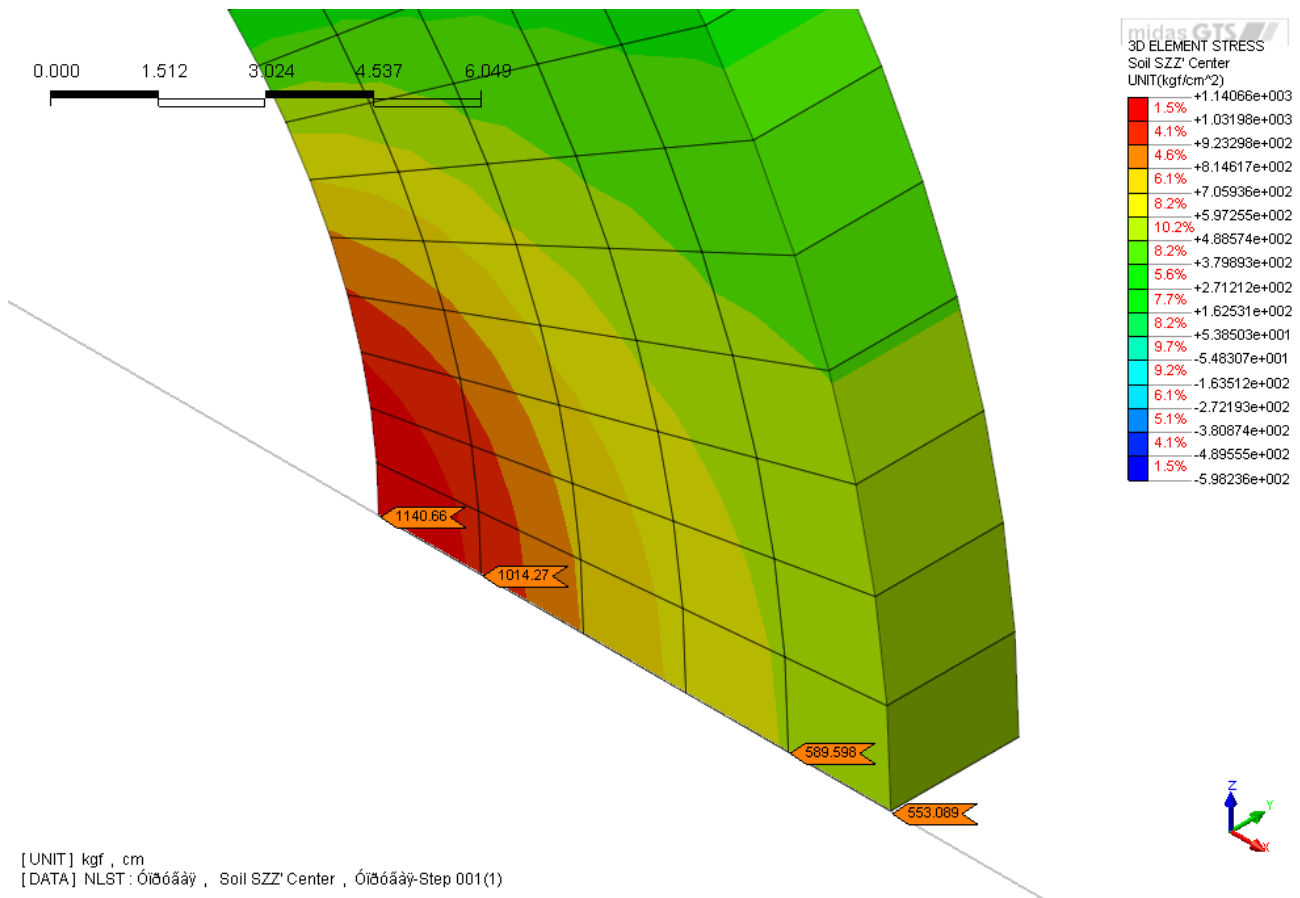


Рисунок 11.12 – Изополя тангенциальных напряжений σ_t – модель 3 (кгс/см²)

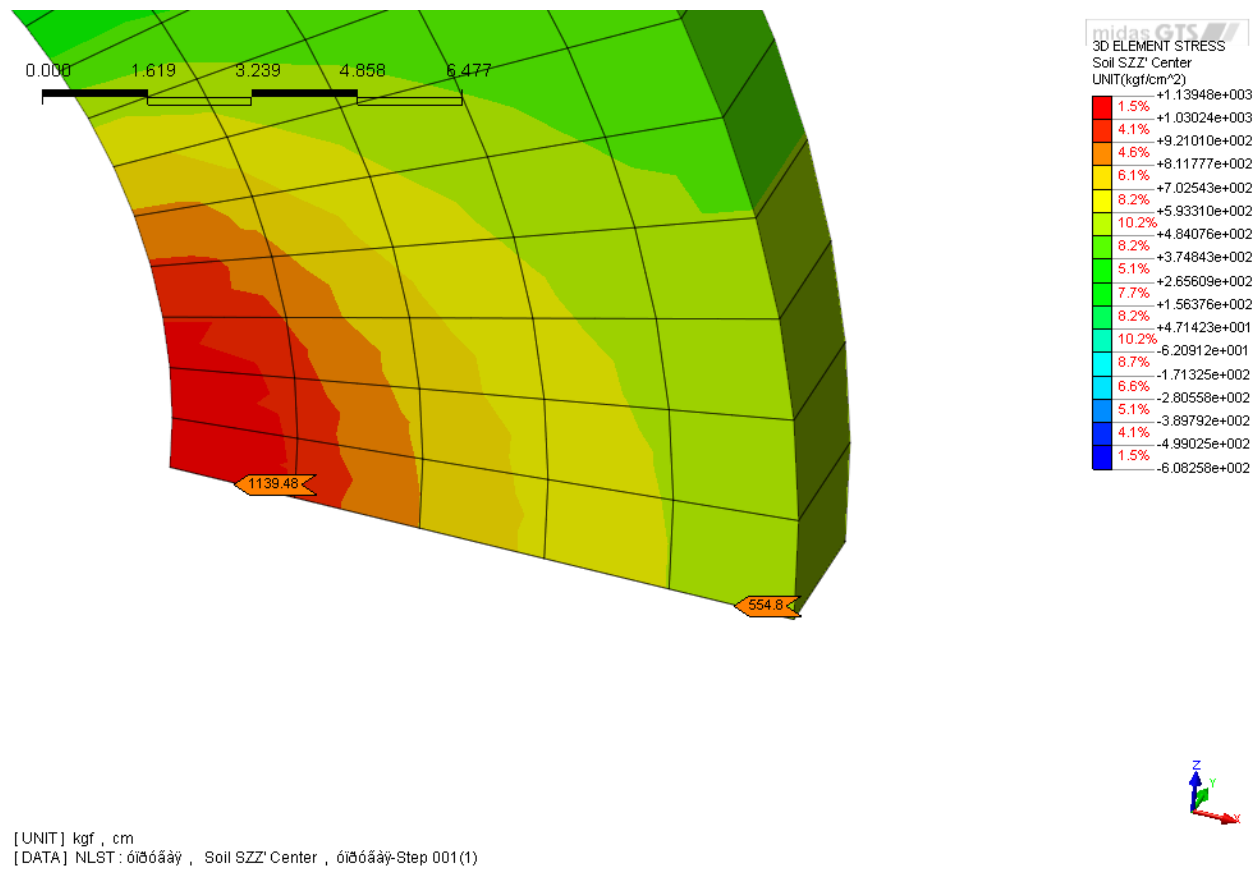


Рисунок 11.13 – Изополя тангенциальных напряжений σ_t – модель 4 (кгс/см²)

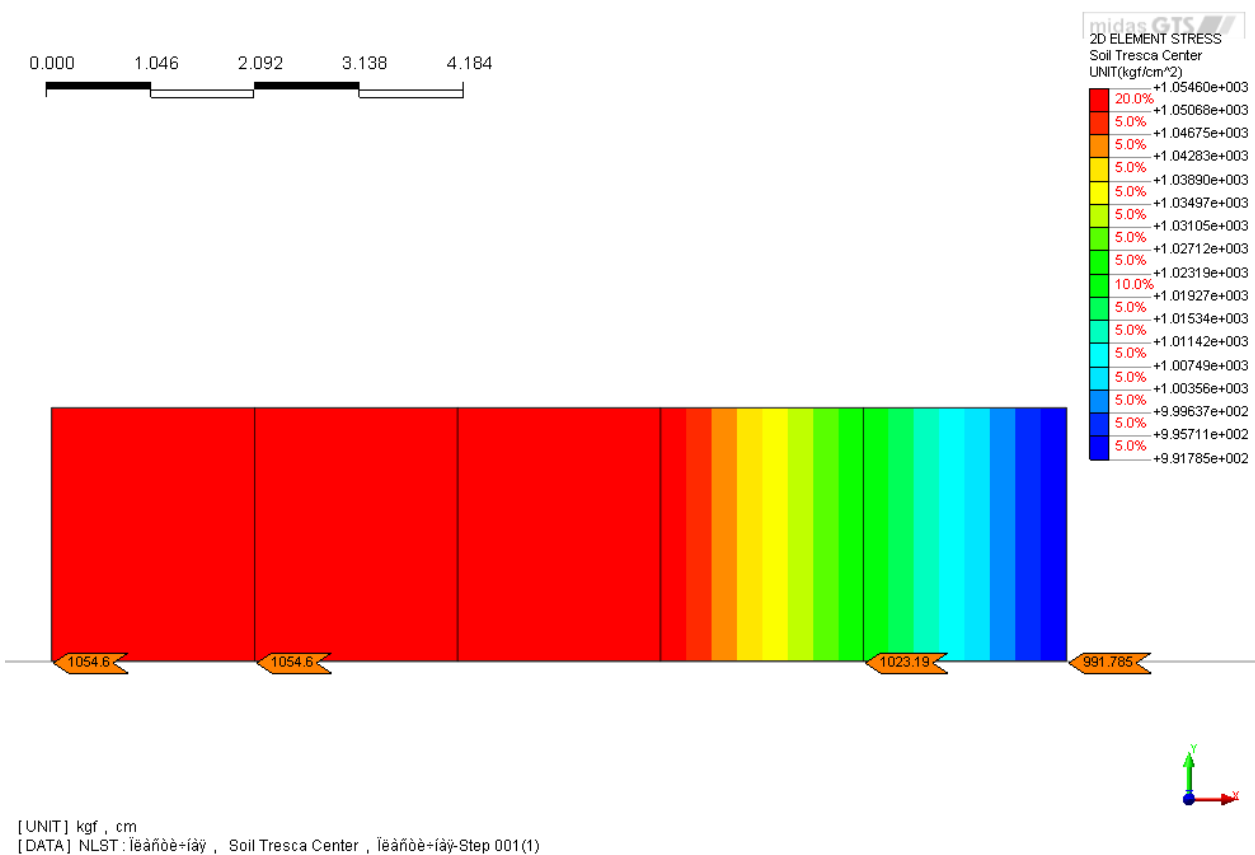


Рисунок 11.14 – Изополя наибольших касательных напряжений Треска τ_{\max} – модель 1 (кгс/см²)

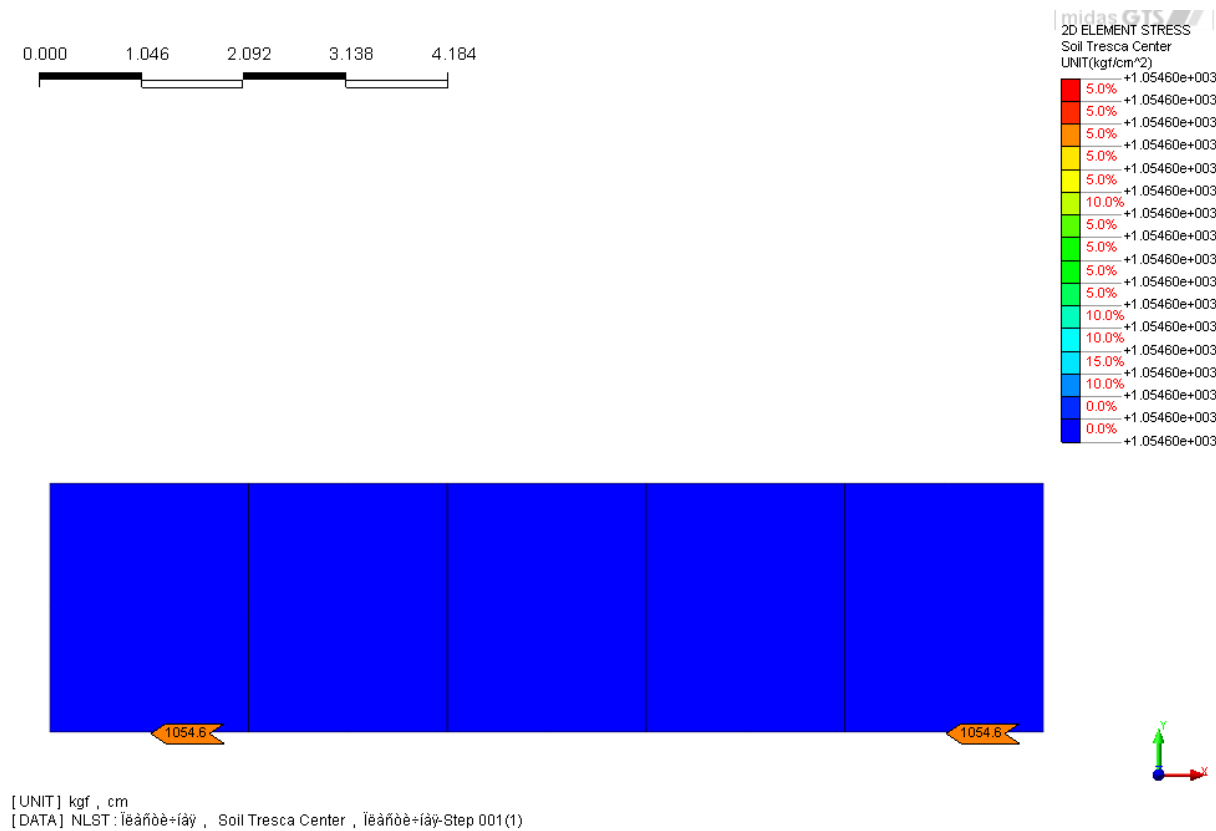


Рисунок 11.15 – Изополя наибольших касательных напряжений Треска τ_{\max} – модель 2 (кгс/см²)

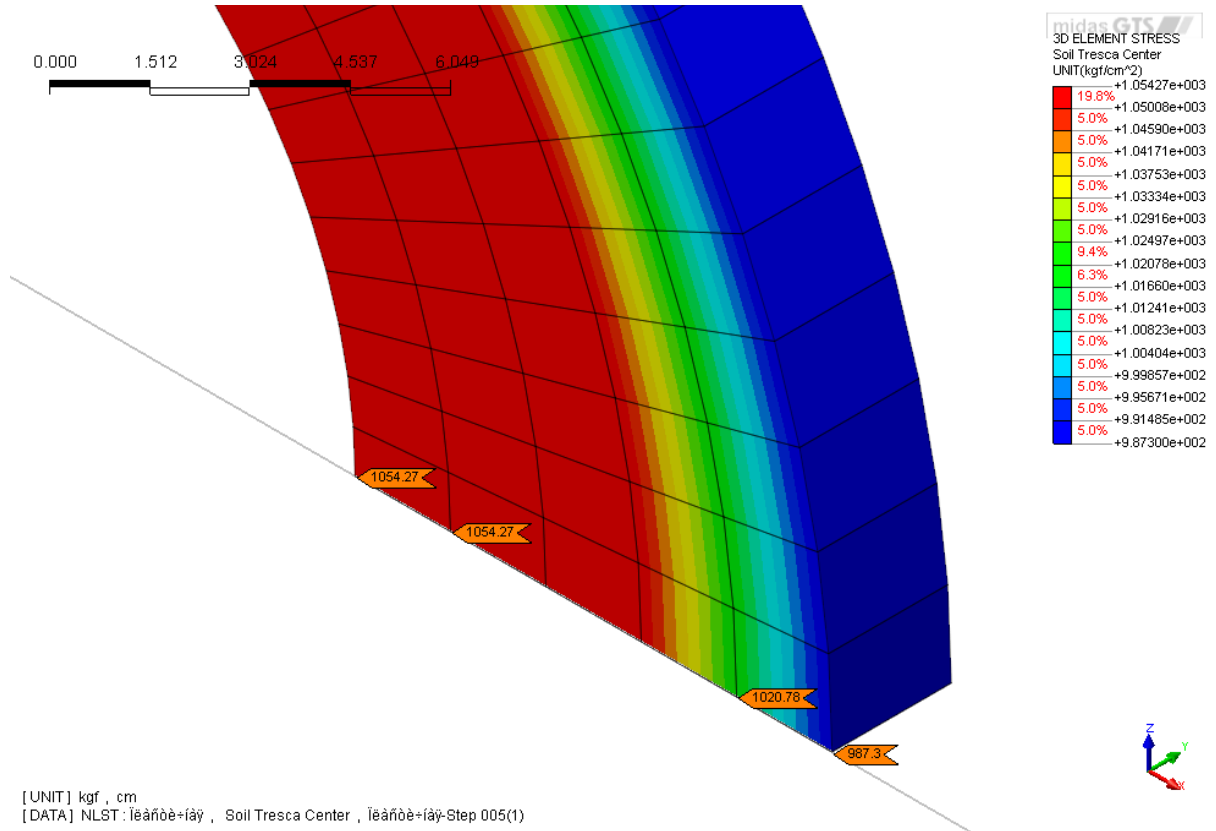


Рисунок 11.16 – Изополя наибольших касательных напряжений Треска τ_{\max} – модель 3 (кгс/см²)

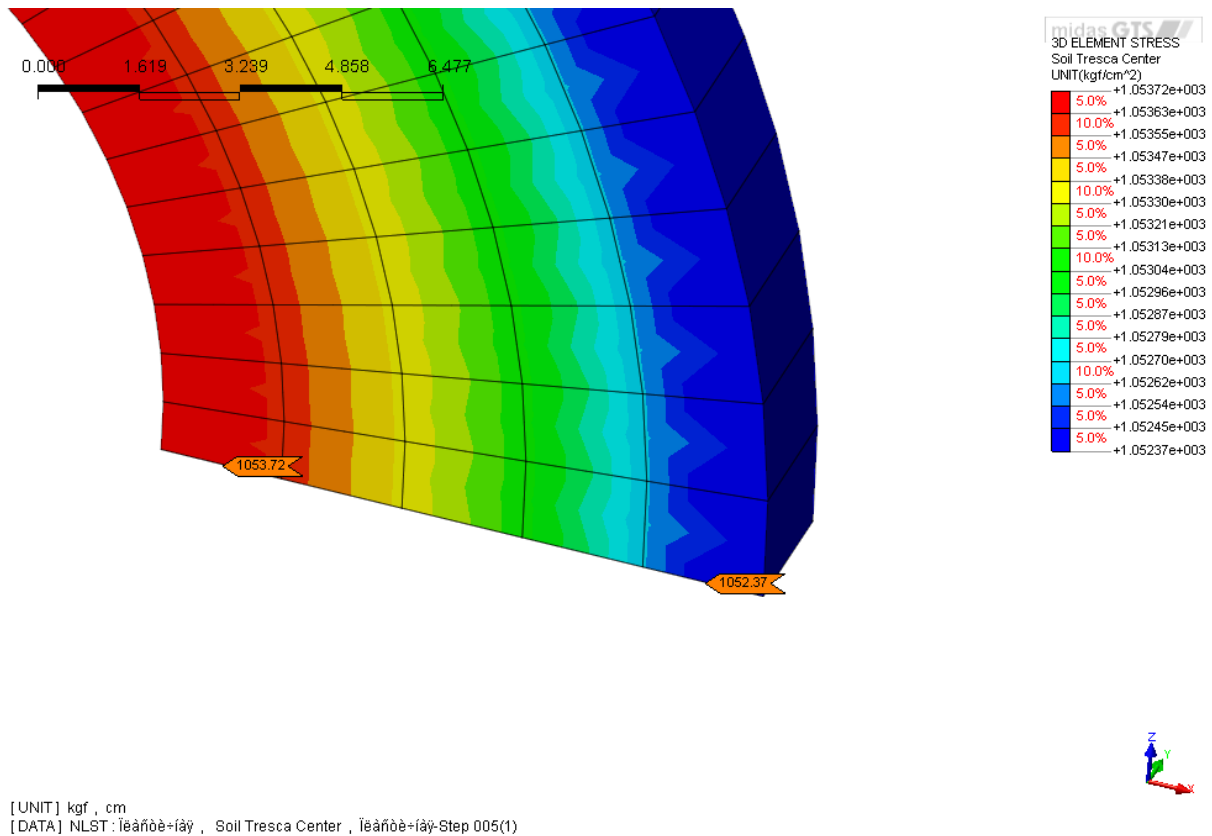


Рисунок 11.17 – Изополя наибольших касательных напряжений Треска τ_{\max} – модель 4 (кгс/см²)

Результаты расчетов для моделей 1а, 3а

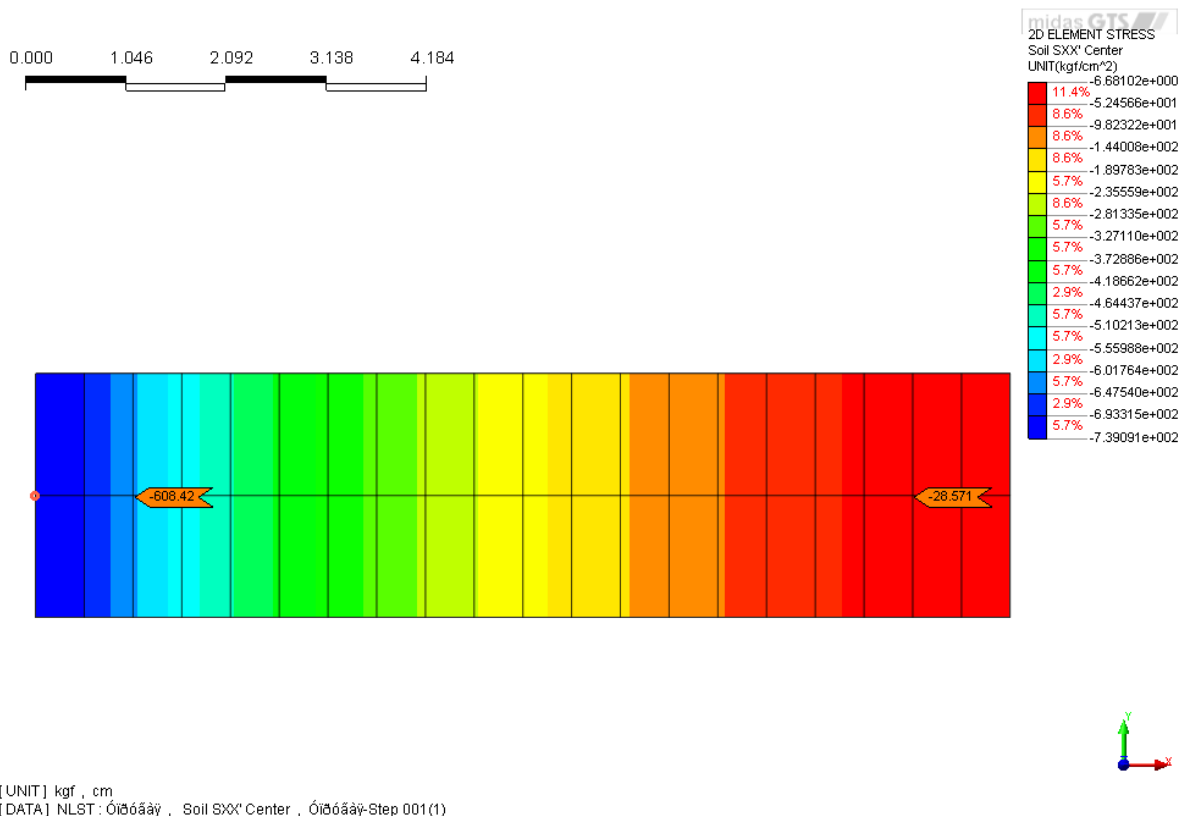


Рисунок 11.18 – Изополя радиальных напряжений σ_r – модель 1а (кгс/см²)

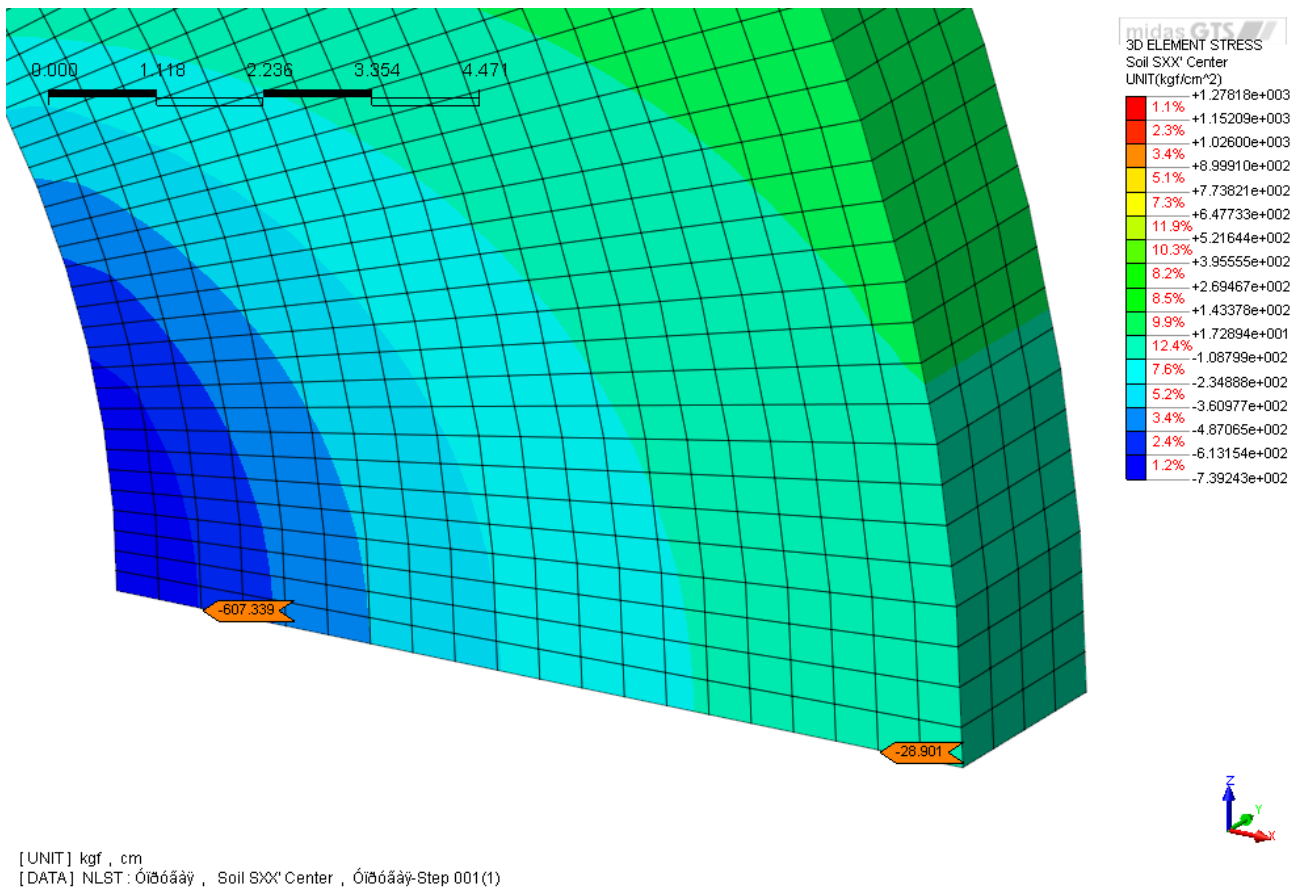


Рисунок 11.19 – Изополя радиальных напряжений σ_r – модель 3a (кгс/см²)

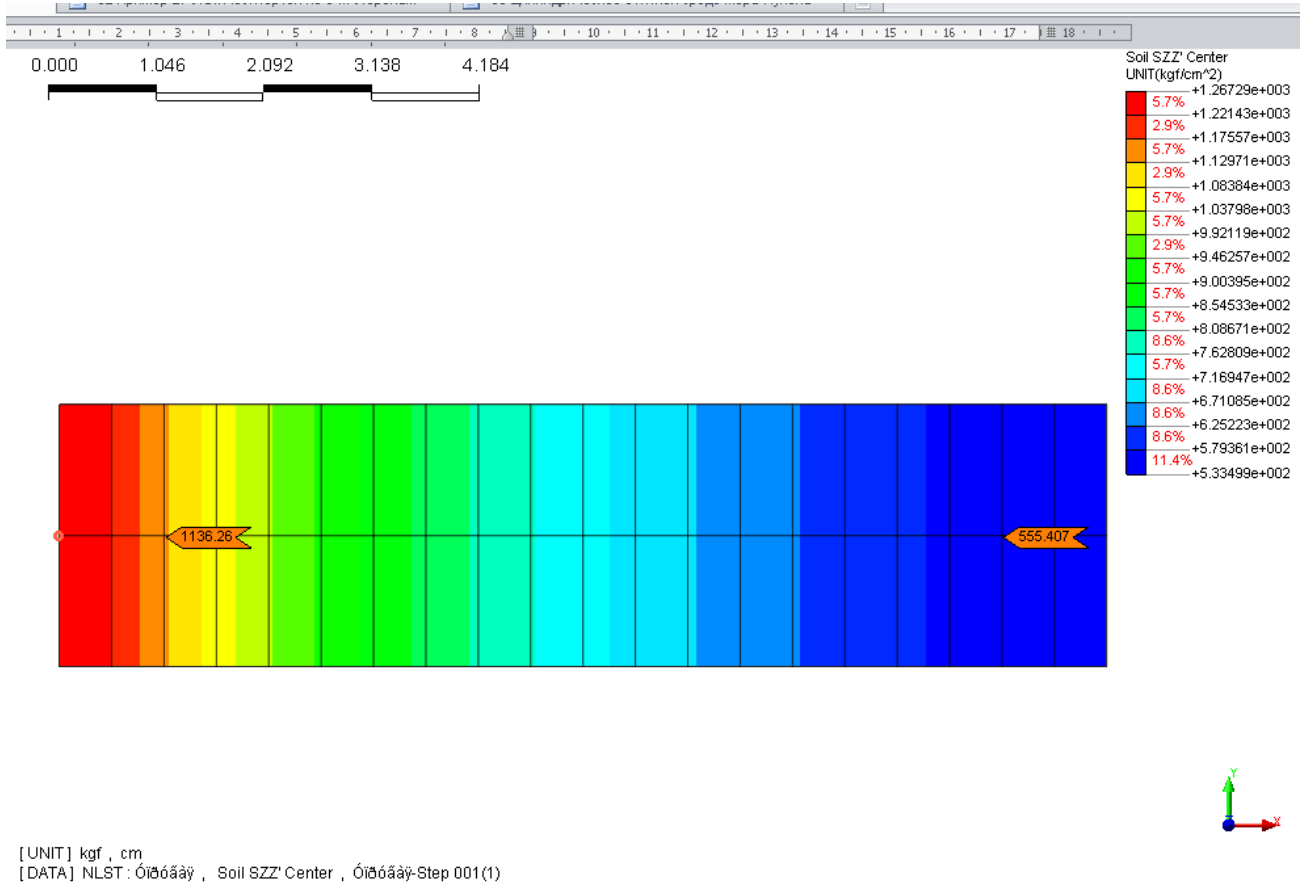


Рисунок 11.10 – Изополя тангенциальных напряжений σ_t – модель 1a (кгс/см²)

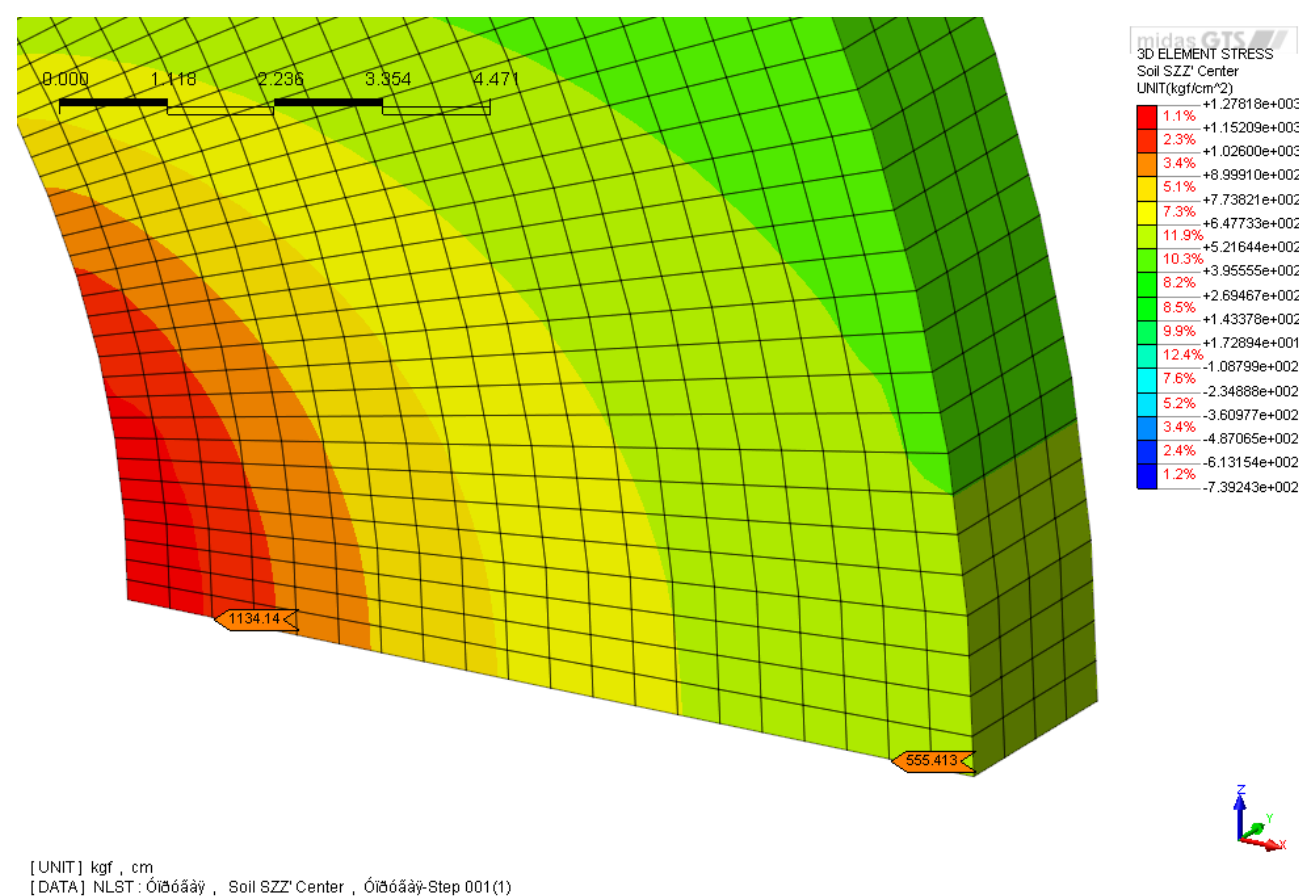


Рисунок 11.10 – Изополя тангенциальных напряжений σ_t – модель 3а (кгс/см²)

Таблица 11.3 Сопоставление результатов расчета ($\sigma_{eff} = \tau_{max}$)

Тип КЭ	Напряжения, кгс/см ²	Источник	MIDAS GTS	Погрешность, %
4-х узловой осесимметричный элемент (модель 1)	σ_r (x=11,176 см)	-607,19	-541	10,90
	σ_t (x=11,176 см)	1133,86	1081,44	4,62
	σ_r (x=19,304 см)	-28,45	-45,9	61,34
	σ_t (x=19,304 см)	555,12	572,91	3,20
8-ми узловой осесимметричный элемент (модель 2)	σ_r (x=11,176 см)	-607,19	-613,5	1,04
	σ_t (x=11,176 см)	1133,86	1144,07	0,90
	σ_r (x=19,304 см)	-28,45	-29,14	2,43
	σ_t (x=19,304 см)	555,12	556,39	0,23
4-х узловой осесимметричный элемент (модель 1a)	σ_r (x=11,176 см)	-607,19	-608,42	0,20
	σ_t (x=11,176 см)	1133,86	1136,26	0,21
	σ_r (x=19,304 см)	-28,45	-28,57	0,42
	σ_t (x=19,304 см)	555,12	555,407	0,05
4-х узловой осесимметрич- ный элемент (модель 1)	σ_{eff} (x=11,176 см)	1054,605	1054,6	0,00
	σ_{eff} (x=19,304 см)	1054,605	991,79	5,96
8-ми узловой осесимметрич- ный элемент (модель 2)	σ_{eff} (x=11,176 см)	1054,605	1054,6	0,00
	σ_{eff} (x=19,304 см)	1054,605	1054,6	0,00
4-х узловой осесимметрич- ный элемент (модель 1a)	σ_{eff} (x=11,176 см)	1054,605	1054,6	0,00
	σ_{eff} (x=19,304 см)	1054,605	1054,6	0,00
8-ми узловой гексаэдр (модель 3)	σ_r (x=11,176 см)	-607,19	-537,23	11,52
	σ_t (x=11,176 см)	1133,86	1077,47	4,97
	σ_r (x=19,304 см)	-28,45	-44,52	56,49
	σ_t (x=19,304 см)	555,12	571,35	2,92
20-ти узловой гексаэдр (модель 4)	σ_r (x=11,176 см)	-607,19	-608,26	0,18
	σ_t (x=11,176 см)	1133,86	1139,48	0,50
	σ_r (x=19,304 см)	-28,45	-27,46	3,48
	σ_t (x=19,304 см)	555,12	554,8	0,06
8-ми узловой гексаэдр (модель 3a)	σ_r (x=11,176 см)	-607,19	-607,34	0,02
	σ_t (x=11,176 см)	1133,86	1134,14	0,02
	σ_r (x=19,304 см)	-28,45	-28,9	1,58
	σ_t (x=19,304 см)	555,12	555,413	0,05
8-ми узловой гексаэдр (модель 3)	σ_{eff} (x=11,176 см)	1054,605	1054,27	0,03
	σ_{eff} (x=19,304 см)	1054,605	987,3	6,38
20-ти узловой гексаэдр (модель 4)	σ_{eff} (x=11,176 см)	1054,605	1053,72	0,08
	σ_{eff} (x=19,304 см)	1054,605	1052,37	0,21
8-ми узловой гексаэдр (модель 3a)	σ_{eff} (x=11,176 см)	1054,605	1054,58	0,00
	σ_{eff} (x=19,304 см)	1054,605	1054,58	0,00

Как видно конечные результаты существенно зависят от крупности используемой сетки КЭ. Модели с крупной сеткой КЭ показывают существенные погрешности (до 61,34%), а при мелкой – погрешности находятся в пределах допустимых (до 1,58%).

Пример 12. Статический расчет прямоугольной в плане фундаментной плиты

Источник	Plaxis 3D Foundation Tutorial Manual version 1.5, Lesson 1 (Raft foundation on overconsolidated clay)
Тип задачи:	Статический нелинейный поэтапный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	6-ти узловой треугольный пластинчатый элемент плоской деформации, 10-ти узловой тетраэдр

Описание

В данном примере рассмотрено загрузку фундаментной плиты расположенной на переуплотненной глине. Условия задачи приняты по учебному пособию Plaxis 3D Foundation, урок 1. Геометрические характеристики и условия загрузки фундаментной плиты приведены на рисунке 12.1. Требуется определить максимальные перемещения фундаментной плиты U и максимальный изгибающий момент M в фундаментной плите.

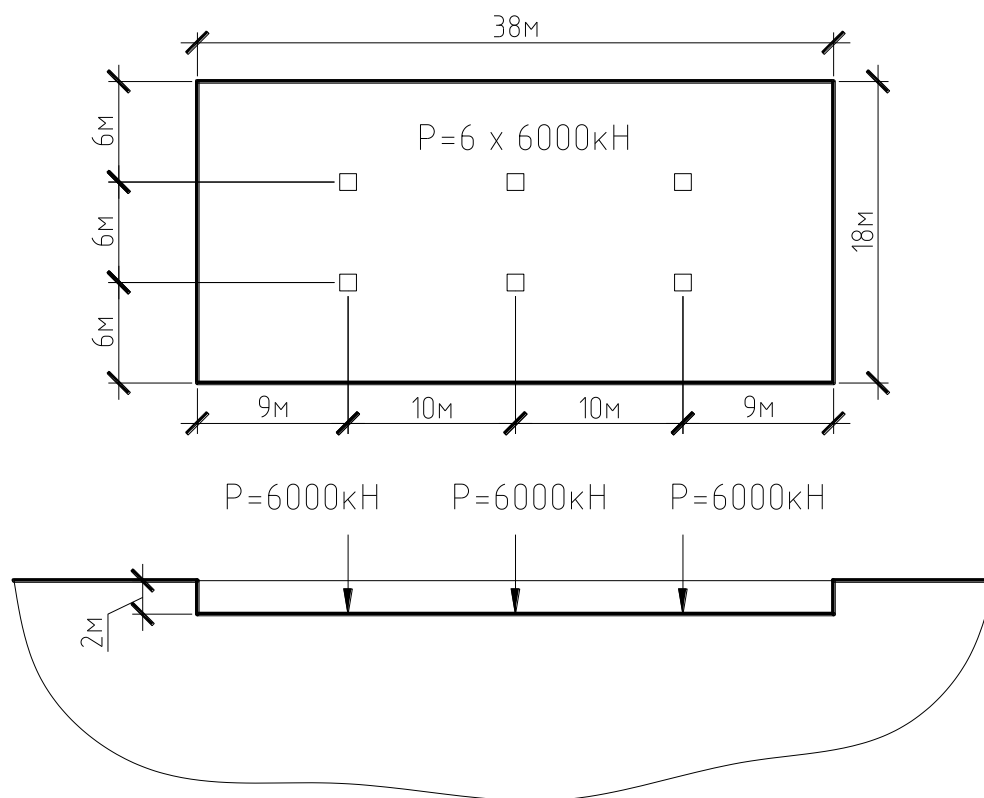


Рисунок 12.1 – Геометрические размеры и схема загрузки фундаментной плиты

Предмет верификации

В данном примере определяются численные значения максимальных перемещений грунтового массива (10-ти узловой тетраэдр) и максимальных изгибающих моментов в плите (6-ти узловой треугольный пластинчатый элемент плоской деформации) с целью сравнения их с результатами, полученными в другой распространенной программе реализующей МКЭ – PLAXIS 3DFoundation. При этом учитывается стадийность выполняемых расчетов и наличие подземных вод. Также оценивается адекватность выполняемых расчетов.

GTSмодель

Расчет выполняется в трехмерной постановке. Для решения данной задачи применялись следующие типы КЭ:

- для моделирования грунтового массива: 10-ти узловой тетраэдр;
- для моделирования стенок вокруг котлована и фундаментной плиты: 6-ти узловой треугольный пластинчатый элемент плоской деформации.

Расчеты выполняются в 3 этапа (стадии):

- 1) Начальный этап – определение начального НДС (K_0 процедура).
- 2) Откопка котлована – на данном этапе моделируется откопка котлована и возведение стенок вокруг котлована и фундаментной плиты.
- 3) Загружение фундаментной плиты.

Таблица 12.1 Исходные данные

Геометрические размеры модели	Расчетная область – 100м x 60м x 28м;
Размеры фундаментной плиты	38м x 18м x 0,5м, глубина заложения 2м
Стены вокруг котлована	Высота стен $h=2$ м, толщина $t=0,3$ м.
Граничные условия	Боковые грани – ограничение деформаций по X, Y Нижняя грань – ограничение деформаций по X, Y, Z
Модель стен и плиты	Линейная упругая: $E=1 \cdot 10^7$ кН/м ² , $\nu=0,2$,

	$\gamma=17\text{кН/м}^3$
Модель грунта	Мора-Кулона: $E=3000$ кПа, $\nu=0,3, \gamma_{\text{unsat}}=17\text{кН/м}^3, \gamma_{\text{sat}}=18\text{кН/м}^3, c=10$ кПа, $\phi=30$ град, $\psi=0$ град. Тип поведения - дренированный
Нагрузка	$P=6000\text{кН}=611,6208\text{тс}$ (см. рис. 5.1)
Тип КЭ	<i>Грунтовой массив:</i> 10-ти узловой тетраэдр. <i>Стены вокруг котлована и фундаментная плита:</i> 6-ти узловой треугольный пластинчатый элемент плоской деформации
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона-Рафсона

Расчет выполнялся для двух моделей:

- с крупной сеткой, аналогичной по крупности PLAXIS 3DFoundation;
- с мелкой сеткой.

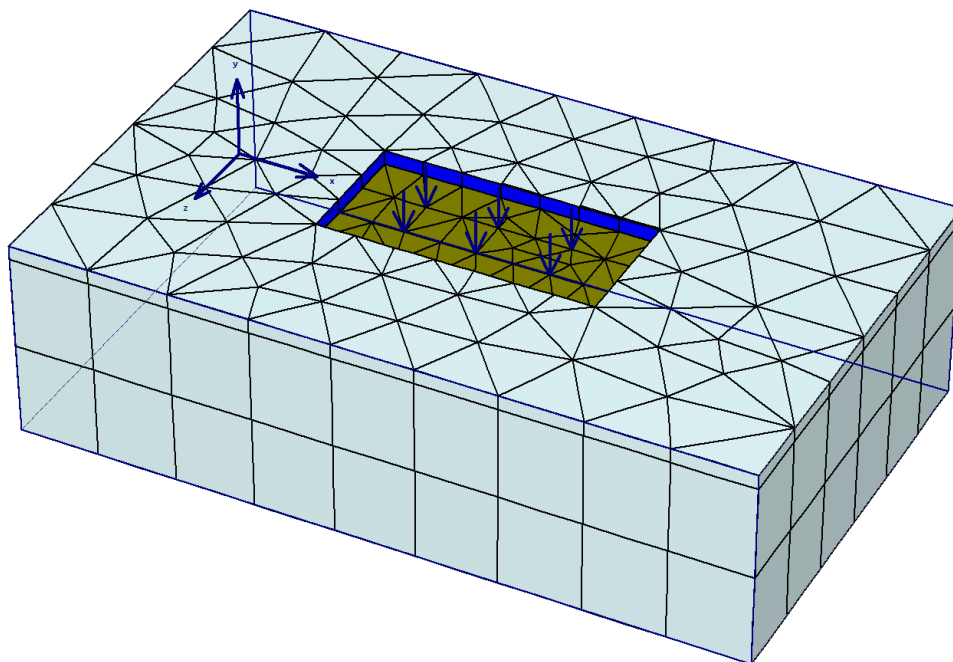


Рисунок 12.2 - КЭ-модель грунтового массива и фундаментной плиты в Plaxis 3DFoundation (600 элементов 2192 узла)

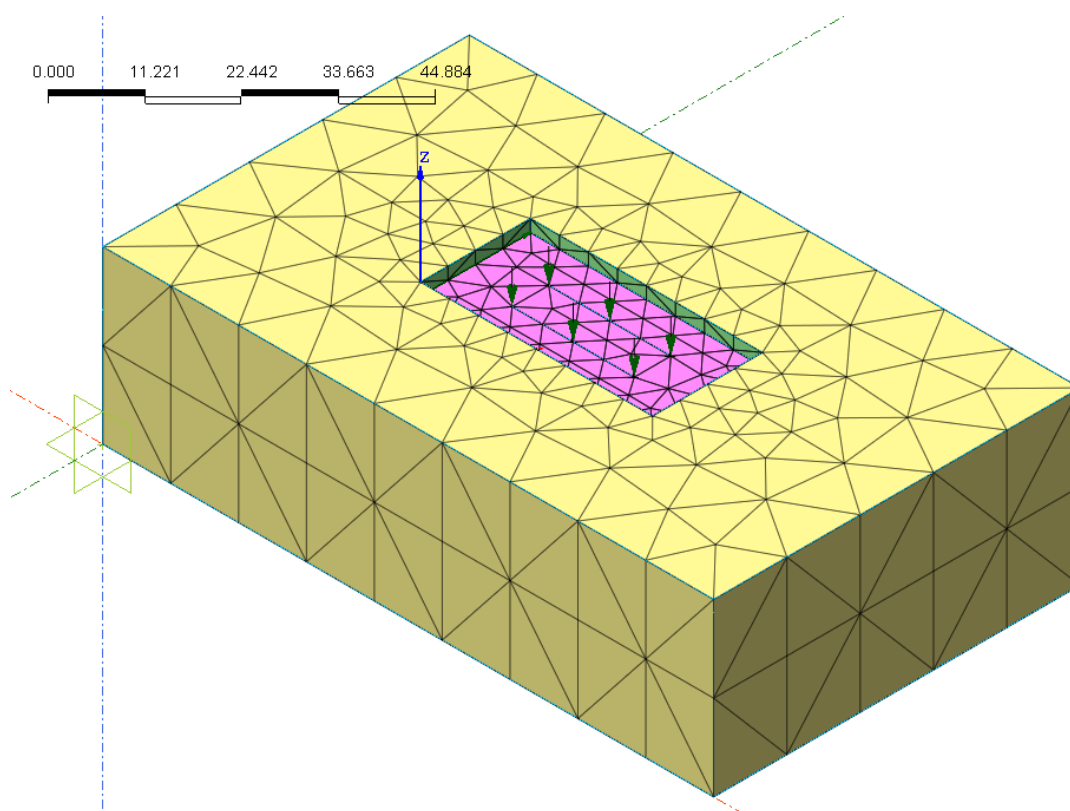


Рисунок 12.3 - КЭ-модель грунтового массива и фундаментной плиты с крупной сеткой (1619 элементов 2467 узлов)

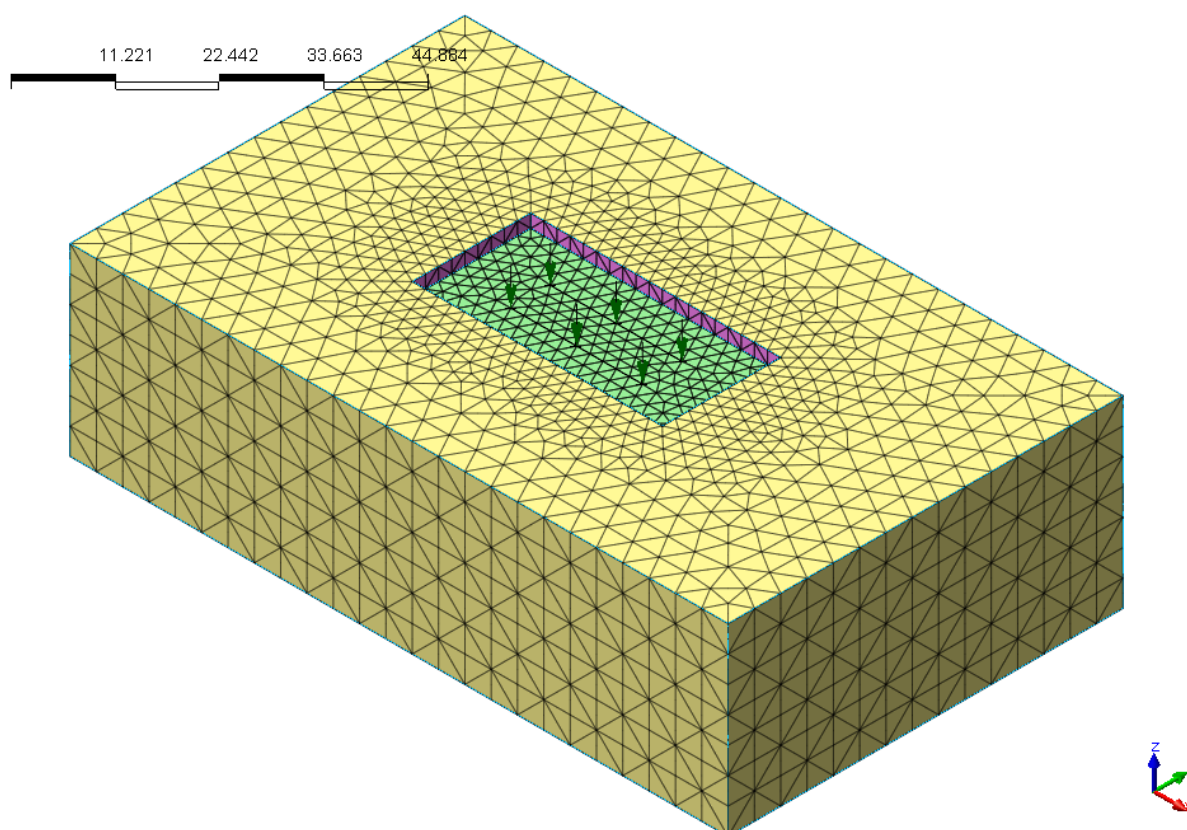


Рисунок 12.4 - КЭ-модель грунтового массива и фундаментной плиты с мелкой сеткой (20194 элемента 29881 узлов)

Результаты расчёта

Результатами расчёта являются изополя перемещений фундаментной плиты, изополя максимальных изгибающих моментов в фундаментной плите (по оси X).

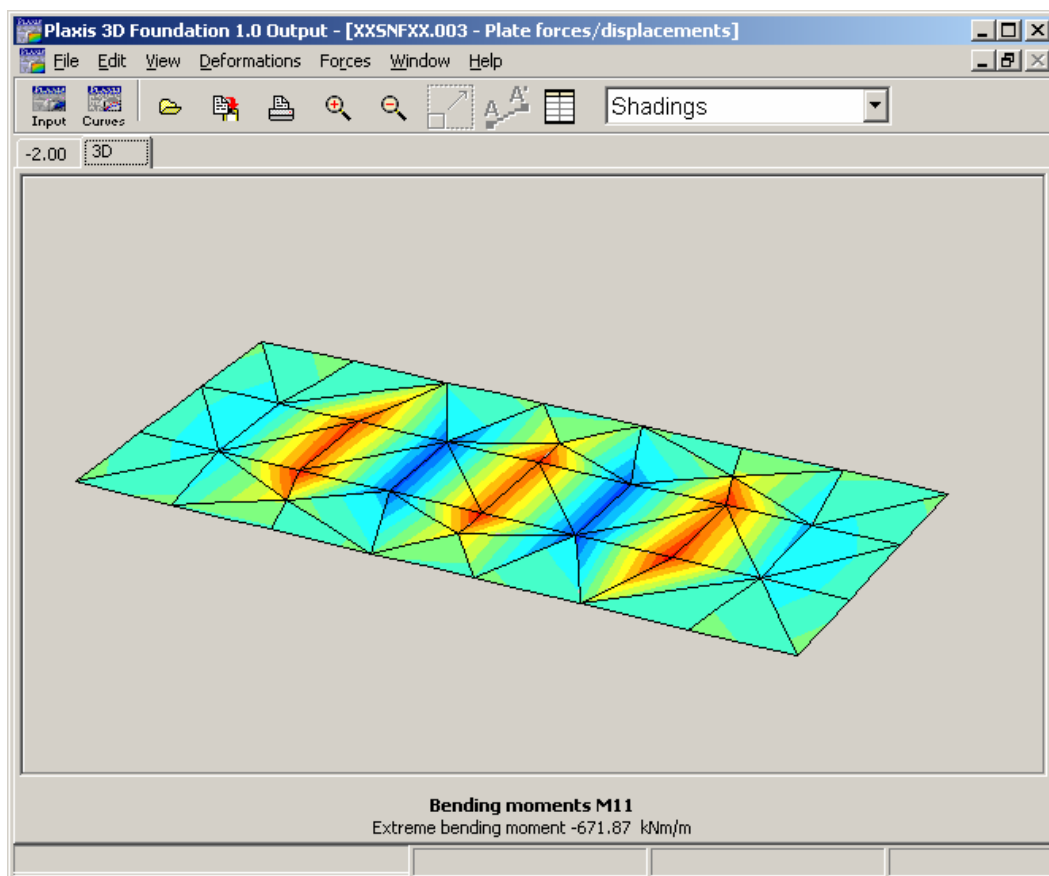


Рисунок 12.5–Изополя изгибающих моментов в плите MPlaxis 3DFoundation(тс·м/м)

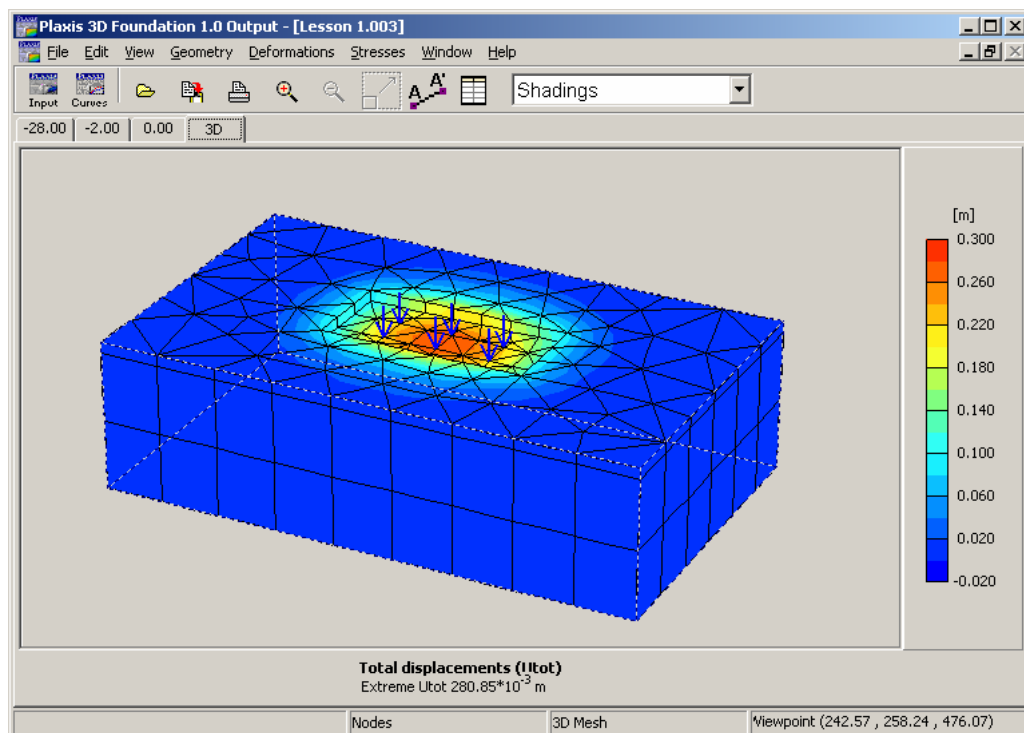


Рисунок 12.6 – Изополя перемещений UPlaxis 3DFoundation(м)

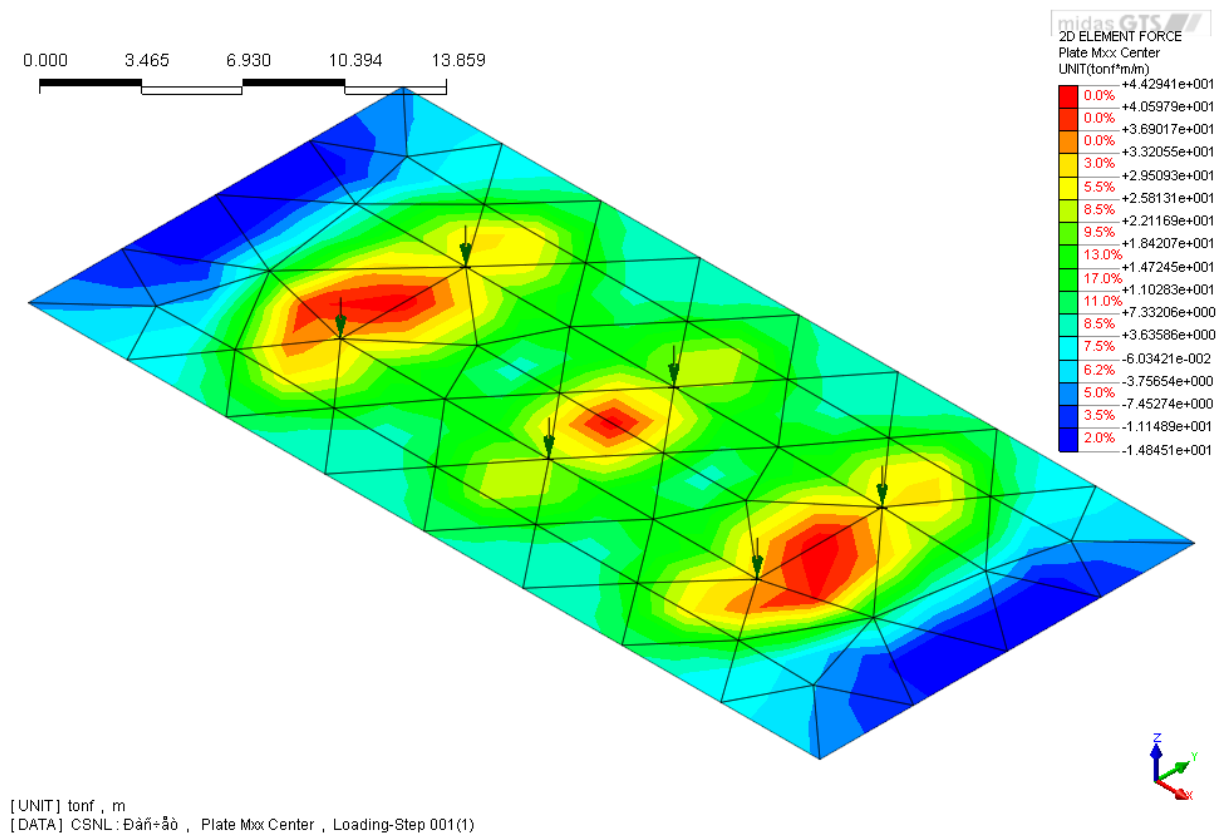


Рисунок 12.7 – Изополя изгибающих моментов в плите М (модель с крупной сеткой)(тс·м/м)

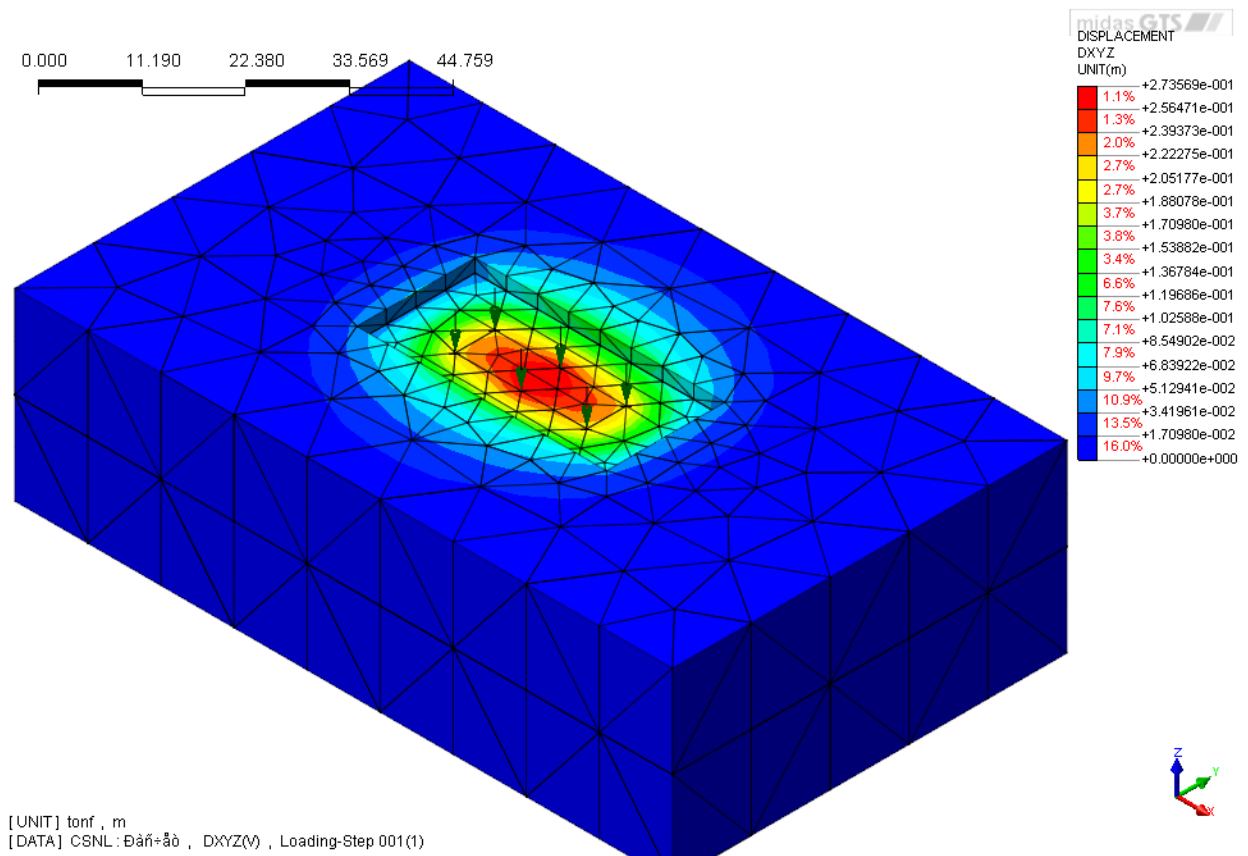


Рисунок 12.8 – Изополя перемещений U(модель с крупной сеткой) (м)

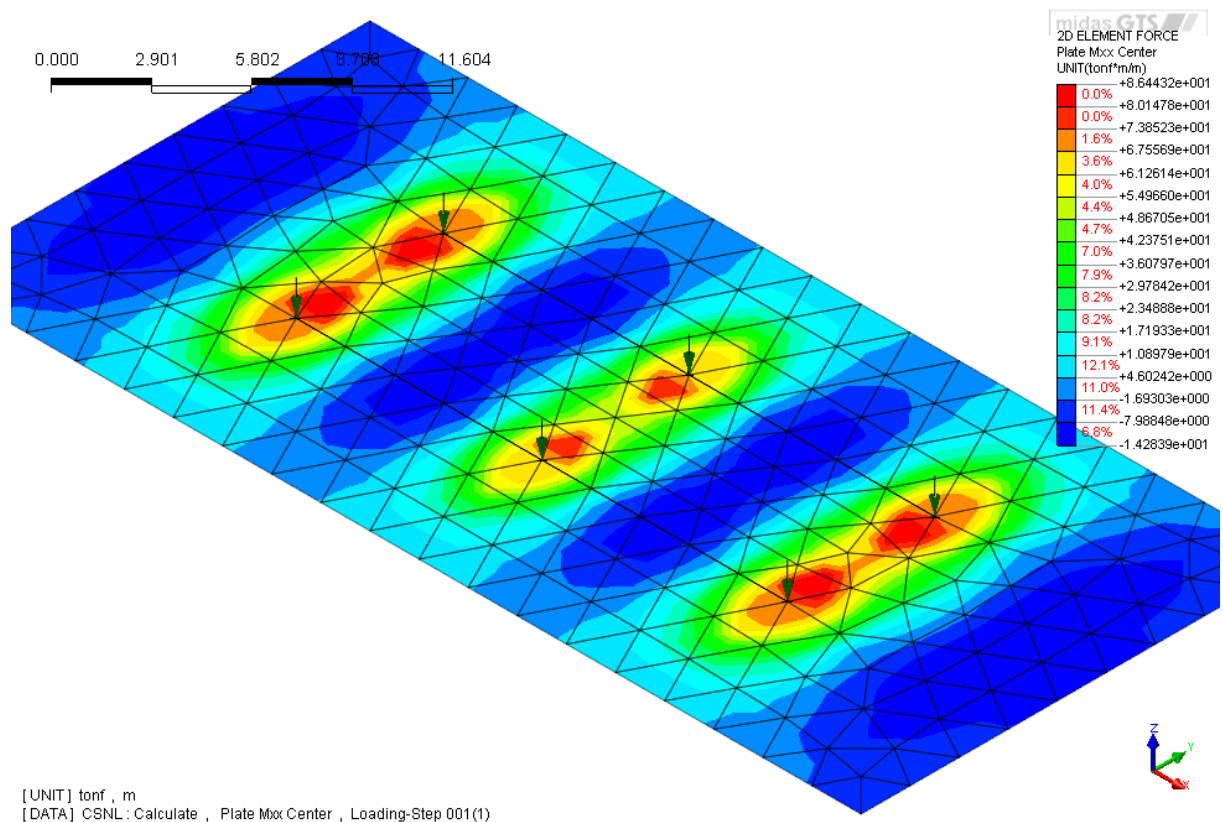


Рисунок 12.9 – Изополя изгибающих моментов в плите М (модель смелкой сеткой) (тс·м/м)

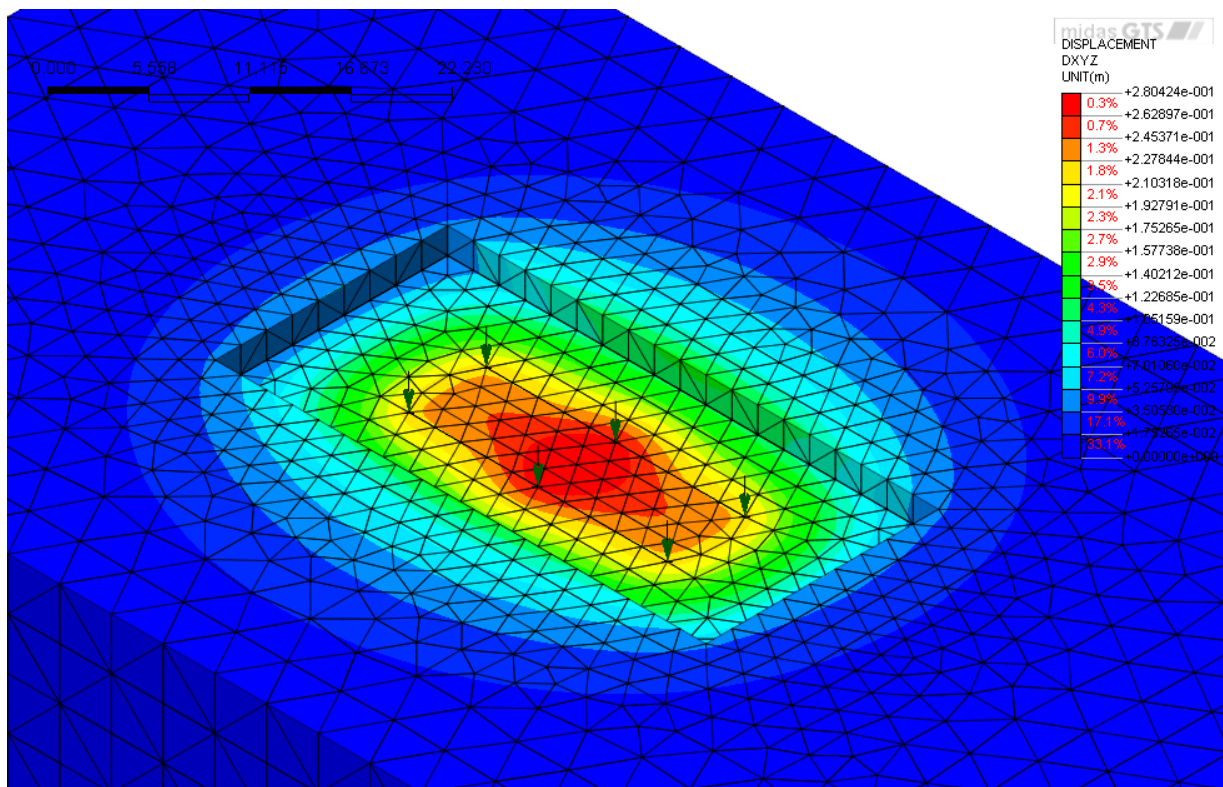


Рисунок 12.10 – Изополя перемещений U(модель смелкой сеткой)(м)

Таблица 12.2 Сопоставление результатов расчета

	Plaxis 3D Foundation	MIDAS GTS (крупная сетка)	MIDAS GTS (мелкая сетка)	Погрешность, %
Максимальный изгибающий момент M, тс·м/м	68,488	44,29	86,44	35,33 / 26,21
Максимальное перемещение U, мм	280,85	273,57	280,42	2,6 / 0,15

Пример 13. Статический расчет каркасно-монолитного здания на упруго-пластическом основании

Источник	С.О. Шулятьев, В.Г. Федоровский, С.И. Дубинский. Расчет фундаментной плиты в составе здания с полным каркасом методом численного моделирования с учетом последовательности возведения // Численные методы расчетов в практическое геотехнике: сборник статей научно-технической конференции; СПбГАСУ. - СПб., 2012.-398 с. стр. 36-44.
Тип задачи:	Статический нелинейный поэтапный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ	8-ми узловой гексаэдр, 4-х узловой пластинчатый элемент (PLATE), стержневой балочный элемент

Описание

В данном примере выполнен расчет пространственного каркаса здания на плитном фундаменте, лежащем на упруго-пластическом основании Друккера-Прагера. В материалах источника рассмотрена модель каркаса здания лежащего на упругом основании. Поэтому авторами источника был проведен дополнительный расчет с использованием упруго-пластической модели Друккера-Прагера с увеличенными размерами сжимаемой толщи. Геометрические параметры здания представлены на рисунке 13.1.

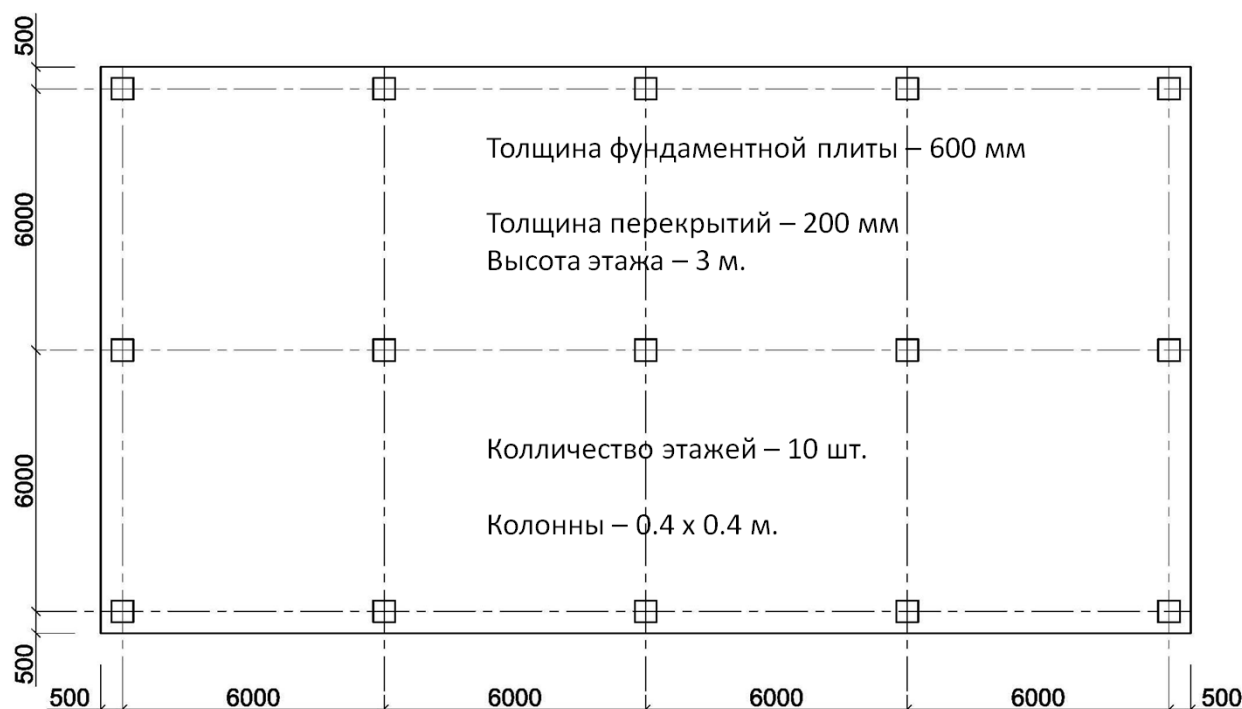


Рисунок 13.1 – План каркасного здания

Предмет верификации

В данном примере определяются численные значения максимальных перемещений грунтового массива и максимальных изгибающих моментов в плите с целью сравнения их с результатами, полученными в другой программе реализующей МКЭ – ANSYS Mechanical, где упруго-пластическое поведение основания также описывается моделью Друккера-Прагера. Расчеты в ANSYS выполнены в НИИОСП им. Герсегова, лаборатория №35.

GTS модель

Расчет выполняется в трехмерной постановке.

Таблица 13.1 Исходные данные

Геометрические размеры модели	Расчетная область –65х53х20 м;
Размеры фундаментной плиты	25м х 13м х 0,6м
Граничные условия	Боковые грани – ограничение деформаций по X, Y. Нижняя грань – ограничение деформаций по X, Y, Z
Материал плиты, перекрытий, колонн	Линейно упругий: $E=3.06 \cdot 10^7$ кН/м ² , $\nu=0,2$, $\gamma=25$ кН/м ³
Модель грунта	Друккера-Прагера: $E=25000$ кПа, $\nu=0,3$, $\gamma=20$ кН/м ³ , $c=5$ кПа, $\phi=30$ град
Нагрузка	Собственный вес конструкций + 4 кН/м ² – полезная нагрузка на каждое перекрытие и фундаментную плиту
Тип КЭ	<i>Грунтовой массив:</i> 8-ми узловой октаэдр. <i>Фундаментная плита, перекрытия:</i> 4-х узловой элемент оболочки <i>Колонны:</i> Стержневой балочный элемент

Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона-Рафсона

Расчеты выполняются в 2 этапа (стадии):

- 1) Начальный этап – собственный вес грунтового массива (объемные силы)
- 2) Активация каркаса и загрузка полезной нагрузкой

С целью чистоты сравнения результатов разбиение модели на КЭ в MIDAS GTS было выполнено с сеткой, аналогичной по крупности с ANSYS. КЭ модель GTS представлена на рисунке 13.2.

Результаты расчета представлены ниже.

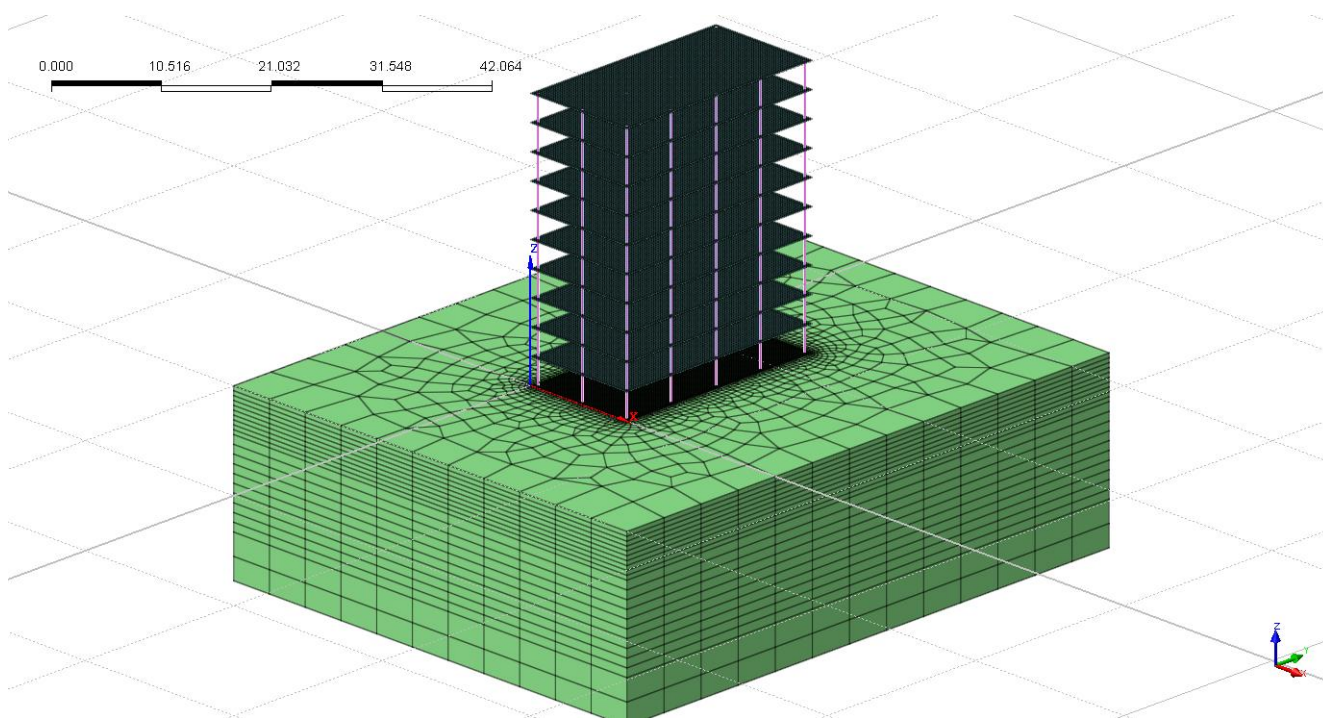


Рисунок 13.2 - КЭ-модель грунтового массива и каркаса в GTS. (154414 элементов 155918 узлов)

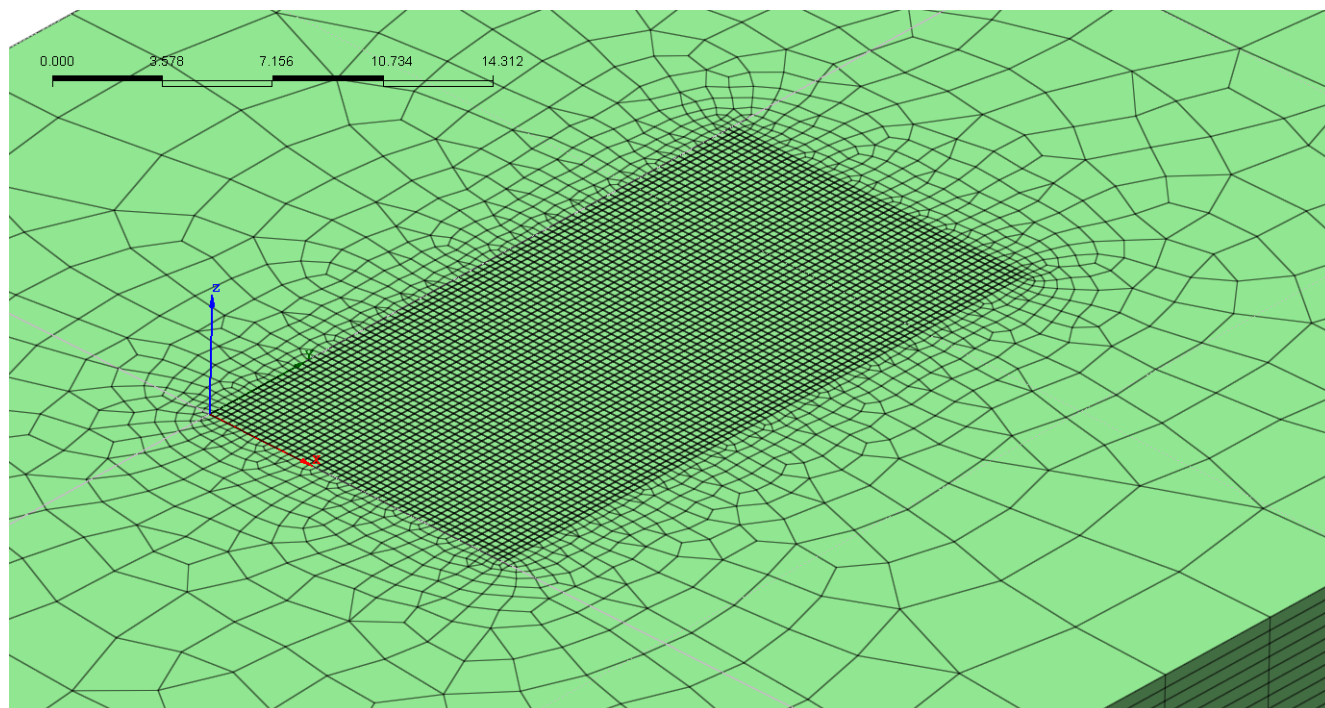


Рисунок 13.3 – Фрагмент КЭ-модели.

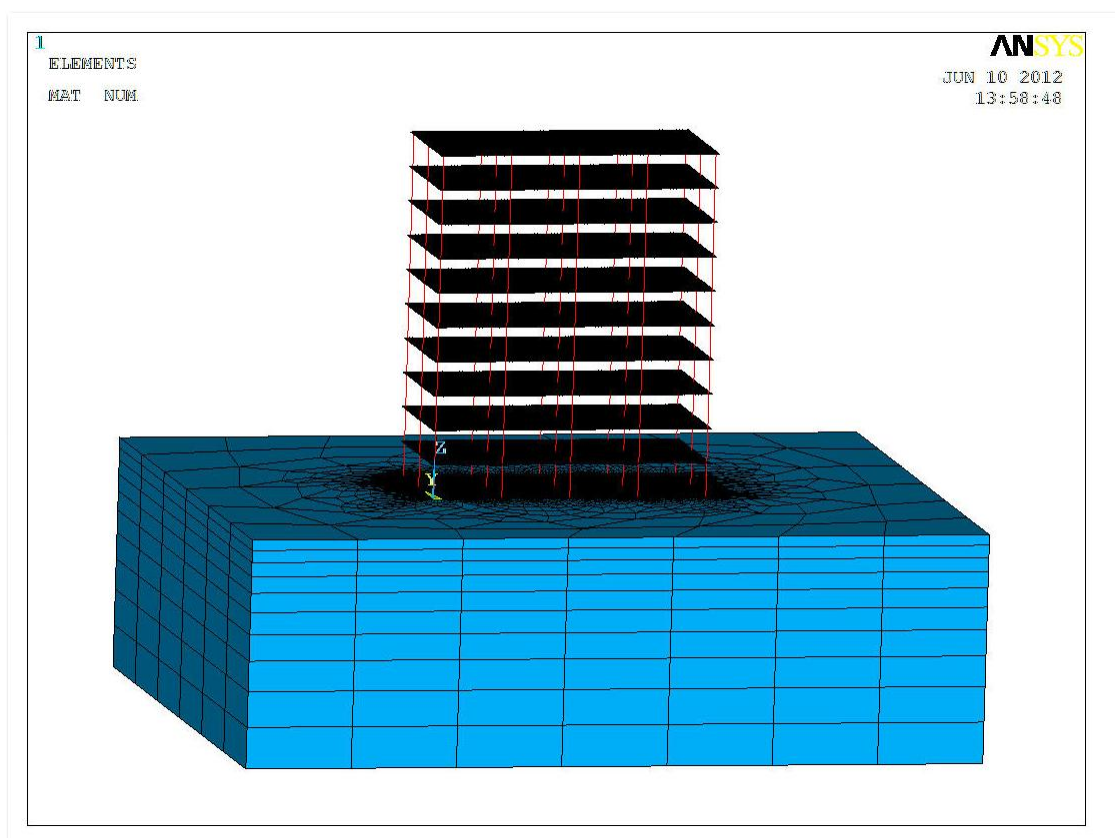


Рисунок 13.4 - КЭ-модель ANSYS

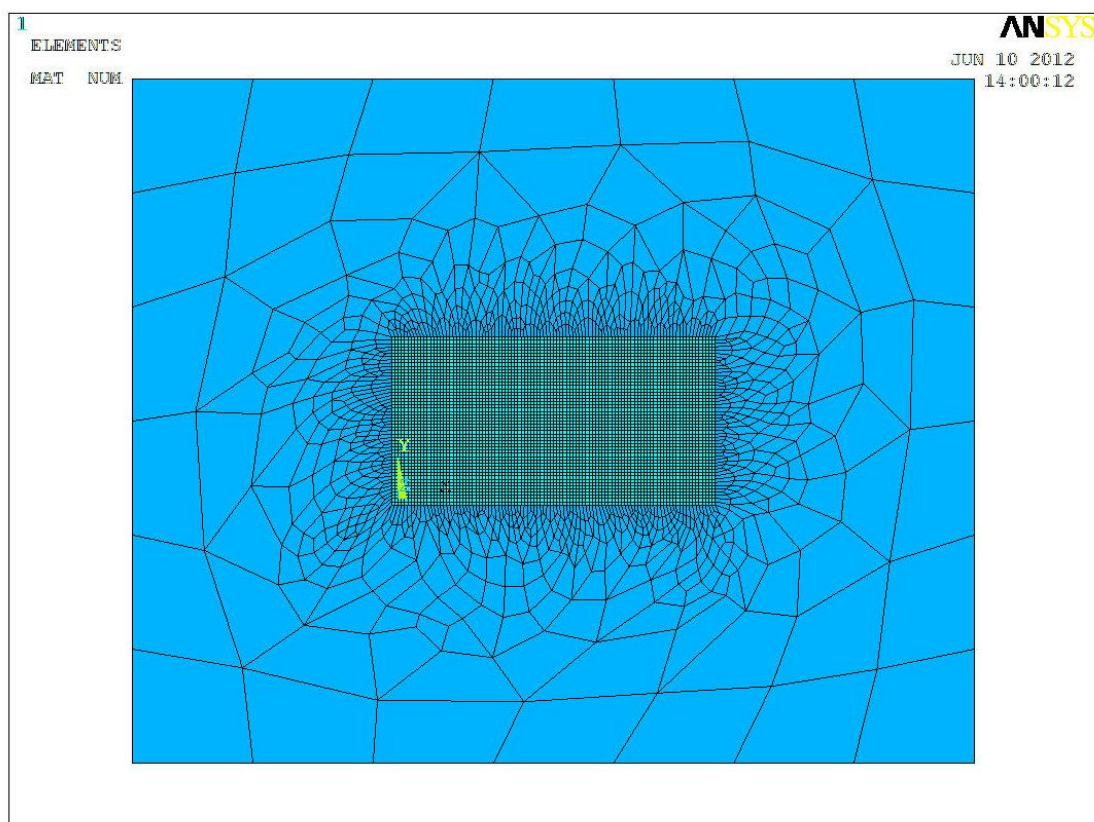


Рисунок 13.4а – Фрагмент КЭ модели ANSYS. Разбиение грунтового массива

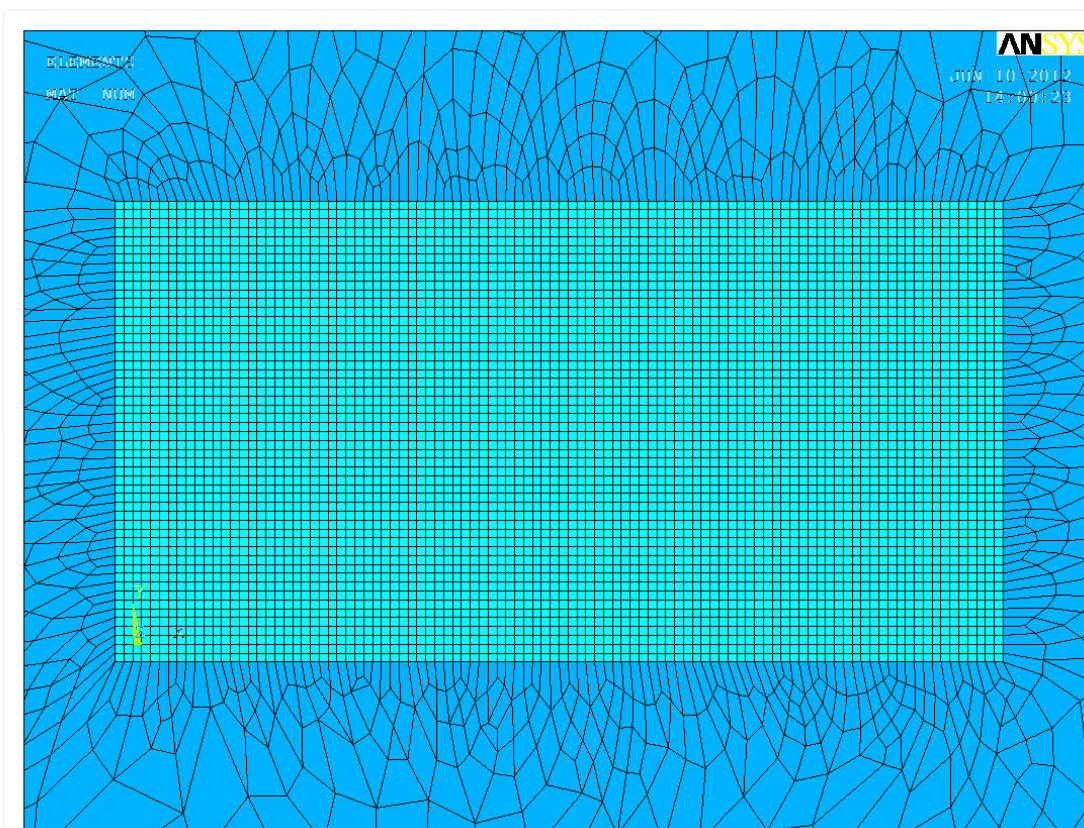


Рисунок 13.4б – Фрагмент КЭ модели ANSYS. Разбиение плиты.

Результаты расчёта

Результатами расчёта являются изополя перемещений фундаментной плиты; изополя максимальных изгибающих моментов в фундаментной плите.

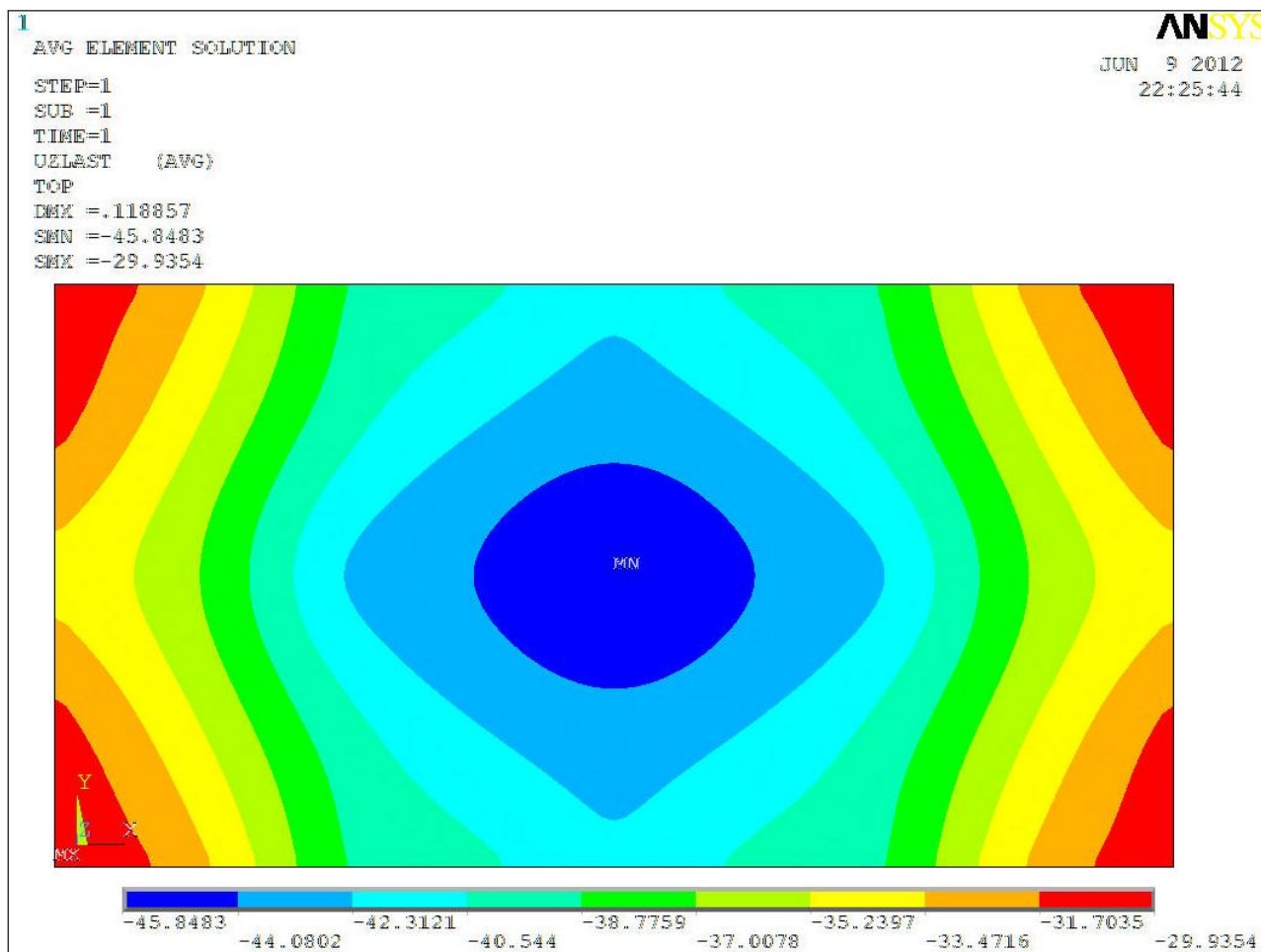


Рисунок 13.5 – Изополе вертикальных перемещений. ANSYS (кН·мм)

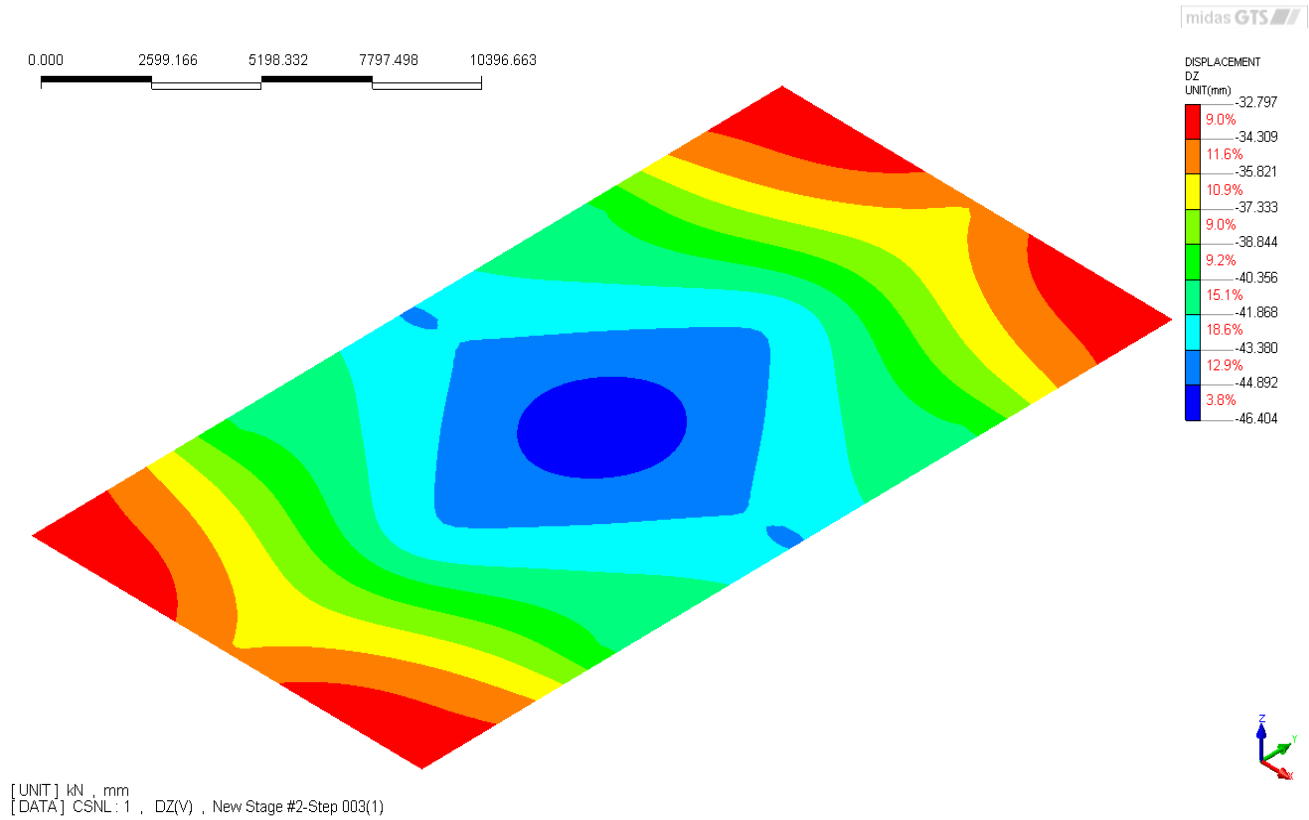


Рисунок 13.6 – Изополя вертикальных перемещений. MIDAS GTS (мм)

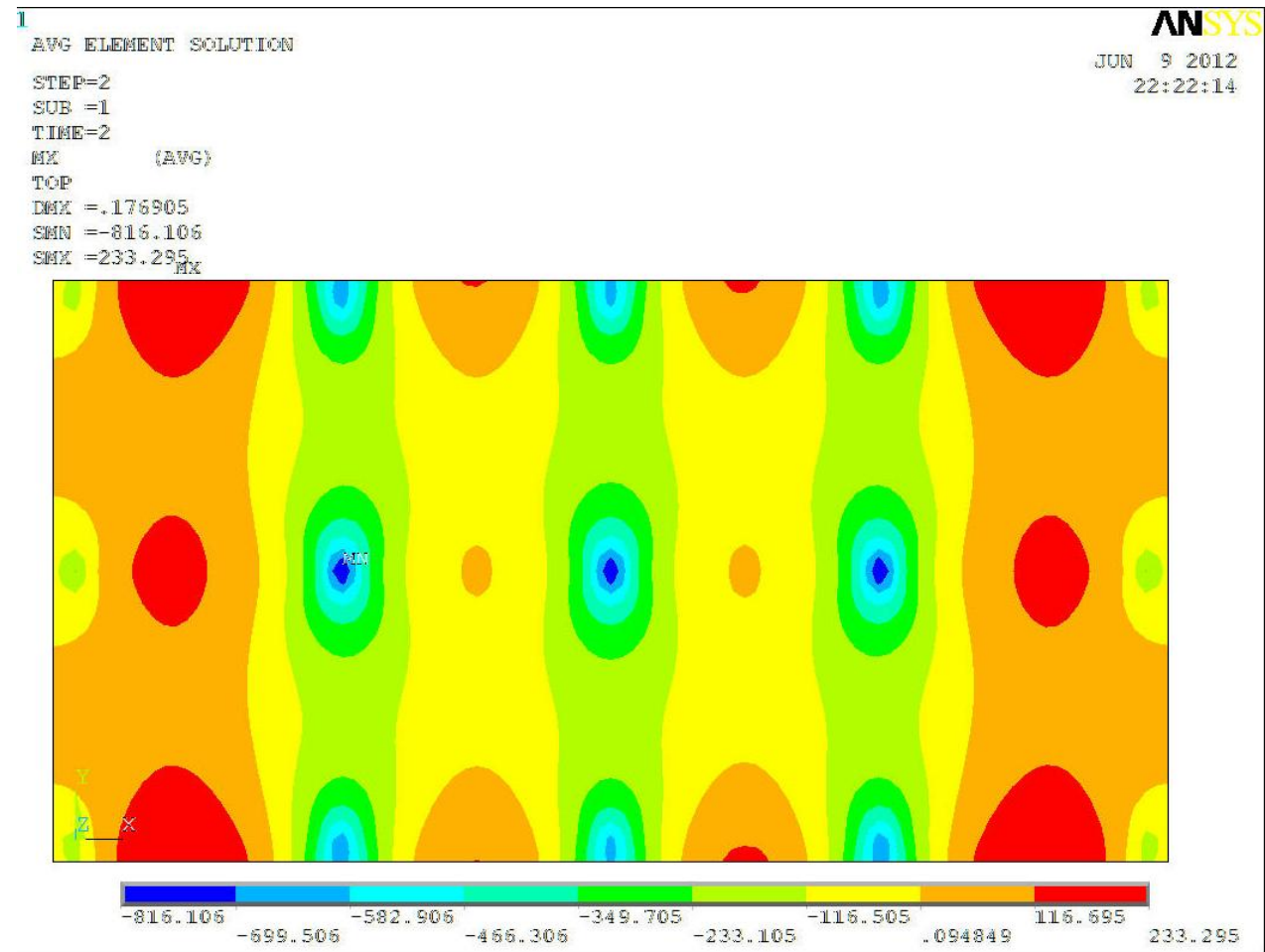


Рисунок 13.7 – Изополя изгибающих моментов вдоль плиты. ANSYS (кН·м/м)

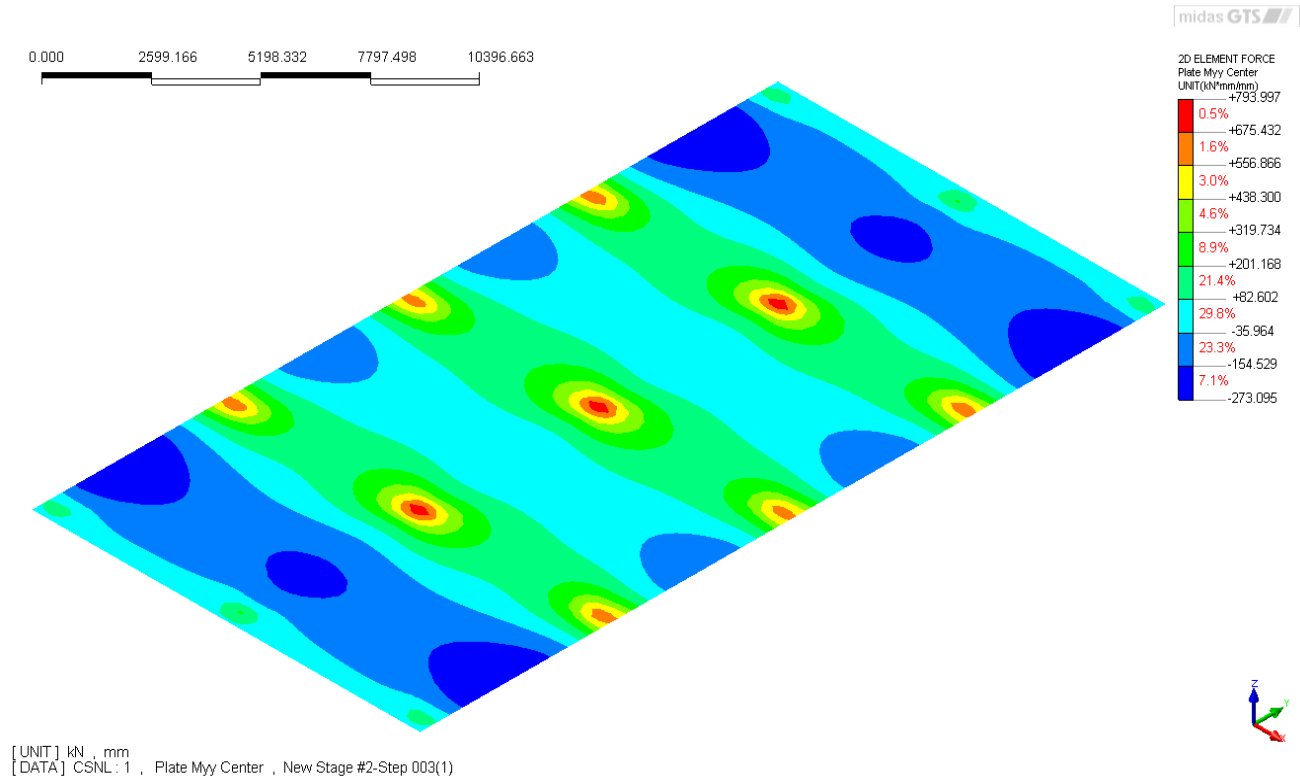


Рисунок 13.8 – Изополя изгибающих моментов вдоль плиты. MIDAS GTS (кН·м/м)

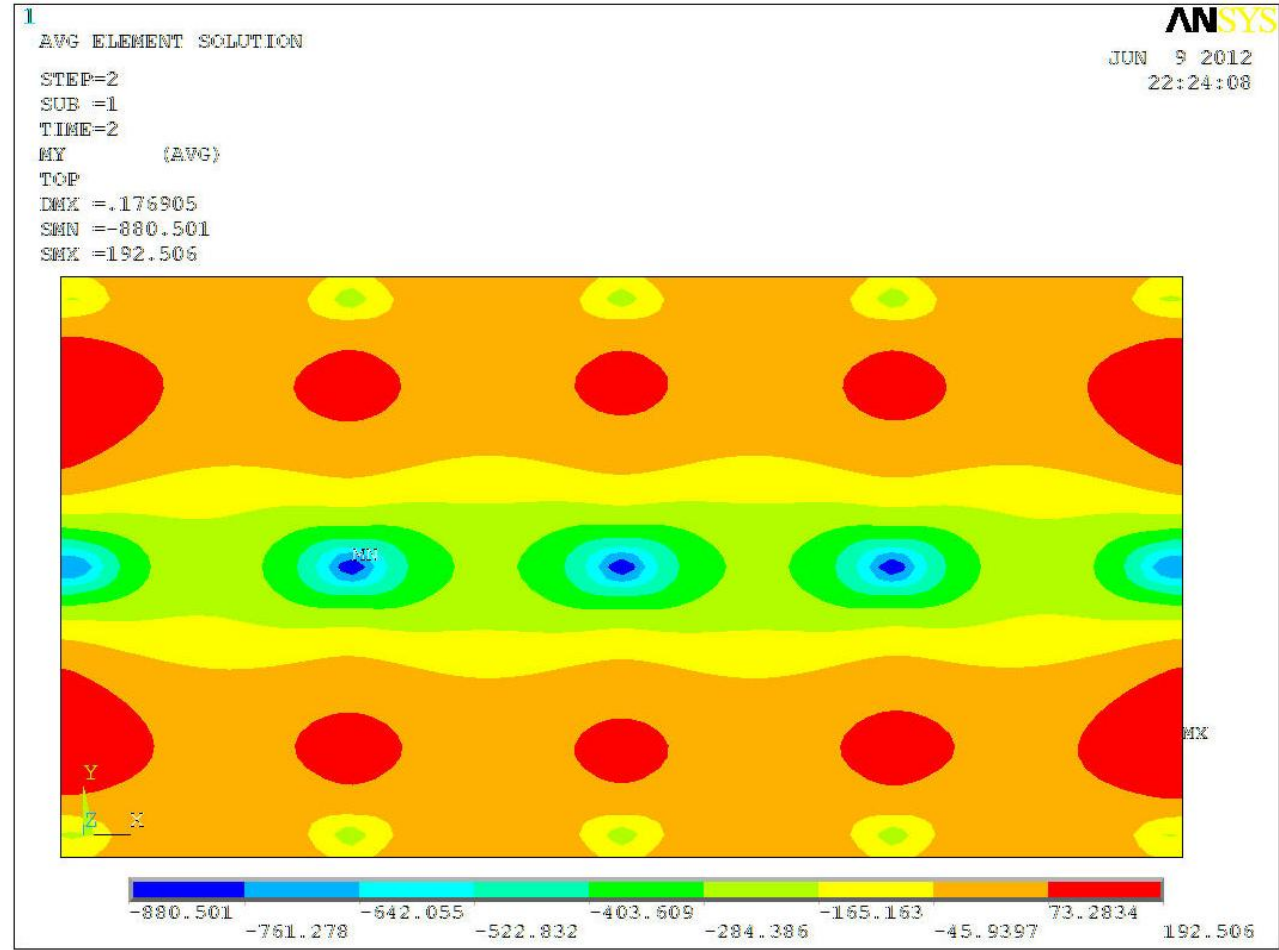


Рисунок 13.9 – Изополя изгибающих моментов поперек плиты. ANSYS (кН·м/м)

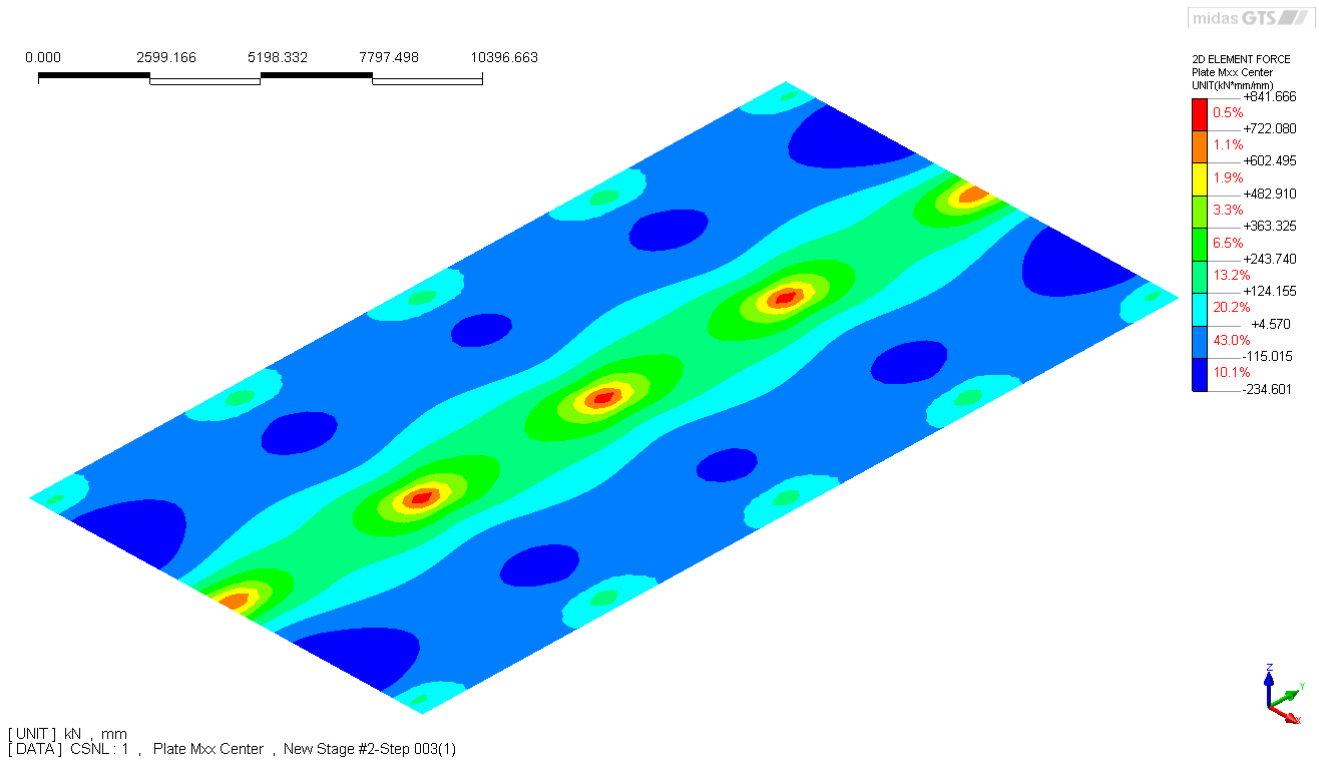


Рисунок 13.10 – Изополя изгибающих моментов поперек плиты. MIDAS GTS (кН·м/м)

Таблица 13.2 Сопоставление результатов расчета

	ANSYS	MIDAS GTS	Погрешность δ , %
Максимальный изгибающий момент вдоль плиты M , кН·м/м	816.1	794	-2.7
Максимальный изгибающий момент поперек плиты M , кН·м/м	880.5	841.5	-4.4
Максимальное перемещение U , мм	45.85	46.4	+1.2
δU , мм	15.94	13.6	-14

Пример 14. Моделирование испытания сваи на вертикальную нагрузку

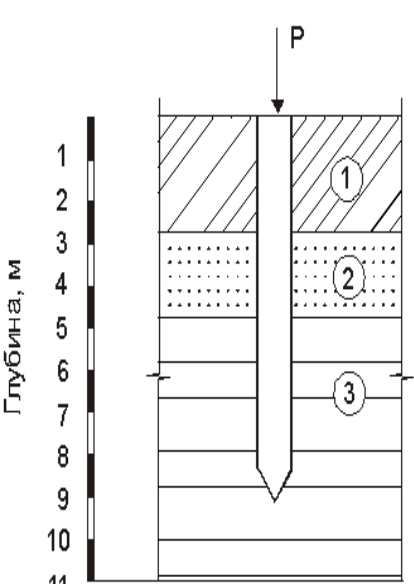
Источник	<ol style="list-style-type: none"> 1. Диссертация. Расчет свайно-плитных фундаментов из забивных свай с учетом образования карстового провала. Гоман Н.З. Уфа 2004. 2. Теория и расчетные модели оснований и объектов геотехники: монография / Д. М. Шапиро. - Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. -164 с.
Тип задачи	Статический поэтапный нелинейный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ	<p>4-х узловой тетраэдр, 8-ми узловой гексаэдр, 4-х угольный интерфейсный элемент, стержневой балочный элемент, специальный интерфейсный элемент сваи (pile element)</p> <p>Осесимметричный 3-х узловой элемент, интерфейсный 2-х узлой одномерный элемент.</p>

Источник 1. Сравнение с данными испытаний

Описание

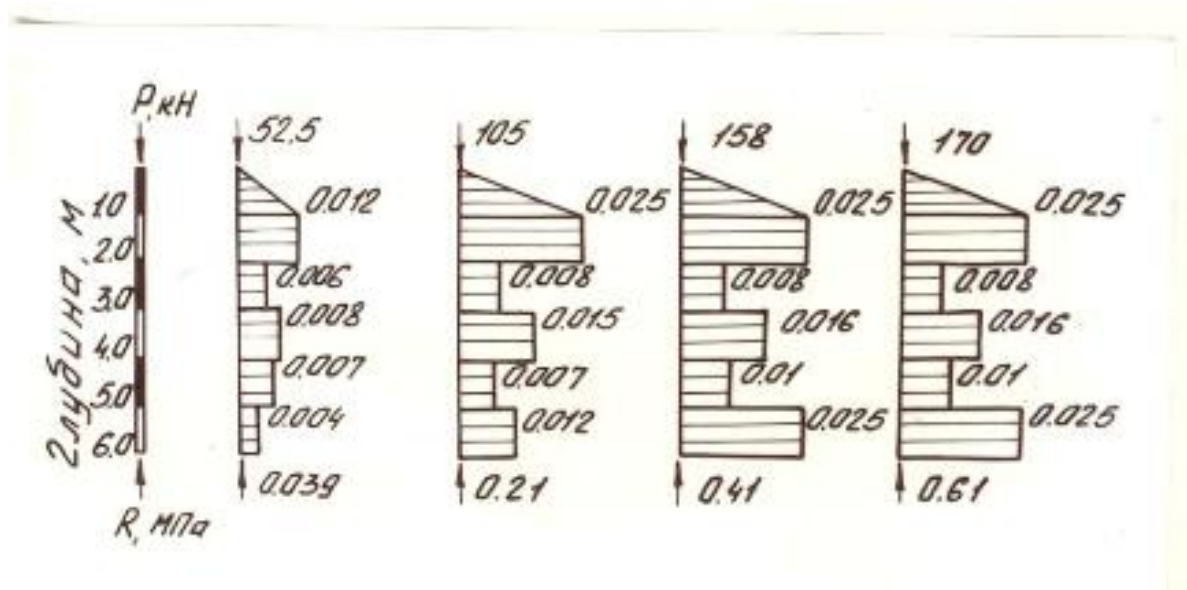
Рассматривается одиночная забивная свая сечением 30х30 см, длинна 6 м, испытанная на вертикальную нагрузку. Инженерно-геологический разрез и характеристики грунтов опытной площадки представлены в таблице 14.1.

Таблица 14.1 Данные опытной площадки

	Глубина отбора образца, м	Плотность грунта природной влажности ρ , г/см ³	Угол внутреннего трения φ , град.	Модуль деформации E^* , МПа	Сцепление c , МПа	
Площадка № 2	2	1,99	15	7,0	0,003	<p>Разрез</p>  <p>1 – суглинок текуче-пластичный 2 – суглинок мягко-пластичный 3 – суглинок туго-пластичный</p>
	3	1,96	15	7,0	0,003	
	4	1,96	13	6,0	0,015	
	5	1,96	15	9,0	0,019	
	6	2,0	12,5	7,0	0,013	
	7,5	1,98	13,5	6,0	0,011	
	8	1,98	15,5	6,0	0,001	
	8,5	1,96	13,0	6,0	0,01	
	9	1,97	10	10,5	0,011	

Результаты испытаний представлены на рисунке 14.1.

а)



б)

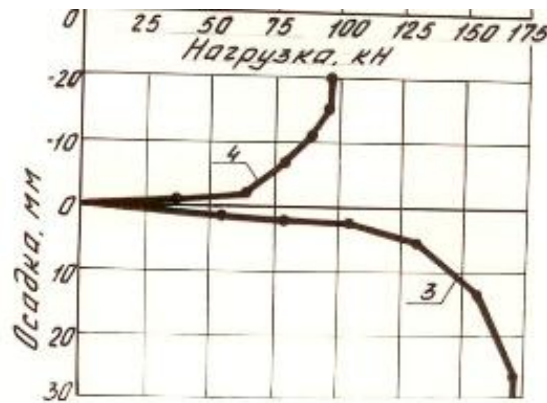


Рисунок 14.1 – Данные испытаний:

- а) эпюры сопротивления грунта по боковой поверхности сваи и по концу сваи;
- б) график «нагрузка-осадка».

Предмет верификации

Целью данного верификационного примера является моделирование испытания сваи двумя способами и построение графика нагрузка осадка по данным вычислений.

GTS модель

Рассматривается пространственная модель. Моделирование свай осуществляются двумя путями:

1. Объемными элементами с использованием интерфейсных элементов на границе свай с основанием.
2. Стержневыми элементами, соединение которых с основанием осуществляется с помощью специальных интерфейсных элементов (Pile element).

Основным достоинством применения 2-го варианта моделирования является отсутствие необходимости совпадения узлов свай (стержневой балочный элемент) и грунтового основания. Соединение осуществляется посредством введения объемных интерфейсных элементов, для которых требуется задание следующих входных данных.

- жесткость по нормали
- сдвиговая жесткость
- жесткость под концом свай
- предельное сопротивление по боковой поверхности
- предельное сопротивление по торцу свай

Исходные данные для проведения данного численного эксперимента приведены в таблице 14.2.

Таблица 14.2 Исходные данные

Геометрические размеры модели	Расчетная область – 10x10x15 м
Граничные условия	4-ре крайние грани – ограничение деформаций по нормали к поверхности Нижняя грань – ограничение деформаций по X, Y, Z.
Модель грунта	Мора-Кулона. Характеристики представлены в таблице 1.1. Коэффициент Пуассона принят для всех слоев $\nu=0.35$.
Модель материала конструкций	Свая 30x30 см, длина 6 м: бетон $E = 3.06 \times 10^7$ кПа; $\nu = 0.2$.
Нагрузка	Сосредоточенная сила: $P = 3 \times 52 + 1 \times 14 = 170$ кН

	4 шага нагружения
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод секущих жесткостей
Модель 1 - рисунок	
Тип КЭ	<p><i>Грунтовый массив:</i> 8-ми узловой октаэдр <i>Свая:</i> 8-ми узловой октаэдр <i>Контакт с основанием:</i> Интерфейсный элемент – теория прочности Мора-Кулона - жесткость по нормали – 200000 кН/м² - сдвиговая жесткость 200000 кН/м² - удельное сцепление - предельное сопротивление по боковой поверхности – по данным испытаний (рисунок 14.1,а) - угол внутреннего трения $\varphi = 0$ - прочность на разрыв – 0.</p>
Модель 2 – рисунок	
Тип КЭ	<p><i>Грунтовый массив:</i> 4-х узловой тетраэдр <i>Свая:</i> Балочный изгибаемый стержневой элемент <i>Контакт с основанием:</i> Специальный интерфейсный элемент - жесткость по нормали – 200000 кН/м² - сдвиговая жесткость 200000 кН/м² - жесткость под концом сваи 10000 кН/м - предельное сопротивление по боковой поверхности, кН/м – по данным испытаний (рисунок 14.1,а)* - предельное сопротивление по торцу сваи, кН - по данным испытаний (рисунок 14.1,а)**</p>

*Для корректного задания предельного сопротивления в данном случае необходимо сдвиговые напряжения умножить на площадь боковой поверхность 1 метра сваи.

****** Для корректного задания предельного сопротивления под торцом сваи необходимо предельное напряжения умножить на площадь сечения сваи.

КЭ осесимметричная модель представлена на рисунке.

Расчет проводился в два этапа:

1. Задание начального НДС грунтового массива при условии, что свая находится в грунте и интерфейсы активированы.

Формирование начального НДС производился негидростатическому закону

$$\sigma_x = \sigma_y$$

2. Приложение нагрузки $P = 3 \times 52 + 1 \times 14 = 170$ кН за 4 этапа.

Результаты расчетов представлены ниже.

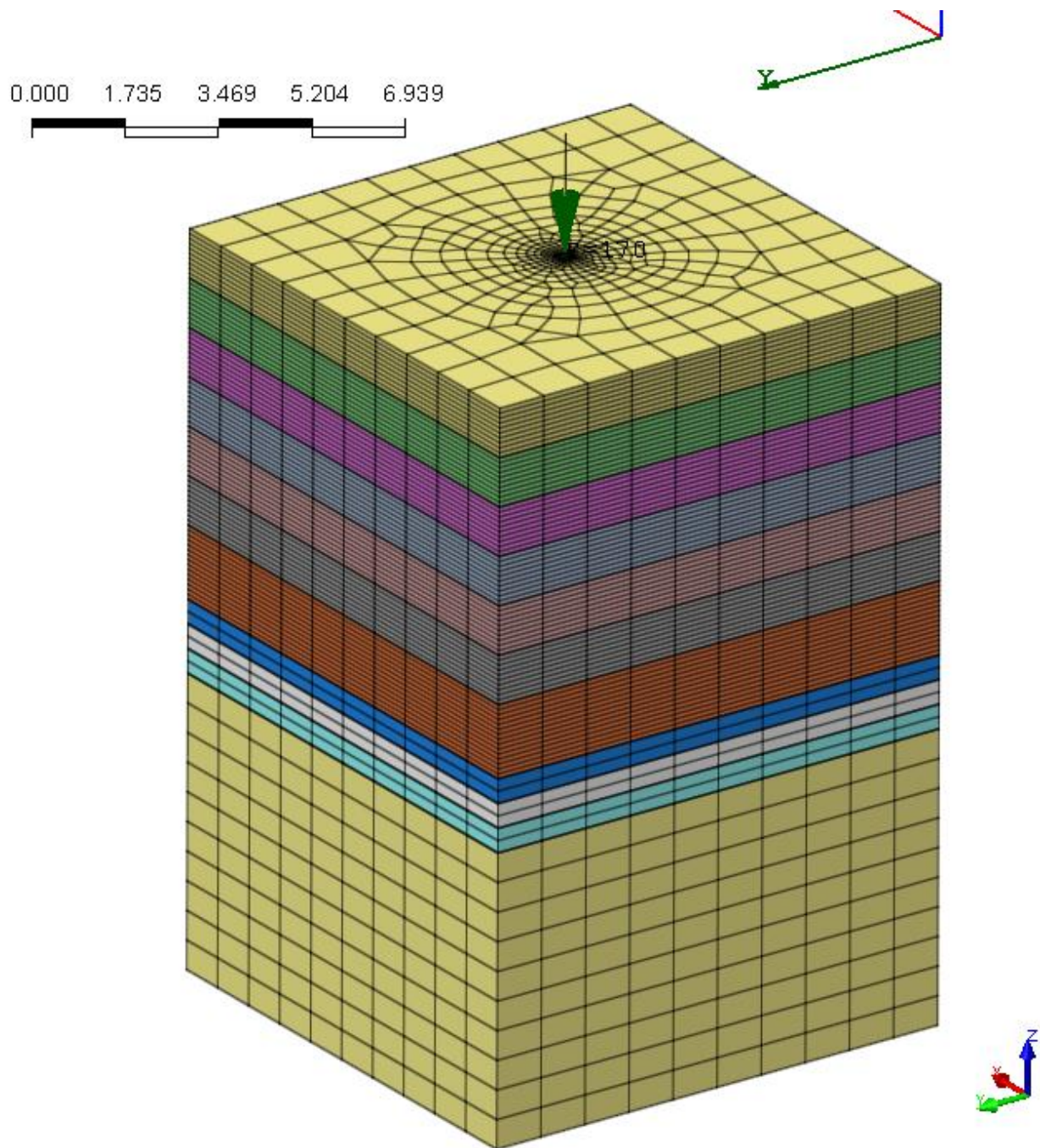


Рисунок 14.2 – КЭ модель 1.

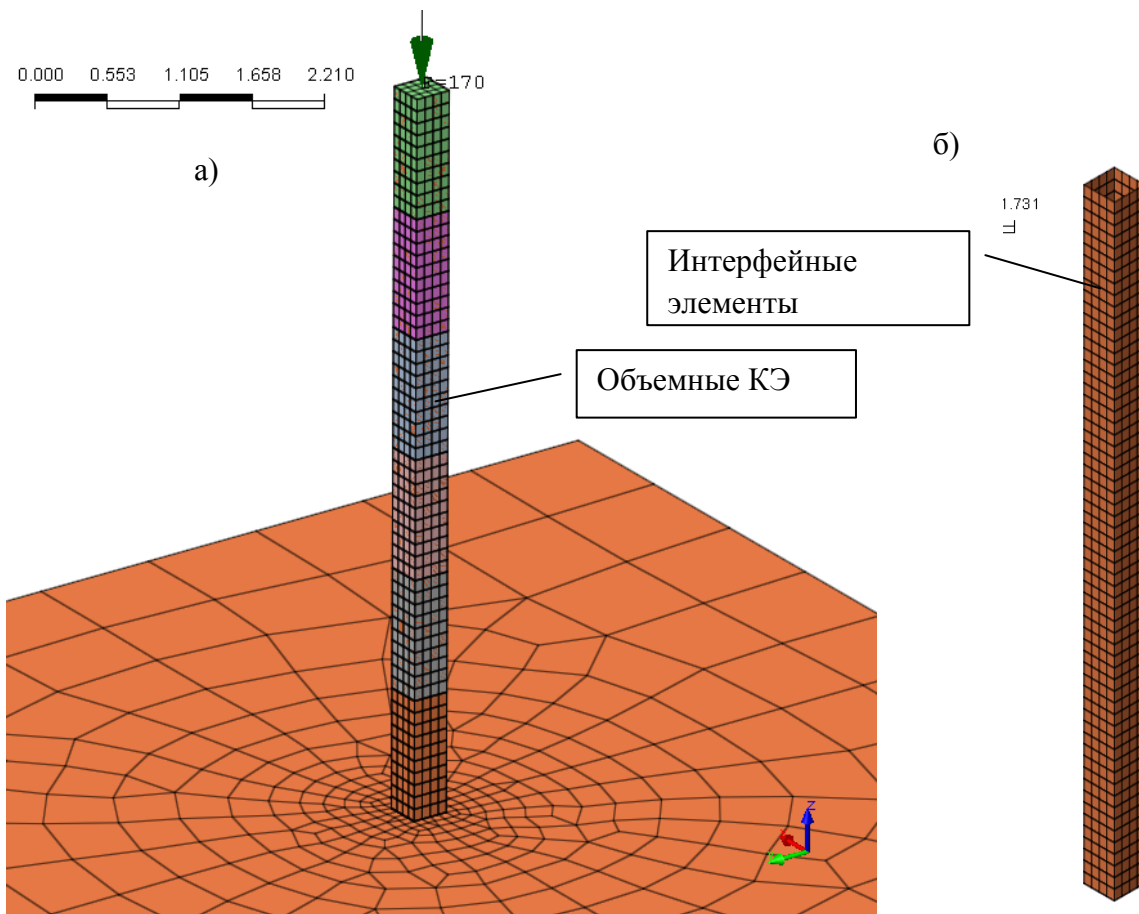


Рисунок 14.3 – Фрагменты КЭ модели 1:

а) Разбиение сваи; б) интерфейсные элементы

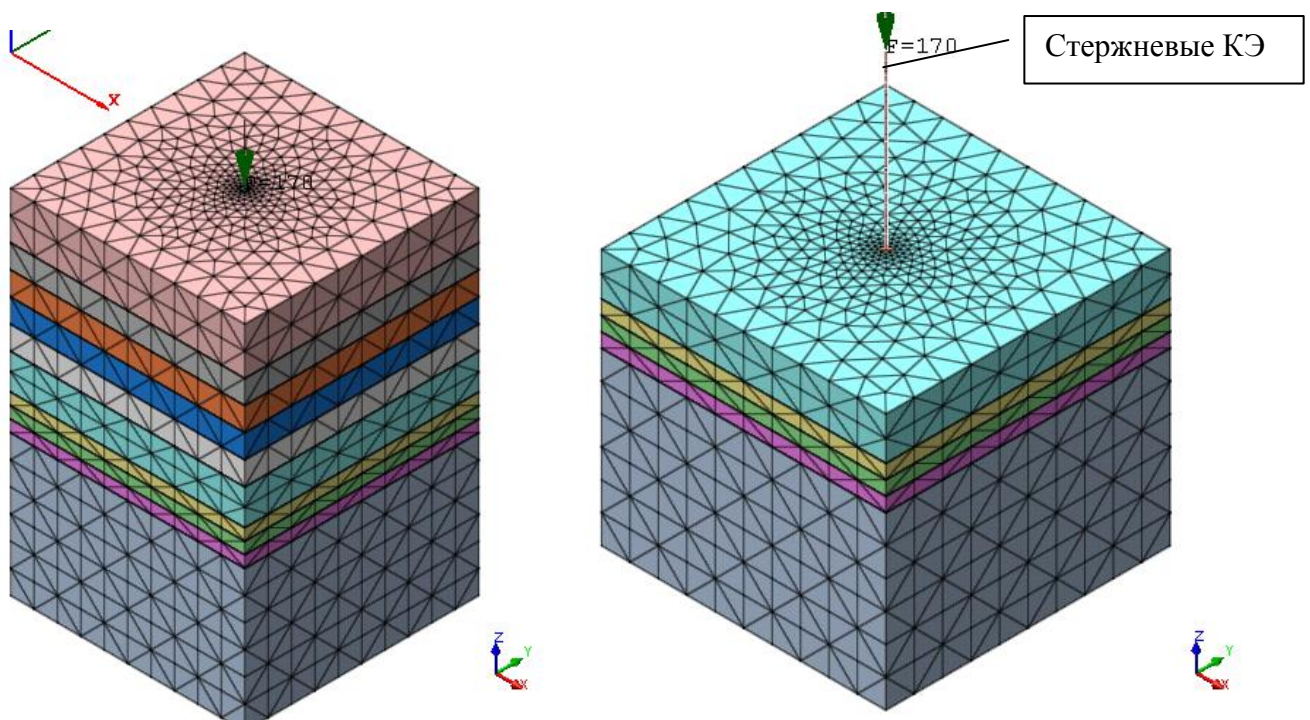


Рисунок 14.4 – КЭ модель 2

Результаты расчета. Модель 1.

Нагрузка 58 кН

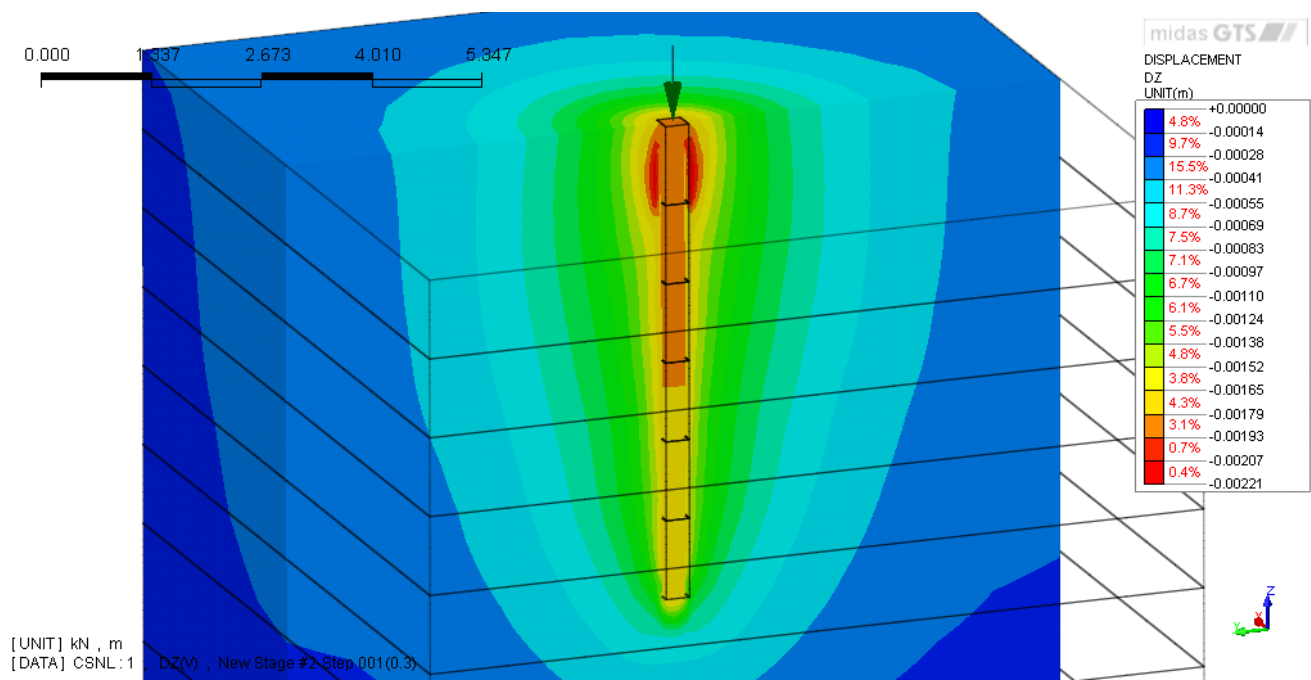


Рисунок 14.5 – Изополе вертикальных перемещений. Нагрузка 52 кН.

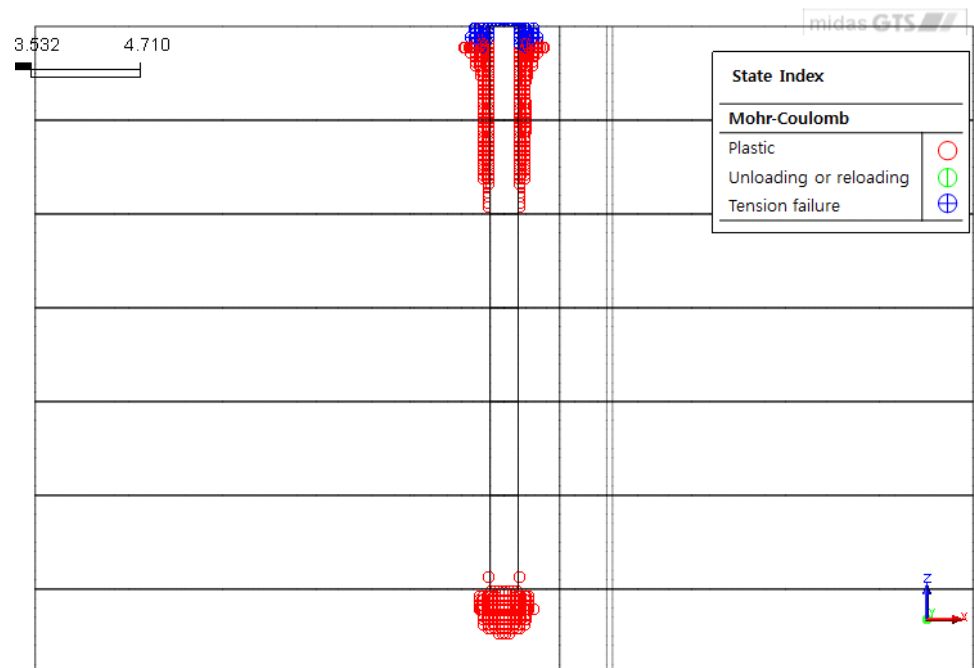


Рисунок 14.6 – Зоны предельного напряженного состояния. Нагрузка 52 кН.

Результаты расчета. Модель 1.

Нагрузка 105 кН

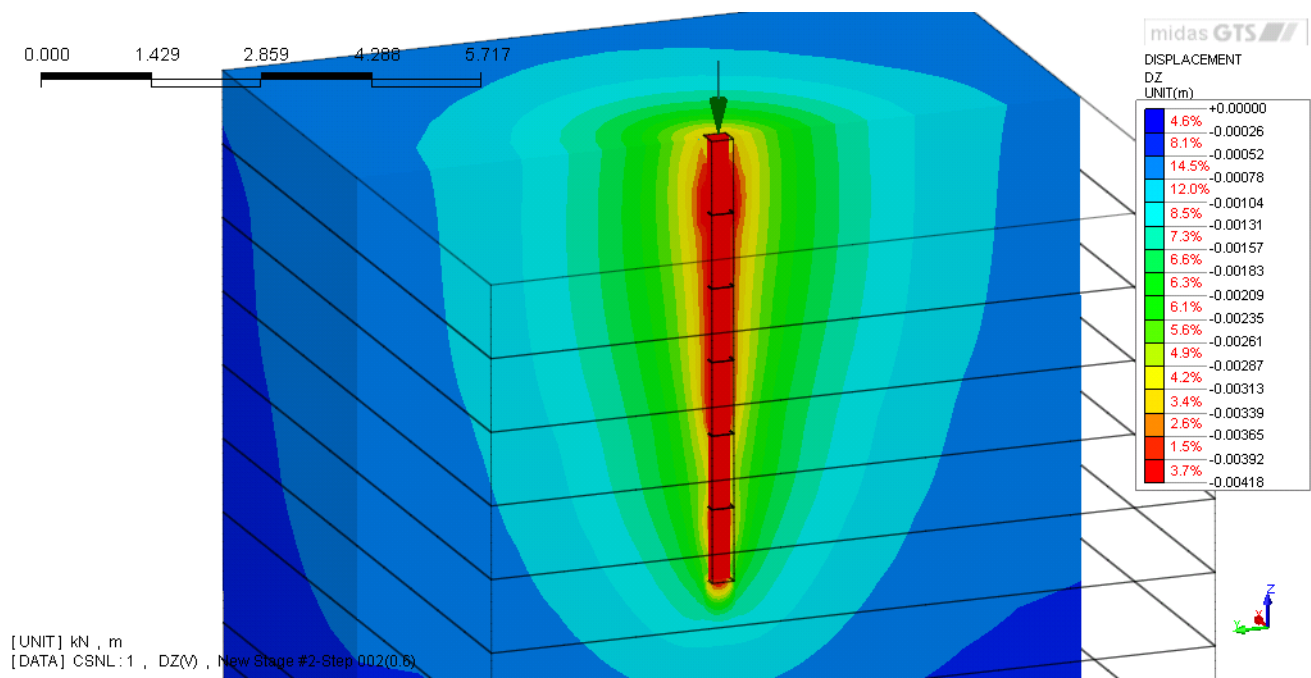


Рисунок 14.7 – Изополе вертикальных перемещений. Нагрузка 105 кН.

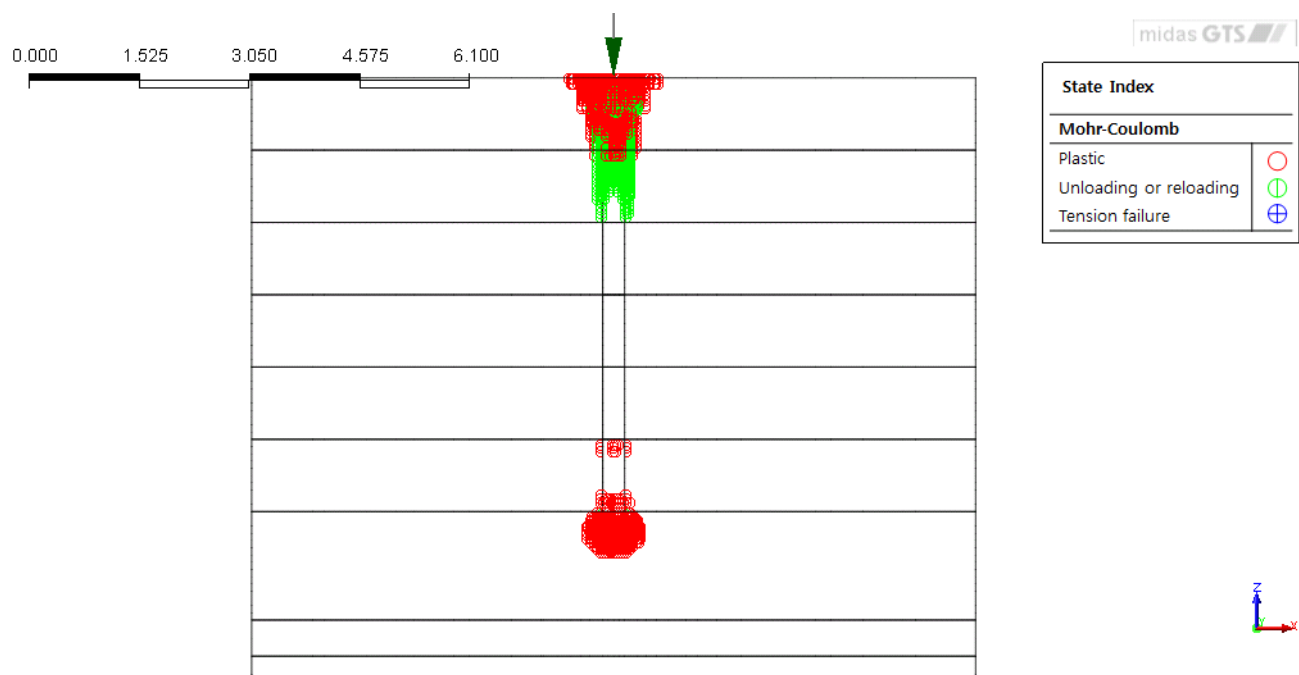


Рисунок 14.8 – Зоны предельного напряженного состояния. Нагрузка 105 кН.

Результаты расчета. Модель 1.

Нагрузка 158 кН

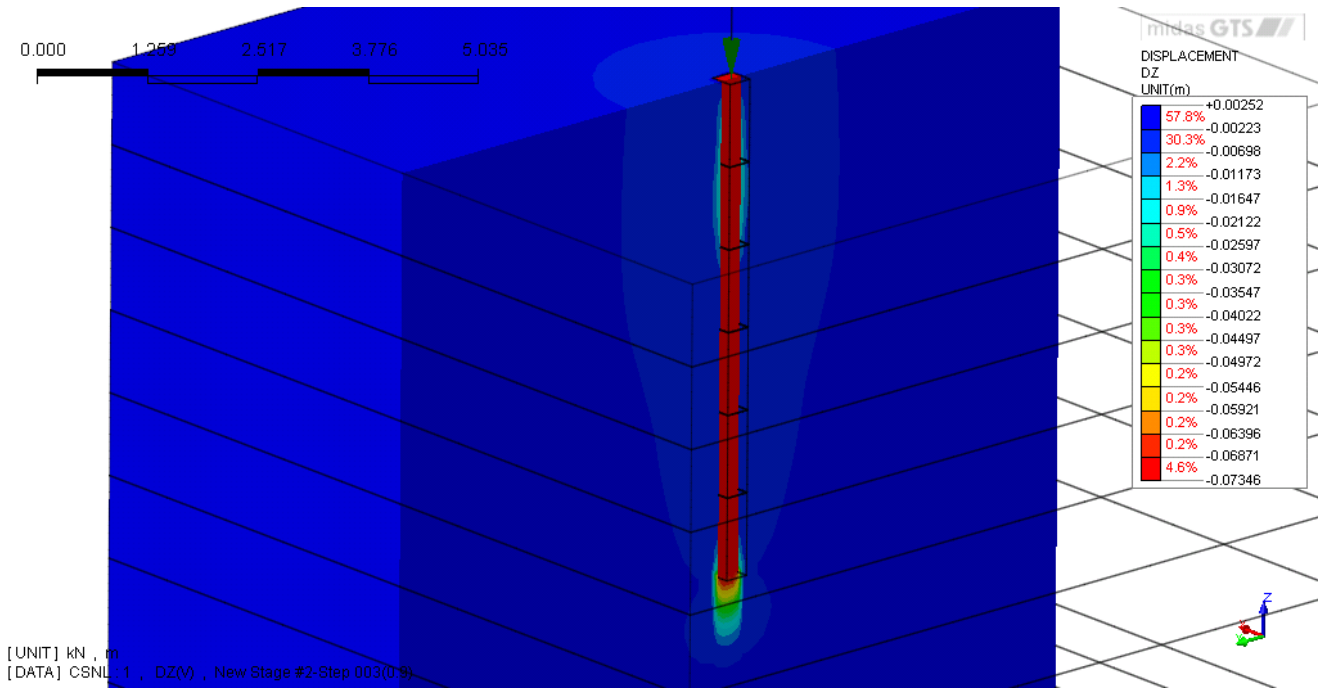


Рисунок 14.9 – Изополе вертикальных перемещений. Нагрузка 158 кН.

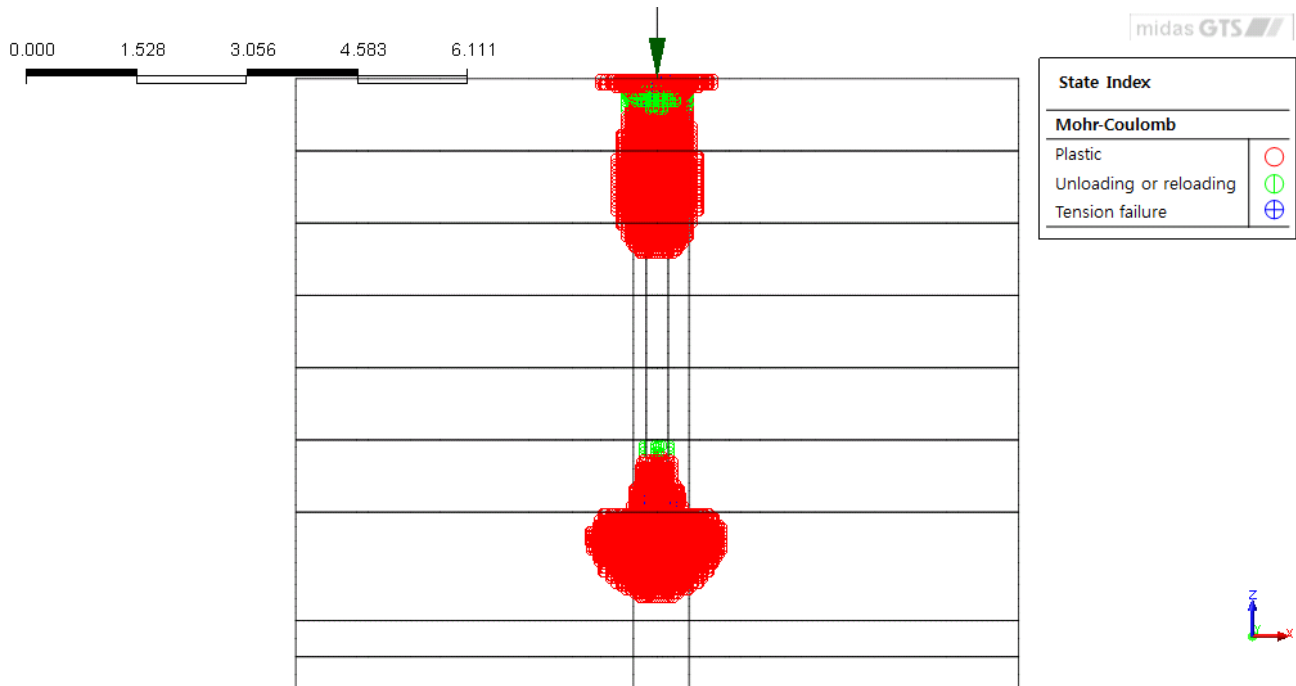


Рисунок 14.10 – Зоны предельного напряженного состояния. Нагрузка 158 кН.

Результаты расчета. Модель 1.

Нагрузка 170 кН

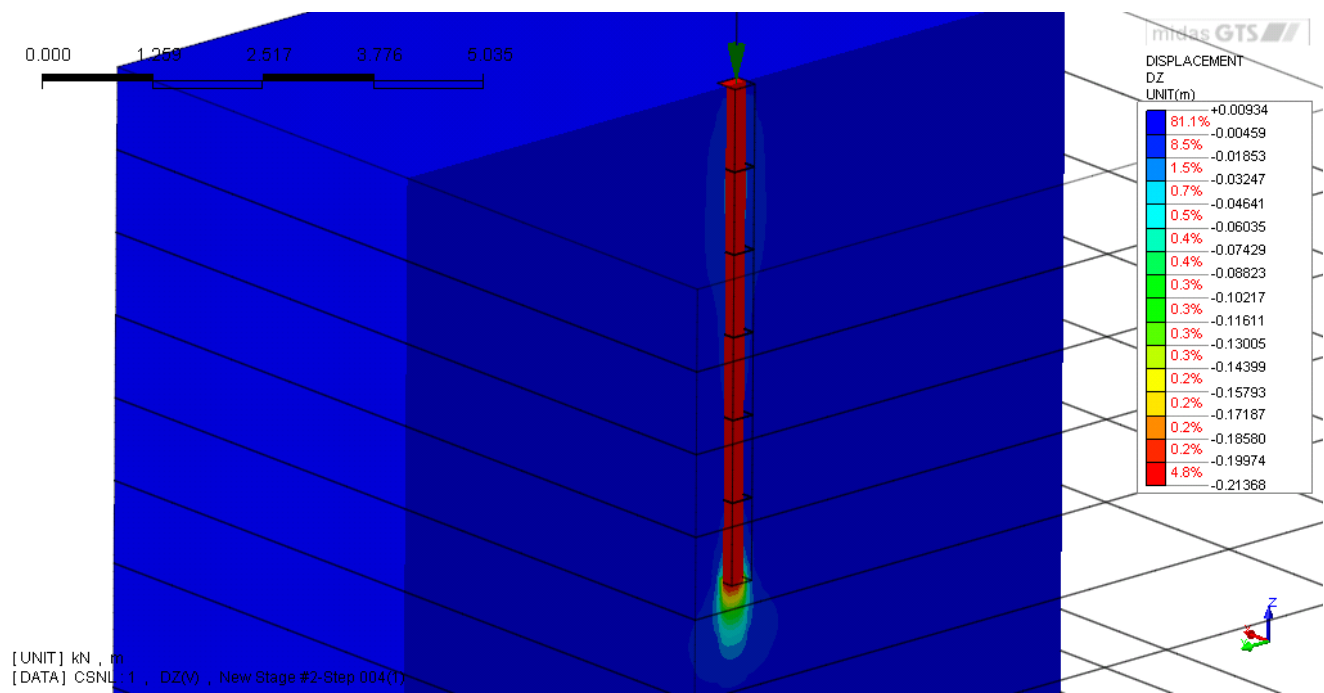


Рисунок 14.11 – Изополе вертикальных перемещений. Нагрузка 170 кН.

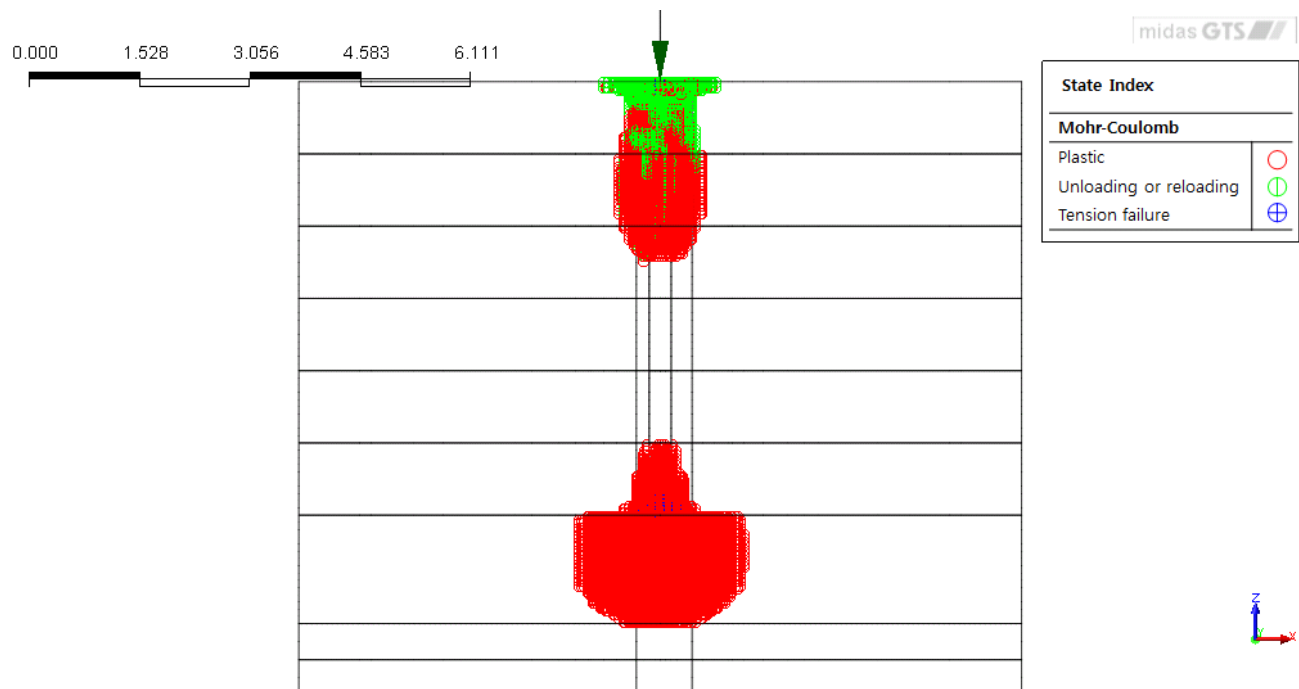


Рисунок 14.12 – Зоны предельного напряженного состояния. Нагрузка 170 кН.

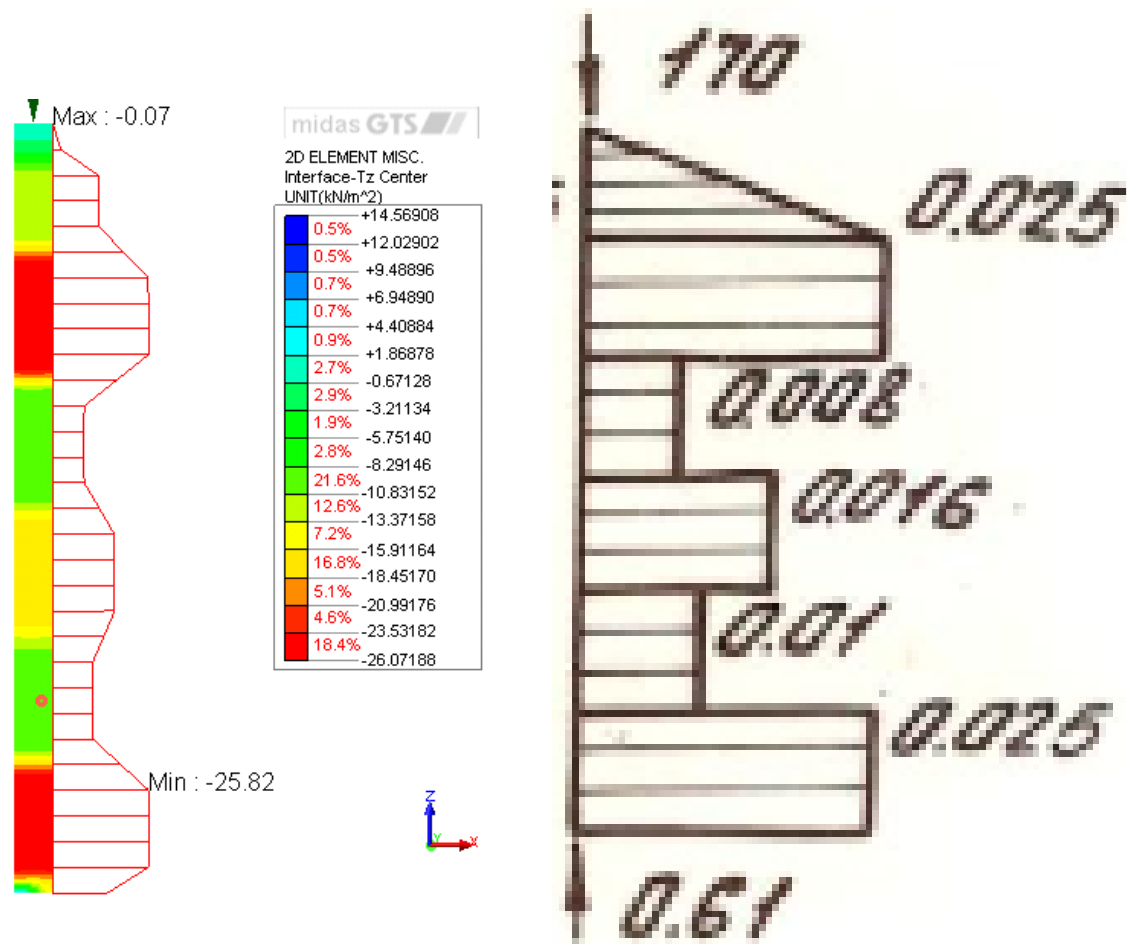


Рисунок 14.13 – Касательные напряжения в интерфейсных элементах при нагрузке 170 кН. Сопоставление с исходными значениями.

Результаты расчета. Модель 2.

Нагрузка 58 кН

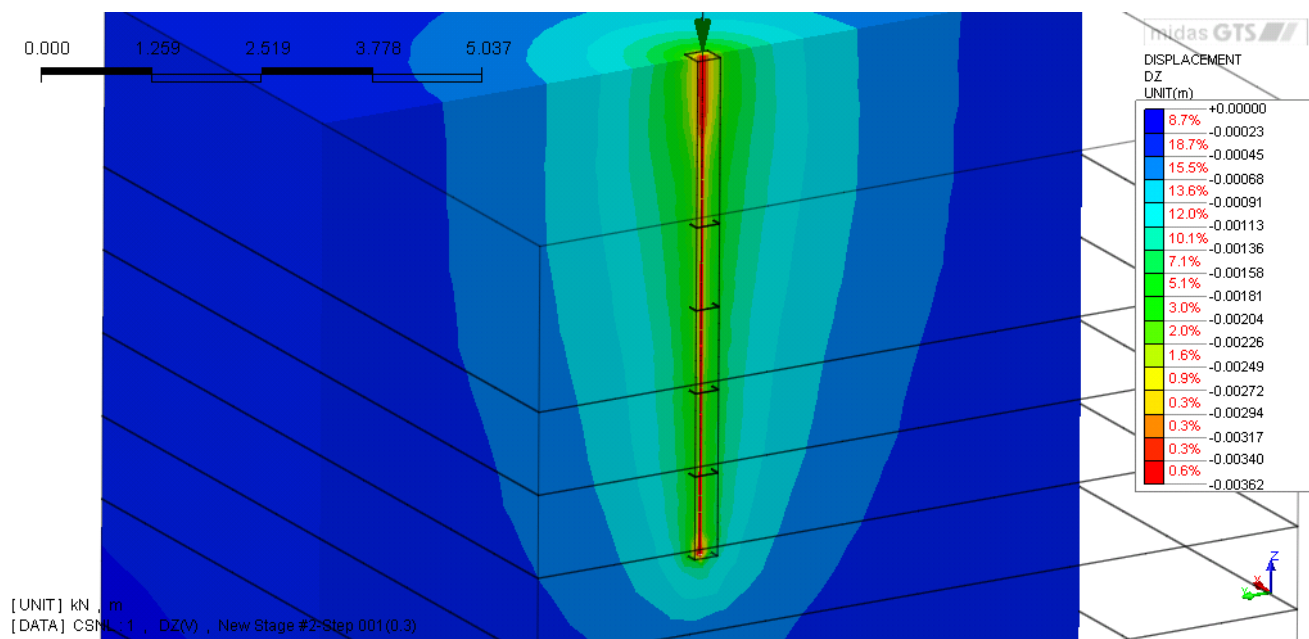


Рисунок 14.14 – Изополе вертикальных перемещений. Нагрузка 52 кН.

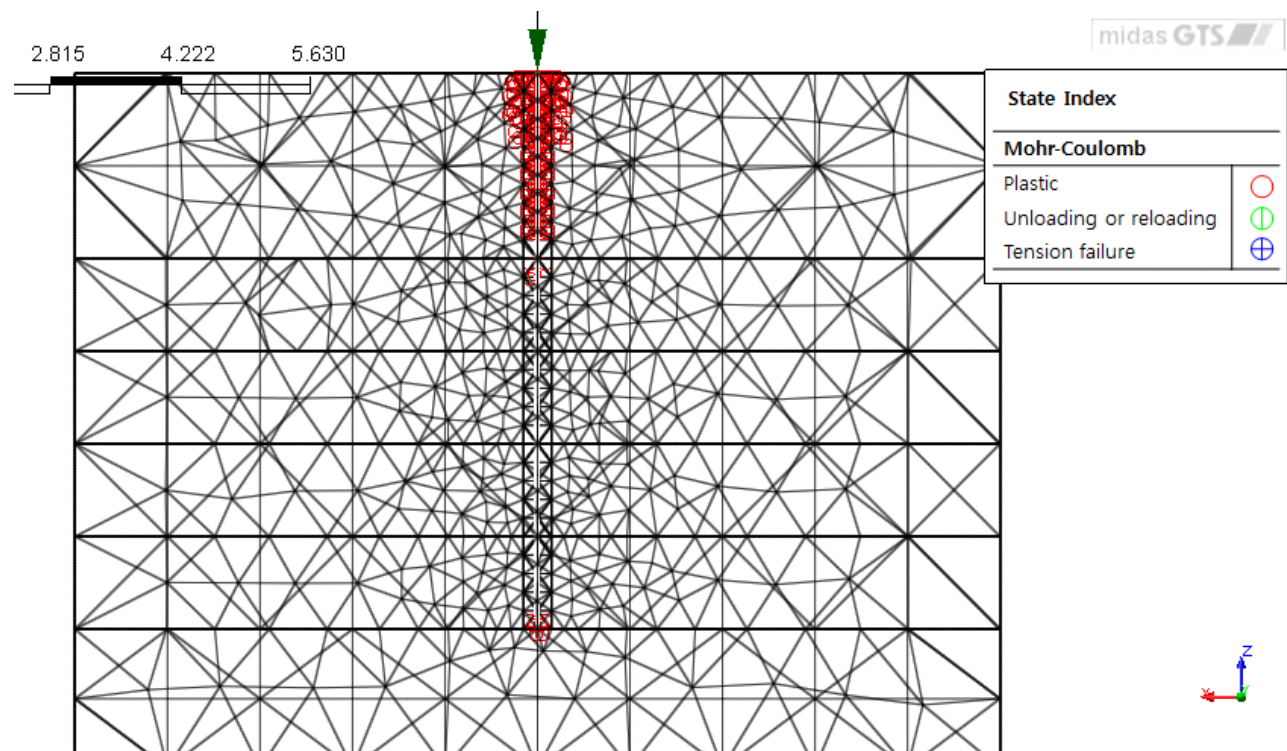


Рисунок 14.15 – Зоны предельного напряженного состояния. Нагрузка 52 кН.

Результаты расчета. Модель 2.

Нагрузка 105 кН

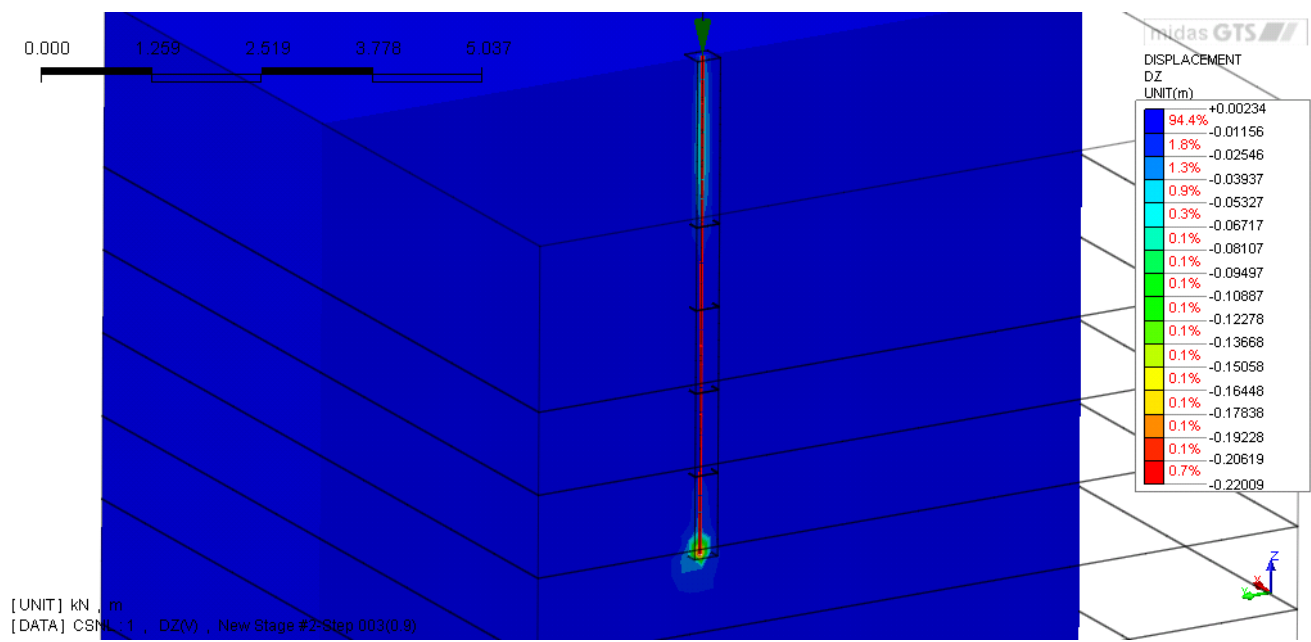


Рисунок 14.16 – Изополе вертикальных перемещений. Нагрузка 105 кН.

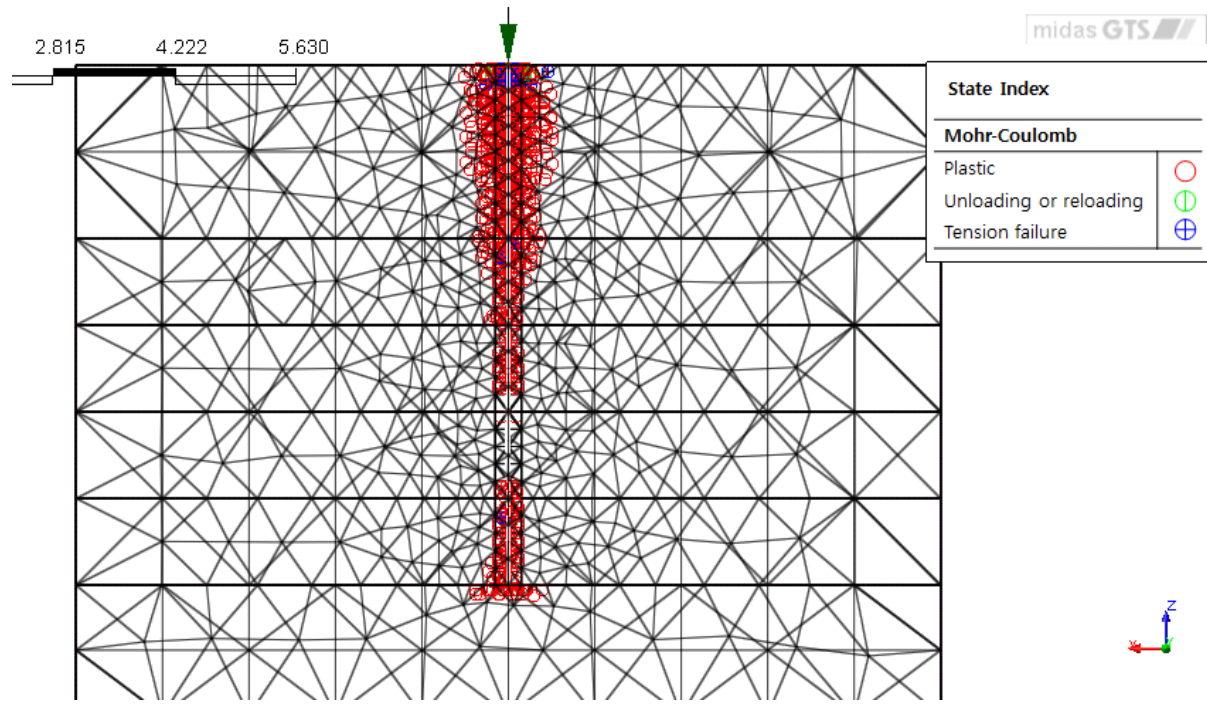


Рисунок 14.17 – Зоны предельного напряженного состояния. Нагрузка 105 кН.

Результаты расчета. Модель 2.

Нагрузка 158 кН

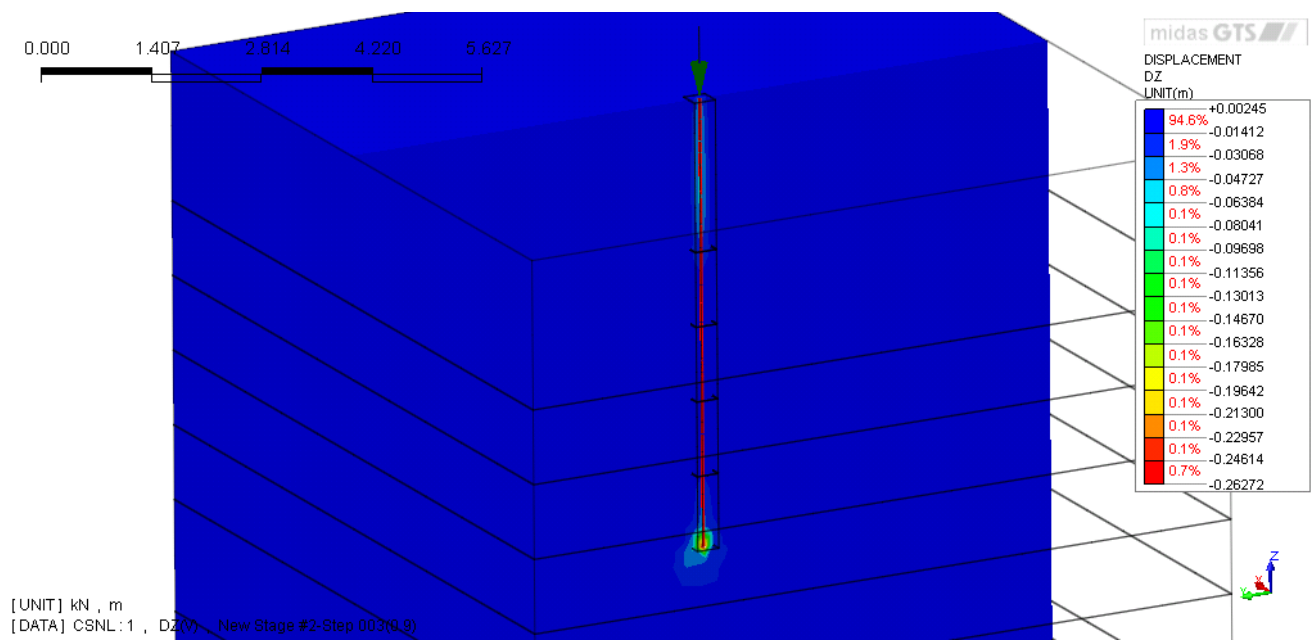


Рисунок 14.18 – Изополе вертикальных перемещений. Нагрузка 158 кН.

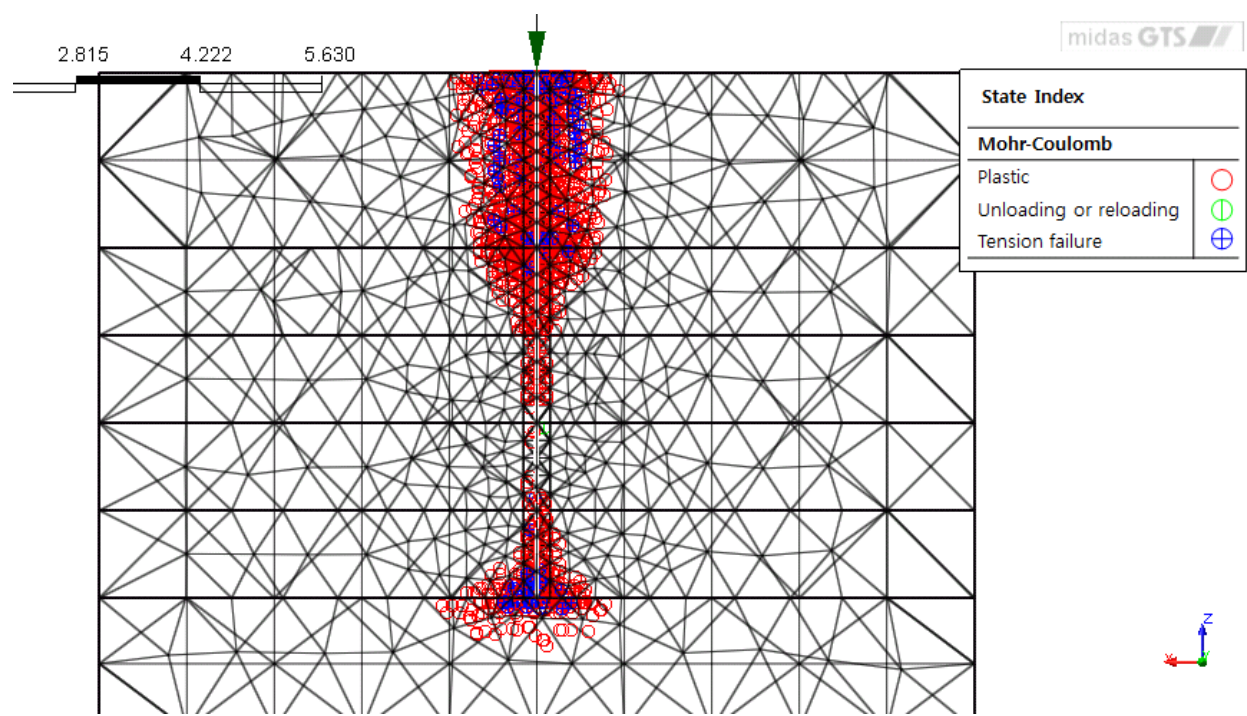


Рисунок 14.19 – Зоны предельного напряженного состояния. Нагрузка 158 кН.
Дальнейшее увеличение нагрузки приводило к расхождению решения.

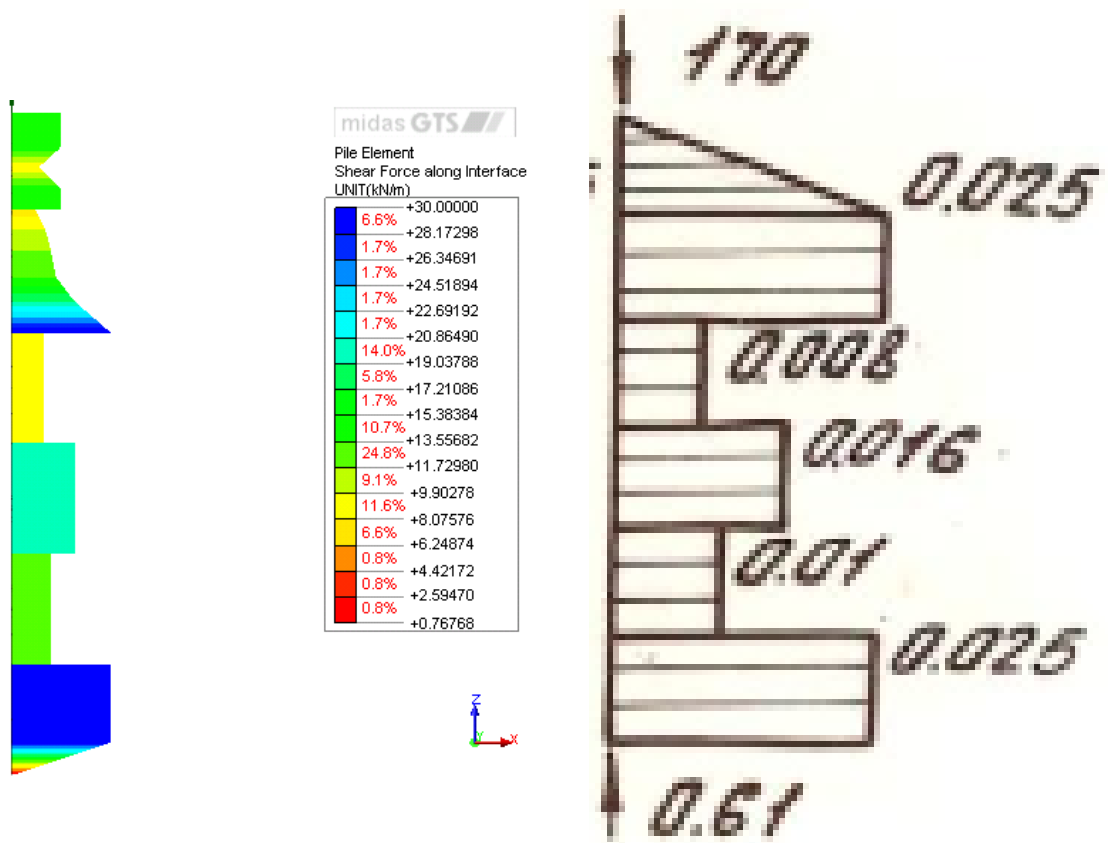


Рисунок 14.20 – Касательные напряжения в интерфейсных элементах при нагрузке 158 кН. Сопоставление с исходными значениями.



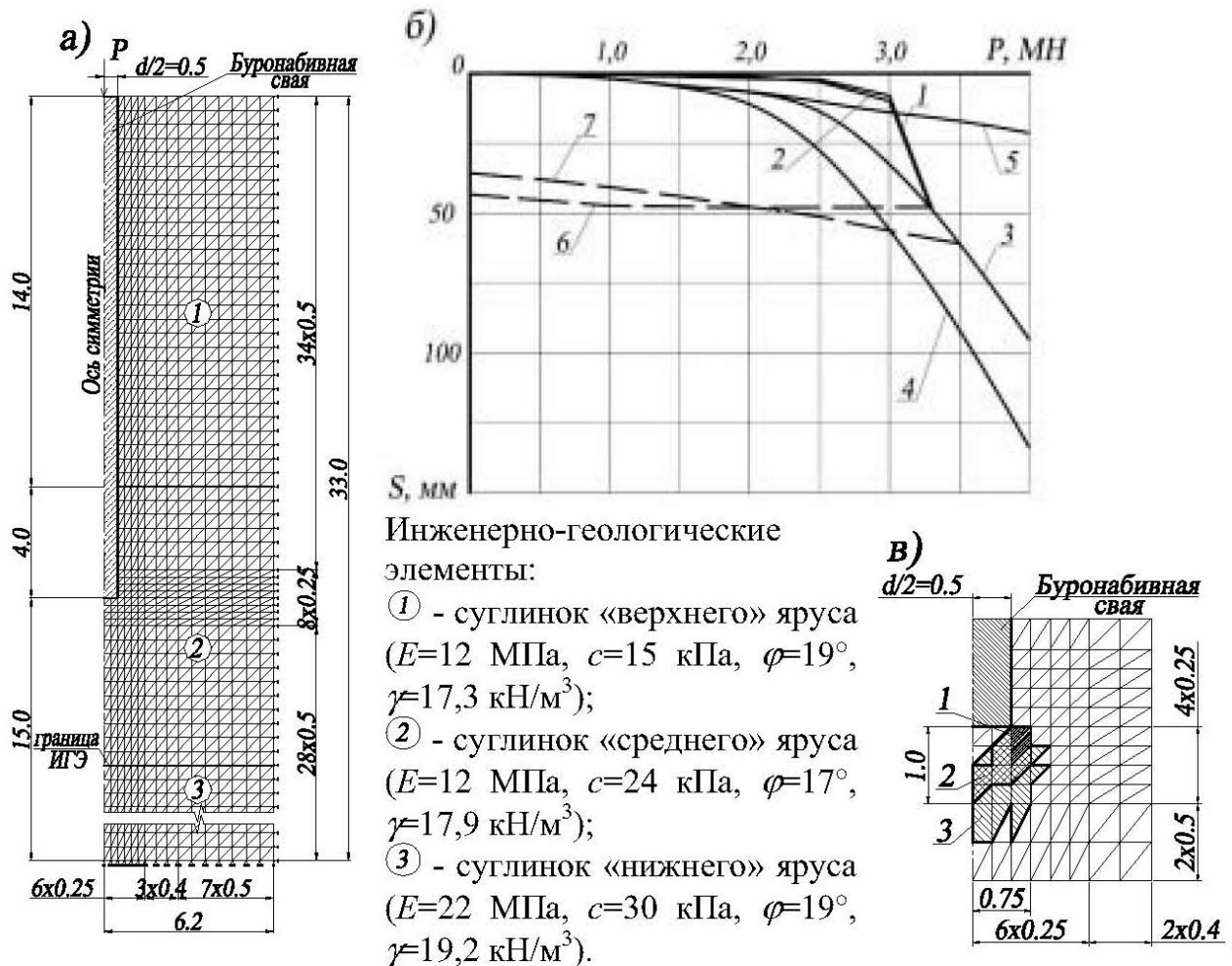
Рисунок 14.21 – График «нагрузка-осадка» свай. Сравнение с расчетными данными.

Источник 2. Сравнение с решением программы УПРОС (Шапиро Д.М.)

Описание

Рассматривается одиночная буронабивная свая диаметром 1 м, длинна 18 м.

Исходные данные для расчета представлены на рисунке 14.21



Графические изображения к примеру 1: *а* – расчетная область, членение на КЭ, граничные условия; *б* – диаграммы зависимостей $s=f(P)$: 1, 2 – по данным статических испытаний; 3, 4 – по результатам упругопластического расчета при значениях расчетного сопротивления грунта трению по боковой поверхности сваи без понижающего коэффициента и с коэффициентом $\gamma_{cf}=0.8$; 5 – упругое решение, 6, 7 – разгрузка, *в*–области предельного напряженного состояния: 1, 2, 3 – при нагрузке P соответственно 2,5, 3,1 и 3,5 МН

Рисунок 14.21 – Данные для расчета в ПК УПРОС
а) КЭ модель; б) график «нагрузка-осадка»; в) области предельного напряженного состояния

Предмет верификации

Основной интерес в данном примере является сопоставление областей пластических зон, полученных в программе УПРОС, реализующей модель Мизеса-Шлейхера-Боткина, с результатами расчетов MIDAS GTS, где будет использована модель Мора-Кулона. При этом также выполняется сопоставление графиков «нагрузка-осадка».

GTS модель

Рассматривается осесимметричная задача. Радиус расчетной области принят в размере $6d$, где d – диаметр сваи. КЭ модель представлена на рисунке 14.22

Контакт сваи с грунтом моделируется с использованием интерфейсных элементов, для которых требуется задание следующих входных данных.

- жесткость по нормали
- сдвиговая жесткость
- предельное сопротивление по боковой поверхности
- предельное сопротивление по торцу сваи

Исходные данные для проведения данного численного эксперимента приведена в таблице 14.3.

Таблица 14.3. Исходные данные

Геометрические размеры модели	Расчетная область: Высота 33 м, радиус- 6 м.
Граничные условия	Крайние грани – ограничение деформаций по нормали к поверхности Нижняя грань – ограничение деформаций по X, Y.
Модель грунта	Мора-Кулона. Характеристики представлены в таблице 1.1. Коэффициент Пуассона принят для всех слоев $\nu=0.35$. Параметр дилатансии: $\sin\varphi/2$.
Модель материала конструкций	Свая $D=1$ м, длина 18 м: бетон $E = 26,6 \times 10^7$ кПа; $\nu = 0.2$.
Нагрузка	Сосредоточенная сила: $P = 10 \times 250 + 15 \times 150 = 4000$ кН 25 шагов нагружения

Тип КЭ	<p><i>Грунтовый массив:</i> 3-х узловой осесимметричный КЭ <i>Свая:</i> 3-х узловой осесимметричный КЭ <i>Контакт с основанием:</i> Интерфейсный элемент – теория прочности Мора-Кулона - жесткость по нормали – 20000 кН/м² - сдвиговая жесткость 20000 кН/м² - удельное сцепление - предельное сопротивление по боковой поверхности – по СНиП 24.13330.2011 в зависимости от показателя текучести (таблица 7.3): Слой 1 - $I_L = 0.4$ Слой 2 - $I_L = 0.3$ - угол внутреннего трения $\varphi = 0$ - прочность на разрыв – 0.</p>
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона Рафсона

КЭ осесимметричная модель представлена на рисунке.

Расчет проводился в два этапа:

- Задание начального НДС грунтового массива при условии, что свая находится в грунте и интерфейсы активированы.

Формирование начального НДС производился негидростатическому закону

$$\sigma_x = \sigma_y$$

- Приложение нагрузки $P = 10 \times 250 + 15 \times 150 = 4000$ кН за 25 этапов.

Результаты расчетов представлены ниже.

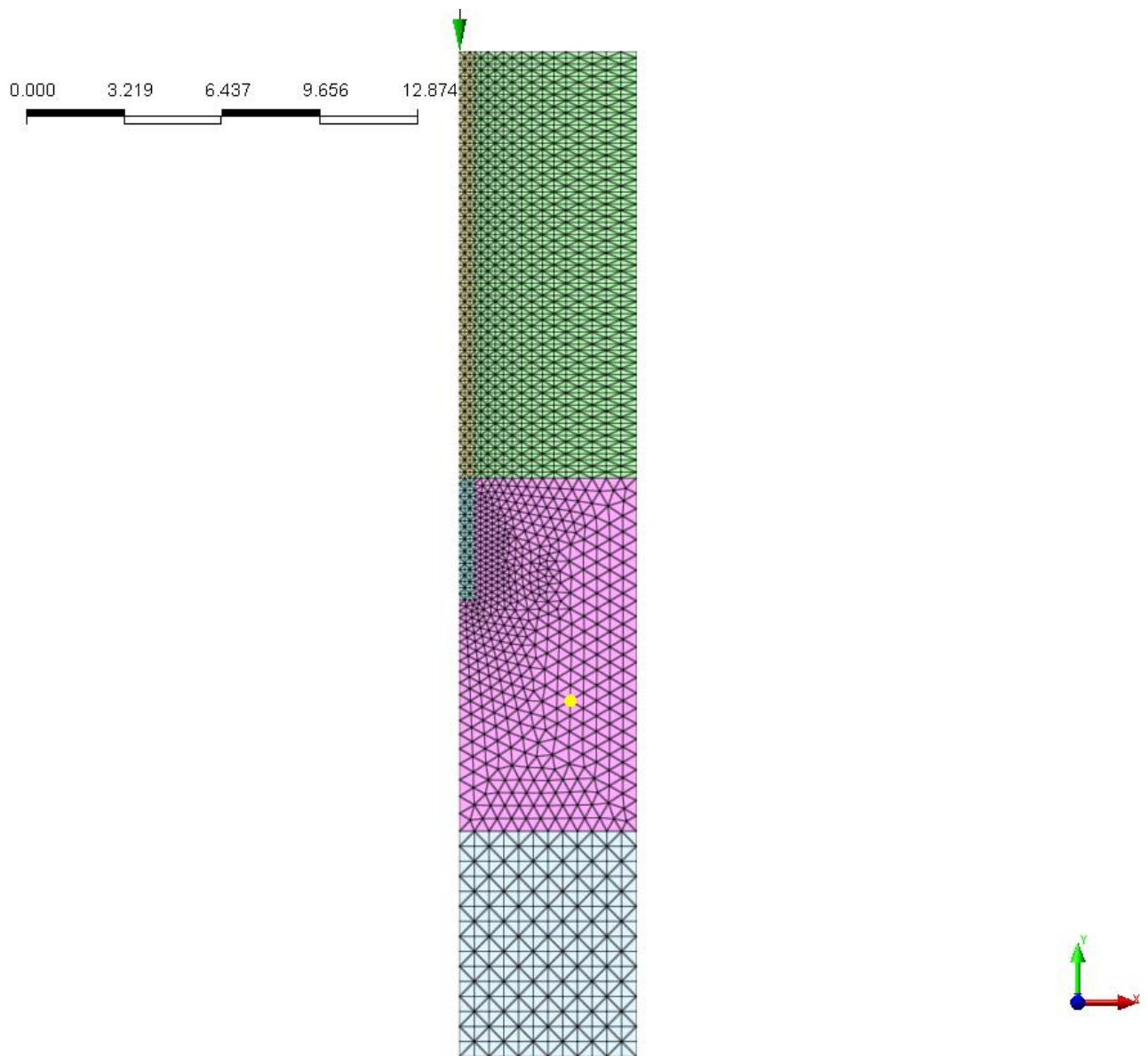


Рисунок 14.22 – Осесимметричная КЭ модель.

Результаты расчета. Осесимметричная задача.
Нагрузка 2500 кН

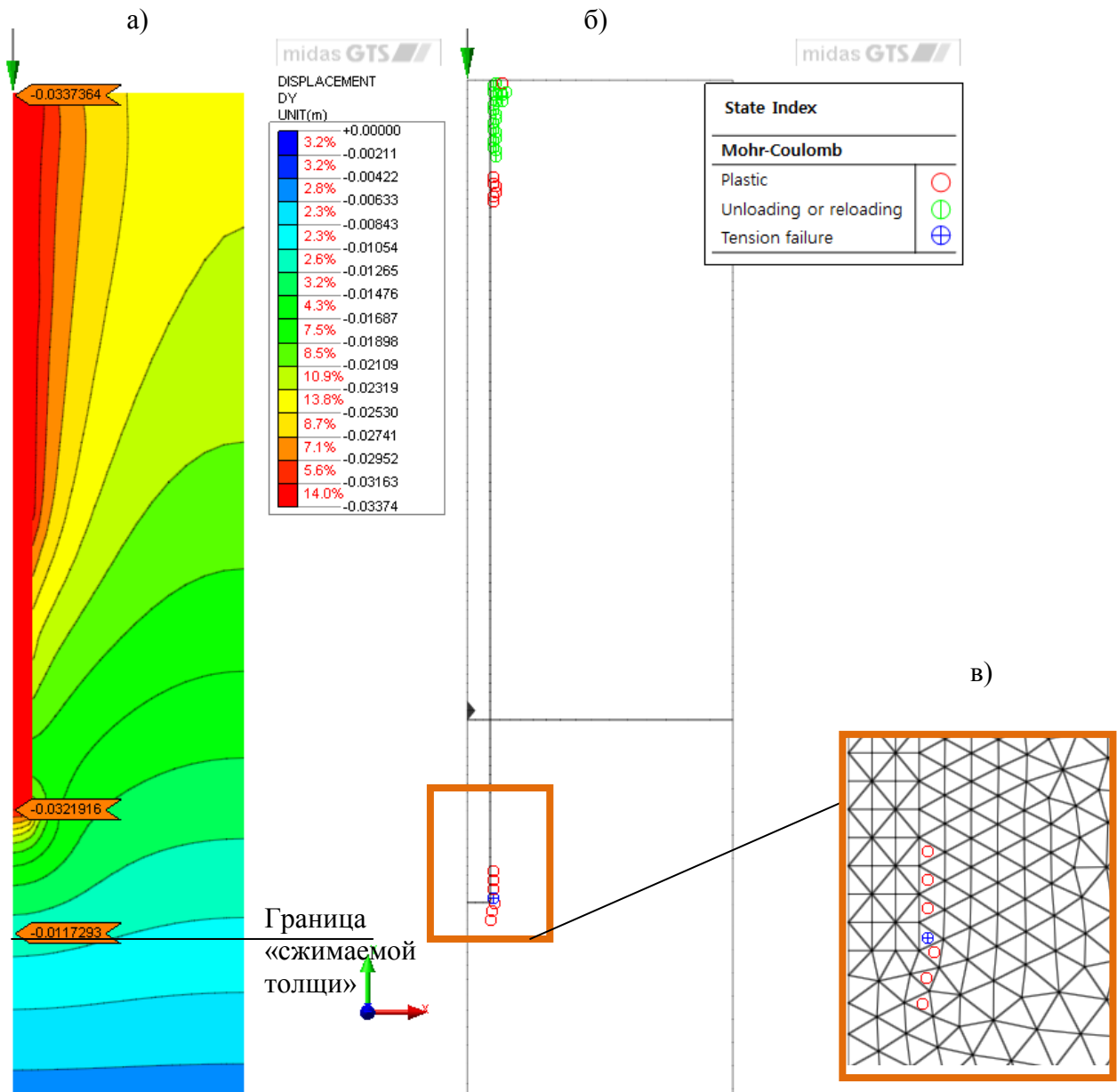


Рисунок 14.23 – Результаты расчета при нагрузке 2500 кН:

а) изополе вертикальных перемещений; б), в) зоны предельного напряженного состояния

Нагрузка 3100 кН

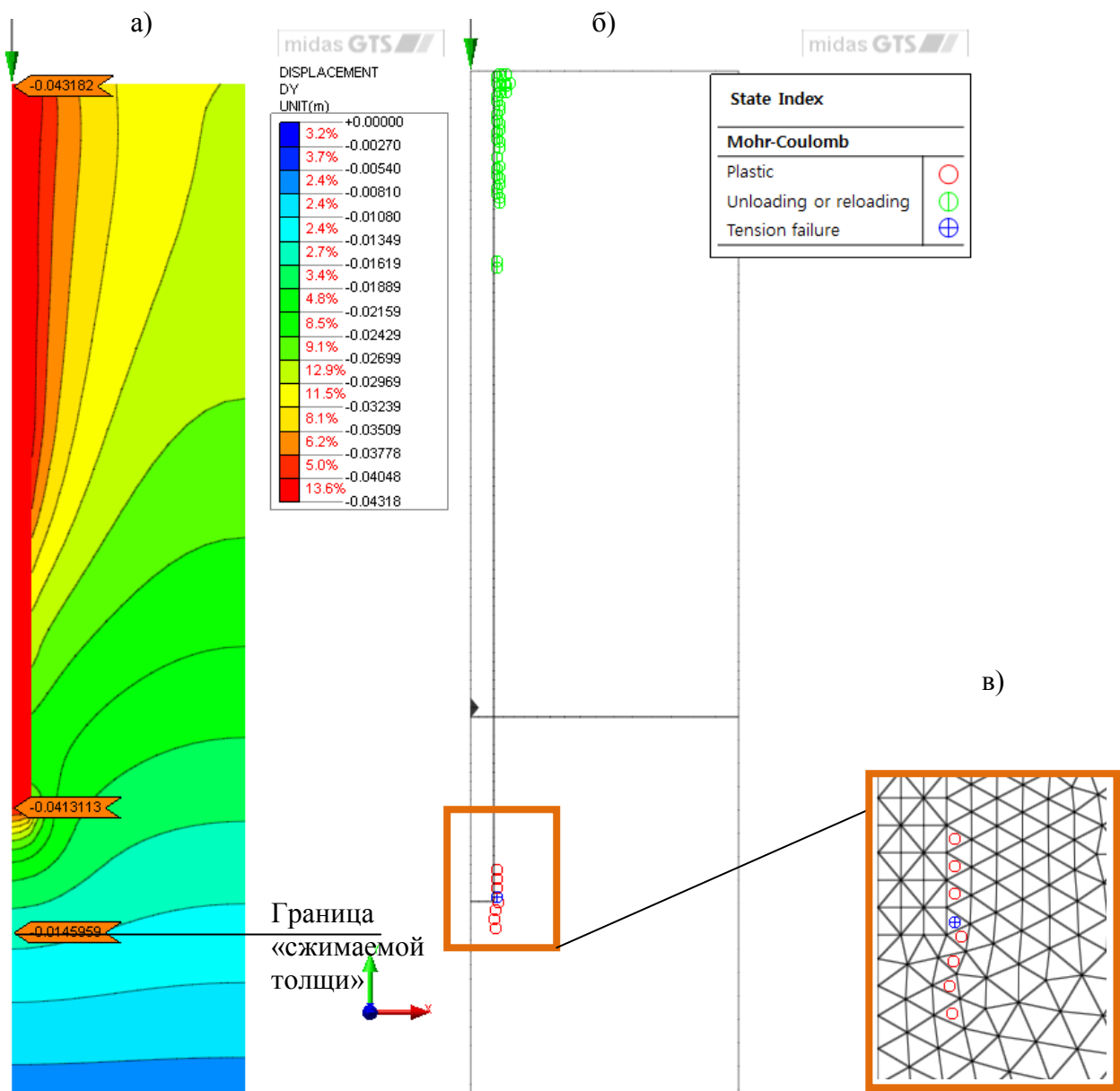


Рисунок 14.24 – Результаты расчета при нагрузке 3100 кН:

а) изополе вертикальных перемещений; б), в) зоны предельного напряженного состояния

Нагрузка 4000 кН

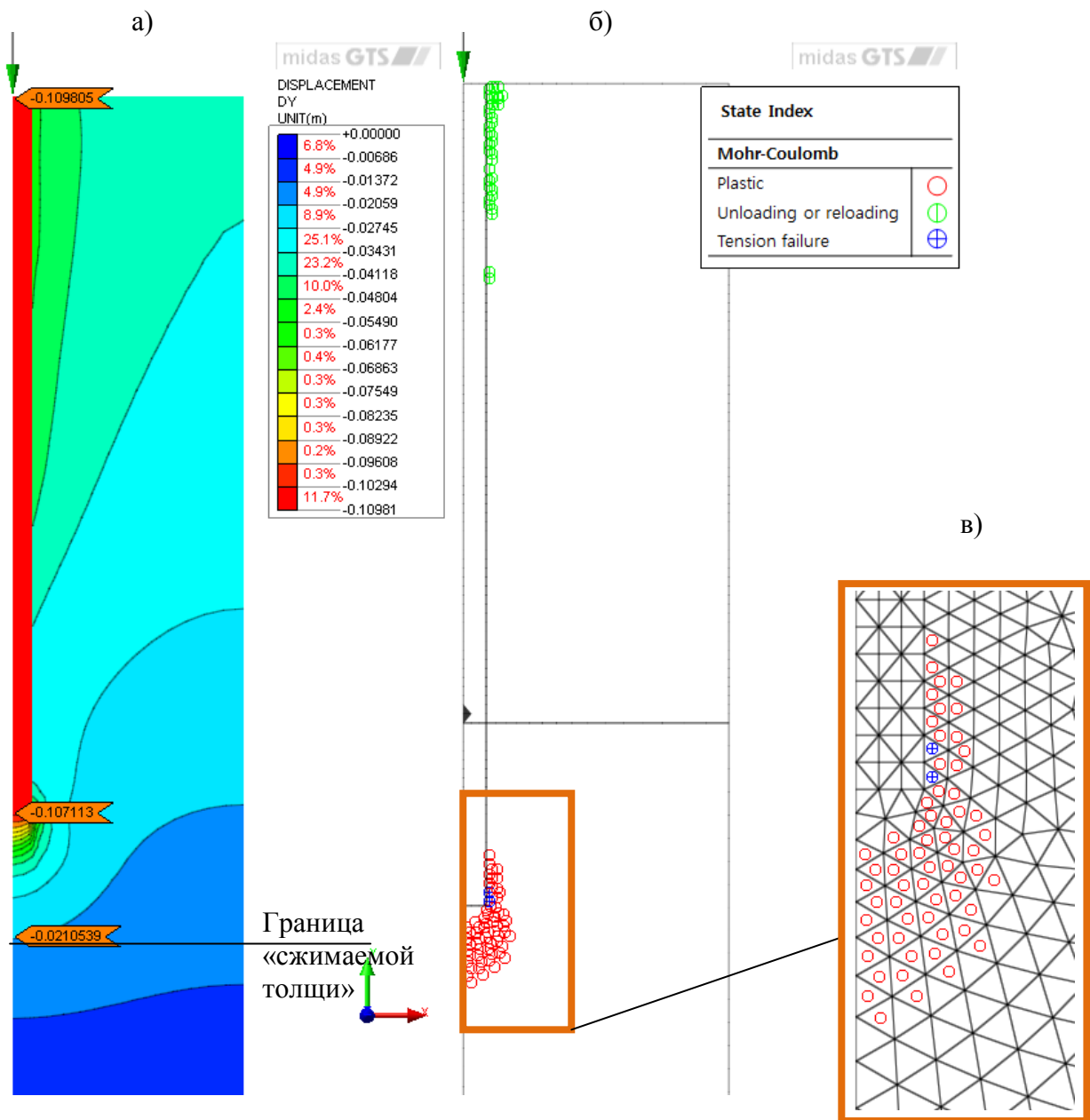


Рисунок 14.25 – Результаты расчета при нагрузке 4000 кН:

а) изополе вертикальных перемещений; б), в) зоны предельного напряженного состояния

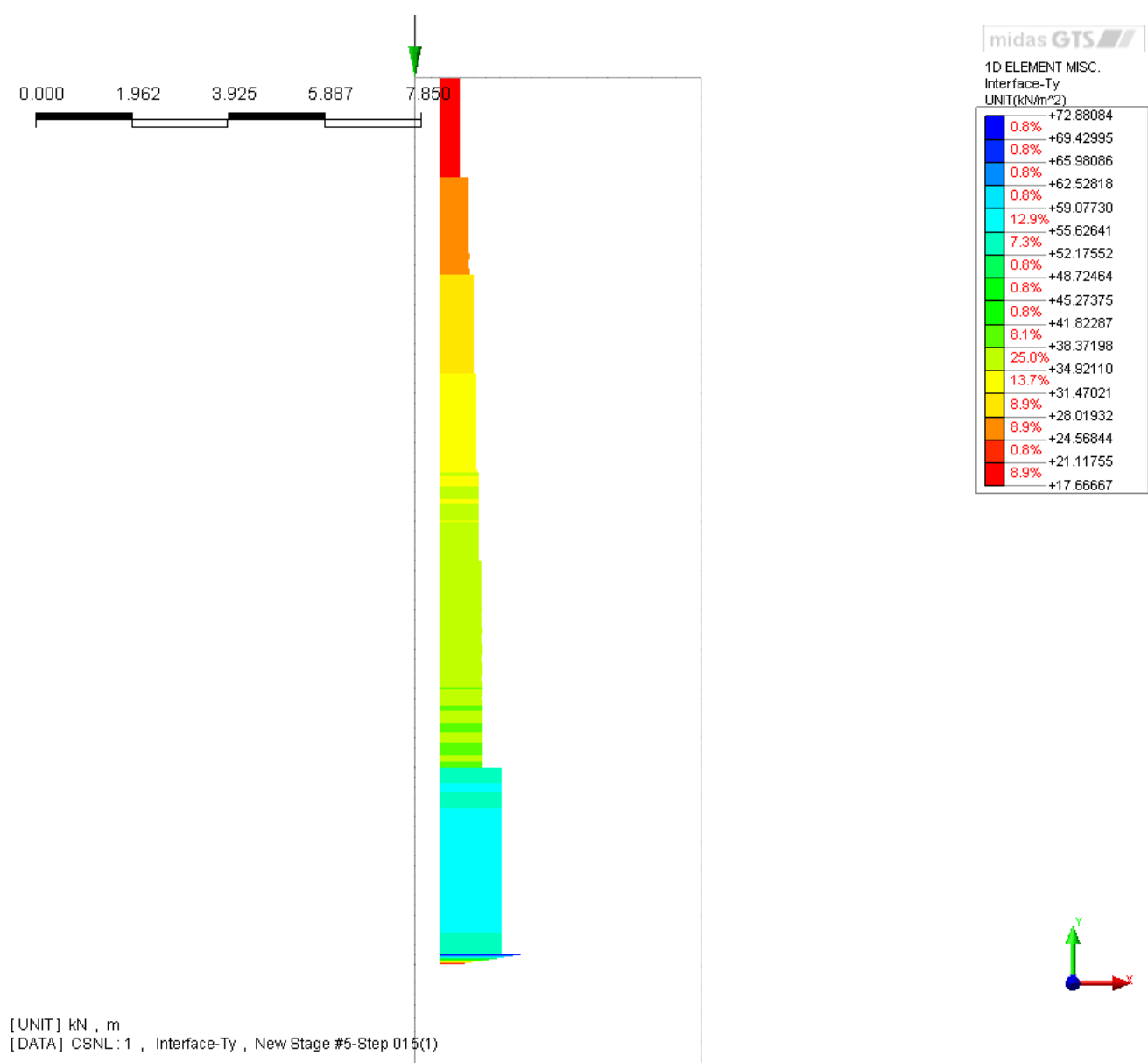


Рисунок 14.26 – Касательные напряжения в интерфейсных элементах при нагрузке 4000 кН.

Сопоставление результатов

В соответствии с данными источника расчетная осадка вычислялась при учете «нижней границы» сжимаемой толщи, которая определяется по условию о соотношении «дополнительного» (связанного с действием осевой силы) $\sigma_{ур}$ и природного σ_{yg} давлений: $\sigma_{ур} = 0.2\sigma_{yg}$.

По результатам расчета в модели GTS граница сжимаемой толщи находится на расстоянии 2.8..3.3 м от низа сваи в диапазоне нагрузок 2500...4000 кН. Таким образом, для сопоставления полученных результатов, осадка, вычисленная в КЭ модели GTS, была скорректирована и вычислена, как разница осадки верха сваи и осадки на глубине 2.8..3.3 м от низа сваи. Результаты сопоставления представлены на рисунке 1.

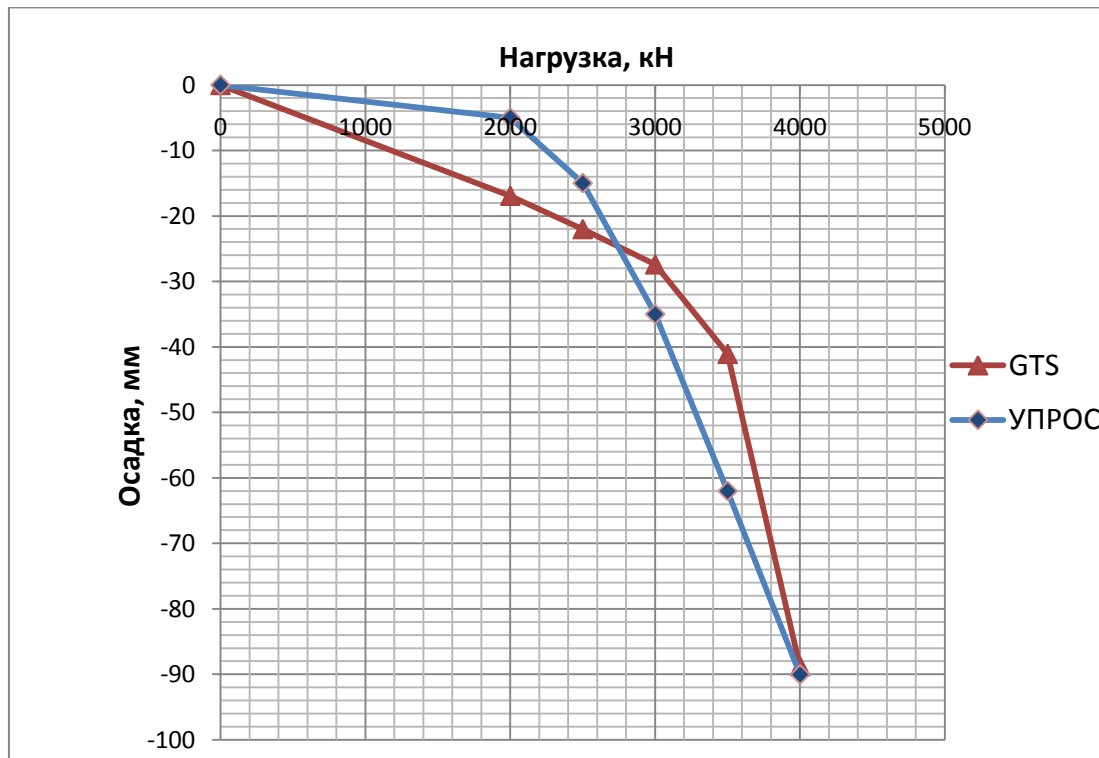


Рисунок 14.27 – График «нагрузка-осадка»

Пример 15. Комбинированный свайный фундамент при действии горизонтальной нагрузки

Источник	П.И. Яковлев, А.Л. Готман, Р.Г. Курмаев, Взаимодействие сооружений с грунтами и свайные основания, Одесса, 2004, стр. 395-397, 435-449
Тип задачи:	Статический нелинейный поэтапный расчет НДС
Тип верифицируемых КЭ:	10-ти узловой тетраэдр, стержневой, балочный элемент, специальный свайный интерфейсный элемент

Описание

В конструктивном отношении комбинированный свайный фундамент (КСФ) представляет собой штампонабивную сваю - ростверк с забитыми в дно скважины двумя наклонными тензосваями, как показано на рисунке 15.1. Тензосваи представляют трубу 220x40 мм длиной 8 м (1 м – заделка в ростверк).

Требуется определить горизонтальные перемещения u КСФ в уровне верха фундамента и изгибающие моменты M в сваях. Инженерно-геологические условия представлены в таблице 15.1.

Таблица 15.1. Инженерно-геологические условия

Глубина отбора образца, м	Плотность грунта природной влажности γ , г/см ³	Угол внутреннего трения φ , град.	Модуль деформации E , МПа	Сцепление c , МПа
2	1,63	19	9,5	0,045
3	1,86	23	7,0	0,020
4	1,92	23	11,0	0,040
5	1,94	20	12,5	0,050
6	1,89	14	14,0	0,053
7	1,92	17	15,5	0,060

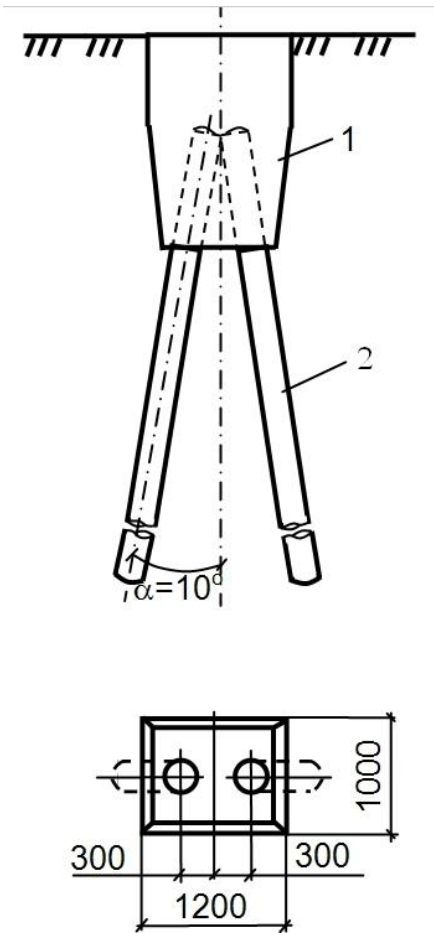


Рисунок 15.1 – Конструктивная схема комбинированного свайного фундамента
(1 – монолитный ростверк, 2 – наклонные тензосваи)

Результаты испытаний приведены на рисунках 15.2 и 15.3.

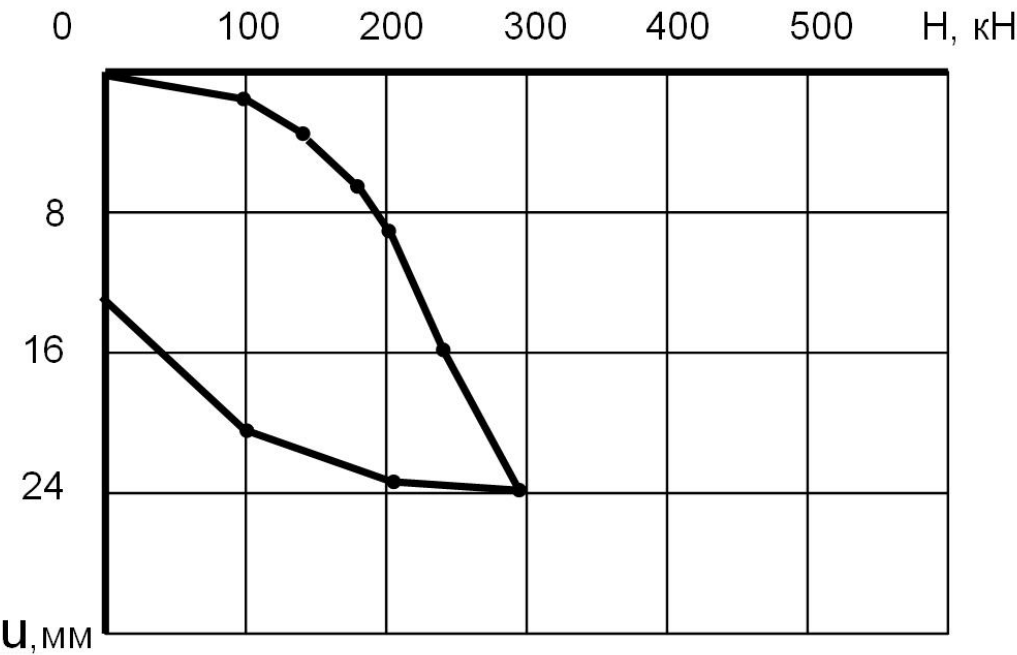


Рисунок 15.2 – График «нагрузка-перемещение»

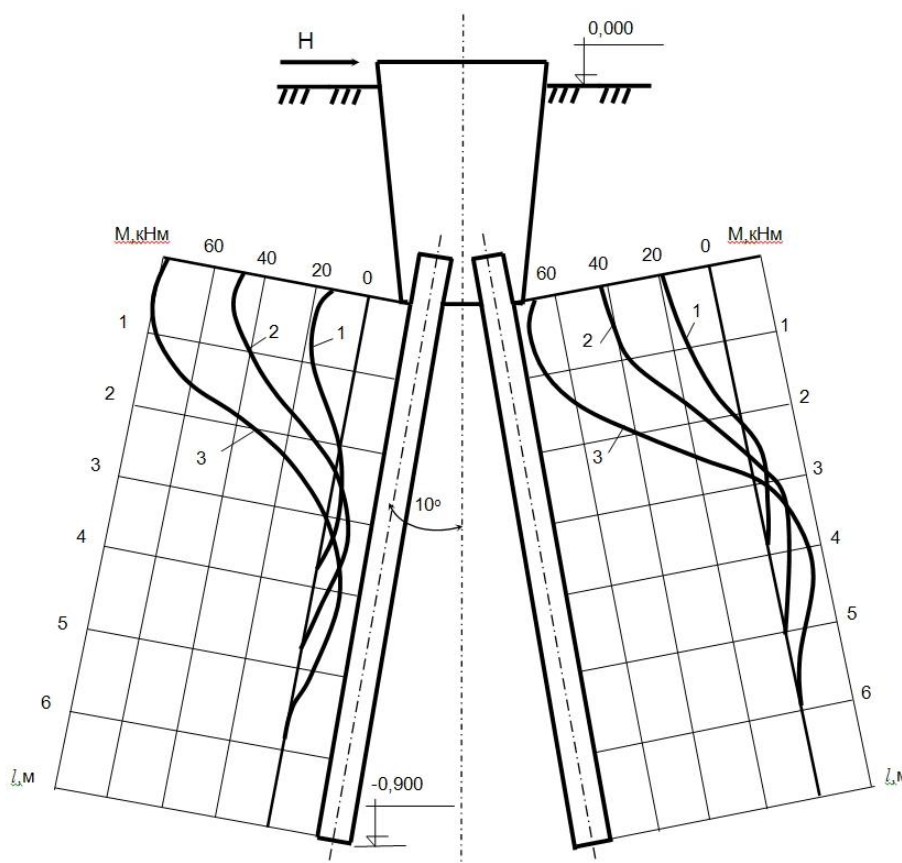


Рисунок 15.3 – Эпюры изгибающих моментов: 1 – $H=140\text{кН}$; 2 – $H=210\text{кН}$; 3 – $H=280\text{кН}$

Предмет верификации

В данном примере моделируется задача нагружения КСФ горизонтальной нагрузкой, с построением графика «нагрузка-перемещение» на обресе ростверка и эпюры изгибающих моментов в свае.

GTS модель

Задача смоделирована в трехмерной постановке. КЭ элементная модель представлена на рисунках 15.4, 15.5. Для моделирования грунтового основания использовался 10-ти узловой тетраэдр. Сваи смоделированы свайным элементом PILE, который состоит из балочного изгибаемого элемента и объемного интерфейсного элемента, обеспечивающего связь боковой поверхности и торца с объемными элементами грунтового массива.

Ввиду отсутствия данных прочностные характеристики интерфейсных элементов были приняты завышенные, чтобы наступление предельного состояния происходило по грунту, а не по контакту сваи с грунтом.

Контакт ростверка с грунтом обеспечивался за счет плоских интерфейсных элементов. Коэффициент снижения трения – 0.8.

Исходные данные представлены в таблице 15.2.

Таблица 15.2 Исходные данные

Размеры модели $a \times b \times h$	40x40x17м
Размеры подколонника (верх / низ)	1,2x1,0м / 1,1x0,9м
Подколонник	Монолитный из бетона класса В25
Сваи	Стальная труба сечением 220x40мм
Граничные условия	Боковые грани – ограничение деформаций по перпендикулярным к граням направлениям X, Y Нижняя грань – ограничение деформаций по Z
Модель и физические характеристики грунтового основания	Мора-Кулона: $\nu=0,3$ для всех слоев грунта. Все др. характеристики приняты согласно табл. 15.1
Модель и физические характеристики сваи	Линейная упругая: $E= 21 \times 10^7$ кН/м ² , $\nu=0,3$
Модель и физические характеристики ростверка	Линейная упругая: $E= 3,06 \times 10^7$ кН/м ² , $\nu=0,2$
Нагрузка	$H=140+70+70=280$ кН 3 шага
Тип КЭ	Основание: 10-ти узловой тетраэдр Ростверк: 10-ти узловой тетраэдр

	<p><i>Сваи:</i></p> <p>балочный изгибаемый элемента</p> <p>+ объемный интерфейсный элемент:</p> <ul style="list-style-type: none">- жесткость по нормали – 200000 кН/м²- сдвиговая жесткость 200000 кН/м²- жесткость под концом сваи 10000 кН/м- предельное сопротивление по боковой поверхности – 10000 кН/м- предельное сопротивление по торцу сваи – 10000 кН/м
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона-Рафсона

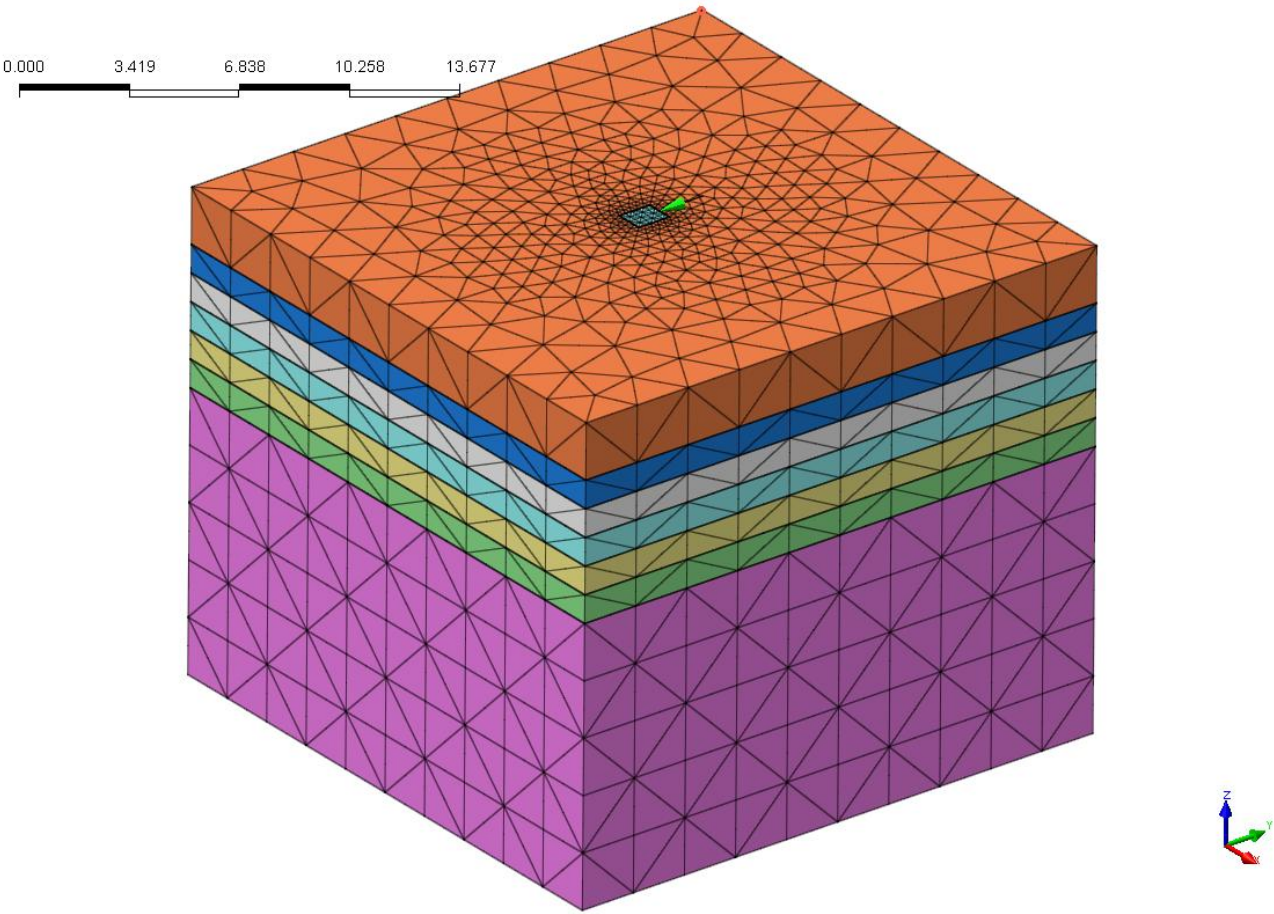


Рисунок 15.4 – КЭ-модель
(48207 элементов 35271 узла)

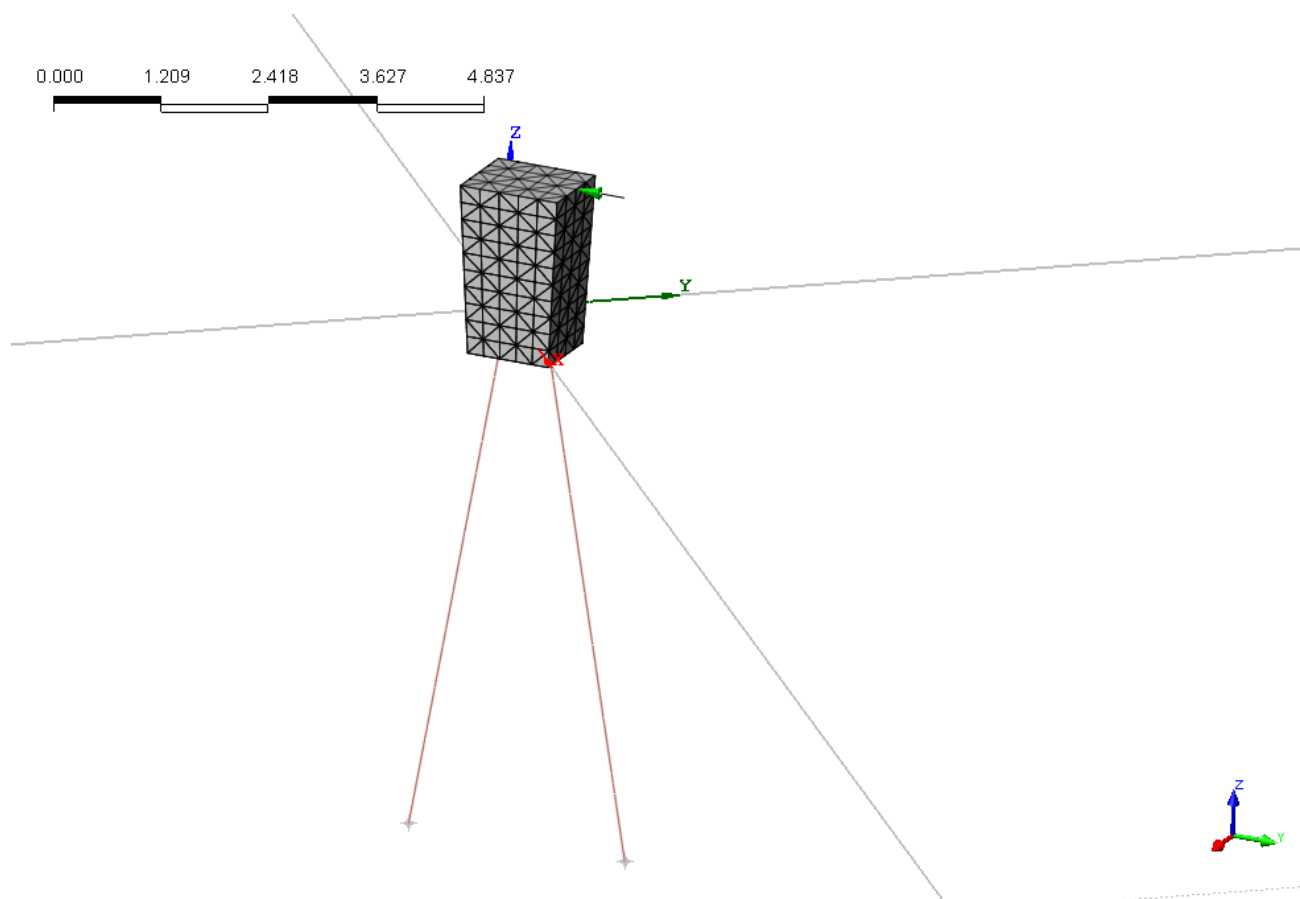


Рисунок 15.5 – КЭ-модель КСФ (массив грунта условно не показан)

Расчет проводился в два этапа:

1. Задание начального НДС грунтового массива

Формирование начального НДС производился по негидростатическому закону

$$\sigma_x = \beta \sigma_y, \text{ где}$$

β - коэффициент бокового давления грунта в состоянии покоя, $\beta = 1 - \sin \varphi$

2. Устройство ростверка (замена свойств), свай и задание горизонтальной нагрузки Н.

Результаты расчетов представлены ниже.

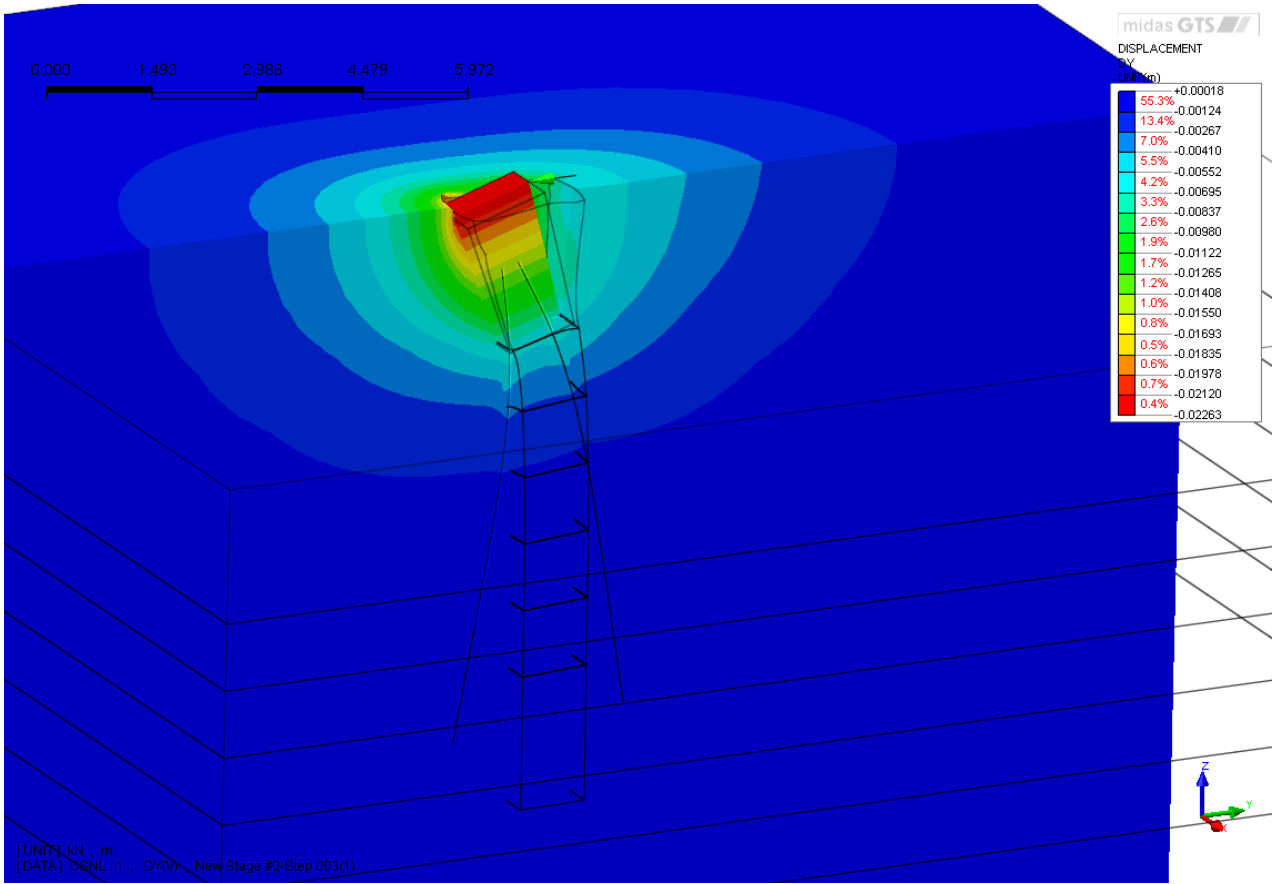


Рисунок 15.8 – Изополя перемещений при нагрузке 280 кН

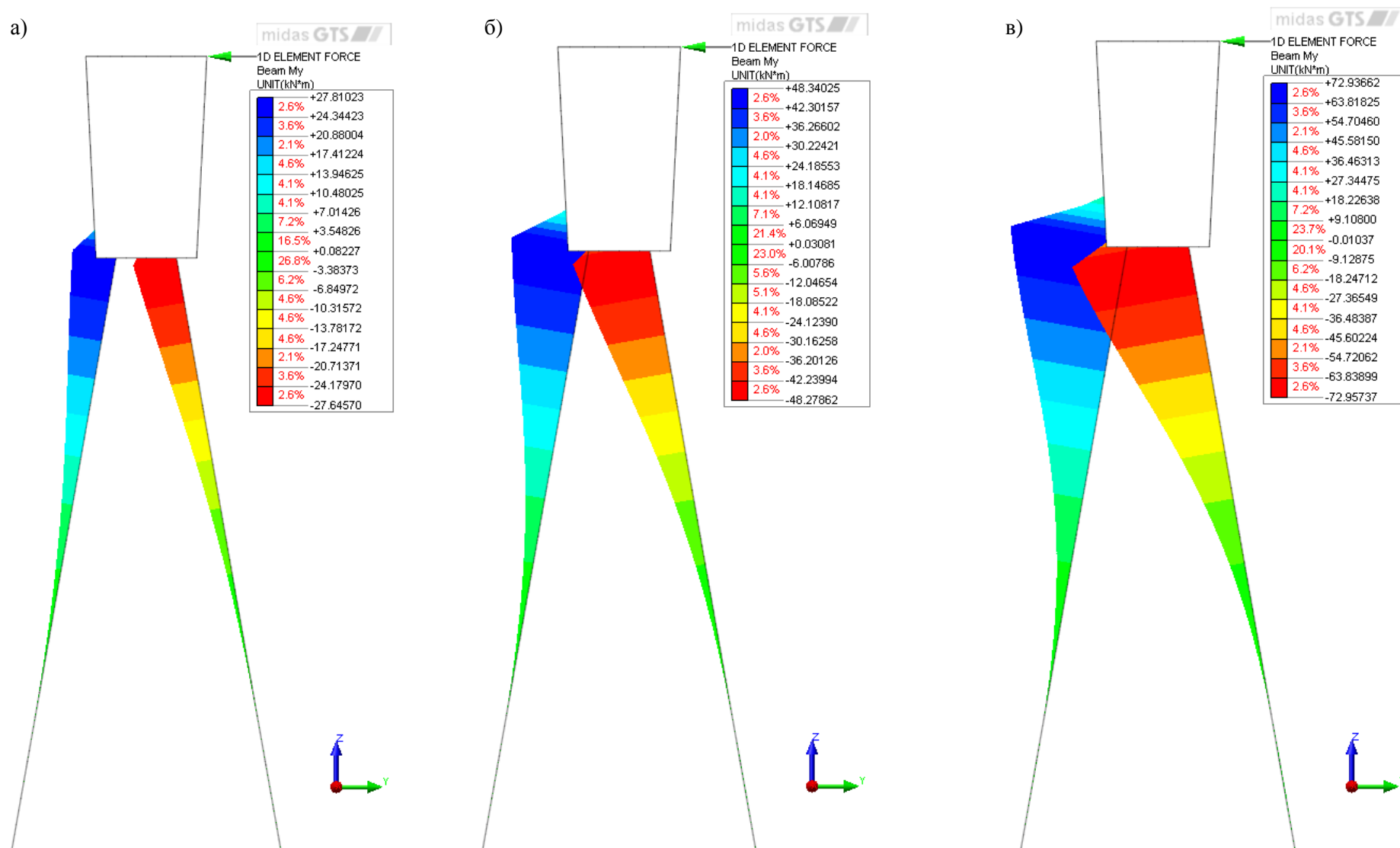


Рисунок 15.9 – Изгибающие моменты в сваях (кН·м): а) 140 кН, б) 210 кН, в) 280 кН

Таблица 15.3 Сопоставление результатов расчета

	Источник (испытания)			MIDAS GTS			Погрешность, %		
	140	210	280	140	210	280	140	210	280
Нагрузка, кН									
Максимальный изгибающий момент в свае при H=280 кН, кН·м	20	45	75	28	48.2	73	+40	+7.1	+2.7

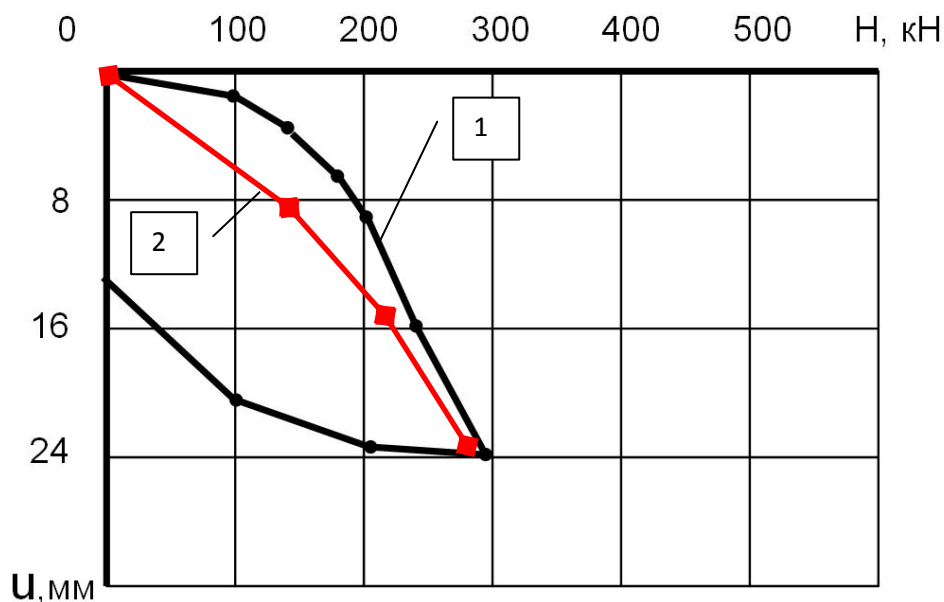


Рисунок 15.10 – График «нагрузка-перемещение»:

1-результаты испытаний; 2-расчет GTS

Пример 16. Пластическое нагружение балки прямоугольного сечения

Источник	Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести, Москва, 1961. Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, Москва, 1954
Тип задачи:	Статический нелинейный расчет НДС с учетом пластичности
Тип верифицируемых КЭ:	8-ми узловой четырехугольный элемент плоской деформации

Описание

Стальная балка прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ нагружена равномерно распределенной нагрузкой q , как показано на рисунке 16.1. Балка находится в предельном состоянии.

Для прямоугольного сечения, при исходных данных, приведенных в табл.

16.1 $W_{nl} = \frac{bh^2}{4} = 1 \text{ м}^3$. Задав $\sigma_m = 24000 \frac{\text{т}}{\text{м}^2}$ можно определить предельный пластический момент

$$M_m = \sigma_m W_{nl} = 24000 \text{ т} \cdot \text{м}.$$

Тогда предельная нагрузка составит

$$q_{np} = \frac{8M_m}{l^2} = 213,33 \text{ т} / \text{м}.$$

Необходимо определить предельную длину зоны текучести c . При этом согласно [источнику]

$$c = l \sqrt{\frac{W_{nl} - W}{W_{nl}}}, \text{ т.к. для данного сечения } \frac{W_{nl}}{W} = 1,5, \text{ то } c = 0,577 \cdot l.$$

При $l = 30 \text{ м}$ $c = 17,32 \text{ м}$.

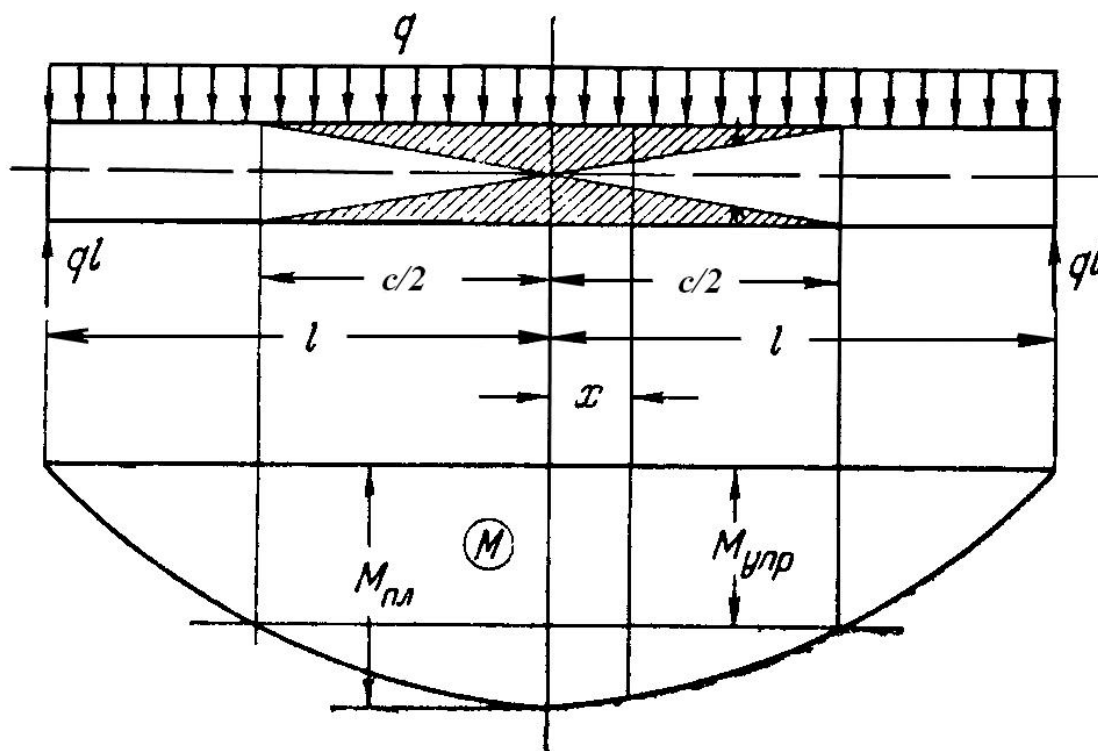


Рисунок 16.1 – Свободно опертая балка под равномерно распределенной нагрузкой и зоны текучести в предельном состоянии

Предмет верификации

В данном примере определяется предельная длина зоны текучести балки прямоугольного сечения, находящейся в предельном состоянии и сравнивается с аналитическим решением.

GTSмодель

Расчет выполняется в модели плоской деформации. Модель материала принята Мора-Кулона. Но аналитическое решение получено для условий плоского напряженного состояния. Следовательно, необходимо подвести используемую модель плоской деформации к модели плоского напряженного состояния. Покажем данный переход на примере уравнения относительной деформации по оси X :

- для плоского напряженного состояния

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad (1)$$

где ν – коэффициент Пуассона;

- для плоской деформации

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y]. \quad (2)$$

Если модуль деформации в уравнении (2) умножить на $(1-\nu^2)$ получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E(1-\nu^2)}[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y] = \frac{1}{E} \left[\frac{1-\nu^2}{1-\nu^2} \sigma_x - \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)(1+\nu)} \sigma_y \right] = \\ &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_y \right]. \end{aligned}$$

Чтобы получившееся уравнение привести к уравнению (1) необходимо равенство коэффициентов при напряжении σ_y

$$\frac{\nu_2}{1-\nu_2} = \nu \Rightarrow \nu_2 = \frac{\nu}{1+\nu},$$

где ν_2 – переходной (с модели плоской деформации к модели плоского напряженного состояния) коэффициент Пуассона.

Таким образом, задав в модели плоской деформации модуль деформации

$$E_2 = E(1-\nu_2^2) \text{ и коэффициент Пуассона } \nu_2 = \frac{\nu}{1+\nu}, \text{ получим уравнения и,}$$

соответственно решения, как для модели плоского напряженного состояния.

Условие текучести Мора-Кулона переходит в условие текучести Треска–Сен-Венана, если принять $\varphi=0$, $c=\sigma_T/2$. Данное условие позволяет решить задачу с применением модели Мора-Кулона.

Для решения задачи применялся тип КЭ –8-ми узловой четырехугольный элемент плоской деформации.

Для отслеживания образования пластических зон нагрузка прикладывалась за 10 шагов.

Исходные данные представлены в таблице 16.1.

Таблица 16.1 Исходные данные

Длина балки	$l=30\text{м}$
Размеры поперечного сечения	$b \times h = 1\text{м} \times 2\text{м}$
Граничные условия	Рабочая плоскость – XоY. Балка ориентирована по оси X. Левая сторона – ограничение деформаций по X, Y Правая сторона – ограничение деформаций по X
Модель стенки	Мора-Кулона: $E=2,1 \times 10^6 \cdot (1 - 0,23^2) = 19881656,8$ тс/м ² , $\nu=0,3/(1+0,3)=0,23077, c=\sigma_m/2=12000$ т/м ² , $\varphi=0$ град, $\psi=0$ град.
Нагрузка	$q_{\text{пр}}=213,33\text{т/м}$
Тип КЭ	8-ми узловой четырехугольный элемент плоской деформации
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель
Нелинейный решатель	Метод Ньютона-Рафсона

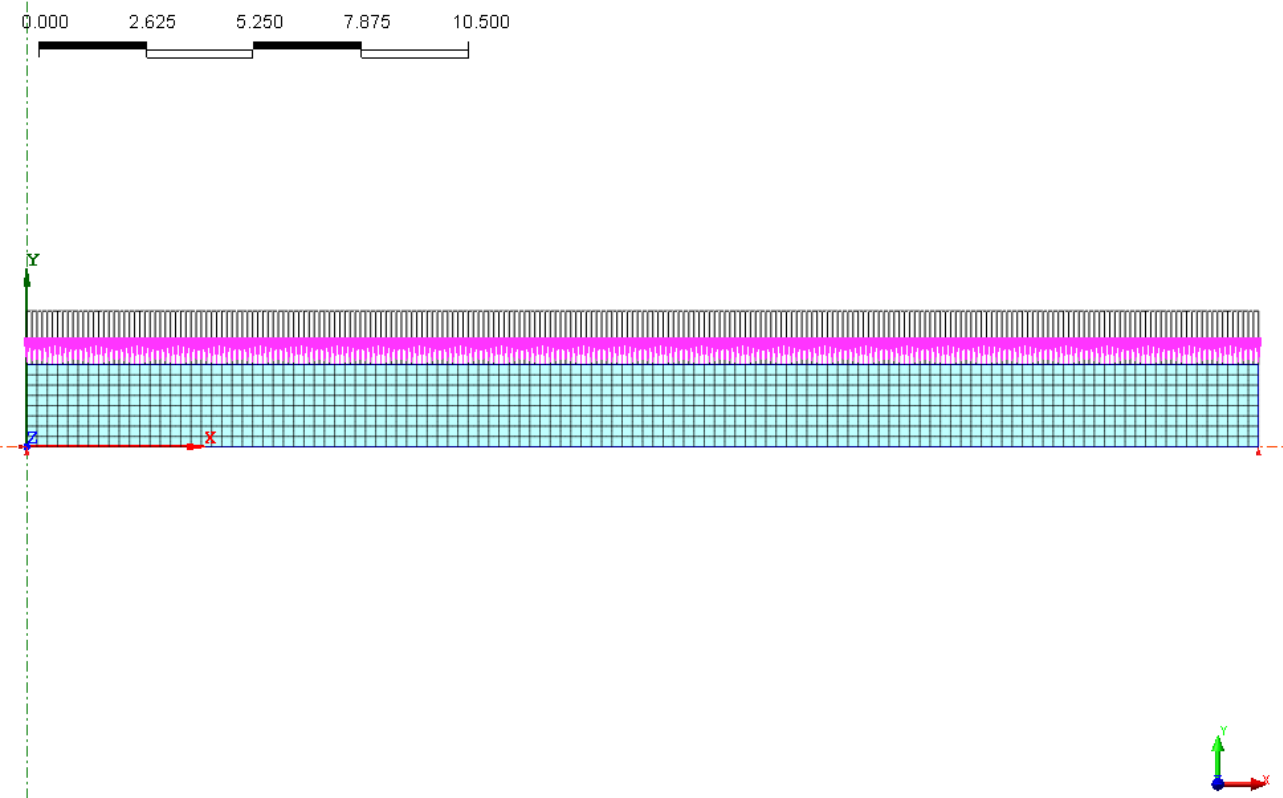


Рисунок 16.2 –КЭ-модель балки
(960 элементов 3137 узлов)

Результаты расчётов

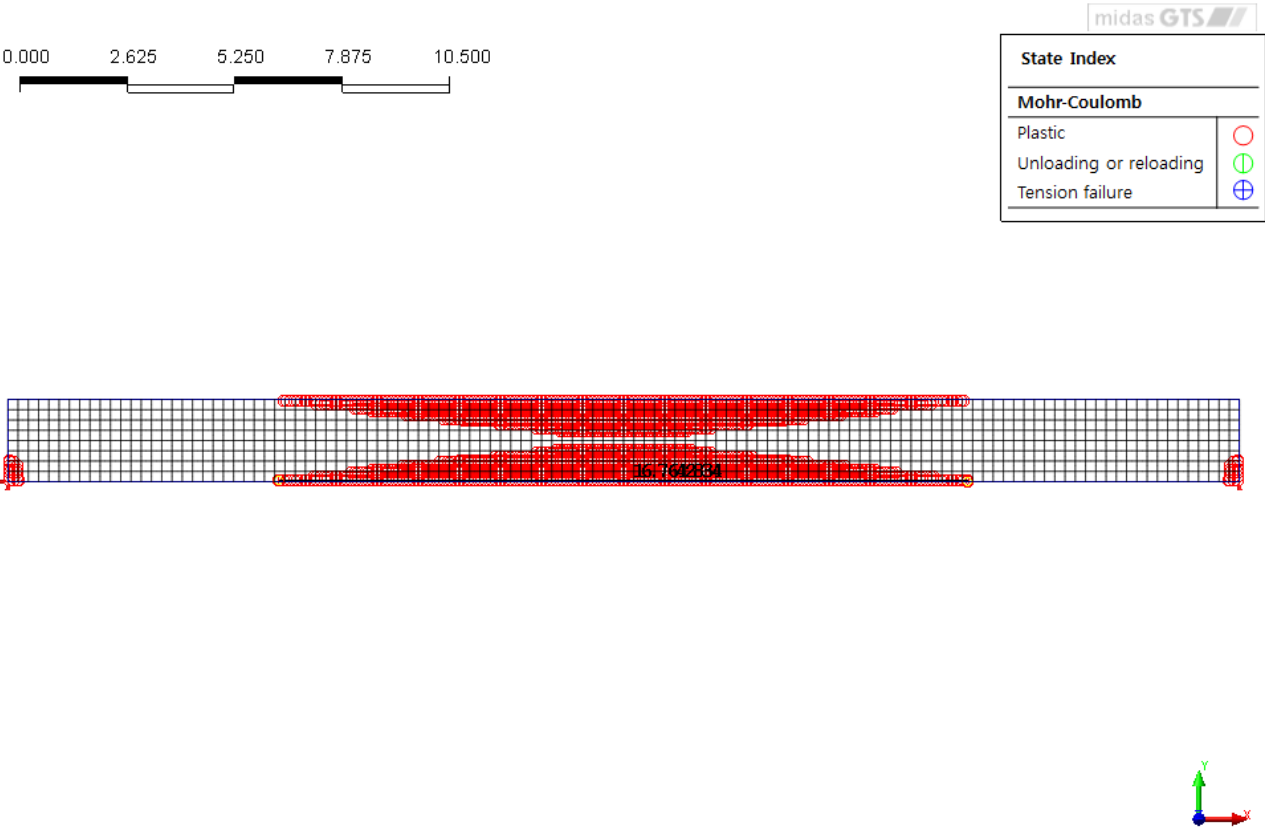


Рисунок 16.3–Зоны пластических деформаций при $q_{пр}$

Таблица 16.2 Сопоставление результатов расчета

	Аналитическое решение	MIDASGTS	Погреш-ность, %
Длина зоны пластических деформаций s , м	17,32	16,76	3,23

Пример 17. Тесты на большую вычислительную размерность

Описание

Рассматривается характерная для строительства задача расчета статического НДС каркасного здания на грунтовом основании.

Сопоставляются результаты и «машинное» время расчетов для сеток КЭ различной подробности.

Расчеты выполняются на моделях различной размерности (~65000, ~105000, ~210000, ~415000 узлов) при нагружении плит – постоянной вертикальной нагрузкой 0.4 тс/м^2 .

Разбиение плит для всех моделей остается постоянным. Увеличение размерности происходит за счет более мелкого разбиения грунтового массива.

Перекрытия, покрытие, фундаментная плита моделируются оболочечными 3-х узловыми КЭ, колонны – стержнями. Грунтовое основание моделируется 4-х узловыми тетраэдрами. Для всех моделей проводится линейный расчет.

Характеристики компьютера и операционной системы, где проводились вычисления, представлены ниже. При этом использовалось только одно ядро процессора.

Просмотр основных сведений о вашем компьютере

Издание Windows

Windows 7 Профессиональная

© Корпорация Майкрософт (Microsoft Corp.), 2009. Все права защищены.

Service Pack 1

Система

Оценка:

5,9

Индекс производительности Windows

Процессор:

Intel(R) Core(TM) i5-2400 CPU @ 3.10GHz 3.10 GHz

Установленная память (ОЗУ):

8,00 ГБ

Тип системы:

64-разрядная операционная система

Рисунок 17.1 Сведения о системе

Для решения использовался прямой мультифронтальный решатель.

Таблица 17.1. Исходные данные

Геометрические размеры модели	100x80x60 м
Граничные условия	Боковые грани ограничены по нормали. Нижняя грань – ограничение деформаций по Z
Модель грунта	Линейно-упругая: $E=25000$ кПа, $\nu=0.3$, $\gamma=0$ кН/м ³
Нагрузка	Распределенная на перекрытия и плиту – 4 кН/м ²
Тип КЭ	4-х узловой тетраэдр, 3-х узловой пластинчатый элемент оболочки, стержневой балочный элемент.
Решение СЛАУ	Мультифронтальный прямой решатель

КЭ модель с количеством узлов 64269 и 414360 представлены соответственно на рисунках 17.2 и 17.3.

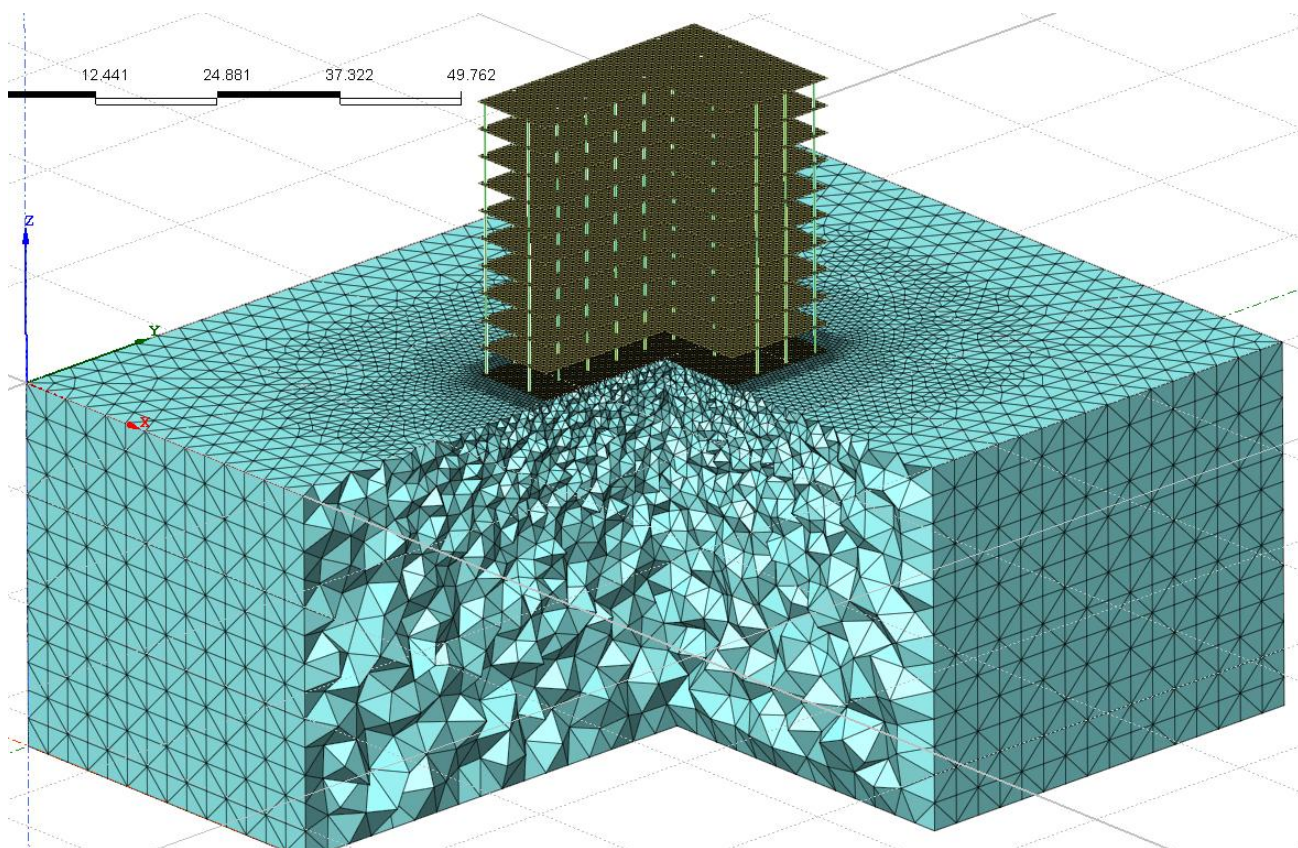


Рисунок 17.2 КЭ модель. Узлов – 64269

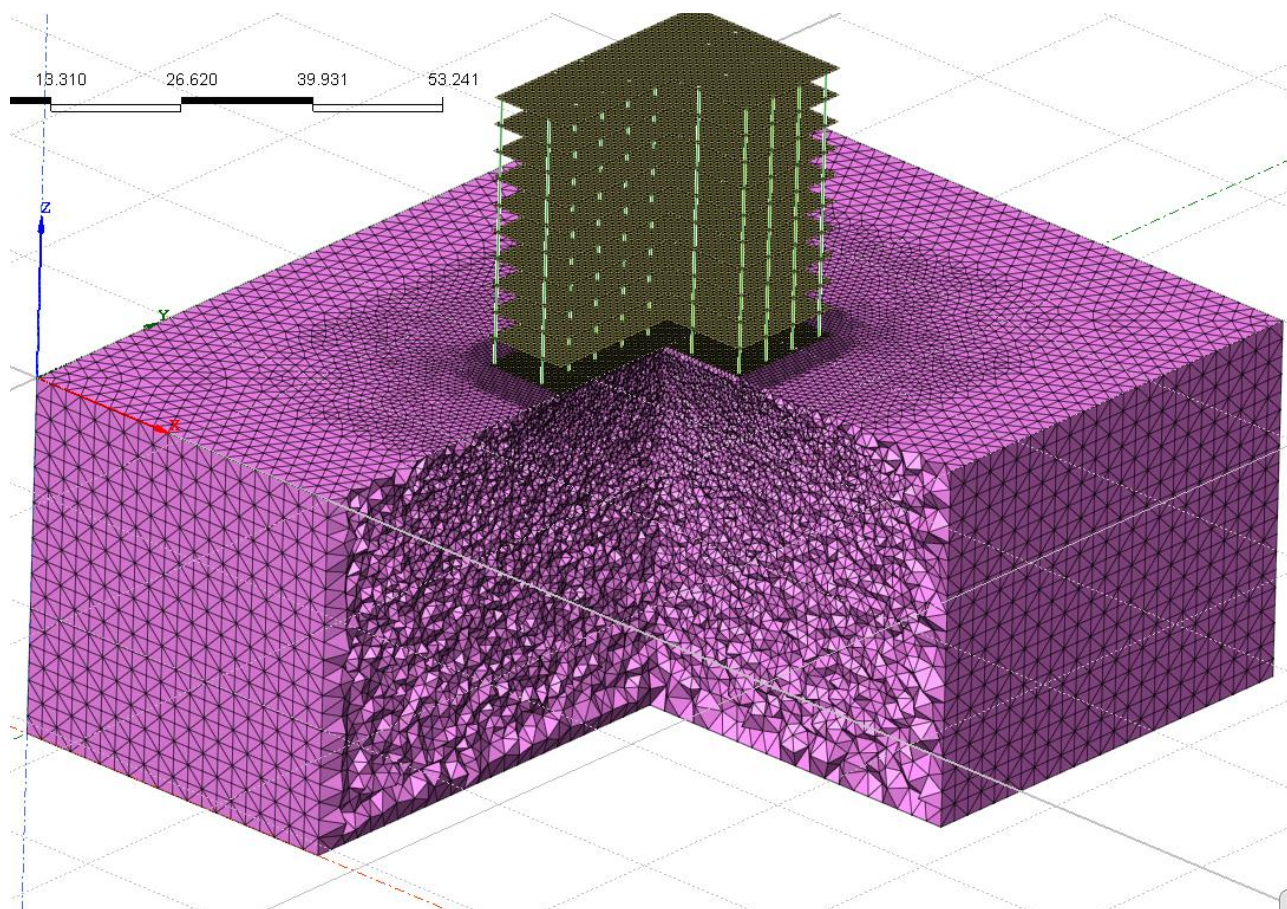


Рисунок 17.3 КЭ модель. Узлов – 414360

Результаты расчетов

Таблица 17.2 Сопоставление результатов расчета

	Кол-во: элементов – 272652 узлов – 64269 степеней свободы – 259745	Кол-во: элементов – 502847 узлов – 105387 степеней свободы – 259745	Кол-во: элементов – 1117062 узлов – 211827 степеней свободы – 712059	Кол-во: элементов – 2314355 узлов – 414360 степеней свободы – 1319658
Время расчета, с	77	233	1394	10446
Макси- мальная осадка плиты, мм	32.361	32.425	32.459	32.478