

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

На правах рукописи



ТЕЛИЧКО ВИКТОР ГРИГОРЬЕВИЧ

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОМБИНИРОВАННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
С УЧЁТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ СРЕД
И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ**

Специальность 2.1.9. Строительная механика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
доктора технических наук

Научный консультант:
чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук,
проф. Трещёв Александр Анатольевич

Тула - 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР.....	24
1.1 Варианты моделирования разносопротивляемости конструкционных материалов	24
1.2 Проектирование и расчёт конструкций из железобетона.....	27
1.3 Моделирование грунтового основания.....	62
1.4 Теория и опыт исследований НДС конструкций, эксплуатируемых в химически активных средах.....	64
1.5 Термоупругость материалов, чьи механические характеристики зависят от вида напряженного состояния	85
1.6 Механика разрушения для материалов со свойствами, зависимиыми от компонентного состава тензора напряжений.....	95
1.7 Выводы по главе 1.....	101
2 ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ	104
2.1 Методика нормированных пространств напряжений для материалов, механические характеристики которых зависят от вида напряжённого состояния.....	104
2.2 Потенциальные соотношения для изотропных материалов, со свойствами, зависимиыми от компонентного состава тензора напряжений..	108
2.3 Термодинамический потенциал Гиббса для нелинейных материалов со свойствами, зависимиыми от компонентного состава тензора напряжений..	127
2.4 Выводы по главе 2.....	138
3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН ИЗ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА.....	140
3.1 Решение задач.....	142
3.2 Выводы по главе 3.....	162

4 ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ	163
4.1 Выбор метода решения поставленной задачи.....	163
4.2 Описание модели плоского конечного элемента и её адаптация.....	166
4.3 Решение задач с применением плоского конечного элемента.....	187
4.4 Построение матрицы жёсткости для объёмного элемента	217
4.5 Расчёт НДС комбинированных систем «здание-основание»	226
4.6 Выводы по главе 4.....	251
5 РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ О ВОЗДЕЙСТВИИ АКТИВНЫХ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ СРЕД	254
5.1 Применение МКЭ к связанным задачам термоупругости для значимо нелинейных разнородных материалов	254
5.2 Вычисление отдельных составляющих для основного уравнения МКЭ	255
5.3. Матрица жёсткости объёмного КЭ	259
5.4 Расчёт НДС оболочек, выполненных из значимо нелинейных начально- изотропных материалов с учётом температуры	261
5.5 Расчёт НДС армированных плит из нелинейных материалов с учётом воздействия химически активной среды	289
5.6 Выводы по главе 5.....	309
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	312
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	317
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	352
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	364
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	371
ПРИЛОЖЕНИЕ 4	378
ПРИЛОЖЕНИЕ 5 СВИДЕТЕЛЬСТВА О РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ И СПРАВКА О ВНЕДРЕНИИ	390

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В настоящее время накоплен большой теоретический багаж знаний в направлении проведения исследований, связанных с получением качественно уточнённых теорий поведения материалов в строительных конструкциях. Одним из таких направлений является построение математических моделей строительной механики, которые можно было бы использовать в расчетной практике строительного проектирования. В частности, возникла потребность в корректном отображении свойств материалов, проявляющих зависимость механических свойств от компонентного состава тензора напряжений (зависимость физико-механических свойств материала от вида напряженного состояния) [2, 7, 8, 11, 12, 25–28, 69, 102–104, 116, 161, 162 и др.].

Несмотря на значительное количество публикаций с результатами исследования в указанном научном направлении, добиться удовлетворительных результатов в ряде актуальных задач расчётного моделирования не удалось. Хотя для некоторых частных теорий такие решения имеются [85, 109, 112–119, 191–193].

Между тем, потребность в достоверных расчётных моделях, построенных для таких материалов, как конструкционные графиты, бетон (железобетон), керамика и другие композитные материалы, становится всё более актуальной. Этому способствует распространение их применения в строительной отрасли, а также отсутствие обобщённого теоретического обоснования используемых моделей. Ситуация обостряется также тем обстоятельством, что актуализирована потребность расширения видов воздействий на конструкции, содержащие несущие элементы из указанного класса материалов, материалов с «усложненными» свойствами [2, 174, 176, 179, 199]. Имеются ввиду материалы, склонные к дилатации, механические свойства которых, активно проявляют свою зависимость от компонентного состава тензора напряжений, а также реагируют на наличие температурных воздействий и агрессивных проявлений со стороны внешней среды [139, 173, 175, 193, 197–202].

Теоретические модели, учитывающие указанные выше свойства материалов и воздействий, оказываются достаточно сложными для практической адаптации. Их аналитические решения, в подавляющем большинстве случаев, на сегодня неизвестны. Поэтому

имеется настоятельная потребность в получении новых числовых моделей, описывающих поведение конструкций в реальных условиях эксплуатации. Такие модели могут быть созданы на основе современных методов численного моделирования.

Проблема получения вычислительных моделей для строительных конструкций осложняется тем, что одним из основных направлений получения уточнённых моделей их поведения, является учёт совместности работы несущего остова здания, его фундамента и основания (системы типа «сооружение-основание»). В рамках, этого же подхода, предлагается пользоваться многослойными нелинейными представлениями оснований и фундаментов, что неизбежно усложняет алгоритмы получения данных числовой модели поведения системы в целом.

Работа самих конструкций не меньше, чем для оснований, сопровождается значимой нелинейной связью деформаций и напряжений. Наиболее показательным, в данном вопросе, является поведение бетона. Физическая нелинейность бетона (железобетона) определяется множеством факторов и связано с такими явлениями, как повреждаемость в форме трещинообразования, пластические деформации бетона и его дилатация [19, 48–50, 79, 87], зависимость механических свойств от компонентного состава тензора напряжений [174, 182, 194–196, 209, 215–217].

Для корректного анализа напряжённо-деформированного состояния (НДС) зданий и сооружений, прогнозирования их механической работы совместно с многослойным деформируемым основанием, нельзя пренебрегать нелинейным поведением железобетона, как, собственно, и прочих конструкционных материалов.

Одной из главных причин зависимости физико-механических характеристик материалов от напряжённого состояния в точке, являются дефекты типа пор и трещин. Они возникают в изначально бездефектном материале на некотором этапе деформирования. Этот этап можно охарактеризовать появлением новых дефектов, их накоплением, слиянием, с последующим образованием макроскопических трещин. Наиболее отчётливо процесс проявляется при деформировании композитных материалов, где стадия рассеянного разрушения достаточно выражена в силу наличия в композитах большого количества границ раздела фаз, тормозящих трещины. Эффекты такого рассеянного разрушения наблюдаются и в конце магистральной

трещины, которая продвигается по уже повреждённому материалу.

Учёт повреждаемости в механической работе конструкций – это одна из актуальных проблем прочности конструкций. Изучение условий распространения отдельной трещины и их систем, разработка методов идентификации дефектности материала, построение механико-математических моделей описания деформирования несущих элементов лежит в основе решения вопроса о возможности разрушения строительной конструкции [34, 79–84, 174, 249].

Присутствие даже части перечисленных выше факторов в расчётных моделях оказывает значительное влияние на точность формируемого вычислениями множества данных, характеризующих прогноз будущего поведения строительного объекта.

Действующая нормативная документация в области расчётного моделирования в строительстве однозначно требует учёта всех вышеперечисленных особенностей, определяющих возможность повышения точности прогноза поведения строительной конструкции. Откуда и возникает потребность в новых механико-математических моделях, а также средствах их использования в проектной и расчётной практике.

Таким образом, **рассматриваемая в диссертации проблема** разработки теории деформирования и прочности пространственных конструкций из начально-изотропных материалов, чьи деформационно-прочностные характеристики зависят от вида НДС, в рамках единого подхода к расчётному моделированию комбинированных сооружений на деформируемом многослойном основании, а также отдельных армированных конструкций и их фрагментов, в том числе с учётом воздействия химически активной эксплуатационной среды, температурных воздействий и повреждаемости, **является актуальной проблемой строительной механики** как в научном, так и в практическом плане.

Уточним, что речь идёт о строительных конструкциях, в составе которых присутствуют несущие элементы, точность прогнозирования НДС, которых недостаточна при использовании линейного подхода, и которые, обладают значимо нелинейными свойствами, описанными выше. Важно также подчеркнуть, что эти несущие элементы образуют пространственные структуры типа «здание-основание».

Степень разработанности темы. Работа изотропных и начально-изотропных значимо нелинейных материалов, свойства которых зависят от компонентного состава тензора напряжений, рассмотрена в работах С.А. Амбарцумяна, В.Н. Барабанова, А.В. Березина, Г.В. Бригадирова, Д.Л. Быкова, С.С. Вялова, Д.А. Гаврилова, П.Н. Ельчанинова, А.А. Золочевского, А.И. Козачевского, А.В. Крысько, В.И. Кудашова, М.Я. Леонова, Е.В. Ломакина, В.А. Ляховского, Малинина Н.Н., Н.М. Матченко, И.Г. Овчинникова, А.И. Олейникова, В.М. Панфёрова, В.В. Петрова, Б.В. Пономарева, Ю.Н. Работнова, К.Н. Русинко, Н.Г. Тамурова, Л.А. Толоконникова, А.А. Трещёва, Г.В. Туровцева, В.П. Устинова, Ю.И. Цвелодуба, Г.С. Шапиро, С.W. Bert, R.M. Jones, D.A.R. Nelson, A.H. Nilson, J.N. Reddy, F. Tabaddor, M.E. Tasuji [1, 7, 8, 25–28, 32, 43, 44, 55, 56, 68, 75, 88, 99, 102–104, 106, 109, 110, 112–119, 121, 122, 127, 140, 142–144, 159–161, 171, 191–193, 194–202, 207, 208, 215, 216, 234–236, 244, 246, 254, 273–275, 289, 292–295, 299, 321, 325] и других. Было установлено, что полученные теоретические результаты не покрывают в полной мере потребности описания материалов в отношении выше отмеченных свойств, когда эти материалы работают в составе реальных конструкций. Этому препятствуют ограничения, которые положены в основу большинства определяющих соотношений: отказ от точного учёта экспериментальных данных поведения материалов [18], упрощённые соотношения между механическими характеристиками, эффективность практического применения к весьма ограниченному количеству применяемых в строительных конструкциях материалов, с учётом простых и сложных видов НДС.

Широкое распространение железобетона в строительстве стало возможным благодаря многочисленным исследованиям, выполненными учёными разных стран. Особое внимание к проблемам проектирования и расчёта сооружений из железобетона и других композитов начало уделяться в конце XIX века, что затем переросло в широкомасштабные фундаментальные исследования, продолжающиеся уже более 70 лет. В России и мире, множество видных учёных и инженеров, занимались исследованием железобетона и конструкций из него (а также рассмотрением сопутствующих проблем) [12–16, 19, 30, 31, 39, 40, 46–50, 57, 61, 70, 79–92, 124–126, 134,

135, 137, 141, 168, 174, 211, 239, 253, 269, 270, 277, 281, 288, 303, 305, 306, 325], среди которых В.М. Бондаренко, А.М. Белостоцкий, А.А. Гвоздев, Г.А. Гениев, А.Б. Голышев, Ю.В. Зайцев, А.Б. Золотов, Н.И. Карпенко, В.Н. Киссюк, В.И. Колчунов, С.Б. Крылов, А.Ф. Лолейт, В.И. Мурашев, Г.В. Мурашкин, Ю.А. Нелиндер, Я.М. Немировский, П.Л. Пастернак, В.Н. Римшин, Л.А. Толоконников, В.И. Травуш, А.А. Трещёв, Г.А. Тюпин, Г.И. Шапиро, К. Maekawa, М.Р. Nielsen, Н.В. Kupfer, М.Е. Tasuji, D.J. Han, V. Cervenka, L. Jendele, F.O.Slate и другие.

Во многих случаях реальные здания имеют сложную конфигурацию в плане и пространственное распределение жёсткостей, обусловленное, в том числе, сложностью механического поведения используемых материалов и грунтов, поэтому обычно довольно трудно оценить влияние различных факторов на результаты расчёта (например, распределение жёсткостей различных элементов надземных конструкций и слоёв основания). Существующие прикладные теории не всегда позволяют достаточно и эффективно решать подобную задачу с целью внедрения теоретических исследований в реальную проектную деятельность.

Значительный вклад в решение проблем, связанных с работой комбинированных систем, внесли отечественные и зарубежные учёные. Проблему учёта взаимодействия конструкции с грунтом основания изучали: Д.Д. Баркан, Н.И. Безухов, А.Н. Богомоллов, И.И. Гольденблат, М.Н. Гольдштейн, М.В. Егоров, Ю.К. Зарецкий, В.А. Ильиных, А.З. Кац, В.И. Колчунов, П.А. Коновалов, В.В. Леденев, И.Я. Лучковский, О.В. Мкртычев, А.Г. Назаров, П.Л. Пастернак, Е.А. Синицин, Г.М. Скибин, З.Г. Тер-Мартirosян, В.И. Травуш, А.А. Трещёв, Р.Р. Хасанов, М.В. Шитикова, В.П. Шумовский, С.И. Яковлев, S. Chan, M. Herzog, W. John, G.G. Meyerhof [17, 22, 41, 42, 53, 54, 65, 90, 138, 167, 174, 178, 188, 196, 222, 225, 233, 256, 257, 261, 279, 288, 303, 308, 316, 325, 328, 330, 334] и другие.

Одним из сравнительно новых направлений в расчётном моделировании строительных конструкций стал учёт влияния химически активной (агрессивной) среды на НДС несущих элементов. Опубликованные, в сравнительно небольшом числе работы по этому направлению, были выполнены В.М. Долинским,

Н.С. Дядькиным, И.Г. Овчинниковым, В.В. Петровым, В.П. Селяевым, Ю.А. Соколовой, В.И. Соломатовым, А.А. Трещёвым, Р.В. Vamforth, F. Biondini, D.M. Frangopol, L.O. Nilsson [16, 132, 133, 135–137, 148–150, 165, 211, 225–227, 229, 253, 267, 276, 319, 329] и другими. Итогом этих исследований стала методика, разработанная в трудах В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова и О.В. Пениной. Их подход даёт возможность адекватного описания влияния химически активной среды на механические и прочие свойства материалов несущих конструкций. Однако, применение этой методики к классу разносопротивляющихся материалов оказалось менее эффективным, так как, точность отображения взаимодействия химически активных сред с подобными материалами на уровне параметров деформирования, не всегда оставалась приемлемой.

Еще одним фактором эксплуатационной среды, объективно влияющим на поведение строительных конструкций, является температура. Возможная зависимость коэффициента линейного температурного расширения, от вида и характеристик напряжённого состояния, может внести значительные коррективы в результаты оценки НДС. Решению проблемы учёта влияния напряженного состояния на термомеханические характеристики материалов посвящены работы С.А. Амбарцумяна, А.В. Березина, Г.В. Бригадирова, Е.В. Ломакина, В.Г. Малинина, Н.А. Малининой, А.А. Маркина, Н.М. Матченко, В.М. Панфёрова, В.В. Петрова, С.В. Плотниковой, Ю.Н. Работнова, М.Ю. Соколовой, Н.Г. Тамурова, Л.А. Толоконникова, А.А. Трещёва, Г.В. Туровцева, С.М. Шляхова, С.W. Bert, R.M. Jones, N. Kamiya, J.N. Reddy, Y. Takeuti [62–64, 96, 146–147, 173, 218, 231, 232, 252, 262, 263, 278, 283–285, 300, 302, 315, 323, 324] и других авторов. По работам этих учёных можно проследить путь развития теории для расчётного моделирования НДС, причиной возникновения которого является изменение температуры вокруг несущего элемента конструкции, что порождает реакцию его материала в форме появления температурной составляющей НДС. Кроме возникновения температурных напряжений исследуются также термоупругие волны и законы распределения температуры по сечениям одномерных и двумерных несущих элементов. Актуальными являются и работы, в которых исследуется зависимость механических и

температурных свойств материалов от температурных воздействий. Тенденции усиления внимания к учёту данных факторов нелинейности, в механической работе конструкций, вызвали к жизни исследования подходов к решению таких задач, например, в рамках теории оболочек [111, 151]. Подобные работы были выполнены Н.Л. Охлопковым, В.В. Петровым, М.С. Корнишиным, С.П. Тимошенко и др. Выяснилось, что построенные соотношения не могут с достаточной точностью, адекватной экспериментальным данным, описать поведение значимо нелинейных разнородных материалов в условиях температурного воздействия.

Проблемами механики разрушения, в том числе в строительной отрасли, занимались такие известные специалисты, как В.И. Астафьев, Г.И. Баренблатт, А.В. Березин, В.В. Глаголев, Р.В. Гольдштейн, А.В. Звягин, А.Б. Золотов, Д.Д. Ивлев, И.М. Лавит, Е.В. Ломакин, А.А. Маркин, Е.М. Морозов, В.З. Партон, Г.П. Черепанов, Е.И. Шифрин, Т. Belytschko, S.N. Atluri, D. Broek, R. Frosch, R. Gilbert [12, 19, 22–24, 26, 27, 48, 51, 57, 61, 80–82, 84, 87, 89, 92, 107, 110, 166, 183, 186, 187, 199, 240, 250, 253, 255, 259, 260, 264, 271, 274, 280, 298, 320, 324, 333] и другие. Выполненный анализ существующих научных работ достоверно показал, что в настоящее время, решению задач механики разрушения для материалов, чьи механические характеристики проявляют зависимость от компонентного состава тензора напряжений, уделено недостаточно внимания, как в теоретических исследованиях, так и в плане применения их на практике.

Целью диссертационной работы является разработка, в рамках единого подхода, теории деформирования и прочности, а также практического исследовательского инструментария для изучения напряженно-деформируемого состояния, формирующегося при использовании материалов, обладающих зависимостью физико-механических характеристик от напряженного состояния, с учётом повреждаемости, воздействия химически активных эксплуатационных сред и температуры.

Для достижения поставленной цели необходимо решить **следующие задачи**:

- выявить результаты экспериментов, подтверждающих проявление значимых нелинейных зависимостей, характеризующих изменение механических свойств изотропных материалов, чьи механические свойства зависят от напряженного состояния, под воздействием химически активных сред и температуры;

- разработать единый, достаточно универсальный для решения практических задач, подход к моделированию НДС пространственных конструкций, когда в их составе присутствуют несущие элементы из значимо нелинейных начально-изотропных материалов со свойствами, зависящими от компонентного состава тензора напряжений и подверженных повреждаемости, воздействию эксплуатационных сред;

- используя нелинейные определяющие соотношения термоупругости и потенциалы деформаций А.А. Трещёва – Н.М. Матченко, а также подход, связанный с использованием нормированных пространств напряжений, разработать модель решения задач связанной термоупругости для исследуемого класса материалов;

- разработать механико-математическую модель поведения пространственных конструкций, допускающих представление в виде совокупности плоских элементов, опирающуюся на теорию пластин и оболочек средней толщины, имеющую возможность учёта воздействия химически активной среды, в рамках оптимальной формы потенциала деформаций, с использованием гибридной формулировки метода конечных элементов (МКЭ);

- сформулировать разрешающую систему уравнений МКЭ для модификации трёхмерного конечного элемента в форме тетраэдра, разработав алгоритм применения данного конечного элемента для расчётов систем типа сооружение-основание, в рамках единого подхода к моделированию конструкций из нелинейных начально-изотропных материалов со свойствами, зависящими от напряженного состояния;

- разработать алгоритм решения задач механики разрушения для тонких пластинок, выполненных из изотропного нелинейного материала, с различными типами дефектов в виде трещин;

- провести тестирование и апробацию разработанных алгоритмов и моделей, путём решения практических задач по расчёту различных типов конструкций и их элементов в физически нелинейной постановке с учётом воздействия различных физических факторов:

- решить ряд задач по деформированию оболочек различной конфигурации, в том числе с учётом термомеханического воздействия;

- построить числовую модель для решения задачи о давлении жёсткого штампа на деформируемое многослойное основание с учётом дилатации, и провести расчёт высотного здания на этом основании, по своей сути являющегося частным случаем призматической оболочки;

- выполнить расчётное моделирование железобетонных плит, которые покрыты слоем полимербетона, выполняющим функцию защиты от активности хлоридсодержащей среды;

- решить задачу механики разрушения для полубесконечной пластины с трещинами нормального разрыва и сдвига.

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

- предложен новый единый подход к моделированию напряжённо-деформированного состояния пространственных конструкций из существенно нелинейных начально-изотропных материалов, чьи механические характеристики проявляют значимую зависимость от вида напряжённого состояния;

- впервые, в рамках применения методики нормированных пространств напряжений, решена задача механики разрушения для полубесконечной пластины, имеющей повреждения в виде трещин (нормального разрыва и сдвига), и выполненной из нелинейного, начально-изотропного материала, свойства которого зависят от напряженного состояния;

- на основе универсальных определяющих соотношений для начально-изотропных материалов получено новое теоретическое описание механического поведения различных грунтов;

- с применением единого подхода, решена проблема учёта как механической повреждённости, так и потери несущей способности (деградации), вследствие воздействия температуры и химически активной среды;

- на базе предложенного единого подхода, с использованием МКЭ, выполнена программная реализация новой механико-математической модели, которая построена в рамках теории связанной термоупругости для нелинейных изотропных материалов, свойства которых, зависят от компонентного состава тензора напряжений в точке среды;

- впервые сформулирована механико-математическая модель многослойных армированных плит, материал которых принадлежит классу нелинейных разносопротивляющихся, склонных к повреждаемости в форме образования трещин (несущие слои) и деградации (защитный слой в условиях присутствия химически активной среды), с применением новой модификации плоского многослойного гибридного конечного элемента;

- в рамках единого подхода к численному моделированию механического поведения строительных конструкций, предложена новая эффективная модель упругопластического деформирования здания на многослойном деформируемом основании с учётом повреждаемости материала несущих конструкций;

- получены новые результаты расчётов, демонстрирующие значимые количественные и качественные эффекты, проявляющиеся при численном моделировании конструкций и их элементов из физически нелинейных начально-изотропных материалов, в том числе при наличии химически активной эксплуатационной среды, температурных воздействий, а также совместной работы с многослойным нелинейно деформируемым основанием.

Теоретическая и практическая значимость. Предложены новые механико-математические модели, которые обеспечены разработанной программной средой, реализующей высокоэффективные вычислительные методы. В числе разработок представлены модели и методы, позволяющие:

- с использованием новых эффективных модификаций конечных элементов получать характеристики НДС комбинированных систем, состоящих из здания и деформируемого основания, с учётом повреждаемости в форме трещинообразования, зависимости свойств материалов от компонентного состава тензора напряжений, появления пластических деформаций в армирующих элементах;

- обеспечивать решение широкого спектра задач связанной термоупругости для элементов конструкций из композиционных материалов со свойствами, зависящими от компонентного состава тензора напряжений, с применением изопараметрических объёмных конечных элементов;

- решение задач механики разрушения для материалов, чьи свойства существенно зависят от вида напряженного состояния;

- исследовать напряжённо-деформированное состояние элементов строительных конструкций с защитным слоем, подвергающихся воздействию химически активных сред, с учётом деградации материала.

Созданная механико-математическая модель доведена до уровня прикладного инструмента, позволяющего получать числовые массивы данных, характеризующих НДС конкретных расчётных схем. На основе единого подхода к описанию механического поведения нелинейных начально-изотропных материалов и повреждаемости различной природы, использование этой модели делает доступным прогнозирование деформационных и теплофизических характеристик материалов и конструкций. Разработанный исследовательский инструментарий предоставляет возможность дополнить и уточнить основные положения расчётных методик для конструкций из материалов, свойства которых проявляют чувствительность к виду напряженного состояния, повысить качество и безопасность проектирования, оптимизировать экономическую составляющую проектов.

Методики расчёта конструкций, предложенные в диссертационном исследовании, внедрены в проектную и расчётную практику ООО «Строительное проектирование» (г. Тула).

Результаты выполненной работы присутствуют и активно используются в дисциплинах магистратуры кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции» Тульского государственного университета, которая является выпускающей (направление подготовки 08.04.01 – Строительство, профиль «Теория и проектирование зданий и сооружений»). Конкретными дисциплинами, где используются материалы диссертационного исследования, являются: «Методы решения краевых задач механики деформируемого твёрдого тела», «Механика композитных материалов», «Теория деформирования дилатирующих материалов», «Теория деформирования и прочности разносопротивляющихся материалов», «Вариационные методы в механике деформируемого твёрдого тела».

Методология и методы исследования. Методологической базой для исследования стали известные принципы моделирования строительной механики, механики деформированного твёрдого тела и вычислительной механики. Принципы и методы математического моделирования были использованы при решении краевых задач с целью получения числовых массивов данных, прогнозирующих поведение несущих элементов и конструкций в целом. Важнейшей составляющей методологии исследования стали вариационные формулировки, положенные в основу применения методов вычислительной механики, в частности МКЭ. При решении нелинейных задач применялись варианты метода последовательных нагружений и метода переменных параметров упругости.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения и результаты:

- универсальный практический подход к расчётному моделированию конструкций и их элементов из значимо нелинейных начально-изотропных материалов с механическими характеристиками, зависящими от компонентного состава тензора напряжений;

- модель учёта механической повреждаемости и потери несущей способности, вследствие воздействия химически активной среды, математическая формулировка для соответствующего плоского гибридного треугольного многослойного конечного элемента;

- теоретическое описание механического поведения деформируемого основания на основе универсальных определяющих соотношений для нелинейных изотропных материалов с механическими свойствами, зависящими от компонентного состава тензора напряжений, а также разработка модифицированного изопараметрического объёмного конечного элемента, использованного при моделировании комбинированных систем «здание-основание»;

- механико-математическая модель связанной термоупругости для значимо нелинейных изотропных материалов, свойства которых зависят компонентного состава тензора напряжений в точке среды несущего элемента, и программное

обеспечение для получения массивов значений характеристик НДС элементов, описанных разработанной моделью;

- результаты расчётного моделирования задач механики разрушения для тонких полубесконечных пластин с дефектами-трещинами разного вида из материала со «усложненными» свойствами;

- результаты вычислительных экспериментов по определению НДС элементов и конструкций в целом, анализ которых подтвердил наличие новых оценок уровня влияния химически активных эксплуатационных сред, температурных воздействий и механической нагрузки на объекты расчётного моделирования.

Основные результаты, достигнутые в диссертационном исследовании, соответствует **паспорту научной специальности 2.1.9. Строительная механика**, по направлениям исследований:

- п. 1. Общие принципы расчёта зданий, сооружений и их элементов на всех этапах жизненного цикла;

- п. 2. Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчёта;

- п. 4. Численные и численно-аналитические методы расчёта зданий, сооружений и их элементов на прочность, жёсткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях.

Достоверность представленных в исследовании положений и выводов подтверждается:

- использованием системы гипотез и теоретических моделей, входящих в число базовых для строительной механики, механики деформируемого твёрдого тела и вычислительной механики;

- включением в доказательную основу выводов экспериментальных данных и облечённых в математическую форму соотношений, которые уже признаны обоснованными;

- применением получивших широкое распространение численных методов в модифицированной, но соответствующей теоретическим положениям форме (МКЭ, метода конечных разностей и других);

- получением с заданной погрешностью числовых моделей НДС пространственных конструкций и их элементов в различных задачах под контролем достоверных экспериментальных данных.

Разработанный практический инструментарий использует разработанные авторские модификации КЭ в гибридной формулировке, реализованные в зарегистрированном расчётном комплексе, что дает возможность получения сходящихся решений с управляемой погрешностью.

Внедрение результатов работы. Разработанные вычислительные алгоритмы, воплощены в расчётную программную среду, получено 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

- 2021661108, 06.07.2021 (заявка № 2021619761 от 21.06.2021);
- 2022617259, 19.04.2022 (заявка № 2022616634 от 12.04.2022);
- 2022617551, 22.04.2022 (заявка № 2022616501 от 12.04.2022).

Автор принимал участие в работах по выполнению:

- госбюджетных тематик № 07-16 «Разработка технологий новых строительных материалов и теорий расчёта конструкций» (2016–2020 гг.) и № 01-21 «Формирование структуры, разработка технологий современных строительных материалов и математических моделей расчёта конструкций» (2021–2025 гг.);

- договоров с ПАО РКК «Энергия» № 341801 и № 341802 (2018 г.);

- научно-исследовательских работ по гранту губернатора Тульской области № 13-2008 от 16.01.2009 и гранту Правительства Тульской области (в соответствии с договором № ДС/284 от 25.10.2021).

Теоретические положения и примеры расчётного анализа, полученные автором, вошли в содержание учебных дисциплин, включённых в программу подготовки магистров профиля «Теория и проектирование зданий и сооружений» в рамках направления 08.04.01 – Строительство.

Апробация работы. Получаемые в процессе работы над диссертацией теоретические и практические результаты систематически выносились на обсуждение научной общественности в ходе ряда российских и международных конференций:

- XXXII Всероссийской научно-технической конференции: «Актуальные проблемы современного строительства» (2003 г., г. Пенза);
- Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (2004., г. Самара);
- Международной научно-технической конференции «Композиционные строительные материалы. Теория и практика» (2007 г., г. Пенза);
- Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (2009 г., г. Воронеж);
- VII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных (2012 г., г. Пенза);
- Международной научно-методической конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения В.Н. Байкова «Железобетонные конструкции: Исследования, проектирование, методика преподавания» (2012 г., г. Москва);
- Международной конференции «Фундаментальные проблемы механики деформируемого твёрдого тела, математического моделирования и информационных технологий» (2013 г., г. Чебоксары);
- Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (2008, 2013, 2014 гг., г. Тула);
- Международной конференции «Современные проблемы расчёта железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия» (2016 г., г. Москва);
- Всероссийской научно-практической конференции «Роль опорного вуза в развитии транспортно-энергетического комплекса Саратовской области (ТРАНС-ЭНЕРГОКОМ-2018)» (2018 г., г. Саратов);
- Международной научно-практической конференции, посвящённой 150-летию со дня рождения профессора, автора методики расчёта железобетонных конструкций по стадии разрушения, основоположника советской научной школы теории железобетона, основателя и первого заведующего кафедрой железобетонных конструкций Московского инженерно-строительного института (МИСИ)

А.Ф. Лолейта (Лолейтовские чтения-150) «Современные методы расчёта железобетонных и каменных конструкций по предельным состояниям» (2018 г., г. Москва);

- 5-й Международной научно-практической конференции Института архитектуры, строительства и транспорта (2018 г., г. Тамбов);

- научно-технической конференции с иностранным участием «Нелинейная механика грунтов и численные методы расчётов в геотехнике и фундаментостроении» (2019 г., г. Воронеж);

- конференции с международным участием «Современные вопросы механики сплошных сред – 2019» (2019 г., г. Чебоксары);

- Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии» (2001–2022 гг., Тула);

- 11-й, 13–16-й, 18-й Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики» (2015, 2017–2020, 2022 гг., г. Тула);

- XVIII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (2020 г., г. Тула).

Содержание выполненных на научных форумах докладов опубликовано в виде полнотекстовых материалов и тезисов.

В полном объёме диссертация докладывалась на научных семинарах:

- Тульского государственного университета им. Л.А. Толоконникова (2022 г., г. Тула);

- Воронежского государственного технического университета (2022 г., г. Воронеж);

- НИУ МГСУ (2022 г., г. Москва).

Структура, объём и содержание работы. Диссертация состоит из пяти глав, заключения, списка цитируемой литературы из 334 наименований, включая работы автора, приложений. Общий объём диссертации составляет 393 страницы, включая 187 рисунков и 15 таблиц.

Во введении обоснована актуальность проблемы и выбор направления исследования, сформулированы цели и задачи, основные положения, приведена краткая аннотация всех глав работы.

Первая глава состоит из шести разделов. Представлен расширенный обзор литературы по проблеме теории деформирования и прочности, а также разработке практического инструментария для расчётного моделирования пространственных комбинированных конструкций, включающих в себя несущие элементы из нелинейных материалов, свойства которых зависят от компонентного состава тензора напряжений, с учётом получаемых механических повреждений и изменения физико-механических свойств под действием активных эксплуатационных сред.

Во второй главе анализируется возможность применения различных форм потенциала деформаций Матченко-Трещёва для получения определяющих соотношений, которые описывают поведение начально-изотропного, нелинейного разносопротивляющегося материала. Обоснован выбор оптимального представления потенциала деформаций, в форме W_1 , построенного в рамках методики нормированных пространств напряжений. Применяя систему гипотез, принятых при построении квазилинейных соотношений термоупругости и нелинейных потенциалов деформаций, формулируются две формы термодинамического потенциала Гиббса для значимо нелинейных разносопротивляющихся материалов.

В третьей главе формулируется методика решения задач механики разрушения отдельных элементов конструкций из материалов, свойства которых зависят от компонентного состава тензора напряжений и имеющих различные значения механических характеристик на растяжение-сжатие.

Исходя из гипотезы о распространении трещины, как причине разрушения несущего элемента строительной конструкции, и структуре процесса, который развивается при активизации её расширения, слияния с другими, образования микро-, а затем и макротрещин, актуализируется задача механики разрушения для несущих элементов из нелинейных материалов (разномодульного и разносопротивляющегося).

Используя возможности потенциала в оптимальной форме W_1 , формулируются уравнения для плоского напряжённого состояния, которые применяются для решения

задач по исследованию процессов деформирования пластин с заданными дефектами в виде трещин определенного вида, при учёте зависимости механических свойств материала от напряженного состояния. Для апробирования созданной теоретической модели выбраны задачи представленные в известных работах А.В. Березина:

- задача об исследовании НДС пластинки конечной ширины с бесконечной длиной и дефектом-трещиной, которая получила наименование «трещина поперечного сдвига со свободными от усилий берегами» и рассматривалась в осесимметричной постановке;

- задачи об исследовании осесимметричного плоского НДС тонкой пластинки конечной ширины и бесконечной длины при наличии дефекта-трещины, получившей наименование «трещины нормального разрыва».

В четвертой главе диссертации приведена процедура формирования уравнений МКЭ для треугольного плоского гибридного многослойного конечного элемента с 3-я узлами и 5-ю степенями свободы в узле, применяемого для моделирования элементов конструкций, допускающих их представление в виде совокупности плоских элементов, с учётом особенностей механической работы композитных материалов, таких как железобетон. Рассмотрены дополнительные технические гипотезы и способы моделирования фиктивных слоёв в конечном элементе для учёта механической неоднородности по толщине.

Также, в данной главе, получена матрица жёсткости объёмного конечного элемента, который имеет форму тетраэдра, узлы дискретизации которого наделены тремя поступательными степенями свободы в глобальной системе координат. Отличительным свойством этого конечного элемента является его изопараметричность. Этот конечный элемент используется для моделирования массивных объектов, таких как деформируемое грунтовое основание, пластины и оболочки, которые нельзя отнести к классу тонких или средней толщины. Рассмотрено его применение для ряда задач разной природы воздействий и уровня сложности:

- решены некоторые задачи по деформированию оболочек различной геометрической конфигурации из разнсопротивляющегося материалов в условиях только механического нагружения;

- решена задача расчётного моделирования давления штампа на многослойное деформируемое полупространство;

- решена задача об определении НДС здания, работающего совместно с деформируемым многослойным основанием.

В пятом разделе анализируются возможности решения связанных задач термоупругости на базе применения численного метода (МКЭ) для материалов, проявляющих зависимость механических свойств от напряженного состояния. Для этого проводится детальное рассмотрение содержательного смысла компонентов матричной формы разрешающей системы уравнений МКЭ. Акцентируется внимание на матрицах, описывающих нелинейную разносопротивляемость и зависимость коэффициентов линейного температурного расширения от компонентного состава тензора напряжений. Приводится блок-схема пошагово-итерационного алгоритма расчётного моделирования конструкции по деформированной схеме. Рассматриваются варианты граничных и начальных условий, которые могут быть использованы для получения вычислительных моделей расчёта НДС. В том числе – массивы температурных полей сферических оболочек и оболочек положительной гауссовой кривизны, которые имеют в плане форму прямоугольника.

Тестируется применение модели, которая способна учитывать слоистую структуру несущих элементов типа «плита», когда свойства слоёв кардинально различаются своим назначением и поведением:

- несущие слои бетона армированы, учитывается нелинейное поведение бетона, наведённая анизотропия, повреждаемость (трещинообразование), пластические деформации в арматуре;

- защитный неармированный слой полимербетона способен взаимодействовать с химически активной средой, которая представлена хлоридным соединением (NaCl).

Численное моделирование механической работы плит, представленных примерами из экспериментов Г. Баха и О. Графа, В. Гелера и Х. Амоса, на основе предлагаемой в исследовании теоретической модели, показало её корректность и адекватность.

В заключении обобщены важнейшие результаты и сформулированы выводы, полученные на основе проведённых исследований.

В приложениях приведены дополнительные материалы, иллюстрирующие особенности решения задач, а также документы, подтверждающие вклад автора в практическую реализацию разработанных им теоретических положений и программ, в том числе свидетельства о регистрации программ для ЭВМ и справка о внедрении результатов диссертационной работы.

Публикации. Тема диссертационной работы и её содержательное наполнение отражено в 65 опубликованных работах, среди которых, 5 статей опубликованы в изданиях, индексируемых в международных базах данных Web of Science и Scopus, 24 статьи в рекомендуемых изданиях ВАК Минобрнауки РФ, кроме того, опубликована 1 монография по теме диссертационной работы и получены 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора заключается в определении актуальности темы диссертации, в постановке цели, задач, стратегии и программы исследований, создании схем основных вычислительных экспериментов, подборе оптимальных расчётных методик, анализе и обработке полученных результатов, написании диссертации, формулировке выводов и положений, выносимых на защиту, написании программ для ЭВМ, внедрении полученных результатов в практику использования, а также публикации всех разработок в научных изданиях. Автором диссертационного исследования разработан универсальный подход и практический инструментарий для исследования проблемы деформирования пространственных комбинированных конструкций с учётом повреждаемости и воздействия эксплуатационных сред.

Соавторы не возражают против использования соискателем совместных работ. Личный вклад Теличко В.Г. в полученных результатах составляет не менее 75%. Основные печатные работы по теме диссертации [16, 62, 64, 146, 147, 174–187, 199, 218–233, 320, 328–330, 332, 333].

1 АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР

1.1 Варианты моделирования разносопротивляемости конструкционных материалов

Начало теоретического осмысления механических свойств материалов, зависящих от компонентного состава тензора напряжений, можно отнести к середине XIX века, к периоду, когда С.О. Mohr сформулировал первую известную теорию прочности [6, 15, 53]. Она, однако, ещё не содержала гипотезы о наличии критического состояния. Его подход устанавливал некоторую зависимость прочностных свойств материала от вида его напряжённого состояния, которое в современных теориях трактуется как компонентный состав тензора напряжений. В теории Мора характеристиками напряжённого состояния являются касательное и нормальное напряжения, но касательное имеет максимальное значение, а нормальное – сопутствующее. При этом оба напряжения возникают на одной и той же площадке [5, 120].

Разносопротивляемость материалов обратила на себя внимание в России трудами С.П. Тимошенко в работе [189, 190]. Он первым предложил алгоритм вычислений изгибной жёсткости для балки из разномодульного материала. В дальнейшем направление исследований, явления разносопротивляемости и сопутствующих эффектов, разделилось на три ветви. Детальный анализ содержания соответствующих работ выполнен в [10, 94, 113, 117–119, 174].

С.А. Амбарцумян и А.А. Хачатрян в работах [5–9, 242] предложили кусочно-линейные зависимости для связи главных напряжений и главных деформаций используя теорию малых упругих деформаций. Применение этих соотношений становилось возможным при условии заранее известного в каждой точке тела распределения знаков главных напряжений [94, 117–119, 174].

М.С. Саркисян приводит два варианта определяющих соотношений для конкретизации такой же связи [161]: совпадающий с предложением С.А. Амбарцумяна и А.А. Хачатряна и с усложнённым видом констант из работ [5–9, 242]. Такие же результаты содержатся в работах Р.Е. Мкртчана [121, 122, 161].

Развитие направления по использованию кусочно-линейного представления закона связи главных напряжений и деформаций продолжилось работами

F.Tabaddor [321, 322], Б.М. Пахомова [142], Г.В. Бригадирова и Н.М. Матченко, В.М. Логунова [32, 33], А.П. Авхимкова [1], R.M. Jones и D.A.R. Nelson [292–298], В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова и А.Ф. Макеева [55, 106, 107, 143–145], П.Н. Ельчанинова и М.И. Климова, А.И. Альбакасова [67, 68], Г.С. Шапиро [254], Б.В. Пономарева [154, 155], С.W. Bert и J.N. Reddy [272–275, 313–315] и других известных исследователей.

Все вышеперечисленные результаты могут быть отнесены к первому направлению новейших исследований [118]. Результаты работ, выполненных в этом направлении, опираются на зависимость жёсткости материала от одноосных или осреднённых растяжений и сжатий. Влияние других видов напряжённого состояния отсутствует, откуда и возникло ограничение на модели этого направления исследований.

Вторая группа моделей использует различия в жёсткости материала, опираясь на большее разнообразие учитываемых компонентов тензора напряжений при формировании определяющих соотношений. Например, изменение механических свойств материалов, чьи свойства значимо зависят от НДС, аргументом имеет фазу напряжений или деформаций. Фазовый инвариант тензора напряжений в качестве аргумента функции изменения жёсткости материалов, свойства которых зависят от компонентного состава тензора напряжений, предложен в работах Л.А. Толоконникова и Н.М. Матченко [114–116]. Ю.И. Цвелодуб продолжил исследования в том же направлении и создал более общую независимую модель [244, 245]. Другие модели этой группы определяющих соотношений были предложены в работах Н.Г. Тамурова и Г.В. Туровцева [171–173], Е.В. Ломакина и Ю.Н. Работнова [98–101, 104], Д.А. Гаврилова [43, 44], А.В. Березина и В.И. Строкова [24, 25, 28], В.М. Панфёрова [139, 140], А.А. Золочевского [75, 76], В.П. Мясникова и А.И. Олейникова [127].

Третья группа определяющих соотношений вводит в модели понятие дилатации, определяя этим термином эффект разрыхления материала, который также используется в качестве аргумента функции изменения жёсткости несущего элемента из материала, обладающего соответствующим качеством [118, 174]. По форме учёта дилатации, в механико-математических моделях, функции дилатации представляют собой обобщение физических законов теории малых упругопластических

деформаций и нелинейной теории упругости. Понятно, что состав семейства дилатирующих материалов, особенно применяемых для строительных конструкций, сравнительно невелик. Но в то же время, среди таких материалов находятся бетоны, чугуны и грунты. Поэтому модели, использующие дилатационные зависимости, представляют практический интерес.

Такие модели содержатся в работах Д.Л. Быкова [35], С.С. Вялова [41, 42], В.И. Кудашова и В.П. Устинова [92], А.И. Козачевского [89], В.Д. Бертяева и Л.А. Толоконникова [28], В.А. Стеценко [93], В.В. Новожилова [130], Н.Н. Малинина [108, 109], Б.И. Ковальчука [118, 119], Л.А. Зиборова, В.М. Логунова, Н.М. Матченко [11, 33, 118], С.А. Кузнецова [94], Е.В. Ломакина [100] и других учёных.

А.А. Трещёв и Н.М. Матченко предложили ввести в функции изменения механических свойств материалов, в качестве аргумента, фазу напряжений [112, 113, 118, 119]. Своё предложение авторы оформили в виде вариантов потенциала деформаций, имеющих следующие формы [118, 174]:

$$W_1 = (A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta \cos 3\varphi) \tau^2 + \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^n; \quad (1.1)$$

$$W_2 = (A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta) \tau^2 + \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta) \tau^2 \right]^n \quad (1.2)$$

$$W_3 = A_e \sigma^2 + C_e \tau^2 + \left[(C_p + D_p \xi + E_p \eta) \tau^2 \right]^n. \quad (1.3)$$

Соотношения (1.1)–(1.3) используют следующую систему обозначений: A_e, B_e, C_e, D_e, E_e и A_p, B_p, C_p, D_p, E_p – константы потенциала; σ и τ – нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке; ξ, η – нормированные нормальные и касательные напряжения σ и τ , представленные гармоническими функциями $\xi = \frac{\sigma}{S_0}$ и $\eta = \frac{\tau}{S_0}$, где $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$; σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – симметричный тензор напряжений; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$, δ_{ij} – символ Кронекера; φ – фаза напряжений,

$$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{2} \det(S_{ij})}{\tau^3}.$$

Экспериментальные диаграммы деформирования были использованы в потенциалах W_1 , W_2 , W_3 [118, 119, 174, 197] для получения числовых моделей НДС несущих элементов из материалов, подверженных эффекту дилатации. Сравнение результатов позволило авторам утверждать следующее:

- потенциал W_3 не соответствует экспериментальным диаграммам деформирования при сложных видах напряжённого состояния [118, 174];

- потенциал W_2 , с достаточной для практики точностью, представляет механическую работу графитов АРВ, ВПП и чугуна СЧ 15-32, но даёт ощутимую погрешность (до 17%) для тяжёлых бетонов [118];

- потенциал W_1 позволяет распространить вывод предыдущего пункта на тяжёлые бетоны и на все участвовавшие в эксперименте материалы [118, 119, 174].

Результаты проведенных сравнений позволяют оценить потенциал W_1 в качестве наиболее универсального и способного эффективно описывать упругопластическую работу бетона и других нелинейных материалов [16, 62, 64, 174, 182].

1.2 Проектирование и расчёт конструкций из железобетона

Нормативное управление строительством в России имеет давнюю историю. Ещё в XI веке действовал так называемый «Строительный устав», содержащий некоторые обязательные требования к строительным работам. А 1908 г. ознаменовался вступлением в силу документа «Технические условия для железобетонных сооружений», который формулировал основные положения по расчёту, основанные на методе «допускаемых напряжений» [39, 83]. Тем самым, было положено начало, непрерывному процессу совершенствования государственного механизма управления безопасностью строительства зданий и сооружений.

В ходе этого процесса конец 20-х г. XX века отмечен выпуском сборника нормативных документов под общим названием «Свод производственных строительных норм». В развитие этого свода норм, в 1931 г. были введены «Единые нормы выработки и расценки на строительные работы», требования которых соответствовали уровню развития строительной отрасли того периода. Период с 1930–1940 гг. прошлого века характеризуется детализацией ведомственных норм, в ходе которой создавались

нормативы по проектированию конструкций из железобетона. Но, уже после 1945 г., началась деятельность по созданию единого нормативного документа.

Совершенствование нормативной базы сопровождало развитие теории и практики строительного дела. Так в 1932 г. был предложен новый метод расчёта железобетонных конструкций, базирующихся на понятии предельной стадии. Первоначально такая стадия определялась по несущей способности в форме стадии разрушения (проф. А.Ф. Лолейт [46, 174]). Этот подход был дополнен исследованиями академика А.А. Гвоздева [46–49], что к 1938 г. позволило разработать основополагающую методику расчёта по разрушающим усилиям и закрепить её в «Нормах и технических условиях проектирования железобетонных конструкций» (ОСТ 9003-38). Позднее, в 1963 г. НИИ бетона и железобетона и ГИПРОТИС был разработан СНиП II-V.I-62 «Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования». Эти нормы учитывали все передовые, на тот момент, теоретические и практические достижения в области возведения конструкций из железобетона.

В 1970 г. был создан новый проект нормативной документации для расчёта и проектирования конструкций под названием «СНиП II-21-75 «Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования». Документ явился результатом дальнейшего совершенствования методики расчёта и проектирования железобетонных конструкций, которая сопровождалась появлением новых видов бетона и арматуры [39, 83, 174]. СНиП II-21-75 действовал менее 10 лет, так как ускорение темпов развития прикладных исследований в области строительства потребовало его немедленного усовершенствования. Новый документ СНиП 2.03.01-84* фиксировал переход к международным единицам измерения и вводил единые буквенные обозначения, используемые в математическом сопровождении методик расчёта конструкций [34].

Более двух десятилетий СНиП 2.03.01-84* являлся настольной книгой всех исследователей и проектировщиков железобетонных конструкций. Многолетняя практика подтвердила, что методы расчёта, представленные в этом нормативном документе, позволяют получать надёжные решения при подборе сечений простых типов, таких как прямоугольные, тавровые и т.д.

Несмотря на выявленные теорией и практикой недостатки, СНиП 2.03.01-84* был подтверждён многочисленными экспериментальными исследованиями

практически для всех видов НДС. Даже жёсткая привязка к типовым сечениям не лишила возможности массового проектирования с использованием простых и эффективных конструктивных решений.

Однако прогресс в строительной отрасли продолжался, что привело появлению ряда новых направлений развития строительства:

- широкому внедрению индивидуального монолитного строительства из железобетона со сложными архитектурными формами и конструктивными решениями;
- росту использования высокопрочных марок бетонов и арматуры;
- совершенствованию технологий возведения зданий и сооружений;
- учёту зарубежных норм проектирования, таких как Eurocode [39, 83, 174, 225] различных версий.

Таким образом возникла необходимость очередной корректировки методик проектирования конструкций с несущими элементами из железобетона [174].

Работа бетона в составе несущих элементов строительных конструкций была уточнена в СНиП 52-01-2003 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения». Позже появилось два документа, которые были выделены из этого документа: СП 52-101-2003 «Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры» и СП 52-102-2003 «Предварительно напряжённые железобетонные конструкции». Нормативы [167, 168] в отношении железобетонных элементов продолжили своё обновление и совершенствование вплоть до настоящего времени, когда вступили в действие строительные правила СП 63.13330.2018 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения».

Современные нормы содержат положения расчёта по нормальным сечениям для двух групп предельных состояний. Расчёт выполняется на базе диаграмм $\sigma - \varepsilon$ и гипотезы плоских сечений. Для общего случая расчёта нормальных сечений, при наличии армирования, был разработан расчётный метод на основе криволинейных (нелинейных) диаграмм состояния бетона и арматуры. В документе закреплены и другие современные достижения строительной механики и механики конструкций, в том числе – которые требуют применения автоматизированных вычислительных сред, входящих в состав САПР (автоматизированные системы проектирования).

Поскольку СНиП 2.03.01-84* прошёл длительную экспериментальную проверку, а также подтвердил надёжность принимаемых по нему проектных решений, то результаты расчётов по этому документу были приняты в качестве контрольных для выявления возможных отклонений расчётов по СП 63.13330.

В 2016 г. была принята новая редакция СП 22.13330 «Основания зданий и сооружений», разработанная НИИОСП им. Н.М. Герсеванова и институтом АО НИЦ «Строительство». Этот документ чётко регламентирует требования к проектированию зданий и сооружений, в том числе – на грунтовых основаниях. В нём также закреплены такие понятия, как геотехнический прогноз и геотехнические модели с двойным упрочнением [167].

1.2.1 Основные современные подходы к моделированию процессов деформирования бетонов

По имеющейся статистике железобетон является наиболее часто применяемым материалом для возведения сложных ответственных сооружений и зданий различного функционального профиля в гражданском и промышленном строительстве. Этому способствует долговечность и высокая огнестойкость, производство высокопрочных марок бетона и сталей, значительное повышение технологичности процессов изготовления и монтажа элементов ж/б конструкций. Расчёт конструкций из этого и других композитных материалов ведётся по двум группам предельных состояний. Предельные состояния конструкции определяются верхними границами значений нормативных критериев, превышение которых делает эксплуатацию строительного объекта опасной для людей, производства и/или не обеспечивает санитарно-гигиенические, функциональные и другие условия [14, 16, 21, 30]. Эти важнейшие критерии для любых типов конструкций, наряду с непрерывным ростом требований к качеству и появление новых видов материалов, диктуют необходимость постоянного совершенствования методов строительной механики, включая методы описания механического поведения материалов с учётом специфических определяющих соотношений.

Железобетон представляет собой сложный композитный направленно армированный строительный материал, деформирование которого обеспечивается

совместной работой бетона и армирующих элементов. Бетон характеризуется способностью к повреждаемости в форме образования трещин, что ведёт к:

- нарушению непрерывности сцепления между бетоном и арматурой и к проявлениям деформационной анизотропии;
- увеличению объёма при трёхосном сжатии (эффект дилатации), что связано с нарушением его структуры;
- нарушению структуры бетона при объёмном сжатии с проявлениями эффекта дилатации;
- возрастанию до значимых величин влияния температуры на характеристики бетона, определяющие его прочность;
- проявлению значимых в оценках эффектов ползучести и усадки.

Железобетонные несущие элементы демонстрируют эффекты, которые связаны с их совместным (с арматурой) сопротивлением приложенным нагрузкам различного вида:

- нагельный эффект, который является следствием «сброса» арматурой части своего осевого усилия в направлении, ортогональном оси, что является следствием скольжения берегов трещины;
- эффект снижения несущей способности бетонных сечений вследствие их ослабления каналами арматуры и некоторые другие эффекты [82, 141, 168].

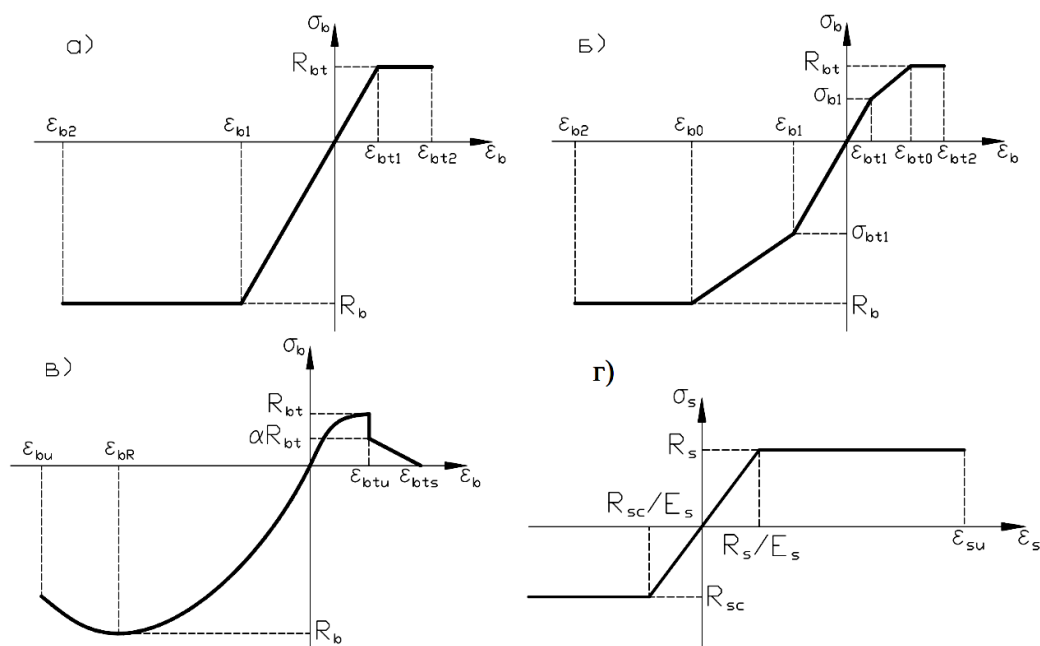


Рисунок 1.1 – Примеры диаграмм одноосного растяжения-сжатия бетона (по [83]):
а – билинейная, б – трехлинейная, в – криволинейная; г – стальная арматура

Бетон является искусственным каменным материалом зернистой структуры, который хорошо сопротивляется напряжённым состояниям, если не возникают растягивающие напряжения. Их наличие такое сопротивление резко снижает [31].

Интенсивное развитие современной науки о материалах и новых технологиях позволяет получать высокопрочные бетоны, мало в чём уступающие сталям по прочности на сжатие. Но даже для таких бетонов, прочность и деформативность при напряжённых состояниях, связанных с растяжением, значимо ниже, чем при сжатии. Например, оценка сопротивления этих бетонов (и традиционных тяжёлых бетонов) при осевом растяжении оценивается в 15–18 раз ниже сопротивления осевому сжатию. Поэтому из неармированного бетона изготавливают конструкции, которые работают преимущественно на сжимающие напряжения: фундаменты, стены и сваи [21, 141, 174].

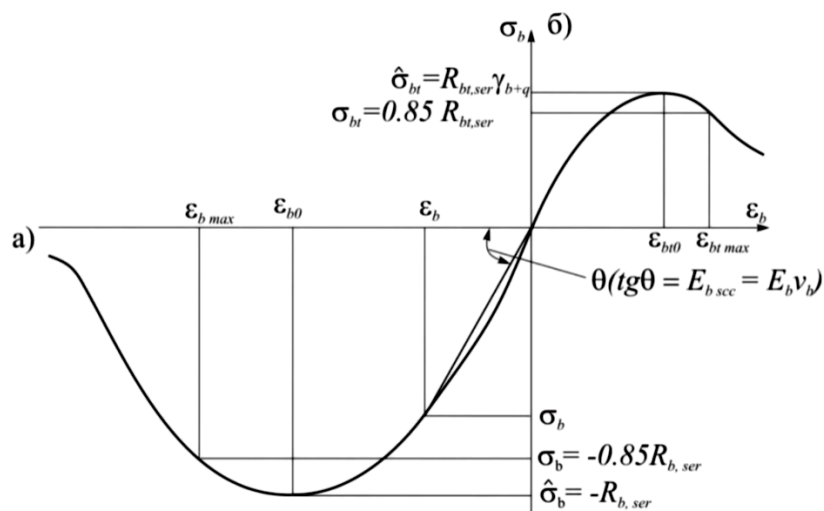


Рисунок 1.2 – Вариант криволинейной диаграммы деформирования бетона при сжатии (а) и растяжении (б), рекомендованный по СП 63.13330 [168]

Очевидно, что прочность и деформативность бетона значимо зависят от его структуры и наличия в ней дефектов – пористости и микротрещин. Структура «зрелого» бетона характеризуется высокой неоднородностью. Заполнители и цементная матрица значительно различаются по своим механическим свойствам. Поэтому при нагружении образца бетона сжимающими напряжениями, в отсутствие растягивающих и касательных напряжений, его сопротивление значимо возрастает. Это объясняется тем, что при сжатии поры закрываются, а эффективная площадь сечения бетона, воспринимающего действующие напряжения, значимо увеличивается [14, 39, 47]. При растяжении и сдвиге наоборот: технологические дефекты расширяются, вызывая

эффект, обратный сжатию. При этом характеристики жёсткости и прочности бетона зависят не только от знака одноосного напряжения, но и от компонентного состава тензора напряжений, которые присутствуют в конкретной точке [118, 119, 174].

Традиционно, в современных теориях прочности и деформирования бетонов ограничиваются экспериментально установленными диаграммами деформирования бетона при осевом сжатии и растяжении. При испытаниях образцов часто принимаются во внимание участки диаграмм за пределами монотонного возрастания напряжения и деформаций. Пересечение этих границ соответствует переходу за пределы прочности на сжатие или на растяжение. На таких участках продолжение роста деформаций сопровождается значимым снижением расчётных напряжений [40, 174], поэтому их принято называть **ниспадающими ветвями** [40, 79]. Ниспадающие ветви диаграмм могут экспериментально обнаруживаться и в более сложных случаях напряжённого состояния [174, 182], что является следствием возникновения повреждаемости в образцах.

Появление ниспадающих ветвей, в экспериментальных исследованиях бетона можно объяснить условиями проведения испытаний. Дело в том, что автоматизация механических испытаний основана на контроле относительных или абсолютных деформаций. И это не зависит от уровня современности испытательного оборудования. Реально же существующие напряжения вычисляются, как правило, косвенными методами. При этом порядок вычисления значений этих напряжений очевидным образом зависит от принимаемых к расчёту форм сечений образца, воспринимающих текущие силы нагружения, создаваемые испытательной установкой [86, 174]. Обычно, данные испытаний используются для вычисления условных напряжений по силе и начальной площади сечения образца. Именно такой подход порождает ниспадающую ветвь на экспериментально построенной зависимости напряжения-деформации [82, 86]. Подобные диаграммы активно используются в моделях прочности, предлагаемых современными САЕ системами [19, 20, 174]. Однако фактом является то, что достижение в процессе испытаний бетонного образца предела прочности насыщает его объём мелкими трещинами. Понятно, что появление пустот и наклонных плоскостей сдвига ведёт к снижению сопротивления сечения прилагаемой нагрузке. Это означает, что

вычисление напряжений с учётом реальных параметров «поднимает» ниспадающую ветвь в положение, практически параллельное оси деформаций [39].

В большинстве принятых расчётных моделей пространственных железобетонных конструкций деформационные свойства бетона оцениваются одноосными диаграммами с учётом ниспадающих ветвей. При этом совершенно неоправданно игнорируется зависимость деформационных свойств бетона от вида и количественных характеристик напряжённого состояния в конкретной точке материала, когда это состояние определяется не только осевым напряжением. Между тем, такая постановка задачи является более значимой, нежели анализ ниспадающих ветвей на экспериментальных диаграммах деформирования бетонов. Это тем более важно, что в армированном бетоне ниспадающие ветви значимо не проявляются [90, 174].

Имеющиеся экспериментальные данные достаточно однозначно демонстрируют зависимость деформационных и прочностных характеристик бетонов от компонентного состава тензора напряжений при достаточно высоком уровне напряжений и значимо нелинейном деформировании. Максимум такой зависимости механических характеристик бетона обнаруживается в области пластических деформаций. Вместе с тем, для некоторых видов бетонов диаграммы деформирования, могут почти не показывать зависимости от вида напряжённого состояния. Среди бетонов имеются и «промежуточные» типы, которые обнаруживают небольшую нелинейность диаграмм и только при некоторых сочетаниях напряжений, резко усиливая её в присутствии других. К группе с мягким проявлением нелинейности относится, например, бетон, который характеризуется значением $R^- = 33,91$ МПа при сжатии. В работе [118, 324] имеются результаты его испытаний, представленные в главных осях тензоров. Группу бетонов, которые демонстрируют разнохарактерную деформационную кривую, составили бетоны со значениями $R = 32,04; 28,4; 37,0$ МПа, что зафиксировано в экспериментах [308, 324].

Предметно обсуждать количественные характеристики зависимости деформационных характеристик бетона от сочетания ненулевых компонентов тензора напряжений имеет смысл на базе диаграмм, которые обработаны с целью их представления в системе инвариантов интенсивности напряжений и деформаций. Возможен также вариант представления парной системой, включающей зависимости

«гидростатическое напряжение – изменение объёма» и «октаэдрическое касательное напряжение – октаэдрический сдвиг».

Реализация описанного предложения позволит получить более точную оценку влияния компонентного состава тензора напряжений на характеристики бетонов со значениями $R = 33,91; 32,04$ МПа. Методика построения аппроксимаций экспериментальных диаграмм в систему других координат изложена в [118, 119, 174, 277, 325]. Так, координаты универсальных инвариантов деформаций (θ, γ) и напряжений (σ, τ) определены следующими соотношениями: $\theta = \delta_{ij}e_{ij}$ – объёмная

деформация, δ_{ij} – символы Кронекера; $\gamma = \sqrt{\frac{4}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$ – октаэдрический сдвиг;

$\sigma = \frac{\delta_{ij}\sigma_{ij}}{3}$ – гидростатическое напряжение; $\tau = \sqrt{\frac{S_{ij}S_{ij}}{3}}$ – октаэдрическое касательное напряжение, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – девиатор тензора напряжений.

Результаты представлены на рисунке 1.3 и рисунке 1.4.

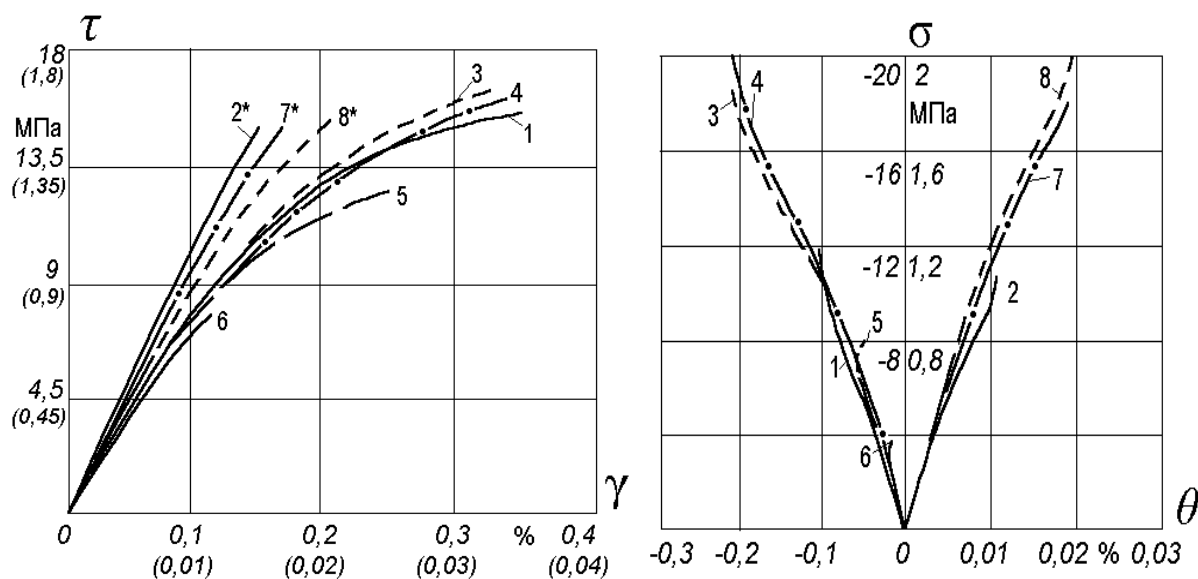


Рисунок 1.3 – Диаграммы деформирования

при пропорциональном нагружении бетона $R^- = 33,91$ МПа:

1 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0 : 0$; 2 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : 0 : 0$;

3 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,5 : 0$; 4 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : 0$;

5 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : +0,05 : 0$; 6 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : +0,25 : 0$;

7 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : +0,5 : 0$; 8 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : +1 : 0$

На рисунке 1.3 представлены диаграммы: 1 – одноосное сжатие, 2 – одноосное растяжение, 3–8 – плоское напряжённое состояние (главные напряжений в

вариантах соотношений: ($\sigma_3 = 0$): $\sigma_1 : \sigma_2 = -1 : -0,5$; $\sigma_1 : \sigma_2 = -1 : -1$; $\sigma_1 : \sigma_2 = -1 : 0,05$; $\sigma_1 : \sigma_2 = -1 : 0,25$; $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 0,5$; $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 1$).

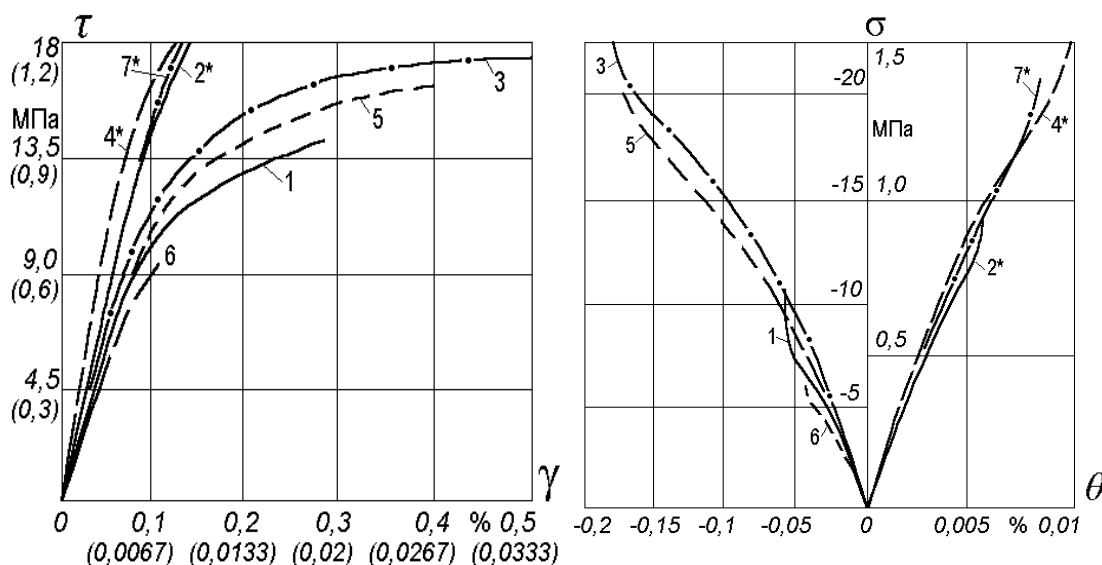


Рисунок 1.4 – Диаграммы деформирования

при пропорциональном нагружении (бетон $R^r = 32,04$ МПа):

- 1 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0 : 0$; 2 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : 0 : 0$;
 3 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : 0$; 4 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : +1 : 0$;
 5 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,52 : 0$; 6 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : +0,103 : 0$;
 7 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : +0,55 : 0$

На рисунке 1.4 представлены кривые: 1 – одноосное сжатие, 2 – одноосное растяжение, 3–7 – плоское напряжённое состояние (главные напряжения в вариантах соотношений: $\sigma_1 : \sigma_2 = -1 : -1$; $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 1$; $\sigma_1 : \sigma_2 = -1 : -0,52$; $\sigma_1 : \sigma_2 = -1 : 0,103$; $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 0,55$).

Под руководством академика А.А. Гвоздева в НИИЖБ была разработана оригинальная методика замеров деформации [46–49] в трех главных направлениях. При этом в качестве реализованных видов напряжённого состояния бетонных призм использованы одномерные, плоские напряжённые и трёхосного сжатия.

На рисунках 1.5–1.6 демонстрируются диаграммы деформирования бетона [47], которые перестроены в координатах универсальных инвариантов.

На рисунке 1.5 представлены кривые: 1 – одноосное растяжение, 2 – одноосное сжатие, 3 – чистый сдвиг, 4–7 напряжённых состояний в вариантах соотношений главных напряжений: $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : 0$; $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,52 : -0,06$; $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : -0,016$; $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,1 : -0,1$.

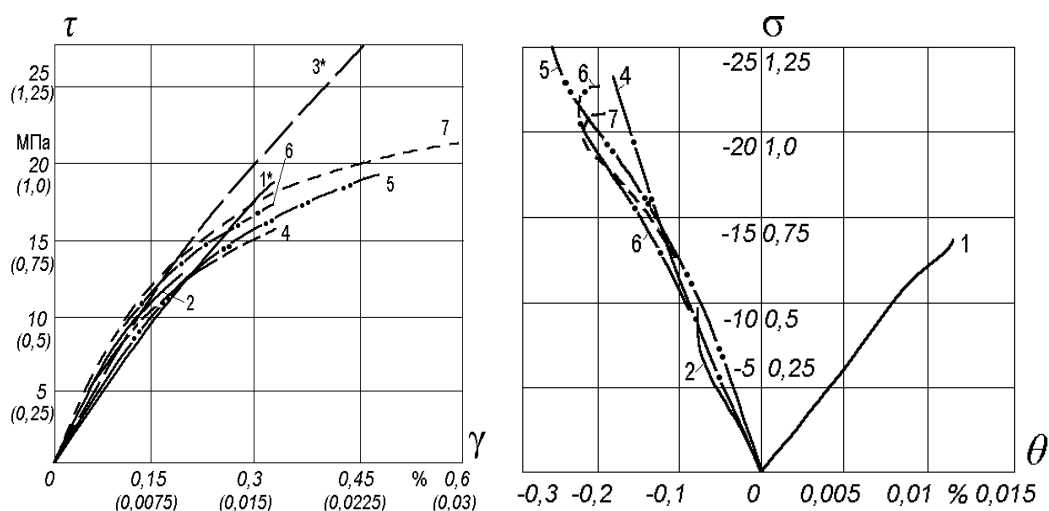


Рисунок 1.5 – Диаграммы деформирования

при пропорциональном нагружении (бетон $R = 28,4$ МПа):

- 1 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : 0 : 0$; 2 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0 : 0$; 3 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : +1 : 0$;
 4 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : 0$; 5 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,52 : -0,06$;
 6 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : 0,016$; 7 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,1 : -0,1$

На рисунках 1.3–1.5 звёздочками обозначены диаграммы, для которых значения ординат горизонтальной оси приведены в скобках.

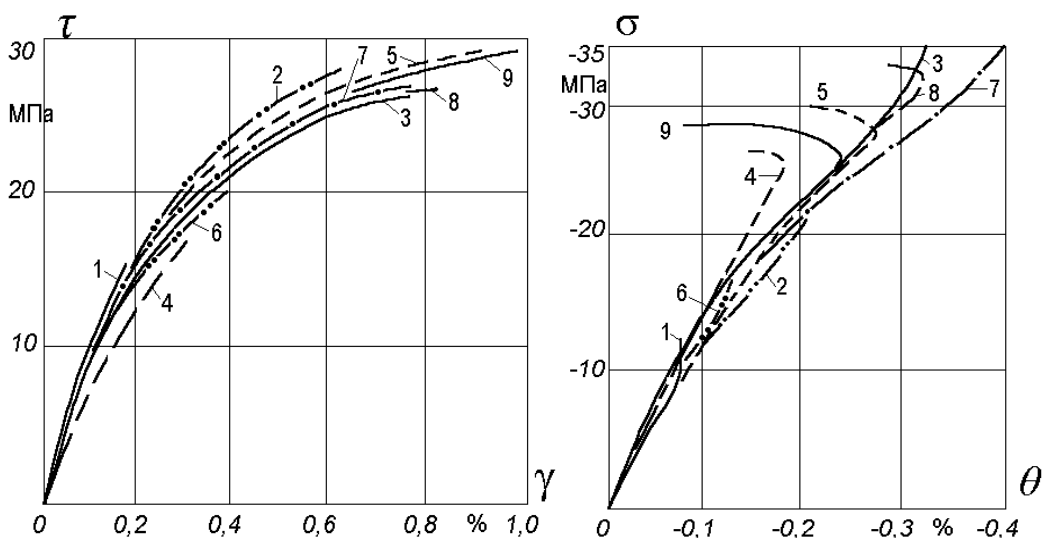


Рисунок 1.6 – Диаграммы деформирования

при пропорциональном нагружении (бетон $R = 37$ МПа):

- 1 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0 : 0$; 2 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,08 : -0,08$;
 3 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,43 : -0,08$; 4 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : 0$;
 5 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,12 : -0,03$; 6 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,03 : -0,03$;
 7 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,5 : -0,07$; 8 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,3 : -0,08$;
 9 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,15 : -0,09$

На рисунке 1.6 представлены кривые в вариантах соотношений главных напряжений: $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = -1: -0,08: -0,08$; $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = -1: -0,43: -0,08$; $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = -1:-1: 0$; $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = -1: -0,12: -0,03$; $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = -1: -0,03: -0,03$; $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = -1: -0,5: -0,07$; $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = -1: -0,3: -0,08$; $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = -1: -0,15: -0,09$.

На рисунках 1.3–1.5 звёздочками обозначены диаграммы, для которых значения ординат горизонтальной оси приведены в скобках. Увеличение масштаба напряжений и деформаций выполнено в одинаковых пропорциях с тем, чтобы не потерялась корректность оценки сложной разносопротивляемости бетона.

Кроме бетонов, имеются и другие конструкционные материалы, которые проявляют зависимость своих физико-механических характеристик от компонентного состава тензора напряжений. В этот же класс можно отнести чугун СЧ15-32 [93, 265], который проявляет высокий уровень такой зависимости в области пластических деформаций. Соответствующие характеристики наиболее полно проявляются на диаграммах, представленных в интенсивностях деформаций, как это сделано в работе [265].

Подобные проявления отмечены и в экспериментах пропорционального нагружения стальных трубчатых образцов осевой силой и внутренним давлением [118, 264, 265] при низкой температуре (около -150°C), когда сталь среднеуглеродистая.

Эти же явления характерны для фторопласта-4, что выявлено в работах [66, 119], описывающих результаты пропорционального нагружения. Отметим, что для фторопласта и чугуна при тех же условиях эксперимента зависимости $\sigma_i - e_i$ от состава ненулевых компонентов тензора напряжений имеют форму, как у среднеуглеродистой стали. Однако диаграммы фторопласта всё же имеют отличия, которые заключаются в заметно меньшей длине линейного участка.

Для разносопротивляющихся материалов имеются экспериментальные данные, которые характеризуются сравнительно небольшой нелинейностью (как и некоторые бетоны) [40, 174]. В связи с этим некоторые из них допускают квазилинейную аппроксимацию. Среди представителей таких материалов присутствуют конструкционные графиты ВПП и АРВ [24, 166, 202, 210, 223, 241]. Отличительной особенностью диаграмм графитов является почти отсутствующий начальный

линейный участок, что, кстати, характерно и для многих бетонов. Так что в этом случае ветвление диаграмм наблюдается даже при малых значениях напряжений. Другая особенность графитов – постоянство коэффициентов поперечной деформации во всем диапазоне изменения значений напряжений [24, 166, 118].

Диаграммы кратковременного нагружения бетона в инертной среде представлены значительным числом зависимостей, которые широко представлены в работе [118, 174]. Эти зависимости, в большинстве своём, характеризуют процесс деформирования бетона только при сжатии. В то же время известные эксперименты подтверждают тот факт, что бетон может воспринимать и растягивающие [12, 39, 83, 118, 174] напряжения. Этот аспект работы бетона часто не учитывается в расчётах, а ниспадающая ветвь диаграммы принимается во внимание, правда, в разной степени.

Подход, предложенный в работах [47, 57, 82, 133], рассматривает деформирование бетона, как деформирование нелинейного композитного материала с учётом разного сопротивления только осевому нагружению с обоими знаками. Диаграмма деформирования при этом имеет вид

$$\sigma = \varphi(\varepsilon). \quad (1.4)$$

Функции материала $\varphi(\varepsilon)$ [133–135] для бетона могут быть представлены вариантными зависимостями, что показано в работе [14].

Более подробный обзор функций, аппроксимирующих диаграммы сжатия бетона, имеется в работах В.В. Петрова, В.К. Иноземцева, И.Г. Овчинникова, Н.С. Дядькина, А.Ф. Макеева и др. [55, 107, 135, 136, 143, 145].

В исследованиях В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, Р.Р. Инамова, Р.Б. Гарибова, В.К. Иноземцева, Н.С. Дядькина [135, 136, 143, 145] для учёта влияния компонентного состава тензора напряжений на свойства бетона используется полиномиальная зависимость напряжений от деформаций. Такая зависимость, в понимании авторов, позволяет расширить представление об этом эффекте и его влиянии на процессы. Утверждается, что наиболее эффективно, использование полиномов со степенью, не превышающей пятую:

$$\sigma = A \cdot \varepsilon + B \cdot \varepsilon^2 + C \cdot \varepsilon^3 + D \cdot \varepsilon^4 + F \cdot \varepsilon^5, \quad (1.5)$$

здесь A, B, C, D, F – экспериментально определяемые параметры.

Для определения постоянных в представлении (1.5) по экспериментальным данным [132–137] предлагается использовать стандартные процедуры оценки величин параметров и вида нелинейных членов. Независимо от соотношения действующих напряжений, определяются различные значения постоянных при деформировании бетона в области растяжения и сжатия. Подход был применён для получения физических соотношений и для изотропных разносопротивляющихся материалов, включая бетон [39, 132–137, 174]. Полученные соотношения характеризуются как нелинейные.

Предложенная математическая модель использует вместо модулей упругости E^+ и коэффициентов поперечной деформации ν^+ (при одноосном растяжении) и соответствующих модулей E^- , ν^- при сжатии нелинейные функции. Выбор этих функций управляется знаками главных напряжений. Сдвиг характеризуется нелинейной функцией, представляющей собой условный модуль. Результатом построений является общая форма связи деформаций и напряжений при плоском напряжённом состоянии [48, 135, 174], сформулированная в форме:

$$e_\alpha = \frac{1}{\psi_{j_1}} \sigma_\alpha - \frac{\nu_{j_2}}{\psi_{j_2}} \sigma_\beta; \quad e_\beta = \frac{1}{\psi_{j_2}} \sigma_\beta - \frac{\nu_{j_1}}{\psi_{j_1}} \sigma_\alpha; \quad e_{\alpha\beta} = \frac{1}{G_j} \tau_{\alpha\beta}; \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{G_j} = 2 \left[\left(\frac{1}{\psi_{j_1}} + \frac{\nu_{j_1}}{\psi_{j_1}} \right) \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha + \sigma_\beta} - \left(\frac{1}{\psi_{j_2}} + \frac{\nu_{j_2}}{\psi_{j_2}} \right) \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha + \sigma_\beta} \right],$$

где $\psi_j = \left(\frac{\sigma_j}{e_i} \right)_j = \frac{\Phi_j(e_i)}{e_i}$; $j_1 = 1, 2$; $j_2 = 1, 2$; $j = j_1, j_2$; ν_j – коэффициент Пуассона,

характеризующий для $j = 1$ поперечное сужение при продольном растяжении и для $j = 2$ поперечное расширение при продольном сжатии.

В рамках обсуждаемого подхода тип нелинейности бетона предлагается представлять вариантом аппроксимирующей функции [174]. К сожалению, авторы [132–137, 145] не упоминают об условиях симметрии нелинейного тензора податливостей [174].

Усовершенствованная, в сравнении с предыдущей, модель деформирования бетона описана в исследованиях И.Г. Овчинникова, Р.Р. Инамова, Р.Б. Гарибова,

Л.Г. Полякова, Н.С. Дядькина [132–136]. Она использует представление на базе кубической параболы:

$$\sigma = \begin{cases} A_p \varepsilon - B_p \varepsilon^3, & \sigma > 0; \\ A_c \varepsilon - B_c \varepsilon^3, & \sigma < 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

где индексы «с» и «р» характеризуют деформирование бетона при сжатии или растяжении соответственно.

Используя данные одноосных кривых деформирования бетона при растяжении и сжатии, методом наименьших квадратов определяются значения параметров A_p, A_c, B_p, B_c [132, 134, 135].

В работе [323], в рамках моделирования плоских напряжённых состояний тяжёлого бетона, предлагается форма связи между главными напряжениями и деформациями с учётом степени исчерпания соответствующего предела прочности. Отношение двух главных напряжений характеризует вид напряжённого состояния. Существует ограничение на использования уравнений состояния в этой модели, которое требует заранее известного распределения главных напряжений во всех материалах, в условиях единственного вида напряжённого состояния – плоского. Имеется также противоречие в аппроксимации экспериментальных диаграмм, если уравнения записаны в координатах универсальных инвариантов.

Приведём соотношения, представляющие описанный подход:

$$\sigma_m = \frac{e_m E}{(1 - \nu k) \left[1 + \left(\frac{1}{1 - \nu k} \cdot \frac{E}{E_s} - 2 \right) \left(\frac{e}{e_p} \right) + \left(\frac{e}{e_p} \right)^2 \right]}, \quad (1.8)$$

где σ_m, e_m – главные напряжения и деформации, E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; $k = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$; $E_s = \frac{\sigma_p}{e_p}$; σ_p – предельные напряжения; e_p – деформации, соответствующие предельным напряжениям.

Учёт дилатации бетона начал моделироваться в работах В.И. Кудашова, В.П. Устинова [92] и А.И. Козачевского [89] на примере деформирования тяжёлого бетона. В одном из вариантов теории предполагалось, что объёмные деформации

являются функциями средних напряжений и интенсивности напряжений, а интенсивности деформаций – функцией интенсивности напряжений. Другой вариант предполагал независимость объёмных деформаций от интенсивности напряжений. Отмеченные особенности описанных моделей характеризуют их серьёзные недостатки для целей описания механических свойств бетонов [92], эмпирических зависимостей Х. Купфера [305], аппроксимирующих полиномов от универсальных инвариантов напряжений [89].

Предложенные в [92] уравнения представлены формулами

$$e_{kk} - e = \frac{\psi(\sigma_{kk} - \sigma)}{2G_0}; e_{ij} = \frac{\psi\tau_{ij}}{G_0} \text{ при } i \neq j, \quad (1.9)$$

Выражения, представляющие подход [89] имеют вид:

$$\Theta = \frac{\sigma k_{11}(\sigma)}{k_0} + \frac{\tau k_{12}(\sigma, \tau)}{g_0}; \Gamma = \frac{\sigma k_{12}(\sigma, \tau)}{g_0} + \frac{\tau k_{22}(\tau)}{G_0},$$

где k_0, G_0, g_0 – начальные модули объёмной, сдвиговой деформации и дилатации;

$\psi = \frac{G_0\gamma}{\tau}$ – параметр пластичности; $e = F_1(\sigma, \tau)$; $\gamma = F_2(\tau)$; Γ – интенсивность де-

формаций сдвига; k_{lm} – параметры нелинейности, представляемые полиномами;

$$k_{11} = \sum_{i=0}^l L_i \sigma^i; k_{12} = \sum_{i=0}^m M_i \sigma^i \tau^i; k_{22} = \sum_{i=0}^n N_i \tau^i; L_i, M_i, N_i, M_0 = 0, L_0 = N_0 = 1 - \text{кон-}$$

станты, определяемые по экспериментальным данным.

Х. Купфер [305, 306] для описания плоского напряжённого состояния бетона предлагал более простые зависимости:

$$e = \frac{\sigma}{3k_0} \cdot \frac{e^{[-(C\gamma)^p]}}{1 - \alpha \left(\frac{\tau}{R_b} \right)^m}; \gamma = \frac{\tau}{2G_0} \cdot \frac{\tau}{1 - \alpha \left(\frac{\tau}{R_b} \right)^m}.$$

Здесь R_b – прочность бетона при сжатии (призменная); C, α, p, m – константы (вычисляются по экспериментальным диаграммам деформирования).

Выполненный анализ подтверждает выводы большинства исследователей о том, что нелинейная область деформирования является источником нарушения классических

представлений о характере упругопластического деформирования рассматриваемых материалов. Описанные выше подходы построены на доминировании отдельных экспериментально обнаруженных факторов работы бетона несмотря на то, что дилатация и зависимость деформационных характеристик бетона от компонентного состава тензора напряжений представлены в широком диапазоне НДС [174].

Среди недостатков, которые сопровождают большинство известных моделей деформирования материалов типа бетона, следует особо отметить следующие [174, 177, 181]:

- варианты аналитические представления различающихся видов напряжённого состояния или возникновение неопределённости закона деформирования при некоторых из них;

- наличие строгих взаимно обуславливающих связей между некоррелируемыми механическими константами материалов;

- неудовлетворительное согласование экспериментальных и расчётных диаграмм деформирования материалов при некоторых видах напряжённого состояния [181].

1.2.2 Обзор состояния конечно-элементного моделирования в новейших программных комплексах

Фундаментальной задачей деятельности специалистов в области обоснования прогноза прочности элементов конструкций и сооружений является обеспечение безопасности здания при действии нагрузок различной природы и интенсивности. Исследования последних лет в области расчётного моделирования показали, что применение линейно-упругих моделей материалов и соотношений, характерных для классической теории упругости и строительной механики, приводит к достаточно консервативным результатам, что ощутимо снижает уровень оптимальности проектов по экономическим и технологическим показателям [174, 182, 196, 199, 225, 328, 330].

Согласно действующей нормативной документации [167, 168, 225], сопротивление элементов железобетонных конструкций воздействиям различной природы описывается интегральными характеристиками, которые, в основном, представлены изгибающими и крутящими моментами, продольными и поперечными

силами. Эти параметры НДС определяются по связям между напряжениями и деформациями, использующими кусочно-линейные диаграммы состояния бетона, представленные двумя-тремя фрагментами (см. рисунок 1.1), которые строятся по известным экстремальным прочностным и деформационным характеристикам. В основу действующей нормативной методики положена значительная степень схематизации трёхмерной геометрии конструкции с применением линейных подходов, развитых в сопротивлении материалов. В таких условиях, неизбежным является снижение точности формируемых числовых моделей, что приводит к снижению достоверности прогноза о безопасности эксплуатационной стадии жизненного цикла строительной конструкции. Важно также подчеркнуть, что в рамках такой методики нет возможности проведения детализированного анализа НДС конструкции с целью определения её «слабых» компонентов. Невозможно также учесть эффекты повреждаемости бетона в форме образования трещин и другие, в том числе в закритической стадии работы.

В связи, с серьёзным прогрессом в информационных технологиях, важной альтернативой (и дополнением) нормативной методики в отечественной и мировой практике расчётного моделирования стал МКЭ. Этот метод, позволил резко увеличить пространственную и дискретизационную размерности решаемых задач моделирования железобетонных и прочих конструкций, что нашло своё выражение в возможности расчётов работы сооружений совместно с основанием, применяя для этого высокую степень дискретизации пространства, занимаемого несущими элементами. В этом же направлении развиваются подходы, позволяющие использовать результаты экспериментальных исследований без их предварительной модификации с целью получения верных аналитических представлений.

Развитие современных вычислительных методов строительной механики приобретает ещё большее значение в связи с тем обстоятельством, что применение полученных теоретических моделей, уточняющих прогноз работы несущих элементов в составе конструкции, требует развития нормативной и методической базы для расчёта и обоснования получаемых результатов. В связи с этим, жизненно необходимо,

совершенствовать средства получения числовых моделей поведения конструкций, привлекая самые современные информационные технологии для реализации методов вычислительной механики [105].

В автоматизированных системах расчётного моделирования строительных конструкций (например САПР-САЕ) применяется достаточно большое разнообразие моделей деформирования и прочности железобетона, которые с разной степенью полноты учитывают нелинейные эффекты в работе бетона, арматуры и их сочетания (табл. 1.1).

Таблица 1.1 – Представления свойств бетона в САЕ-системах [105]

ПО	Модель бетона
ANSYS	Menetry-William
	Concrete Model (Willam-Warnke)
	Microplane (Bazant)
ANSYS/LS-DYNA	RHT Concrete Strength
LS-DYNA	Solid and Foam Model (Mat 5)
	Pseudo-Tensor (Mat 16)
	Orientated Crack (Mat 17)
	Concrete Damage (Mat 72)
	Concrete Damage Rel3 (Mat 72R3)
	Brittle Damage (Mat 96)
	Soil Concrete (Mat 78)
	Winfrith Concrete (Mat 84)
	Johnson Holmquist Concrete (Mat 111)
	CSCM Concrete (Mat 159)
ABAQUS	Concrete Smeared Cracking
	Cracking Model for Concrete
	Concrete Damage Plasticity
COMSOL	Ottosen
	Bresler–Pister
	William–Warnke
	Tension cutoff

Указанные в таблице 1.1. расчётно-проектировочные комплексы и свойства бетона в их представлении реализуют универсальный подход при учёте нелинейности в поведении бетона. Этот подход основан на критерии текучести [74], разделяющем два состояния материала: упругое и пластическое. Формулировка критерия представлена общим соотношением:

$$\sqrt{I_2} = F_f(I_1, \theta, \kappa), \quad (1.10)$$

где $I_1 = 3p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$; $I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(S^2)$; $I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(S^3)$ – инварианты тензора напряжений; $S = \sigma - pE$ – девиатор тензора напряжений; κ – вектор внутренних переменных материала; θ – инвариант Лодэ.

Инварианты в (1.10) имеют строгую геометрическую интерпретацию в пространстве главных напряжений:

- I_1 пропорционален расстоянию от начала координат до точки, соответствующей текущему напряжённому состоянию; направление этого расстояния определяет гидростатическую ось $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$;

- $\sqrt{I_2}$ – пропорционален расстоянию от точки текущего напряжённому состоянию до гидростатической оси

- θ – определяет угловую координату направления гидростатической оси (и соответствует третьему инварианту в системе инвариантов I_1, I_2, I_3).

Критерию текучести (1.10) соответствует функция текучести

$$f = I_2 - [F_f(I_1, \theta, \kappa)]^2 = 0. \quad (1.11)$$

Система уравнений (1.10)–(1.11) и описывает общую для автоматизированных вычислительных сред уточнённую модель бетона.

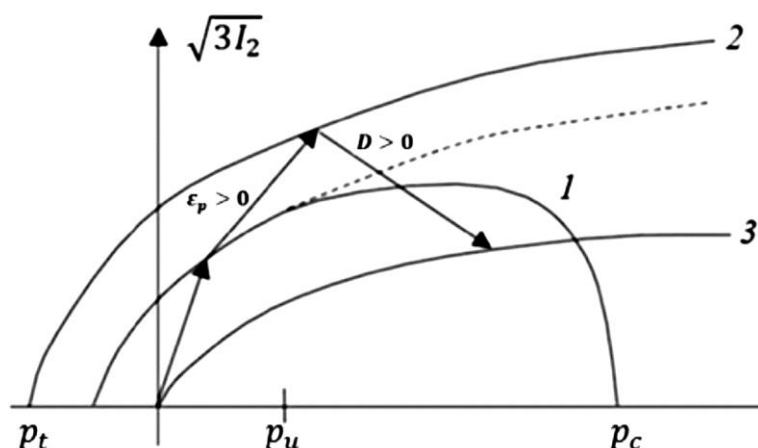


Рисунок 1.7 – Геометрическое толкование критериев текучести и прочности бетона

Различия вариантов модели в каждой конкретной вычислительной среде определяются индивидуализацией функций $F_f(I_1, \theta, \kappa)$, вектора параметров κ и массивом данных в базе модели, которые реализуют процесс накопления повреждений и свойств, зависящих от времени.

Геометрическая интерпретация инвариантов описанной универсальной модели открывает возможность ввода и геометрического толкования критериев в виде поверхностей в пространстве инвариантов (рисунок 1.7).

На рисунке 1.7 отображены:

- 1 – проекция поверхности текучести; и прочности предельная и остаточная;
- 2, 3 – проекции поверхности прочности (2 – предельная, 3 – остаточная);
- p_b, p_w, p_c – предельные значения гидростатического давления;
- ε_p – пластическая деформация (условная);
- стрелки указывают переходы бетона в последовательность состояний, соответствующим введённым критериям.

Рассмотрим, как поверхности рисунка 1.7 трактуют эффекты нелинейного поведения бетона:

- образование дефектов сплошности (пор) и слияние их в микротрещины представлены изменением кривой 1;
- слияние микротрещин в макротрещину, которая, развиваясь, приводит к повреждениям, представлено кривой 2;
- полное повреждение материала вследствие увеличения количества макротрещин и их слияния, описывается кривой 3.

Подобные геометрические интерпретации могут быть даны, если использовать координатную систему инвариантов Лодэ, который предложил цилиндрическую систему (r, θ, z) , связанную с системой (I_1, I_2, I_3) соотношениями:

$$r = \sqrt{2I_2}, \sin 3\theta = \frac{I_3}{2} \left(\frac{3}{I_2} \right)^{\frac{3}{2}}, z = \frac{I_1}{3}. \quad (1.12)$$

Влияние свойств бетона и инвариантов напряжённого состояния на проявления нелинейности поведения материала не является однозначно определённым. Эту неопределённость снимают введением функции $\Gamma(\theta, I_1)$. Но и эта функция имеет различные представления [74]. Чаще других используются предложения Вильяма-Варнке (Willam-Warnke) и Друкера-Прагера (Drucker-Prager) [105].

Поскольку наличие арматуры в бетоне не только акцентирует его уже известные нелинейные свойства, но и порождает новые эффекты, такие как наведенная

анизотропия, то на базе теоретических моделей бетона активно строятся и теории взаимодействия с ним элементов армирования. Соответствующие подходы различаются как системой гипотез, так и способом учёта схемы армирования. Но все варианты считают материал арматуры работающим как в упругой, так и в пластической стадии.

Моделирование арматуры в САЕ-системах. МКЭ-расчёты, помимо схемы прямого объёмного моделирования стержней арматуры, используют ещё не менее трёх вариантов [105, 174, 266, 267]:

- когда узлы дискретизации линейных объектов КЭ-модели и узлы дискретизации материала совпадают, то возможно, применение так называемой дискретной модели арматуры; применение такого подхода, в общем случае, затруднено произвольным расположением узлов КЭ-сетки основного материала;

- когда указанные узлы не совпадают, но их перемещения ограничены условиями совместности; в САЕ-системах задание совместности перемещений узлов обеспечивается стандартной операцией по объединению перемещений;

- когда армирующий материал распределён по конечным элементам бетона; в этой схеме линейные объекты моделей арматуры в составе модели несущего элемента отсутствуют, зато вводятся поверхности-слои, обладающие механическими характеристиками общего массива арматуры в каждом из рабочих направлений армирования.

Наиболее удобны для применения в расчётах две системы CAD/CAE ANSYS (ANSYS Mechanical APDL, ANSYS Workbench) и ABAQUS [266, 267]. Рассмотрим их основные возможности. Оба комплекса верифицированы и имеют сертификаты на применение в Российской Федерации.

Программная среда ABAQUS. Для этой САЕ-системы характерными особенностями с точки зрения расчётного моделирования строительных конструкций являются:

- вариантность выбора эффектов и их сочетаний, связанных с разнообразием ожидаемых нелинейных проявлений, среди которых находятся повреждаемость, разносопротивляемость, разрыхление бетона, совместная работа бетона и арматуры, и некоторые другие;

- наличие управления формами и типами численного интегрирования;

- возможность вводить в расчёт влияние фактора времени на НДС, в том числе в форме изменения свойств бетона и дополнительного нагружения силами.

ABAQUS весьма хорошо документирован [267]. Имеются формализованные описания различных представлений о деформировании и критериях предельных состояний. Представлены примеры верификации достоверности работы вычислительной среды этой системы, включая аппроксимацию экспериментальных данных. Имеется развитая система настройки параметров реализации численных процессов, что обеспечивает механизм получения доказательства практической сходимости вычислительных процедур. Приводятся результаты сравнения расчётов с экспериментальными данными.

Описание повреждений в системе ABAQUS основано на наличии уже образовавшейся трещины. Критерием этого события для несущего элемента является выход сочетания компонентов тензора напряжений в конкретной точке материала элемента на поверхность прочности (рис. 1.7). Важным для достоверности прогноза НДС является понятие направления трещины, которое встроено в расчётный модуль. В соответствии с методикой, принятой в системе, элемент континуума может обладать трещинами в трёх направлениях, образующих ортогональный трёхгранник. Поверхность прочности представлена линейной функцией гидростатического давления и эквивалентного напряжения.

Наличие трещины в узле дискретизации несущего элемента снижает жёсткостные характеристики соответствующего конечного элемента, продолжающего участвовать в расчёте.

Нелинейность деформирования бетона в ABAQUS и учет различной механической работы на растяжение-сжатие, представлена диаграммами деформирования со следующими особенностями:

- диаграмма сжатия состоит из линейного участка, который продолжен нелинейным участком кривой, заканчивающейся пределом прочности R^- , и сменяющийся нелинейным участком убывающих напряжений;

- диаграмма растяжения объединяет первые два участка кривой сжатия в одну прямую линию, которая после достижения точки R^+ , также сменяется нелинейным

участком убывающих значений напряжения – именно на этой стадии деформирования растяжением и возникают повреждения, описанные выше.

Отметим проблемы, которые сопровождают применение системы ABAQUS для расчётного моделирования железобетонных несущих элементов:

- повреждённость в описываемой версии программы может применяться и обеспечивать достоверные характеристики НДС только при большом значении коэффициента армирования [105, 267];

- существуют заметные проблемы с достижением сходимости процесса вычислений для несущих элементов с небольшим уровнем армирования высокой скоростью накопления повреждений:

- повышенный уровень дискретизации объёма несущего элемента ограничен пределом влияния на сходимость.

В документации [267] предложен способ решения отмеченной проблемы сходимости на базе формулировки критерия возникновения повреждения в параметрах удельной энергии разрушения. Эффект снижения необходимой степени дискретизации проявляется в несущих элементах с низким коэффициентом армирования. Причина такого результата объясняется сменой аргумента функции, представляющей диаграмму деформирования на перемещение узла дискретизации. Эта замена видоизменяет характер участка диаграммы деформирования для соответствующей стадии трещинообразования, фактически выпрямляя её.

Стоит обратить внимание на некоторые детали управления вычислительным процессом при расчёте конструкции с несущими элементами со значимо выраженными эффектами нелинейности. Речь идёт об использовании модификации метода Ньютона-Рафсона [269, 332], носящей наименование «алгоритм Рикса» [105]. Его сущность заключается в самоуправлении поиском значения шага по нагрузке, а внутри него – шага по перемещениям. Среди параметров управления присутствуют предельно допустимые значения обоих шагов и число выполняемых итераций, которые задаются пользователем.

Программная система ANSYS. Это универсальная CAE-система КЭ-анализа развивается на протяжении последних 30 лет. Имеет статус самой популярной

в среде специалистов по автоматизированным инженерным расчётам. Имеет в своём распоряжении многочисленные процедуры, реализующие расчётное моделирование практически всех типов строительных конструкций. Особое место среди них занимают нелинейные задачи, учитывающие многочисленные факторы нелинейности [105, 266, 267].

Для получения возможно более точных результатов ANSYS предлагает к учёту при расчётном моделировании объекта множество аспектов взаимодействия его частей, условий эксплуатации (например, тепловые режимы) и влияния разнообразных видов воздействий, к примеру, электромагнитных. В CAE-системе имеются в наличии многочисленные корректно сформированные нелинейные модели материалов, в том числе и для композитных материалов. Всё это предлагается в комплексе, эффективно обрабатывается современными вычислительными алгоритмами, которые могут учесть многочисленные тонкости постановки задачи расчётного моделирования. Например, изменение свойств материала в режиме реального времени, процессы деградации и эрозии (деградации) компонентов объекта моделирования.

Используя передовые решения ANSYS [266], возможно моделировать любой тип геометрии, от тонких гибких структур до массивных деталей на основе новейших типов элементов – балок, оболочек и твёрдотельных элементов. Учитываются также геометрические нелинейности и большие деформации, включая нелинейную потерю устойчивости и закритическое поведение.

Для каждого типа элемента из библиотеки используются различные свойства материала. В среде ANSYS тип задач как нелинейных классифицируется по двум параметрам:

- эффектам нелинейности материалов конструкции;
- характеру вычислительных процедур, которые признаются нелинейными, если алгоритмы вычислений включают в себя итерации какого-либо вида.

Отличительной особенностью ANSYS является использование табличных форм для задания значений параметров. Это относится к свойствам материалов, являющихся факторами нелинейности расчётной модели. Табличная форма оказывается удобной для передачи в базу данных модели экспериментально полученных

числовых массивов, что является одним из преимуществ этой системы. Такая таблица данных определяет конечное множество постоянных величин, которые интерпретируются при их использовании. Следует также отметить достаточно большой перечень материалов, числовые модели которых уже хранятся в базе данных системы и отображают их нелинейные свойства.

Решения ANSYS в области механики деформируемого твёрдого тела устанавливают промышленные стандарты в области инженерных расчётов, предоставляя широкие возможности моделирования каждого прочностного аспекта объекта с использованием линейных и нелинейных расчётных моделей (или даже механизмов аналитики).

Для моделирования работы хрупких материалов (и бетона, в том числе) ANSYS предлагает несколько видов моделей, число которых превосходит число моделей в среде ABAQUS [105, 174, 266, 267]. Свойства материалов и их поведение под нагрузкой представлены объёмным конечным элементом SOLID65 или SOLID185 (с модификациями).

Как и в системе ABAQUS в ANSYS находят применение распространённые теории, учитывающие возможность возникновения предельного состояния бетона на пластической стадии работы материала.

Модель Друкера-Прагера. Применяется для описания предельного состояния бетона, в том числе – для разрушения несущего элемента [71, 174, 259], причиной которого признаются всё те же трещины. При этом удалось избежать потребности в детальном описании зарождения, развития и перемещения трещины в материале, который имеет структуру композита [259, 294]. Для достижения такого результата пришлось отказаться от точного моделирования несущих элементов из хрупких материалов [105, 110].

Наступление пластичности бетона модель формулирует в виде соотношений, приведённых в [74, 286]:

$$f_{DPt} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} + \beta_t \cdot \sigma_m - \sigma_{yt} \cdot \Omega_1, \quad f_{DPC} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} + \beta_t \cdot \sigma_m - \sigma_{yc} \cdot \Omega_1, \quad (1.13)$$

где σ_e – эквивалентные напряжения; σ_m – средние напряжения; β_t , β_c и σ_{yt} , σ_{yc} – константы; Ω_1 – функция упрочнения-разупрочнения одноосного НДС:

$$dk = \sum_n d\lambda^n \left(\frac{1}{R\Omega} \sigma \cdot \frac{\partial Q^n}{\partial \sigma} \right); \quad (1.14)$$

$$\beta_t = \frac{\sqrt{3}(R_c - R_t)}{R_c + R_t}, \quad \sigma_{yt} = \frac{2R_c R_t}{\sqrt{3}(R_c + R_t)}; \quad (1.15)$$

где R_c, R_t определяются по пределам прочности при одноосном напряженном состоянии.

Визуализация формы поверхности текучести Друкера-Прагера [105, 286] в пространстве главных напряжений приведена на рисунке 1.8:

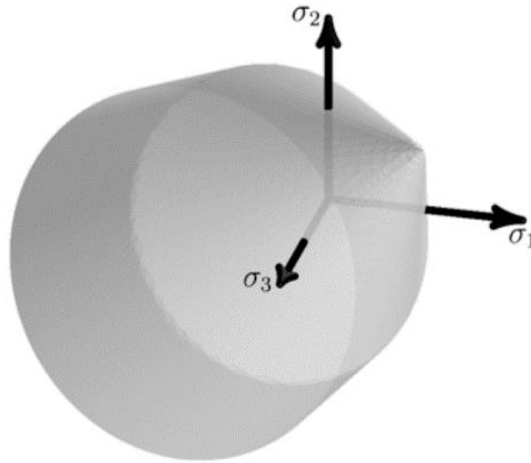


Рисунок 1.8 – Графическая интерпретация критерия пластичности Друкера-Прагера

Поверхность на рисунке 1.8 подвержена изменениям, что связано с поведением материала под действием нагрузки: он может как упрочняться, так и разупрочняться. Та и другая форма развития процесса деформирования сопровождаются функциями Ω_t, Ω_c :

$$\Omega = \begin{cases} \Omega_t \rightarrow \sigma_m \geq 0 \\ \Omega_c \rightarrow \sigma_m < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Для линейной модели HSD6 [105] функция текучести при сжатии Ω_c задаётся нелинейной функцией упрочнения и линейной функцией разупрочнения. Уровень относительного напряжения в начале нелинейного упрочнения Ω_{ci} определяется функцией текучести упрочнения:

$$\Omega_c = \Omega_{ci} + (1 - \Omega_{ci}) \sqrt{2 \frac{K}{K_{cm}} - \frac{K^2}{K_{cm}^2}}, \quad (1.17)$$

при $K = K_{cm}$ достигается максимальная прочность на сжатие и разупрочнение начинается со значения

$$\Omega_c = 1 - \frac{1 - \Omega_{cr}}{K_{cr} - K_{cm}}(K - K_{cm}); \quad (1.18)$$

при $K > K_{cr}$ относительный уровень напряжений – остаточная величина для напряжения при сжатии.

Функция Ω_t при растяжении задаётся линейной функцией разупрочнения. Относительный предел текучести равен 1 при начальной текучести, уменьшается до относительного остаточного напряжения Ω_{tr} , когда эффективная пластическая деформация равна K_{tr} , и является постоянным для $K > K_{tr}$.

Функция упрочнения при сжатии Ω_c , для $K < K_{cr}$ задаётся степенной функцией закона упрочнения.

Функция разупрочнения в диапазоне $K_{cm} < K < K_{cu}$:

$$\Omega_c = 1 - (1 - \Omega_{cu}) \left(\frac{K - K_{cm}}{K_{cu} - K_{cm}} \right)^2 \quad (1.19)$$

Функция разупрочнения в диапазоне $K > K_{cu}$ принимается как:

$$\Omega_c = \Omega_{cr} + (\Omega_{cu} - \Omega_{cr}) \exp \left(2 \frac{\Omega_{cu} - 1}{K_{cu} - K_{cm}} \cdot \frac{K - K_{cu}}{\Omega_{cu} - \Omega_{cr}} \right). \quad (1.20)$$

Функция упрочнения при растяжении Ω_t задаётся экспоненциальной функцией разупрочнения, в которой объёмная энергия, рассеиваемая при разупрочнении, пропорциональна удельной энергии разрушения при растяжении G_{ft} .

$$\Omega_t = e^{\left(\frac{-K}{\alpha_t} \right)}, \quad \alpha_t = \frac{g_{ft}}{R_t}, \quad g_{ft} = \max \left(\frac{G_{ft}}{L_t}, \frac{R_t^2}{E} \right), \quad (1.21)$$

здесь E – модуль упругости, L_t – эффективная длина элемента.

Графики функций Ω_t , Ω_c приводятся на рисунках 1.9–1.10 [286].

ANSYS предлагает расчётные модели арматуры в нескольких вариантах [105, 266, 286], которые учитывают разные виды упрочнения, например, изотропное (би-

и мультилинейное), кинематическое (билинейное и по Чабошу). Имеются и варианты [105, 286].

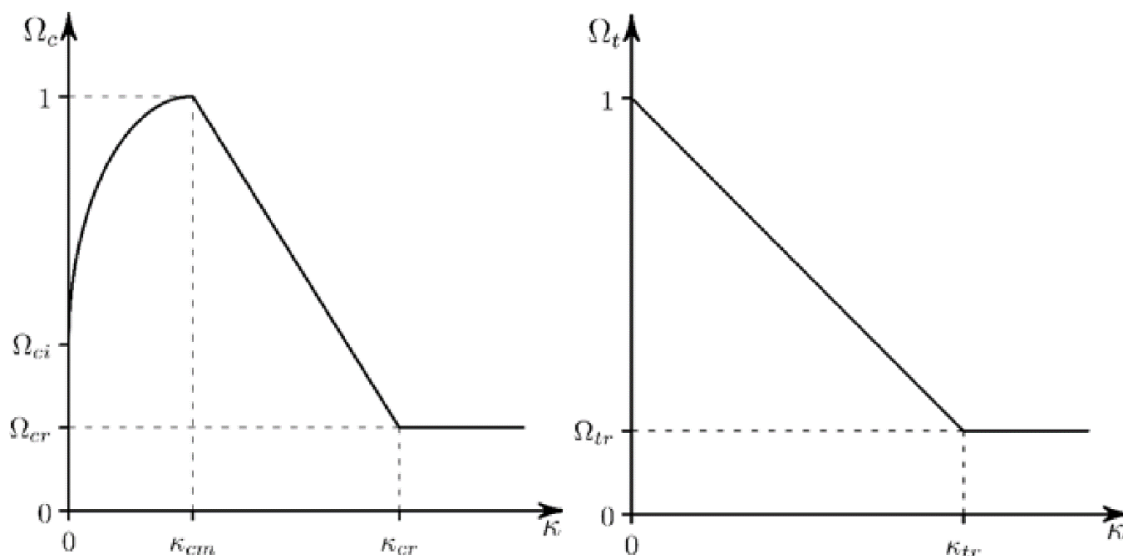


Рисунок 1.9 – Функции Ω_t , Ω_c для одноосного НДС в линейной модели

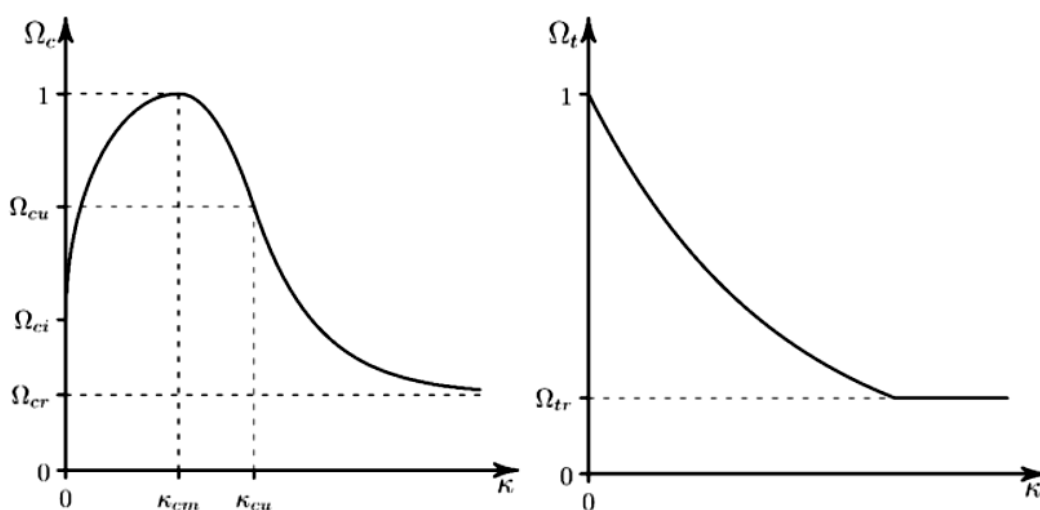


Рисунок 1.10 – Функции Ω_t , Ω_c для одноосного НДС в нелинейной модели

Модель Менетри-Вильяма. На сегодняшний день большинство нелинейных расчётов железобетонных конструкций выполняются с использованием моделей, основанных на теории пластического течения. Одной из наиболее популярных является модель, основанная на функции текучести Менетри-Вильяма, которая реализована в ANSYS. Определяющие соотношения данной модели позволяют описать такие важные особенности, как различная прочность бетона при растяжении и сжатии, нелинейное упрочнение, разупрочнение и дилатация.

В настоящее время существует множество конститутивных моделей для численного моделирования поведения бетона. Материальные модели бетона обычно основаны на следующих теориях:

- теория пластичности с правилом пластического течения [209, 217];
- теория микроплоскостей и эндохронная теория [269, 270];
- нелинейная механика разрушения и теория повреждений [71, 174];
- теория вязкопластичности [159].

Каждая из этих теорий охватывает определённый диапазон конкретного поведения, поэтому выбор соответствующей теории и конститутивной модели зависит от специфики приложения.

Большинство основных моделей для бетона в коммерческих пакетах САЕ основаны на теории пластичности течения. Одна из самых популярных моделей базируется на теории пластичности с неассоциированным законом пластического течения с использованием поверхности текучести Менетри-Вильяма [286]. Основными компонентами модели являются поверхность нагружения, функция пластического потенциала и формулировка поведения упрочнения-разупрочнения.

Следуя положениям теории пластичности, приращения полной деформации $d\varepsilon$ могут быть представлены как сумма упругих $d\varepsilon^{el}$ и пластических $d\varepsilon^{pl}$ компонентов:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{el} + d\varepsilon^{pl}. \quad (1.22)$$

Приращение упругой деформации определяется с помощью приращения напряжения через матрицу упругости $[D]$, которая определяется модулем упругости E и коэффициентом Пуассона (обобщённый закон Гука) [8]:

$$d\varepsilon^{el} = [D]^{-1} d\sigma. \quad (1.23)$$

Приращение пластической деформации определяется в соответствии с законом неассоциированного течения:

$$d\varepsilon^{pl} = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma},$$

где σ – вектор напряжений, λ неотрицательный пластический множитель, Q – функция пластического потенциала.

Неассоциированный закон течения полагает, что направление вектора пластической деформации ориентировано вдоль нормали к поверхности пластического потенциала Q , который отличается от функции поверхности нагружения F .

И поверхность нагружения, и функции пластического потенциала определяются как функции трех инвариантов тензора напряжений I_1, J_2, J_3 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ J_2 &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]; \\ J_3 &= \left(\sigma_1 - \frac{I_1}{3} \right) \left(\sigma_2 - \frac{I_1}{3} \right) \left(\sigma_3 - \frac{I_1}{3} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Для большей наглядности геометрической интерпретации функции описываются в пространстве координат Хейга-Вестрегаарда ξ, ρ, θ , где ξ – гидростатический инвариант напряжений, ρ – девиаторный инвариант напряжений, θ – девиаторный полярный угол. Эти координаты зависят от главных компонентов тензора напряжений:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1; \quad \rho = \sqrt{2J_2}; \quad \theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \right). \quad (1.25)$$

Поверхность нагружения в пространстве напряжений Хейга-Вестергаарда [105, 265, 286] $F(\xi, \rho, \theta)$ представлена множеством точек, для которых выполняется условие начала пластического течения. Таким образом, нагружающая поверхность разделяет зоны упругой и упругопластической деформации. Из-за упрочнения и разупрочнения форма и размер поверхности нагружения постоянно меняются.

Конститутивная модель Менетри-Вильяма предполагает изотропное упрочнение, при котором поверхность нагружения изменяет только свой размер, сохраняя при этом соосность гидростатической оси.

Поверхность нагружения на основе поверхности текучести Вильяма-Варнке [266, 286] определяет текущее напряжённое состояние следующей функцией:

$$F(\xi, \rho, \theta) = \frac{c_2}{c_3} \left[\sqrt{2}\xi + r\rho \right] + \rho^2 - \frac{1}{c^3}, \quad (1.26)$$

где

$$r = \frac{4C \cos^2 \theta + D^2}{2C \cos \theta + D \sqrt{4C \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e}}, \quad (1.27)$$

$$C = 1 - e^2, D = 2e - 1, e = \frac{1 + m}{2 - m},$$

$$m = \frac{\bar{f}_t \bar{f}_{bc}^2 - \bar{f}_c^2}{\bar{f}_{bc} \bar{f}_c^2 - \bar{f}_t^2}, \quad (1.28)$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\frac{1}{\bar{f}_c} - \frac{1}{\bar{f}_{bc}} + \frac{\bar{f}_{bc} - \bar{f}_t}{\bar{f}_c^2} \right], \quad (1.29)$$

$$c_3 = \frac{3}{2} \frac{1}{\bar{f}_c^2}. \quad (1.30)$$

В выражениях (1.27) – (1.30) использованы обозначения: $\bar{f}_c, \bar{f}_t, \bar{f}_{bc}$ – текущая прочность на одноосное сжатие, прочность на одноосное растяжение и прочность на двухосное сжатие, соответственно. Эти параметры зависят от значений по умолчанию для функций упрочнения-разупрочнения на сжатие и растяжение:

$$\bar{f}_t = f_t \Omega_{tc}, \quad \bar{f}_c = f_c \Omega_c, \quad \bar{f}_{bc} = f_{bc} \Omega_c,$$

где

$$\Omega_{tc} = \begin{cases} \Omega_t, & K_c \leq K_{cm}, \\ \Omega_t \Omega_c, & K_c > K_{cm}, \end{cases}$$

Ω_c и Ω_t – функции упрочнения-разупрочнения при сжатии и растяжении, соответственно, K_c – текущий параметр сжатия-упрочнения, K_{cm} – параметр сжатия-упрочнения, который соответствует одноосной прочности на сжатие. Смысл этих переменных разъясняется ниже.

Процессы растрескивания и разрушения описываются моделью деформационного разупрочнения, которая определяет постепенное снижение прочности при дополнительной деформации. Это снижение усилия можно рассматривать как снижение когезии или разрушение микроструктуры. Однако модель не может описать эффект снижения модуля упругости. Это следует учитывать в задачах, где жёсткость деформирования важна.

Поведение бетона при упрочнении-разупрочнении моделируется изменением размеров поверхности нагрузки и потенциальной поверхности пластичности. Размерные характеристики поверхностей в пространстве главных напряжений зависят от текущих значений прочности, которые определяются функциями упрочнения-разупрочнения Ω_t и Ω_c , которые определены выше. Они зависят от

параметров упрочнения при сжатии и растяжении, а эволюционируют согласно выражениям упрочнения [74]:

$$\begin{aligned} dK_c &= \frac{\alpha_c}{f_c} \sigma d\varepsilon^{pl}, \\ dK_t &= \frac{\alpha_t}{f_t} \sigma d\varepsilon^{pl}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где K_t – текущий параметр упрочнения при растяжении, α_c и α_t весовые функции для сжатия и растяжения, полученные из следующих выражений:

$$\begin{aligned} \alpha_c &= 1 - \alpha_t, \\ \alpha_t &= \begin{cases} 0, \tan(\alpha) < -2, \\ \frac{1}{1 + \exp(-10 \tan \alpha)}, -2 \leq \tan(\alpha) \leq 2, \tan(\alpha) = \sqrt{6} \frac{\xi}{\rho}, \\ 1, \tan(\alpha) > 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Отметим, что в случае простого напряжённого состояния параметр упрочнения совпадает со значением пластической деформации, т.е. $K \equiv \varepsilon^{pl}$.

Модель Менетри-Вильяма для бетона, реализованная в программе ANSYS, может учитывать как линейную, так и экспоненциальную модель разупрочнения. Оба этих подхода соответствуют требованиям СЕВ-FIP [105, 266, 267, 286].

До того, как возникнет пластическая деформация, функция упрочнения Ω_c имеет постоянное значение Ω_{ci} , определяя начальную поверхность нагружения, которая ограничивает начальную упругую модель работы. В случае линейного разупрочнения функция упрочнения-разупрочнения при сжатии Ω_c задаётся степенной функцией упрочнения и линейной функцией разупрочнения.

Степенная функция разупрочнения (для $K < K_{cm}$):

$$\Omega_c = \Omega_{ci} + (1 - \Omega_{ci}) \cdot \sqrt{2 \frac{K_c}{K_{cm}} - \frac{K_c^2}{K_{cm}^2}}. \quad (1.33)$$

При $K_c = K_{cm}$ прочность достигается и разупрочнение начинается. Линейная функция разупрочнения (для $K < K_{cm}$):

$$\Omega_c = 1 - \frac{1 - \Omega_{cr}}{K_{cr} - K_{cm}} \cdot (K_c - K_{cm}). \quad (1.34)$$

Функция упрочнения-разупрочнения при растяжении Ω_t представлена линейной функцией разупрочнения. Предполагается, что поведение бетона при растяжении до значения f_t является упругим. После достижения f_t напряжения уменьшаются до уровня остаточного напряжения при растяжении Ω_{tr} , соответствующего значению эквивалентной пластической деформации K_{tr} . При дальнейшей деформации материал считается полностью разрушенным и демонстрирует только остаточную прочность на трение, аналогичную гранулированным материалам, не имеющим внутреннего сцепления.

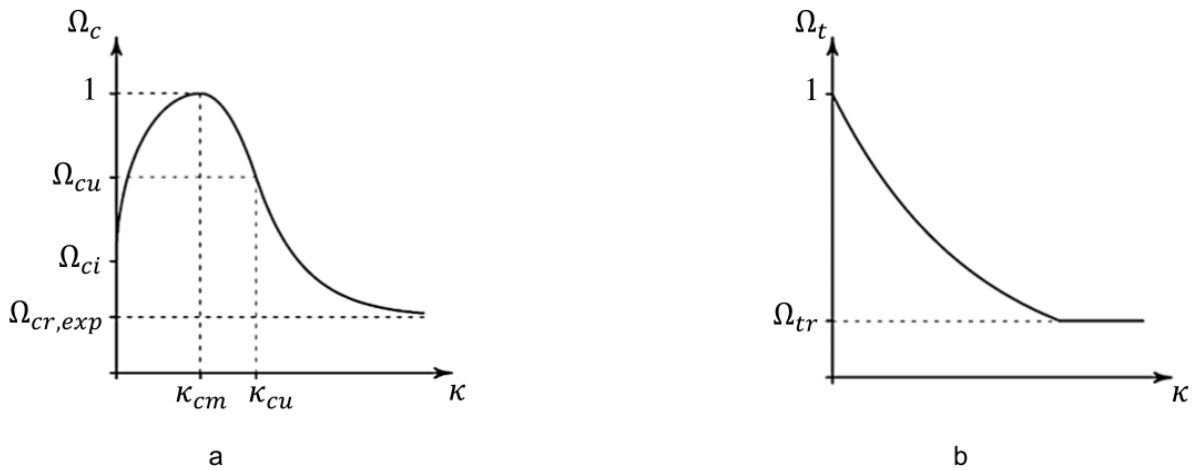


Рисунок 1.11 – Функции упрочнения-разупрочнения при экспоненциальном разупрочнении: а – при сжатии; б – при растяжении [286]

В случае экспоненциального разупрочнения функция упрочнения при сжатии такая же, и определяется формулой (1.33). Разупрочнение определяется набором степенных и экспоненциальных функций (рисунок 1.11). Пластическая деформация и соответствующее напряжение в точке перехода от степенного к экспоненциальному разупрочнению обозначены как K_{cu} и Ω_{cu} , соответственно.

Степенная функция разупрочнения при сжатии для $K_{cm} < K < K_{cu}$ имеет вид

$$\Omega_c = 1 - (1 - \Omega_{cu}) \cdot \left(\frac{K - K_{cm}}{K_{cu} - K_{cm}} \right)^2.$$

Экспоненциальная функция разупрочнения при сжатии для $K > K_{cu}$ как:

$$\Omega_c = \Omega_{cr} + (\Omega_{cu} - \Omega_{cr}) \cdot \exp\left(2 \frac{\Omega_{cu} - 1}{K_{cu} - K_{cm}} \cdot \frac{K - K_{cu}}{\Omega_{cu} - \Omega_{cr}} \right).$$

Разупрочнение при растяжении описывается экспоненциальной функцией Ω_t , где объёмная энергия, рассеиваемая при разупрочнении, пропорциональна удельной энергии разрушения в области разрыв G_{ft} [71, 105]:

$$\Omega_t = e^{\left(\frac{-K}{\alpha_t}\right)},$$

где

$$\alpha_t = \frac{g_{ft}}{R_t}, \quad g_{ft} = \max\left(\frac{G_{ft}}{L_t}, \frac{R_t^2}{E}\right).$$

Для преодоления зависимости от сетки МКЭ энергия разрушения нормируется по эффективной длине элемента L_i .

Дилатация в бетоне [118], которая характеризуется нелинейным увеличением объёма и наличием деформации сдвига, не может быть правильно описана в соответствии с законом ассоциированного течения [209]. Пластическая потенциальная функция Q , которая отличается от функции поверхности нагружения F (1.26), определяет направление вектора пластической деформации и приводит к закону неассоциированного течения, предоставляя возможность более точного описания нелинейного поведения материала.

Для текущего напряжённого состояния эту функцию в координатах Хейга-Вестергаарда можно записать как [286]:

$$Q(\xi, \rho) = \rho^2 + B_g \rho + C_g \xi,$$

где:

$$B_g = \frac{2\bar{R}_c \tan \psi - \sqrt{2}\bar{R}_t}{\sqrt{3}(1 - \sqrt{2} \tan \psi)}, \quad C_g = \frac{B_g}{\sqrt{2}} + \frac{2\bar{R}_t}{\sqrt{3}},$$

ψ – угол дилатации.

Нагружающая и пластическая потенциальные поверхности не закрываются в области гидростатического сжатия. Следовательно, конститутивная модель не может надёжно описать неупругий отклик при сильном сжатии. Эта модель даёт результаты близкие к гидростатической модели.

Анализ показывает, что на текущем этапе развития расчётного моделирования пока не удалось в достаточной степени учесть все описанные выше нелинейные особенности средствами МКЭ [279], применяемыми даже в современных САЕ-системах [174, 266, 267].

Следует заметить, что, несмотря на многочисленность моделей описания предельного состояния бетона, избежать погрешностей представления числовых моделей его поведения не всегда удаётся [20, 123, 174, 238, 286]. Дело в том, что такой фактор нелинейности расчётных моделей, как наведённая анизотропия материала элементов несущей конструкции, не присутствуют в них как доступный для анализа фактор. Имеются расчётные ситуации, когда наведённая анизотропия себя проявить не может: например, малые значения коэффициента армирования растягиваемых и изгибаемых несущих элементов, малые прогибы при сжатии или просто сжатие, балки со значительным коэффициентом армирования или феномен утраты несущей способности на стадии образования трещин. В таких случаях проблемы большой погрешности в определении характеристик НДС не наблюдается.

Однако в других случаях требуются специализированные приёмы, чтобы «подправить» точность расчёта. В качестве варианта решения применяют создание фиктивной анизотропии в объёме расчётного элемента. К сожалению, эффективность этого подхода не очень велика [174, 225].

1.3 Моделирование грунтового основания

Наблюдаемые проблемы с поведением зданий и сооружений в период эксплуатации показывают, что часть этих проблем связана с недостоверностью прогноза совместной работы системы «здание-основание». Частью этой же проблемы является расчёт собственно фундамента, лежащем на основании из грунта.

Исследователями указанной проблемы занимаются достаточно активно. Ей посвятили свои работы многие российские учёные: Н.И. Безухов, А.Н. Богомолов, М.Н. Гольдштейн, М.И. Горбунов-Посадов, Ю.К. Зарецкий, М.В. Егоров, П.А. Коновалов, Е.Н. Курбацкий, В.В. Леденев, И.Я. Лучковский, Ю.Н. Мурзенко, В.Ф. Седорчук, Е.А. Синицин, Г.М. Скибин, З.Г. Тер-Мартirosян, Е.И. Шемякин, Д.Д. Баркан, А.З. Кац, В.И. Колчунов, И.И. Гольденблат, В.И. Травуш, А.Г. Назаров, О.В. Мкртычев, П.Л. Пастернак и др. [17, 22, 41, 42, 53, 54, 65, 90, 138, 167, 174, 178, 188, 196, 222, 225, 233, 255–257, 261, 280, 288, 303, 308, 316, 325, 328, 330, 334].

В данных работах теория исследуемого вопроса основывалась на гипотезе возникновения в основании ограниченных объёмов грунта, переходящего в пластическое состояние [41, 42, 174, 178, 220, 230, 261, 280].

Классификация моделей, базирующихся на возможности представить отклик грунта на нагружение диаграммами деформирования в координатах (напряжение, деформация) дана в [42, 167, 169, 170, 178, 328]. Результаты теоретического моделирования в этом случае представлена весьма сложными математическими моделями, получение по которым числовых массивов данных об НДС, даже в исследовательских целях, является практически неосуществимым на практике. Во всяком случае, в настоящее время нет приемлемого программного обеспечения, которое было бы доступно для массового практического использования. Отсюда – широкое распространение для целей реального проектирования модели упругого основания [174].

Анализируя модели упругого грунта (деформируемого основания), их можно классифицировать следующими условными группами и обобщёнными оценками:

- модели основания как массива двухузловых упругих связей постоянной (А.Н. Крылов, П.Л. Пастернак [65, 138, 174, 188] и др.) или переменной [65] жёсткости; достоинства моделей заключаются в простой реализации учёта присутствия отпора грунта нагрузкам, приходящим с фундамента; недостатком – весьма приближённое отображение реальной картины деформирования грунта под основанием (деформируемые зоны грунта вне площади фундамента игнорируются);

- модели основания как упругого полупространства (работы [65, 233]); к достоинствам следует отнести подключение аппарата математической теории упругости, что сделало возможным отображать свойства грунта параметрами упругой сплошной среды; к недостаткам относится отсутствие границ реагирующего грунтового пространства и, как следствие, включение в работу объёмов, расположенных далеко от площади фундамента, что противоречит реальному распределению НДС грунта: значения характеристик НДС грунта быстро затухают вдали от площади опирания;

- модели основания как многослойного упругого ([65, 174, 178]); достоинством моделей является приближение к реальным свойствам грунта путём дискретизации его объёмов по глубина залегания, что позволяет использовать экспериментальные данные в параметрах, описывающих модели сплошной среды при конечных значениях этих параметров; кроме того, появилась возможность учитывать

геометрию пластов грунта, определяемую на основе данных бурения; недостатки подхода связаны с невозможностью отказаться от представления о массивах грунта как двумерных объектах с осреднёнными механическими свойствами, что вносит рассогласование с данными о поведении грунта в эксплуатационный период;

- модели основания как многопараметрического объекта, например П.Л. Пастернак [138, 188] и др.; достоинства разрабатываемых в этой группе моделей в большой поисковой работе по определению оптимального числа многопараметрической модели поведения грунта с привлечением возможностей развитого математического аппарата; недостатком является недостаточная универсальность и отсутствие инструментария для практического их применения.

Градация моделей, пусть и упрощённая, позволяет определить направление поиска подходов, которые позволяют, оставаясь в рамках ориентации на опыт эксплуатации, с одной стороны, и экспериментальные данные, с другой, предлагать новые модели.

Важной составляющей совершенствования моделей должна стать возможность более точного прогноза значений характеристик НДС фундамента. Для этого следует учитывать нелинейную работу композиционного сочетания бетона и его арматуры на фоне эффектов, которые связаны с повреждаемостью бетона, ведущей к уменьшению значений параметров его жёсткости, и его выходом за пределы линейной модели сопротивляемости.

В этой связи заметим также, что наиболее близкими к эксперименту и практике оказываются модели, основанные на трёхмерной модели теории упругости, которая сочетается с учётом нелинейных свойств работы грунтов. Такой подход выгодно отличает такие модели от моделей ЛДО (линейно деформируемые основания) и им подобных [65]. Кроме того, модели из объёмных элементов обладают очень большой наглядностью и при анализе деформированного состояния, и при анализе напряжений в основании.

1.4 Теория и опыт исследований НДС конструкций, эксплуатируемых в химически активных средах

Проблема активности окружающей среды в отношении поведения несущих конструкций сооружений сформировалась достаточно давно, так последствия этого «партнёрства» легко визуализировались даже при простом внешнем осмотре конструкций. В частности, широко известны случаи обрушения сооружений

вследствие процессов коррозии, и не только металла [253]. Появились работы, с систематизацией аварийных ситуаций, связанных, в том числе и агрессивным воздействием внешней среды, под общим названием «Аварии строительных (металлических, железобетонных, ... конструкций)» [21, 22]. Так что проблема всегда была для строителей актуальной и не утратила своей остроты и по сей день.

Результатом взаимодействия химически активных компонентов окружающей среды и материалов несущих элементов строительных конструкции в перечне последствий имеет, например, водородное охрупчивание стали арматуры в железобетоне – массово применяемом материале современного строительства.

Очень агрессивным и в то время распространённым компонентом окружающей среды является хлорид, которые в разных концентрациях используется:

- в технологических процессах;
- для борьбы с явлениями обледенения;
- содержится в морской воде;
- появляется в грунтовых водах, насыщающих грунтовые основания и др.

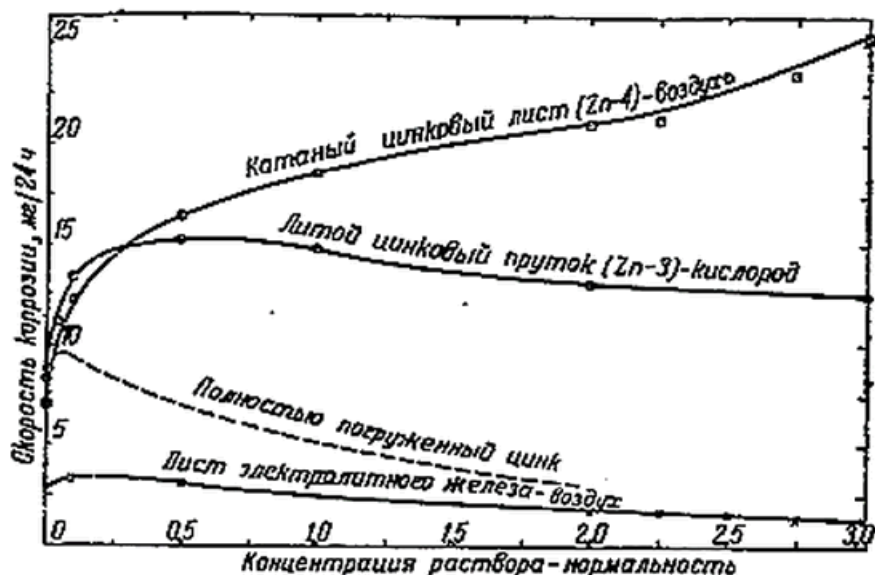


Рисунок 1.12 – Аппроксимации функции изменения скорости коррозии в зависимости от уровня концентрации химически активного компонента и параметра площади поверхности взаимодействия

Как и всегда с появлением серьёзных актуальных задач, появляются исследования, воспроизводящие проблемную ситуацию в модельном или натурном

эксперименте. На рисунке 1.12 представлены результаты опытов по погружению образцов различных материалов в концентрат хлористого калия.

На рисунке 1.12 использованы следующие обозначения:

(—) – ограниченный размер поверхности взаимодействия (Эванса и Боргманн);

(- - -) – полная поверхность взаимодействия (Бенеу, Стюард, Ли).

(■ ■) – точки экспериментальных значений.

Работа Ю.Р. Эванса содержит обширный материал по опытам и их результатам. Графики рисунка 1.12 интересны тем, что показывают многофакторность результатов взаимодействия материала и агрессивной среды – здесь и площадь поверхности взаимодействия, и уровень концентрации, и форма поверхности, и её абсолютная величина.

Одним из основателей исследований в обсуждаемом направлении в новейшей отечественной истории был Г.В. Акимов [4]. В его работе был расширен круг параметров, управляющих процессом деградации материалов в взаимодействии с окружающей средой. Именно он обратил внимание на температуру, сопровождающее взаимодействие. Ещё одним параметром стал вид собственно химического процесса – электрохимический.

Роль катализатора температуры в деградации материала в форме коррозии представлена в работе И.Л. Розенфельда и К.А. Жигаловой [158].

Расширение числа параметров, управляющих результатами взаимодействия материалов и активной среды их окружения, продолжилось в работах Л.А. Гликмана и соавторов [52]. Речь идёт о явлении наводороживания и его влиянии на изменение значения механической характеристики, пример которого приводится на рисунке 1.13.

Рисунок 1.13 демонстрирует результаты эксперимента с образцом стали 20 в связи с её наводороживанием. На рисунке 1.14 показан результат (кривая 2) того же эффекта на диаграмме деформирования образца так называемого «армко железа».

Растёт и число наблюдающихся эффектов. Так в работе В.И. Лихтмана, Е.Д. Щукина, П.А. Ребиндера [97] показано, что имеет место изменение

длительной прочности материала. А в число параметров управления добавились характеристики условий экспериментов.

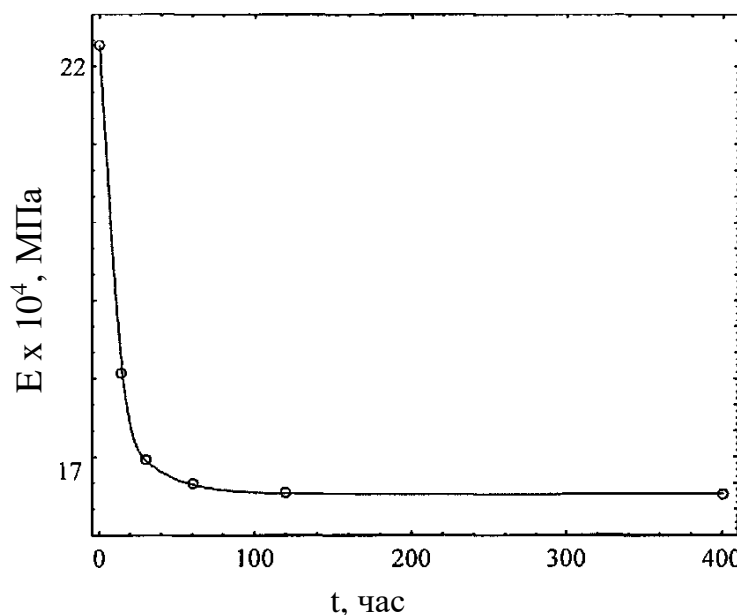


Рисунок 1.13 – Функция зависимости модуля упругости от времени [52]

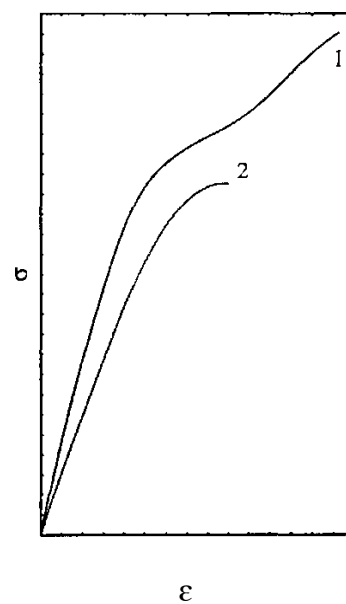


Рисунок 1.14 – Диаграммы деформирования [52]

Рисунок 1.15 содержит серию графиков с результатами, которые показали различные марки стали в условиях взаимодействия с кислотной средой, представленной двухкомпонентным раствором кислот (0,5% уксусной и 2000 мг/л серной).

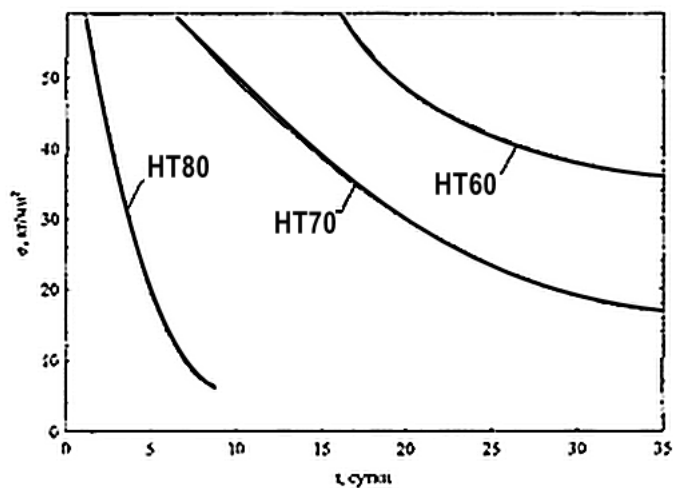
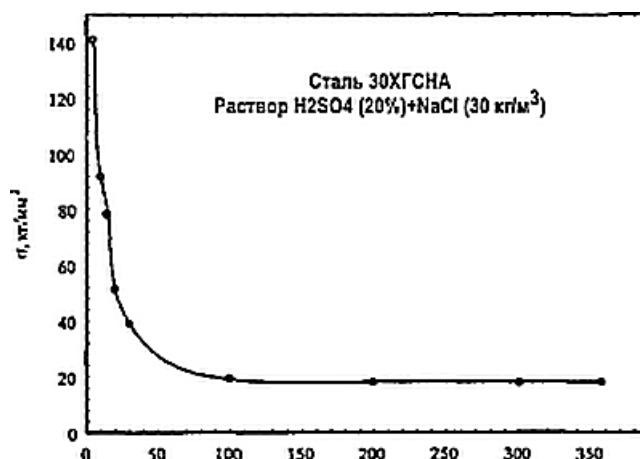


Рисунок 1.15 – Функция длительной прочности в зависимости от времени

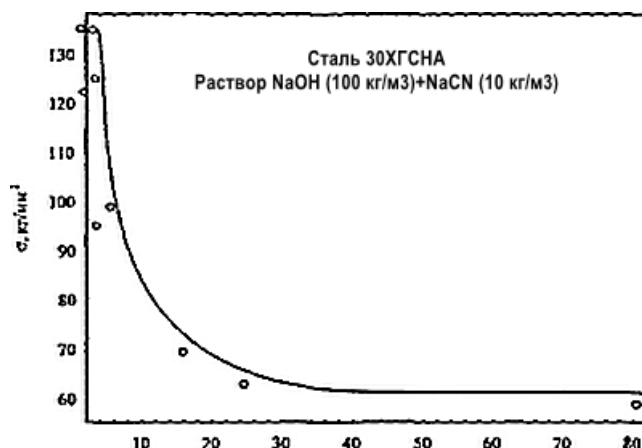
Продолжая развитие направления многопараметрических моделей взаимодействия материалов и химически агрессивного окружения, Ф.Ф. Ажогин и Ю.К. Павлов в работе [3] обращают внимание на роль химического состава в форме

легирующих добавок для высокопрочных сталей, исследуя функцию изменения напряжения во времени. Результаты представлены на рисунках 1.16–1.17.



$t^{0.5}$, мин

Рисунок 1.16 – Функция изменения напряжения в растворе 1



$t^{0.5}$, мин

Рисунок 1.17 – Функция изменения напряжения в растворе 2

Отметим, что эффекты описываемого взаимодействия включают в себя коррозионное трещинообразование с последующим хрупким разрушением.

Результаты исследований Г.В. Карпенко [78] по зависимости усталости арматурных материалов от эффекта коррозии представлены на рисунке 1.18.

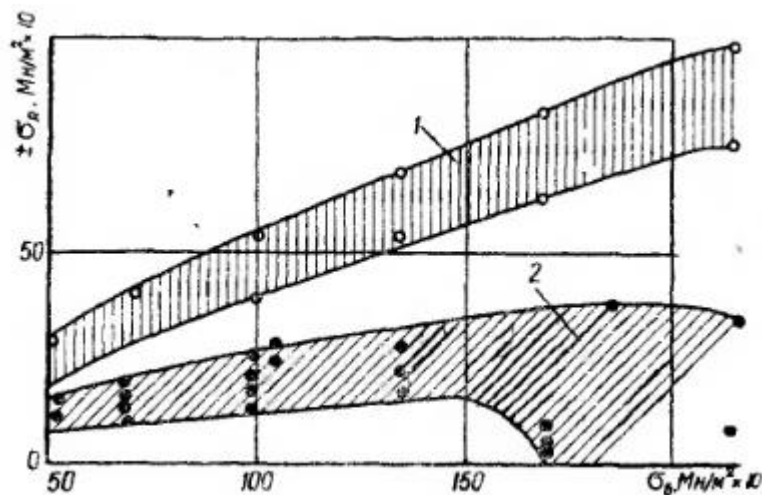


Рисунок 1.18 – Функции зависимости предела усталости от предела прочности стали

Данные рисунка 1.18 демонстрирует, что агрессия внешней среды может изменять и характер взаимосвязей между поведенческими критериями материалов.

Здесь изменение предела усталости представлено коридором 1 (внешняя среда – воздух) и коридором 2 (морская вода).

Эффект взаимовлияния отмечен и другими исследователями [148], кроме того, продолжает возрастать и число проявляющихся эффектов, например в работе [165] отмечено явление увеличения объёма композиционных материалов и полимеров.

Таким образом, в настоящее время наметилась тенденция к расширению объёма исследований, которые направлены как на выявление новых параметров-аргументов, управляющих эффектами воздействия внешней среды, так и многообразия самих эффектов. Этот вывод подтверждается серией работ, обзор которых выполнен ниже.

Данные рисунка 1.19 визуализируют экспериментально полученную функцию времени прочности (длительной) стеклопластика, когда параметрами представления является состав активной среды и температура со значением 20°C (Ю.В. Моисеев, Г.Е. Зайков [128]).

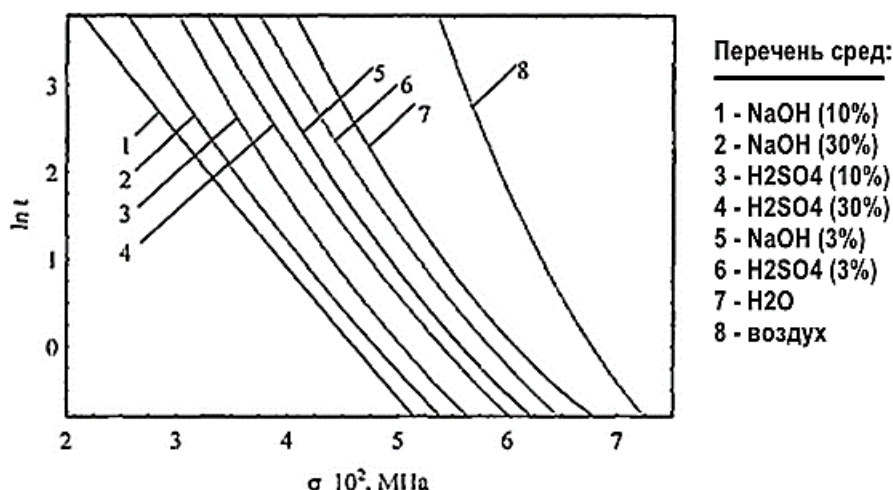


Рисунок 1.19 – Кривые длительности прочности стеклопластика АГ-4С

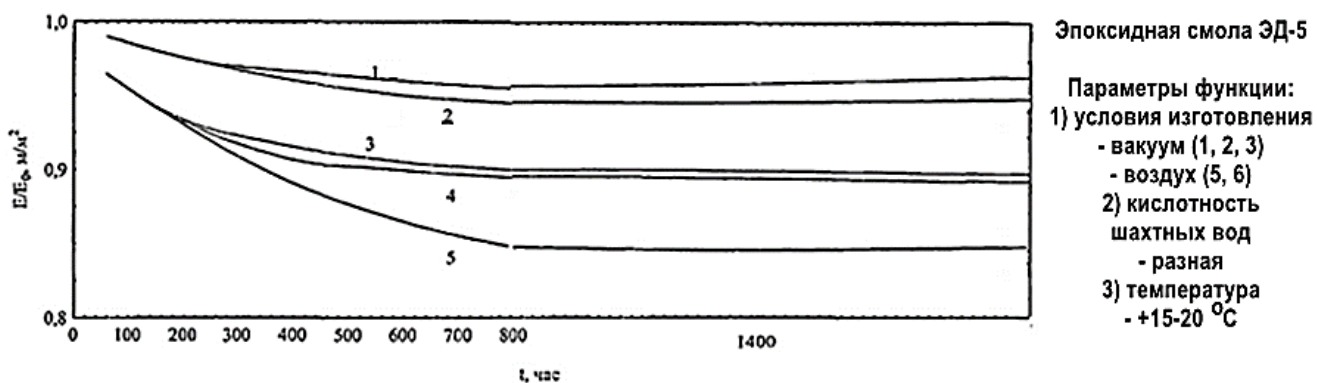


Рисунок 1.20 – Функция-1 зависимости от времени изменения относительного модуля упругости

Рисунки 1.20–1.21 иллюстрируют функцию зависимости модуля упругости от параметров, задающих вид материала, способ его изготовления, характеристики среды (по данным работ А.П. Федорцева и Ю.Б. Потапова [237]).

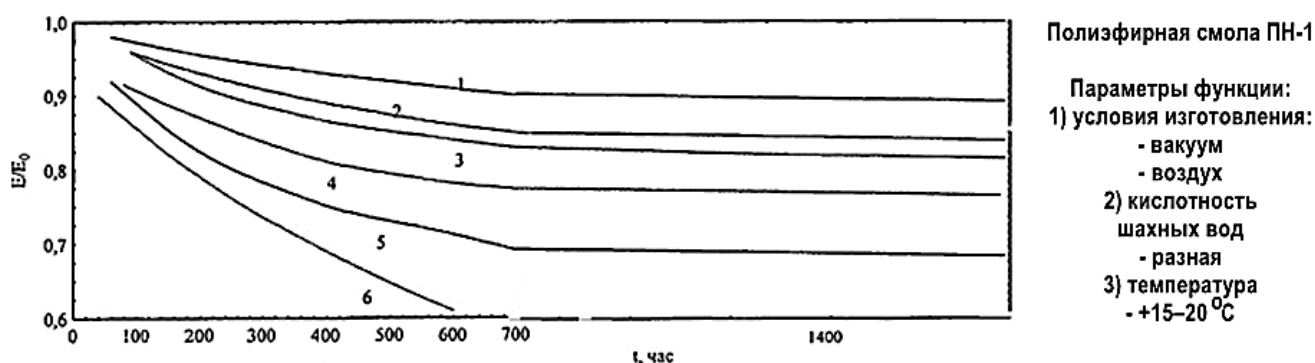


Рисунок 1.21 – Функция-2 зависимости от времени изменения относительного модуля упругости

Рисунок 1.22 показывает влияние на функцию изменения осевого напряжения уровня влажности среды.

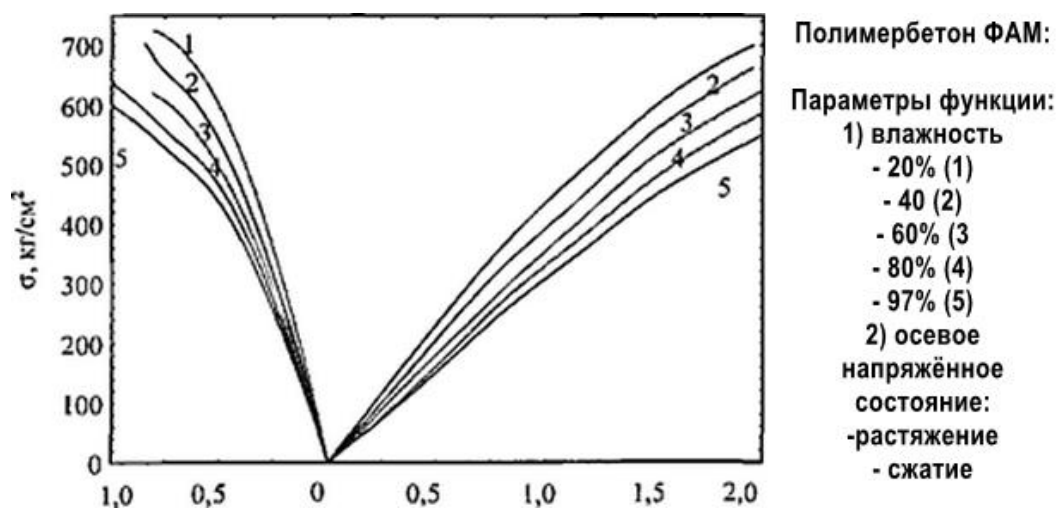


Рисунок 1.22 – Изменения функции осевого напряжения

Тот факт, что функциональная зависимость диффузии от времени в качестве параметра влияния имеет НДС, установили Р.Д. Степанов и О.Ф. Шленский. Это вывод в своих работах подтвердили А.А. Шевченко, В.П. Стариков и Н.Г. Кац, а также В.М. Аристов, обратив внимание на особую роль напряжений сжатия [227].

Исследованиями В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова и В.К. Иноземцева был установлен такой важный параметр функции изменения диффузии, как неравномерность проникновения активных ингредиентов среды в глубину поперечных сечений несущих элементов в виде испытательных образцов [143]. Этот факт привёл учёных к выводу об осреднённой оценке уровня влияния диффузии на значения

характеристик НДС (модуль упругости, предел прочности и др.). В дальнейшем В.В. Петровым, И.Г. Овчинниковым и Ю.М. Шиховым были получены оценки пределов такого влияния напряжений [132] (рисунок 1.23).

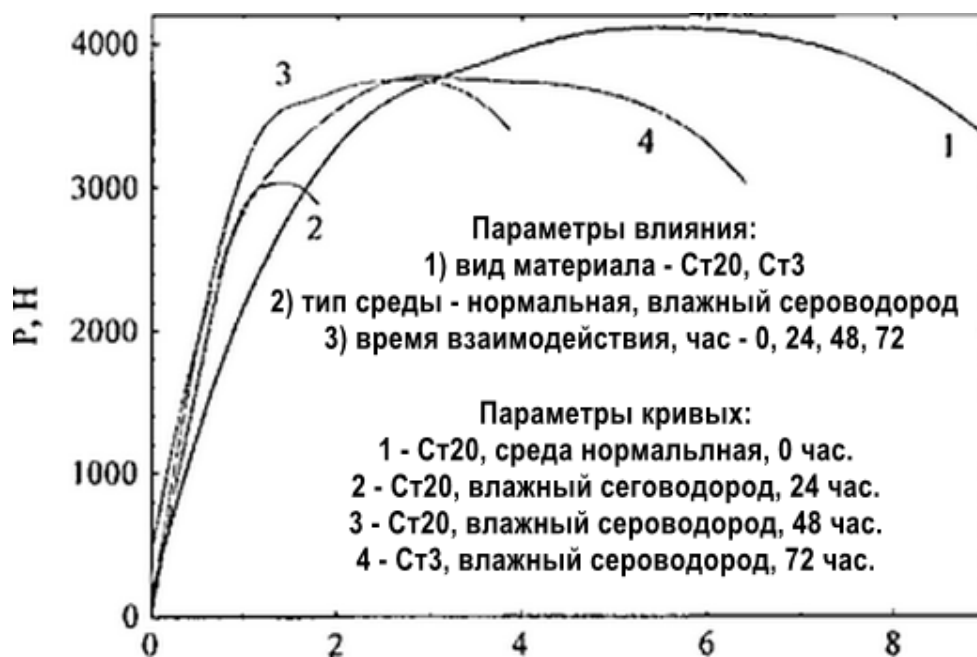


Рисунок 1.23 – Изменение характера функции по [148]

Обобщая выводы, сделанные ранее, и учитывая последующие данные, можно утверждать, что:

– существуют функционально-параметрические зависимости изменения свойств несущих объектов строительных конструкций, связанные со взаимодействием активной в химическом отношении окружающей среды; среди таких свойств находятся практически все механические характеристики конструкционных материалов;

– для формализации описания упомянутой зависимости требуются параметры среды взаимодействия, в частности, распределение активного вещества по поверхности её контакта с материалом несущего элемента;

– столь же важным составным параметром функции от пары аргументов (значение концентрации активного вещества; координаты местоположение точки поперечного сечения);

– одним из эффектов концентрации активного компонента взаимодействия в точке сечения является нарушение однородности распределения свойств материала в пределах площади сечения, параметры которого являются функцией времени;

– корректная модель функционально-параметрической зависимости изменения свойств несущих объектов строительных конструкций, описывающей взаимодействие материала с химически активной окружающей средой, должна обладать точностью численного представления результатов опытов и включать важные для применения на практике факторы влияния;

– в качестве массива опытных данных, на которые можно опираться при построении корректной функционально-параметрической модели могут быть использованы результаты, опубликованные в работе [149] (автор П.В. Селяев).

Эксперименты этого автора отличаются разнообразием параметров условия их проведения. Среди таких параметров находятся тип материалов и состав ингредиентов, характеризующих активность среды. Ниже приводятся графические аппроксимации данных, полученных экспериментальным путём.

Кривые рисунка 1.24 иллюстрируют зависимости «напряжение-деформация» в среде стандартной плотности.

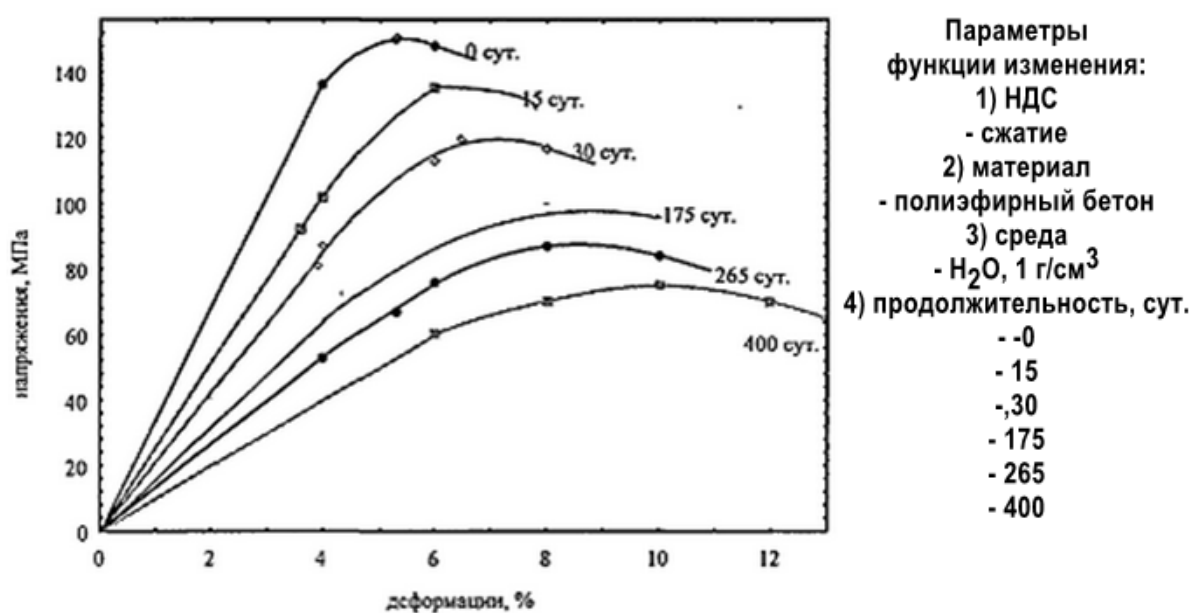


Рисунок 1.24 – Функции зависимости напряжение-деформация

Кривые рисунка 1.25 отображают влияние корректировки параметра материала – используется другой заполнитель, – в условиях эксперимента, приведенных на рисунке 1.24.

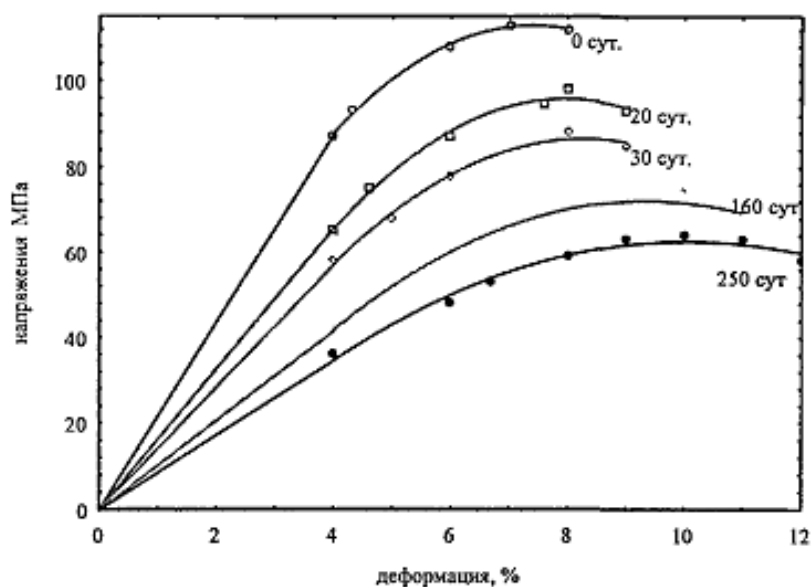


Рисунок 1.25 – Функции зависимости напряжение-деформация в условиях модификации материала (см. рисунок 1.24)

Кривые рисунка 1.26 иллюстрируют влияние на функцию «напряжение-деформация» изменения свойств среды эксперимента при том же типе материала, что и на рисунках 1.24–1.25.

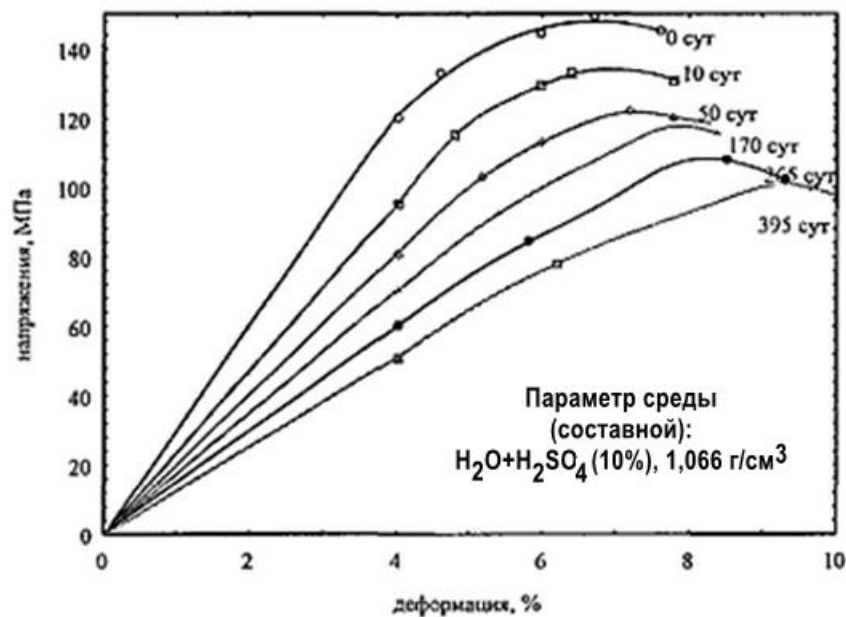


Рисунок 1.26 – Кривые зависимости «напряжения-деформация» с изменениями параметра среды

На рисунке 1.27 представлены результаты деформирования эпоксидных бетонов, выдержанных в водном 20% растворе NaCl, плотностью 1,219 г/см³.

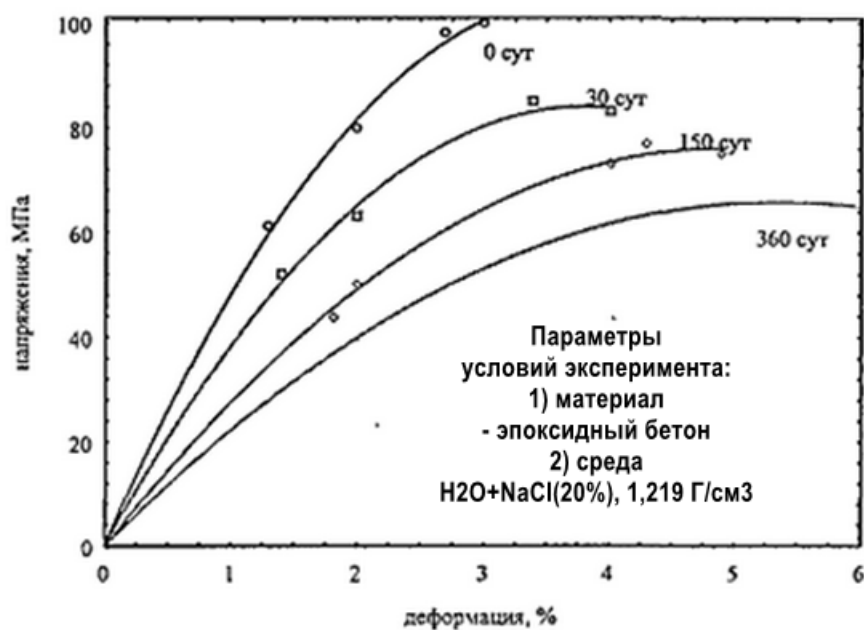


Рисунок 1.27 – Зависимость «напряжение-деформация» с изменением материала и параметра среды (составного)

Данные рисунков 1.24–1.27 фиксируют факт уверенного влияния активности среды воздействия на значения ключевых параметров НДС в направлении снижения несущей способности и жёсткости. Что ещё раз говорит о необходимости создания инструментов для учёта этих эффектов в расчётном моделировании.

В частности, экспериментальные данные работы [149] могут служить основой для построения механико-математической модели работы слоистых железобетонных плит, защищённых слоями полимера, препятствующими развитию эффекта коррозии.

Продолжая анализировать направления исследования функциональных зависимостей, связывающих важные характеристики расчётной модели, обеспечивающие достоверность получаемым по ним прогнозам поведения несущих конструкций зданий и сооружений, следует обратить внимание на проявления эффекта разносопротивляемости бетона: работы Z.P. Bazant [270], Н.В. Kupfer [305, 306], А.А. Трещева [226, 229] и других.

Эффекты разносопротивляемости фактически делают малополезными расчётные модели традиционных разделов строительной механики и обеспечивающих эти разделы модели деформирования несущих элементов конструкций, опирающиеся на механику деформируемого твёрдого тела.

Серия экспериментов, результаты которых опубликованных в работах [270, 306], убедительно доказывают, что даже незначительная нелинейность функциональных зависимостей типа «напряжение-деформация» или «усилие-перемещение» может смениться значимой нелинейностью при изменении компонентного состава тензора напряжений.

Отмеченные эффекты являются результатом изменения значений механических характеристик бетона (и не только его!) в зависимости от вида напряжённого состояния, что нашло своё отражение в исследованиях, проводимых в последние десятилетия.

1.4.1 Кинетика химически активных сред в разносопротивляющихся материалах

В исследованиях функционально-параметрической зависимости совокупности свойств материала, составляющих группу физико-механических, от вида напряжённого состояния, направление учёта феномена взаимодействия материала и внешней среды получило не столько интенсивное развитие.

Необходимость интенсификации исследований в указанном направлении аргументирована в работах [16, 132, 133, 149], где уровень распространённости контактов материалов несущих остовов сооружений с проявлениями химической активности окружающей среды оценивается как актуальный для трёх из четырёх строительных объектов. Такому положению дел способствует, в частности, особенности местоположения сооружения, например, морское побережье или наличие в непосредственной близости химических производств, очистных сооружений и др.

В предыдущем пункте раздела уже обращалось внимание на отсутствие базы нормативной документации, управляющей расчётным моделированием при наличии рисков взаимодействия с агрессивными проявлениями окружающей среды и опирающейся на детализированный учёт факторов такого вида взаимодействия.

Существующие нормативные рекомендации решают обсуждаемую проблему по методикам классического подхода к расчётному моделированию – введением системы коэффициентов (запаса, безопасности, условий и др.) [16, 132, 133, 149].

Между тем в работах по исследованию жизненного цикла строительного объекта на стадии эксплуатации, построены модели, которые детализируют описанное взаимодействия, используя разнообразные, выявленные системой наблюдений и экспериментов эффекты зависимости значений характеристик НДС и физико-механических свойств материалов от параметров активной среды контакта.

Как уже отмечалось, формализация описания взаимодействия конструкционных материалов с окружающей средой в процессе эксплуатации, опирается, прежде всего на экспериментальные данные. Предложения такой формализации, как правило, появляются в тех же работах, которые содержат материалы об экспериментах.

Первые модели были предложены в работе Г.В. Акимова [4]. Далее последовали работы Г.В. Карпенко [78] и прочих известных специалистов.

Ряд моделей был построен на базе общетеоретической методологии, исходя из характера взаимодействия (химические процессы), которое является необратимым с точки зрения термодинамики. С применением теории механики сплошной среды, как способа представления материалов несущих элементов, обеспечивающего детализацию свойств материала на уровне материальной точки, был построен ряд моделей [16, 132, 133, 149]. Эти модели вместе с высоким уровнем общности получили низкий уровень практического применения, так как используемые уравнения математической формализации создавали трудно преодолимые препятствия для получения численных результатов [227].

Параллельно развивался подход, основанный на предположительном характере функциональной зависимости количественной оценки результатов взаимодействия от времени. В частности, была предложена функция, характеризующая результат взаимодействия в форме коррозии (функция повреждаемости) [158, 253]:

$$\delta_k = k(1 - \exp(-\alpha t)). \quad (1.35)$$

В формуле (1.35) смысл значений функции δ_k характеризует глубину дефекта (каверны) повреждения, появившегося в ходе химического процесса. Функция двух-параметрическая и имеет формализованные аналоги в химии, физике и механике.

Двухпараметрические функции такого же смысла были предложены A.G. Liddiard и В.А. Whitakker в работе [307]. Их выражение представлено формулой:

$$\delta_k = k \lg(\alpha + t). \quad (1.36)$$

Широкому использованию описанных двухпараметрических моделей препятствовало несоответствие данным, зафиксированных опытным путём: они не описывают локального экстремума скорости коррозии в начальный период процесса.

Далее, в работах [148, 165, 237], описано как развивали представление о формальном представлении функции повреждаемости в форме степенной зависимости, представляемой также двухпараметрической функцией времени:

$$\delta_k = kt^n. \quad (1.37)$$

Значение показателя степени аргумента предлагалось принимать в интервале (0, 1). Недостатком моделей этого типа оказалась некорректируемость погрешностей, возникающих в течении всего периода процесса описания экспериментальных данных.

Идею двухпараметрической формализации функции повреждаемости продолжил Л.Я. Цикерман в работе [243]. Для этого он использовал, аналогию к функции в механике грунтов, которая отображает деградацию грунта:

$$\delta_k = \frac{\delta_0}{(T + t)}, \quad (1.38)$$

где параметры δ_0 и T идентифицируют материал по его свойствам.

Дальнейшее развитие идеи формализации связано с переходом к описанию процессов массопереноса в дифференциальной форме, на основе уравнений, входящих в состав разрешающей системы диффузии (работы R.F. Stratfull [318] и других). Остановившись, в частности, на одномерном эквиваленте второго закона Фика применительно к коррозии арматуры в железобетонных несущих элементах:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}. \quad (1.39)$$

В уравнении (1.39) C – функция двух переменных: времени t и координаты x , лежащей в плоскости поперечного сечения несущего элемента и направленной от поверхности вглубь материала. $C(t, x)$ – имеет смысл концентрации ионов хлора

(если активным веществом среды является хлорид). Время t отсчитывает моменты периода, необходимого для образования повреждения. D – характеризует процесс диффузии (коэффициент диффузии).

Варианты формулировки аналогичных по смыслу уравнений связаны с учётом конфигурации тела – объём тела изолирован поверхностью взаимодействия не полностью; начальных условий процесса – начальная концентрация активного вещества C_0 ; концентрации, которая будет достигнута в процессе, C_∞ .

$$C(x,t) = C_\infty \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right). \quad (1.40)$$

Функция erf позволяет подключить теорию вероятностей, чтобы минимизировать погрешность представления второго слагаемого в уравнении (1.40):

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du. \quad (1.41)$$

Когда во взаимодействие вступает совокупная поверхность элементов конструкции, подверженных риску коррозии, то

$$C(x,t) = C_0 + (C_\infty - C_0) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right). \quad (1.42)$$

Решение уравнения (1.42) можно записать в форме

$$T_{\text{инк.}} = \frac{d^2}{4D} \left[\operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{C_\infty - C_{\text{крит.}}}{C_\infty - C_i} \right) \right]^2. \quad (1.43)$$

Здесь $T_{\text{инк.}}$ – длительность периода, которые требуется для образования повреждений (инкубационный период). Его вычисление возможно при наличии значений констант, входящих в (1.43). Зная значение концентрации химически активной среды, на следующем шаге решается задача, требующая экспериментальных данных, характеризующих скорость проникновения коррозии на всю глубину сечения (скорость коррозионного износа) конкретного вида арматурного элемента. Эта скорость и лежит в основе оценки его коррозионной устойчивости.

Описанная процедура оценки последствий влияния активности хлоридной среды на арматурные стержни работает только на условиях реальной одномерности процесса диффузии.

Что касается арматуры в составе железобетона, то вопросами учёта коррозии и связанной с этим повреждаемости на базе многопараметрических моделей занимались К. Маекава и Т. Ishida [308]. Их подход к учёту времени, связанного с коррозией, опирался на подключение формализации процесса коррозии методами, которыми оперирует механика материалов и её применение в механике конструкций.

Направление на отображения связи коррозии и особенностей распределения характеристик НДС в несущем элементе формализовалось дифференциальными соотношениями в работах В.М. Долинского. Модель первых версий [16] была ориентирована на функцию линейной связи между скоростью протекания процесса коррозии модульными значениями напряжений. В процессе совершенствования этой функции напряжения были заменены их интенсивностью σ_i , но линейный характер связи остался неизменным:

$$v = v_0 + m\sigma_i, \quad (1.44)$$

где v_0 – независимая от компонентного состава тензора напряжений скорость формирования поврежденности; m – относительная величина вклада компонентного состава тензора напряжений. Функция повреждения, имеющая смысл глубины проникновения под поверхность, определяется формулой накоплением во времени:

$$\delta_k(t, \sigma_i) = \int_0^t v dt = v_0 t + m \int_0^t \sigma_i dt, \quad (1.45)$$

Метод (1.44–1.45) получил развитие в виде модели связи скорости изменения функции повреждения и функции времени с параметрической зависимостью от компонентного состава тензора напряжений:

$$\frac{d\delta}{dt} = f(t, \sigma). \quad (1.46)$$

Здесь f – функция, формируемая аппроксимацией экспериментальных данных, которые учитывают значения компонент тензора напряжений. Решение уравнения

(1.46) производится при нулевых начальных условиях $\delta(x, y, 0) = 0$, выполняющихся во всех точках поверхности, построенной в координатной системе (X, Y).

Применение модели В.Г. Карпунина [77] показало, что более приемлемые результаты даёт представление экспериментальной функции в виде независимых по аргументам функций: функции времени и функции напряжений, произведение которых и будет представлять целевую функцию f . Безразмерная функция времени представляет собой отображение влияния среды, а вторая функция – сочетания компонентов тензора напряжений:

$$f(t, \sigma) = \varphi(t)\psi(\sigma). \quad (1.47)$$

Совершенствование данной модели предложено И.Г. Овчинниковым [133]. Суть предложения состоит в учёте компонентного состава напряжений и тензора деформаций, что позволяет ввести в модель интенсивность деформаций ε_i и фактически наметить пути применения в будущем энергетического подхода к моделированию:

$$\frac{d\delta}{dt} = \alpha\varepsilon_i(\sigma_i - \sigma_n + \beta) \text{ при } \sigma_i \leq \sigma_n, \sigma_i - \sigma_n = 0. \quad (1.48)$$

В уравнении (1.48) присутствуют: интенсивность деформаций, интенсивность напряжений постоянные α , β , σ_n – коэффициенты, описывающие скорость коррозии.

Комбинируя подход В.Г. Карпунина [77] со своей моделью, И.Г. Овчинников, усложнил представление некоторых параметров и их сочетаний, сформулировав уравнение модели в виде:

$$\frac{d\delta}{dt} = \varphi(t)[\alpha\varepsilon_i(\sigma_i - \sigma_n) + \beta]^m. \quad (1.49)$$

Уравнение (1.49) в максимальной степени разделило структуру влияния агрессивной среды на формальную (в виде степенной зависимости) и опытно-экспериментальную, представленную функцией $\varphi(t)$ и коэффициентами α , β , m . Такой подход в комплексе группирует факторы влияния на коррозию и создаёт гибкую структуру управления математической модели конкретикой, индивидуализирующей реальный объект исследования с его физико-математическими свойствами.

Выполненный анализ, на данном этапе, позволяет выделить факт, что влияние внешней среды, связанное с изменением во времени структуры первоначально сплошной среды материала, отображается в виде наблюдаемых эффектов, которые могут быть некоторым образом классифицированы. Часть их них рассматривалась в этом разделе ранее. Однако существуют ещё несколько эффектов, которые обязаны своим существованием химической активности среды, окружающей деформирующийся несущий элемент.

Один из таких эффектов выражается в накоплении повреждений, получаемых в течении времени, в результате взаимного влияния химических процессов и распределения характеристик напряженного состояния в условиях изменения уровней и скоростей коррозии, так и характеристик НДС.

На сегодняшний день известно достаточно большое количество моделей, которые в математической форме описывают данный эффект накопления повреждений, в том числе, при различном компонентном составе тензора напряжений, который получен как по линейным, так и по нелинейным расчётным моделям.

Как правило, предлагаемые модели вводят в рассмотрение безразмерную функцию повреждаемости, значения которой ограничены отрезком значений $[0, 1]$. Эта функция времени становится многопараметрической при моделировании не одного, а нескольких механизмов повреждаемости, включая и коррозионный.

Эту функцию можно интерпретировать также через безразмерную функцию, которая связана с изначально полной сплошностью, простым выражением: $\varphi = 1 - \omega$, где φ характеризует уровень сплошности в условиях отсутствия каких бы то ни было воздействий на несущий элемент, ω – параметр повреждаемости.

Если принять за факт (а такой факт подтверждён в экспериментах), что существуют прямая и обратная связи между деформированием и коррозией, то можно формализовать это утверждение в форме

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \omega). \quad (1.50)$$

Используя разделение переменных в (1.50), получим:

$$\sigma = f(\varepsilon)\varphi(\omega). \quad (1.51)$$

Тем самым, предлагается использовать некоторый закон деформирования $f(\varepsilon)$ типа $\sigma(\varepsilon)$, поручив исследователям-экспериментаторам построение функции $\varphi(\omega)$.

Вместо полностью экспериментально определяемой функции $\varphi(\omega)$ можно применить вариантный подход, который напрямую связан с функцией повреждаемости $\omega(t, \dots)$, являющейся аналитическим решением многопараметрического дифференциального уравнения типа:

$$\frac{d\omega}{dt} = \Phi(\sigma, \omega, S). \quad (1.52)$$

Решение уравнения (1.52) в аналитическом виде подразумевает, что тип этого уравнения будет обыкновенным дифференциальным после расшифровки закона деформирования $\sigma(\varepsilon)$ и определения подмножества значений параметров S , среди которых предполагается и наличие отвечающих за эффективное представление процесса коррозии, а также свойств материала. Последнее условие опять-таки может быть выполнено только с использованием экспериментальных данных. Что касается используемых начальных условий, то они достаточно тривиальны: $\omega|_{t=0} = 0$.

Описанный подход в части параметров повреждаемости сплошности был использован при построении моделей в работах В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, В.К. Иноземцева и их учеников [132–137]. Разрабатывались всевозможные модификации моделей, процесс совершенствования которых увенчался работой В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова [136], где авторы, помимо аналитического обзора вариантов моделей по учёту коррозии, формулируют задачу, чрезвычайно важную для строителей-проектировщиков: задачу прогноза долговременной прочности несущих остовов из различных конструкционных материалов в условиях активно протекающих процессов химической агрессии со стороны окружающей среды.

Развивая это направление, В.В. Петров, В.К. Иноземцев и др. [150] рассматривают конкретные несущие элементы строительных конструкций, исследуя НДС пластинок и оболочек, выполненных из конструкционных материалов. Специально для решения поставленных задач был модифицирован численный метод решения новых усложнённых модельных уравнений, что ознаменовало собой выход изысканий в область практического применения.

Развитие описанных решений продолжилось в работах В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, В.К. Иноземцева и ряда их последователей [132–137, 148–150, 165, 211, 226, 227, 229].

Вариантом подхода к решению задач взаимодействия строительных материалов несущих конструкций с химически активной внешней средой стал метод аппроксимаций экспериментальных диаграмм деформирования, которые в подавляющем большинстве могут быть охарактеризованы как нелинейные. Такие диаграммы полностью раскрывают детали связи внешних воздействий с характеристиками НДС, когда реализация связи проходит под управлением всей совокупности факторов влияния: от свойств материалов в любой момент времени до характера внешних воздействий, включая изменение их параметров.

Такая точка зрения было реализована в моделях, предложенных в работах А.А. Гвоздева, М.М. Холмянского, В.М. Бондаренко и др. В работе Н.И. Карпенко [82, 83], где выполнен критический анализ моделей подобного типа, из которого следует, что их применяют для аппроксимации опытных данных в качестве пользующихся популярностью стандартных видов функций: полиномиальных, степенных и экспоненциальных, представляющих зависимости типа. $\sigma - \varepsilon$.

Такой же анализ был выполнен для узкого круга широко применяемых в строительстве материалов и их композиций – бетона и арматурной стали (работа И.Г. Овчинникова и Н.С. Дядькина [136]).

Построение моделей в рамках теории сплошного континуума несущих элементов конструкций проведено группой авторов в составе В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, В.К. Иноземцева [132–137, 148–150]. Разработка моделей преследовала две практически важные цели: учесть конструктивную слоистую структуру несущего элемента и дефекты однородности материала слоёв, возникающих как следствие химических процессов. Разработчики ввели понятие «фронт изменения механических свойств», которое формализовали пространственно-временной функций. Результаты моделирования, реализованные в расчёте, показали, что подход имеет определённые преимущества при практическом использовании. К достоинствам построенных моделей следует отнести сравнительную простоту математической задачи и малые погрешности при сравнении с данными экспериментов.

Актуализируя проблему уточнения прогноза долговечности конструкций из железобетонных несущих элементов [148–150], изучали возможность использования функций, которые напрямую отображали бы показатели изменения значений критериальных параметров во времени, связанных с жёсткостью и несущей способностью. Получение подобных функций, описывающих деградацию, предполагалось организовать в ходе экспериментальной деятельности.

Оценочный подход к возможности противостояния несущей конструкции агрессии внешней среды развивался в работах В.М. Бондаренко и его соавторов [30, 31].

Модели взаимодействия со средой, в которой присутствуют конкретный агрессивный компонент – Na_2SO_4 , разрабатывались коллективом авторов в составе Б.В. Гусева, А.С. Файвусовича и В.Ф. Степановой [58]. Особое внимание в их исследовании уделено стадии разрушения несущих железобетонных элементов как результат совместности присутствия стандартных нагрузок и комплексного влияния особенностей окружающей несущую конструкцию среды.

Свою точку зрения на подход к моделированию последствий совместного действия нагрузок и рассматриваемых особенностей окружающей конструкцию среды предложил А.И. Попеско [157]. Оригинальность подхода заключается в использовании эквивалентных модулей деформации. Их собирательный, относительно геометрии конструкции и свойств несущих элементов, характер позволил в рамках расчётного моделирования получать массивы числовых данных при пошаговом учёте изменения деформирующейся геометрии заданной расчётной схемы.

Учитывая большой объём данных, полученных в результате эксплуатации сооружений из железобетона, D.M. Frangopol [277] обратился к методам теории вероятностей при интерпретации протекания процессов коррозии и деформирования, полагая свойства бетона нелинейными.

Подводя итоги анализа материалов в обзоре источников информации о разных аспектах взаимовлияния активной внешней среды и материала несущих конструкций, можно утверждать, что экспериментальные данные указывают на глубокую взаимосвязь практически всех характеристик НДС, критериальных параметров, параметров среды, всего разнообразия свойств материалов. Важнейшим фактором этой связи, является её изменчивость во времени как по характеру и числу определяющих её функций, так и по значениям элементов подмножеств

определяющих параметров и их сочетаний. Более того, в процессе функционирования упомянутой взаимосвязи обнаруживаются даже явления деградации первоначальной сплошности и однородности среды материалов несущих элементов.

В таких условиях не является удивительным факт отсутствия универсальной теоретической модели, охватывающей все стороны реального взаимодействия строительной и активной окружающей среды. Ограничиваясь критериями в форме оценок погрешности и уровня противоречивости соответствия опытным данным, в качестве наиболее приемлемых для практического применения моделей следует признать модели В.В. Петрова и И.Г. Овчинникова [132–137].

В диссертационном исследовании для целей совершенствования упомянутых выше моделей Петрова-Овчинникова, применительно к разносопротивляющимся материалам в составе строительных конструкций, использовалась обобщённая теория деформирования этих материалов Матченко-Трещёва [118, 119, 174, 229], которая доказала свою универсальность целым рядом новейших результатов, соответствующих экспериментальным испытаниям.

Чтобы сохранить максимальный уровень общности в учёте нелинейных механических свойств материалов и учитываемых воздействий, автором диссертационного исследования была использована формальная запись системы определяющих соотношений в пространстве нормированных напряжений с привлечением оптимального, для целей исследования, потенциала деформаций. Конкретизация параметров воздействия химически агрессивной окружающей среды учитывалась в рамках подхода к моделированию, разработанного В.В. Петровым и И.Г. Овчинниковым (функция деградации).

Практические результаты применения обобщённой теоретической модели были получены для многослойных армированных плит с защитным покрытием под воздействием хлоридсодержащей среды. Для получения числовых моделей работы плит был создан комплекс программ на базе новой модели гибридного конечного элемента [183–185].

1.5 Термоупругость материалов, чьи механические характеристики зависят от вида напряженного состояния

Температура является одним из факторов постоянного воздействия среды эксплуатации на строительное сооружение. Экспериментально установлено (1972 г., Р.Е. Hart [290]), что коэффициент линейного температурного расширения значимую

демонстрирует зависимость от сочетания напряжений, развивающихся в несущем элементе конструкции.

В опытах Р.Е. Hart [290] фигурируют графиты AXF, ZTA и ATJ, а их целью был контроль изменения двух параметров: модуля упругости и коэффициента линейного температурного расширения. Эксперименты проводились с предварительно нагруженными образцами.

Использовались одноосное растяжение и сжатие, объёмное (гидростатическое) сжатие. Учитывая наличие гранулированной структуры графита ZTA, нагружение учитывало ориентацию гранул.

В таблицах 1.2–1.3 приводятся характерные значения контролируемых в экспериментах параметров. Оценка влияния изменения температуры на относительные удлинения образцов при разных видах нагружения показывает, что максимум различий может достигать значений от 90% (одноосное сжатие) до 105% (гидростатическое сжатие).

Таблица 1.2 – Изменение удлинений образцов при $T = 800\text{ }^{\circ}\text{C}$

Марка графита	Изменение относительных удлинений, %					
	Одноосное растяжение	Одноосное сжатие			Гидростатическое сжатие, МПа	
		% предела прочности				
	90%	90%	60 %	30 %	206,8	103,4
AXF	–	3,0	–	–	6,0	1,8
ZTA1	–8,2	29,3	–	–	–	–
ZTA2	–27,8	47,0	–	–	134,5	92,5
ATJ	–12,0	89,2	37,5	15,0	105,2	80,5

Таблица 1.3 – Изменение предела прочности образцов при $T = 800\text{ }^{\circ}\text{C}$

Марка графита	Предел прочности, МПа		Относительное удлинение при $T=800\text{ }^{\circ}\text{C}$ (нулевое НДС)
	Одноосное сжатие	Одноосное растяжение	
AXF	130,30	15,62	0,00616
ZTA1	103,52	9,57	0,00165
ZTA2	68,77	13,79	0,00710
ATJ	66,35	15,63	0,00247

Подтверждение существования связи коэффициентов линейного температурного расширения с характеристиками напряженного состояния, получены также в работах J.N. Reddy, C.W. Bert, Y.S. Hsu [312–316]. Важным в этих исследованиях

оказался не только факт подтверждения обсуждаемой зависимости, но и то, что подтверждение носило теоретический (модельный) характер.

Выполненные в разное время исследования подтверждают, что зависимость от вида напряженного состояния распространяется не только на механические жесткости, но и оказывает влияние на термомеханические характеристики материала, причём в весьма значительной степени. Для расчётов ответственных сооружений, работающих в условиях переменной температуры, все указанные зависимости должны быть учтены для обеспечения достаточного уровня безопасности.

Рассмотрим некоторые существующие теории деформирования, которые учитывают зависимость физических характеристик материала от напряженного состояния и принимающие во внимание температуру.

Исследуя задачи об НДС конструкций из материалов, демонстрирующих эффект разномодульности, С.А. Амбарцумян использовал ранее созданную им теорию с целью включения её в орбиту задач термоупругости, в которых температурные воздействия представляются независимыми видами нагрузки, которые просто добавляются в число действующих сочетаний [7–9]. Такие задачи принято называть задачами несвязанной термоупругости. Модель строилась по аналогии с уравнением Дюамеля-Неймана [130, 284, 285], что как раз и предполагает создание дополнительных температурных деформаций в качестве независимой нагрузки. В рамках этого же подхода, коэффициенты линейного температурного расширения α_i не могли изменяться, а деформирование ограничивалось флуктуациями объёма. Кроме того, использование принципа независимости воздействий требует считать, что значения параметров, характеризующих механические свойства, также остаются постоянными.

Моделирование температурного воздействия выполнялось в виде функции пространства-времени с некоторым начальным значением, удовлетворяющей уравнению теплопроводности. Вводилась также модификация потенциала деформаций со слагаемыми, учитывающими наличие температуры:

$$W = 0,5 \left[(A + B \text{Sign} \sigma_1) \sigma_1^2 + (A + B \text{Sign} \sigma_2) \sigma_2^2 + (A + B \text{Sign} \sigma_3) \sigma_3^2 \right] + C(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3) + 3\alpha_i \theta \sigma \quad (1.53)$$

Здесь функция изменения температуры определена разностью текущего и начального значений $\theta = T - T_0$ – в материальной точке среды несущего элемента при нулевом НДС.

На тех же основах продолжилось построение моделей в работах Н.Г. Тамурова и Г.В. Туровцева [171–173, 235].

Продолжение исследований привело к моделям N. Kamiya [301, 302], который решил учесть зависимость свойств материала от температуры, оставаясь в рамках теоретических основ, использованных С.А. Амбарцумяном. Доопределяя такую зависимость, N. Kamiya представлял её формально, как полиномиальную степени не выше второй.

Модели В.М. Панфёрова [139, 140] продолжили расширять область применения учёта температурных воздействий, как дополнительной причины появления изменения НДС в несущих элементах конструкций, применительно к огнеупорной керамике. Этот материал обладает свойством изменять значения параметров своих свойств в качестве отклика на изменение компонентного состава тензора напряжений. Формализация моделей была оформлена с учётом воздействия температуры и свойства упругопластичности материала для условий, близких к пропорциональному нагружению:

$$\sigma_{ij} = 2G(\beta)\psi(T/T_0)[1 - \omega(\bar{e}_i)](e_{ij} - e\delta_{ij}) + 3K[T/T_0, \text{Sign}(e)]e\delta_{ij}, \quad (1.54)$$

Здесь использованы обозначения: $\bar{e}_i = e_i / [e_s(\lambda)\chi(T/T_0)]$; $\beta = \lambda / (1 + \lambda)$; $\lambda = e / e_i$; $e_i = \sqrt{2/3\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$; $\varepsilon_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij}e$; $\omega(\bar{e}_i) = 0$, $\bar{e}_i \leq 1$; $e_s(\lambda)$ – предел текучести.

Введённые параметры, обобщающие основные критериальные постоянные, представлены в виде: $G(\beta)\psi(T/T_0) > 0$ и $e_s(\lambda)\chi(T/T_0) > 0$. Предполагается, что для их определения достаточно четырёх опытов:

- одноосного сжатия (с определением функции $\omega(\bar{e}_i)$);

- одноосного растяжения;
- кручения;
- наложения на одноосное сжатие гидростатического давления.

В исследованиях С.W. Bert и J.N. Reddy [315] рассматривается влияние знака напряжений на коэффициенты α_i . Для этого используется был рассмотрен элемент в виде многослойной плиты из ортотропного материала, по-разному работающего на растяжение и сжатие. Связь напряжений и деформаций автором оформляется в виде:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11kl} & Q_{12kl} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12kl} & Q_{22kl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44kl} & C_{45kl} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45kl} & C_{55kl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} - \alpha_{t1kl}\theta \\ e_{22} - \alpha_{t2kl}\theta \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}. \quad (1.55)$$

Здесь k – отображает разномодульность компонентов матрицы интегральных жесткостей и вектора коэффициентов линейного теплового расширения:

- $k = 1$ при растяжении вдоль направления армирования;
- $k = 2$ при сжатии вдоль направления армирования;
- $k = 0$ при отсутствии разницы в реакции на смену направления.

Именно переключателем k осуществляет учёт зависимости Q , C и α_i от вида текущих деформаций по направлениям расположения армирующей волокон. Слои идентифицируются номером l .

Расширяя возможности теоретического подхода и практических потребностей, для формализации явления наведенной анизотропии с учётом нелинейности в условиях термомеханического воздействия, привлекают пространство шести измерений, предложенное А.А. Ильюшиным [62, 63].

В работе [163] предложена идея, которая заключается в том, чтобы в пространстве А.А. Ильюшина с помощью аддитивной составляющей векторного представления определяющих соотношений учесть влияние температуры по всем направлениям анизотропии:

$$\bar{\Xi} = \left(C + \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_{\alpha} \left(\vec{i}_{\alpha} \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \vec{i}_{\alpha} + (\bar{\sigma} \cdot \vec{i}_{\alpha}) e \right) \right) \cdot \bar{\sigma} + \vec{a}(T - T_0),$$

где \vec{a} – вектор пространства А.А. Илюшина, шесть компонентов которого вводят в определяющие соотношения коэффициенты линейного температурного расширения, связанные с анизотропией. Другие обозначения определяют компоненты определяющих соотношений для анизотропии объёма материала без учёта температуры.

Рисунок 1.28 иллюстрирует результаты моделирования на базе подхода М.Ю. Соколовой и Ю.В. Астапов в сравнении с данными опытов, предоставленным работой [163].

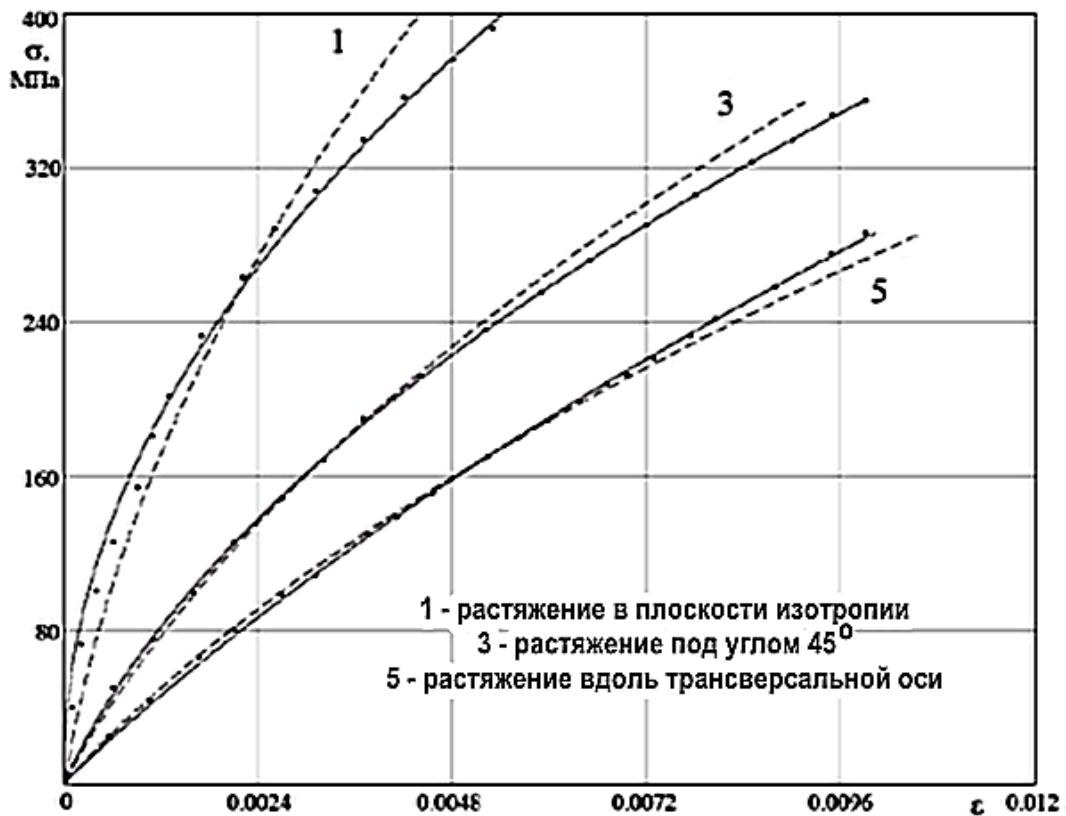


Рисунок 1.28 – Данные для оценки теоретической модели Соколовой-Астапова

На рисунке 1.28 сплошными линиями представлены результаты аппроксимации экспериментальных данных, которые идентифицируются точками.

Расширение круга эффектов, связанных с температурным воздействием, выполнено в С.М. Шляхова [262, 263], который вводит в свою модель фактор пористости материала несущего элемента. Формализация учёта пористости вводится посредством представления модулей одномерными полиномами степени не выше второй:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_0 \cdot (1 - k_1 \cdot T - k_2 \cdot T^2) \cdot (1 - a_1 \cdot P - a_2 \cdot P^2); \\ \mu(z) &= \mu_0 \cdot (1 - c_1 \cdot P - c_2 \cdot P^2 - c_3 \cdot P^3); \end{aligned} \tag{1.56}$$

в выражении (1.56) использованы обозначения: $E(z)$ – функция модуля упругости, индекс «0» относится к начальному значению модуля; $\mu(z)$ – функция коэффициента Пуассона, «0» относится к начальному значению коэффициента; T и P – температура и пористость в материальной точке; $k_1, k_2, a_1, a_2, c_1, c_2, c_3$ – постоянные.

В модели С.М. Шляхова для представления пористости применяется безразмерное выражение, функциональность которого обеспечивается функциями нормальных напряжений σ [262]:

$$P = P_0 \left(1 - \frac{\sigma}{E} \right) \left(1 + 3 \frac{\sigma}{E} \right);$$

здесь E – модуль упругости материала без пористости, а индекс «0» при P_0 относится к начальному её значению.

Оставаясь в рамках теоретических моделей несвязанной термоупругости, можно предлагать модели на основе любых определяющих соотношений, описывающих разнсопротивляемость, что наглядно демонстрируют работы [62–64, 95, 96, 146–147, 163, 173, 218, 231, 232, 252, 262, 263, 278, 283–285, 300, 302, 315, 323, 324].

Значительно меньше моделей предложено для связанной термоупругости, которая не только учитывала бы взаимовлияние температурных и механических воздействий, но и предлагала бы это делать для материалов, демонстрирующих эффект разнсопротивляемости.

Для этого направления разработки моделей была предложена методика А.А. Трещёва – Н.М. Матченко [62–64, 119, 231, 232], использующая специализированную модель для разнсопротивляющихся материалов, которая оснащена замыкающими разрешающую систему уравнений соотношениями связности полей напряжений и температур, полученную в рамках теории неравновесной термодинамики. Важно отметить, что в результате высокого уровня обобщённости базовых разрешающих уравнений, удалось отказаться от гипотезы ограниченности диапазона указанной связи как для значений температур, так и для величин напряжений.

Результирующая термомеханическая модель относится к классу квазилинейных, поскольку оперирует малыми значениями относительных приращений температуры. Отсюда и проистекает квазилинейность [331], так как при таком уровне пошаговых

изменений температуры уровнем их влияние на характеристики НДС и характеристики свойств материала в пределах отдельного шага можно пренебречь. В качестве независимых параметров можно принять компоненты тензора напряжений σ_{ij} и температуру T .

Как и в других моделях, нелинейные свойства материала (в данном случае разносопротивляющегося) учитываются с привлечением пространства нормированных напряжений, идеи и способы применения которого изложены в [118, 119]. Используется также термодинамический потенциал Гиббса, который в общем виде представляется соотношением [218, 231, 232]

$$\Gamma = \Gamma(\psi, \varphi, S_0, T). \quad (1.57)$$

Для конкретизации вида функции (1.57) используется своеобразный вариант метода разделения переменных в форме:

- зависимость от нормы второго пространства S_0 считать полиномиальной;
- аргументами функций-коэффициентов разложения считать инвариантов ψ , φ и температуру.

Применяя положения, принятые выше, и второе нормированное пространство, получает *нелинейное* соотношение:

$$-\Gamma = a_0(T) + a_1(T, \psi, \varphi)S_0 + a_2(\psi, \varphi)S_0^2. \quad (1.58)$$

Функция (1.58) удовлетворяет условия обнуления энергии Гиббса при нулевом начальном НДС и отсутствии начальной температуры.

Функции-множителя параметра a_i авторы раскладывают в степенные ряды в окрестности начального естественного состояния.

Параметры, определяемые только температурой представлены выражением:

$$a_0(T) = C_\sigma \frac{(\theta)^2}{2T_0}.$$

где C_σ – теплоёмкость материала, T_0 – начальная температура тела ([218]).

Уравнение (1.58) отображает взаимовлияние НДС и температуры вторым слагаемым. Если считать, что главным фактором влияния является гидростатическое давление, то функцию-коэффициент a_1 также можно представить отрезком

ряда по $\xi = \sigma / S_0 = \cos\psi$. Отрезок этого ряда со степенью не выше второй, а по температуре – первой, позволяет получить приближение [218, 231]:

$$a_1(T, \psi) = [(b_{11}\xi + b_{12})\sigma + b_{11}\eta\tau]\theta. \quad (1.59)$$

Здесь аргументами являются безразмерные переменные $\xi = \sigma/S_0$ и $\eta = \tau/S_0$; $\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$ и $\tau = \sqrt{S_{ij}S_{ij}/3}$ – осреднённые параметры нормальных и касательных напряжений; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$; $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$; b_{11}, b_{12} – постоянные.

В итоге, уравнение (1.59) является модельным выражением зависимости коэффициентов температурного расширения от компонентного состава тензора напряжений.

Слагаемое с функцией-коэффициентом a_2 представляет собой часть, не связанную с температурой, то есть определяется механическими законами деформирования. Его детализация представлена выражением:

$$a_2(\psi, \varphi)S_0^2 = (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_3\xi)\sigma^2 + (\tilde{b}_2 + \tilde{b}_4\xi + \tilde{b}_5\eta \cos 3\varphi)\tau^2, \quad (1.60)$$

где \tilde{b}_n – постоянные механических характеристик [231, 232], а $\cos 3\varphi$ – инвариант, который имеет смысл фазового.

Преобразованный термодинамический потенциал (1.58) получает форму:

$$\begin{aligned} -\Gamma = & (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_3\xi)\sigma^2 + (\tilde{b}_2 + \tilde{b}_4\xi + \tilde{b}_5\eta \cos 3\varphi)\tau^2 + \\ & + C_\sigma \frac{(\theta)^2}{2T_0} + [(b_{11}\xi + b_{12})\sigma + b_{11}\eta\tau]\theta. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Применяя приёмы той же методики, но обратившись к координатам первого нормированного пространства, получим преобразованный потенциал Гиббса

$$\Gamma = \Gamma(I_\alpha, III_\alpha, S, T),$$

который трансформируем в аналог (1.60):

$$-\Gamma = a_0(T) + a_1(T, I_\alpha)S + a_2(I_\alpha, III_\alpha)S^2. \quad (1.62)$$

Повторяя выкладки с выражением (1.60), получим:

$$a_1(T, I_\alpha) = B_1\theta + A_1\theta I_\alpha,$$

где I_α – первый инвариант напряжений в соответствующем пространстве, постоянными которого являются A_1, B_1 , как это получено в [119, 232].

Итоговое выражение плотности энергии Гиббса в обобщённом пространства напряжений № 1 определено в форме:

$$\begin{aligned} -\Gamma = & \left[(A_i + B_i \alpha_1) \sigma_1 + (A_i + B_i \alpha_2) \sigma_2 + (A_i + B_i \alpha_3) \sigma_3 \right] \theta + \\ & + 0,5 \left[(A + B \alpha_1) \sigma_1^2 + (A + B \alpha_2) \sigma_2^2 + (A + B \alpha_3) \sigma_3^2 \right] + \\ & + \left[C + E \alpha_3 + D(\alpha_1 + \alpha_2) \right] \sigma_1 \sigma_2 + \\ & + \left[C + E \alpha_1 + D(\alpha_2 + \alpha_3) \right] \sigma_2 \sigma_3 + \\ & + \left[C + E \alpha_2 + D(\alpha_1 + \alpha_3) \right] \sigma_1 \sigma_3 + C_\sigma \frac{(\theta)^2}{2T_0}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

(1.61) и (1.63) являются представлением одного и того же потенциала в разных системах обобщённых координат, что открывает дополнительные возможности для выдвижения предложений, определяющих вид функций, разлагаемых в ряды.

Эквивалентность выражений можно проверить, если использовать связь между постоянными в виде $b_{i1} = \sqrt{3}B_i$; $b_{i2} = 3A_i$, как это показано в [232].

На этом фоне недостатком выглядит тот факт, что не представляется возможным описать зависимости функций-множителей a_i от состава компонентов тензора напряжений. К недостаткам следует отнести и отсутствие учёта температурных эффектов в сформулированных на основе (1.61) или (1.63) постановках задач о квазистатике и динамике объектов расчётного моделирования [62–64, 331].

В представленной диссертационной работе предлагается модель разрешающей системы уравнений задач связанной термоупругости, которая позволяет брать в качестве объектов расчётного моделирования материалов, нелинейность свойств которых определяется зависимостью от компонентного состава тензора напряжений, а механические свойства одновременно испытывают влияние изменений температуры, в свою очередь, вызывающих изменение механических свойств. Важно отметить, что исходный материала в нулевом НДС обладает заведомо нелинейными свойствами, которые представлены, например, явно выраженной разнсопротивляемостью.

Теоретической основой разработки этой разрешающей системы уравнений стал подход, описанный в работах А.А. Трещёва-Н.М. Матченко [118, 119].

Но использование модели в практических целях потребовало создания модифицированного конечного элемента гибридного типа, что, в свою очередь, поставило задачу разработки алгоритма для получения числовых массивов, описывающих НДС объекта моделирования. Эта задача также была решена созданием пакета прикладных программ, использующего разработанный КЭ.

В результате было выполнено решение ряда задач по определению НДС оболочек разной геометрии (в плане). Полученные результаты подтвердили адекватность учёта всех заявленных эффектов и взаимовлияний.

1.6 Механика разрушения для материалов со свойствами, зависимиыми от компонентного состава тензора напряжений

В строительной отрасли появилась практика использования материалов, которые в условиях экспериментального исследования показывают эффекты, свидетельствующие о существовании связи этих эффектов с компонентным составом матрицы напряжений. Среди материалов, демонстрирующих такую зависимость, находятся как традиционные металлы и сплавы, так и материалы, обладающие кристаллической структурой или пористостью (среди них материалы грунтовых и скальных оснований, а также материалы искусственного происхождения типа керамики).

Разрушение несущего элемента конструкции является финишной стадией накопления повреждений, которые начинаются с зарождения микродефектов сплошности. Одним из вариантов образования микродефектов является нарушение однородности среды первоначально сплошного материала или нарушение целостности границ контакта на уровне компонентов композиционного материала. Таким материалом в строительной отрасли является бетон, а на уровне компонентов укрепления бетона – железобетон. Имеются, конечно, и другие материалы подобного типа, которые называют композитами.

Эффекты проявления нарушений сплошности среды материала в теории и практике расчётного моделирования оцениваются, как, правило, феноменологически. Для этого существует специальное понятие «аварийная ситуация». Её признаками в числовой модели являются значения характеристик НДС несущего элемента, которые представлены своими сочетаниями в форме критериев предельных состояний. Важно

подчеркнуть, что указанные критерии не являются функциями времени или скоростей изменения значений характеристик НДС. Таким образом, механизмы образования аварийных ситуаций на микроуровне не раскрываются.

Развитие строительной механики в направлении прогноза аварийной ситуации является важнейшим в её прикладном значении [182]. Успехи в точности определения уровня аварийности, измеряемого запасом прочности или несущей способности, зависят от точности расчётного моделирования числовой модели распределения значений характеристик НДС как в отдельном несущем элементе, так и по элементам конструкции.

Углублённые подходы исследователей при решении этой проблемы требуют пересмотра системы гипотез по целому ряду направлений и в механике материалов, и в механике деформируемых твёрдых тел [153].

Одним из магистральных направлений в совершенствовании моделей, уточняющих числовую модель НДС, стало направление, в котором механизм образования микродефектов связывают с образованием трещин. Их слияние в конгломераты приводит к появлению макродефектов-трещин, которые под влиянием НДС способны перемещаться в среде материала несущего элемента и, в конечном итоге, выходя к поверхности, интенсифицировать процесс разрушения этого элемента. Естественно, этот процесс является стадийным, а потому задачей моделирования является отследить переходы между стадиями и дать критерии их актуализации. Такие критерии в теории вопроса формализуются в виде формул, а в расчётном моделировании – числовыми данными.

Примером описанного выше подхода может служить одна из моделей, которая различает состояния упругое и состояние трещиноватости. Граница между состояниями формализуется в виде $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ в пространстве координат главных напряжений или в форме $F(I_1, J_2, \theta) = 0$, которая отражает тот же критерий в цилиндрической системе координат инвариантов Лодэ.

На практике применяются частные случаи указанных формализаций, которые используют конкретный состав компонентов вектора главных напряжений.

Они получили названия, связанные с историей развития науки об аварийных ситуациях, – критерии прочности (разрушения).

Исследования, в процессе которых получались критерии прочности слились в механику разрушения, основы которой в наше историческое время составили работы Н.И. Мусхелишвили, С.Г. Михлина, С.Г. Лехницкого, С.А. Христиановича, В.В. Соколовского и др. [5, 255–260]. В процессе развития оформились теоретические подходы, фиксирующие признаки разрушения на феноменологическом уровне, в трудах П.П. Баландина [15], И.Н. Миролубова [120], Ю.И. Ягна [264, 265], Г.С. Писаренко и А.А. Лебедева [153], а также других исследователей.

Одной из методик совершенствования создания критериев прочности стало использование системы координат главных напряжений, в которой феноменологически конструируемые соотношения можно было визуализировать поверхностью. С целью получения критериев большего уровня обобщённости применялись координатные системы, использующие различные системы инвариантов тензора напряжений.

Формулируемые критерии опирались на экспериментальные данные различных материалов. Например, для материалов, обладающих свойством хрупкости, были получены критерии О. Мора, М.М. Филоненко-Бородича, Ю.И. Ягна, Е. Шлейхера, А. Надаи [5, 15, 53, 120, 153, 248] и др.

Совершенствования первоначально предложенных критериев прочности привело к моделям О. Мора [53, 174] (оггибающие кривые), А.Е. Цыбулько [247–249] (разноспротивляющиеся хрупкие материалы) и др. Уточним сведения о подходах, которые лежат в основе модификации критерия прочности.

О. Мор исходил из гипотезы главенства касательных напряжений, объясняя это тем, что именно касательные напряжения разрушают образцы и что их предельные значения учитывают сопутствующие значения нормальных напряжений. Такой вывод был сделан на базе анализа большого числа экспериментов, что обеспечивают практическую значимость подхода этого автора.

Важно, что аналитическая формулировка критерия Мора допускает различные модификации, если её представить графически в пространстве обобщённых координат. Результатом реализации модификаций оказались критерии прочности,

применяющиеся для упругопластического материала и имеющие геометрическую интерпретацию в виде огибающих плоских кривых разного характера [53] в пространстве главных напряжений, представленном плоскостью Мора.

Но все попытки модификации, несмотря на их многочисленность, не решили главную проблему критерия Мора – двумерное представление о системе координат главных напряжений.

Критерий всё же был модифицирован А. Надаи [53, 255], который выполнил формализацию критерия Мора на октаэдрической площадке, что и привело к учёту всех компонентов вектора главных напряжений. Ю.И. Ягн предложил критерий [264, 265], обобщающий критерий П.П. Баландина [15], но по-прежнему не учитывающий среднее напряжения среди трёх главных.

В работах [53, 73, 174] предложена геометрическая интерпретация критерия прочности с использованием представления о девиаторной плоскости тензора напряжений.

Скомбинированы критерии двух видов напряженного состояния (растяжения и сжатия) и в работе [6] (Х. Альтенбах, К. Туштев), что позволило обсуждать разрушение разносопротивляющихся изотропных полимеров. Связанность двух критериев формализована экспонентой. Геометрическая интерпретация критерия демонстрирует асимптотические свойства при стремлении значения гидростатического сжатия к нулю и бесконечности.

Простота аналитической формулировки критерия О. Мора и по сей день стимулирует попытки расширить область его применения для феноменологической трактовки некоторых эффектов, обнаруживаемых опытным путём.

И хотя опытные данные в достаточной полноте отображают ситуацию с испытуемым образцом, попытки втиснуть эти данные в критерии типа Мора, могут быть успешными только при воспроизведении условий эксперимента. Реальные же испытательные образцы – несущие элементы, – таким требованиям соответствовать не могут. Отсюда проистекает утрата главного достоинства предложений типа критерия Мора – опоры на экспериментальные данные.

Поэтому были продолжены поиски теоретических подходов к созданию формулировок критериев прочности (разрушения), но на более широком поле поиска.

Вариантом изменения характера основы для обоснования теории критерия является обращение к инвариантной трактовке составляющих характеристик НДС, отвечая на вопрос о том, какой из инвариантов отвечает за изменение формы, а какой – за изменение объёма. Таким образом, представление Мора о главенствующий роли касательного напряжения заменяется представлением о роли девиатора тензора напряжений (его второго инварианта), а роль нормальных напряжений отводится шаровому тензору. Процесс нарушения прочности (разрушения) теперь сопровождается изменением формы (разрыхление с образованием трещин) и объёма (раскрытие трещин и выход их на поверхность несущего элемента).

Отсутствие единого критерия прочности даже такого совершенного материала как сталь, указывает на то, что такая задача для пористых материалов, обладающих свойством хрупкости, разномодульным сопротивлением и другими усложняющими деформирование свойствами, является ещё более сложной.

В этих обстоятельствах, руководствуясь идеями классиков механики в области прочности (О. Мора, Р. Мизеса, А. Надаи и др.), можно исследовать возможность расширение класса материалов с едиными критерием прочности при различающихся их свойствах, включая пористость. Именно к таким критериям относятся предложения П.П. Баландина [15] и Друккера – Прагера [53, 174]. Испытания при трёхосном напряжённом состоянии показывают, что зависимость между первым инвариантом тензора и вторым инвариантом девиатора при малых напряжениях сжатия можно графически аппроксимировать некоторой кривой. При дальнейшем увеличении напряжений эта зависимость асимптотически приближается к прямой, а поверхность прочности (текучести) к круговому цилиндру.

Несмотря на значительное количество работ по механике разрушения, в том числе для разносопротивляющихся материалов и материалов, чьи механические свойства зависят от вида напряжённого состояния, существующие подходы и определяющие соотношения не описывают всего многообразия реальных процессов разрушения. Наиболее сложным случаем является разрушение композиционных

материалов, где стадия рассеянного разрушения является достаточно сильно выраженной, и магистральная трещина зачастую продвигается уже по повреждённому материалу. Возникновение микродефектов является причиной последующего окончательного разрушения, именно они влияют на механические и физические характеристики материала, значение модуля упругости, предела пропорциональности, поверхность текучести и другие параметры модельного представления о стадиях и критериях этого явления.

Как правило, для каждой конструкции имеется стадия деформирования, которая характеризуется образованием дефектов в материале, их накоплением и образованием трещины, что может приводить к полному разрушению несущего элемента в процессе эксплуатации. Вблизи вершины трещины существует особая область, в которой происходят процессы образования и развития трещинообразования. В связи с этим, значимый интерес для механики твёрдого тела и механики разрушения, представляет собой решение задачи о распределении напряжений и деформаций около вершины трещины при наличии дефектов материала в этой области. Математическое и числовое описание такого распределения позволяет более точно представить механизмы разрушения для различных материалов, в том числе для обладающих неклассическими свойствами. Наличие таких данных даст дополнительную информацию о процессах и причинах разрушения твёрдых деформируемых тел, что поможет совершенствованию критериев прочности.

В диссертационной работе на базе применения методики нормированных пространств напряжений, предложенной А.А. Трещёвым, Н.М. Матченко, впервые решена задача механики разрушения для полубесконечной пластины из нелинейного изотропного материала, свойства которого зависят от компонентного состава тензора напряжений, с учётом дефектов в форме трещин нормального разрыва и сдвига. Продемонстрированы возможности решения задач механики разрушения с помощью представленных в диссертации определяющих соотношений для начально-изотропных материалов, чьи механические свойства зависят от вида напряжённого состояния.

1.7 Выводы по главе 1

Выполненный аналитический обзор позволяет сделать следующие выводы:

1. Нормативные требования по расчётному моделированию принимают во внимание действующие методики, которые практически не ориентированы на нелинейное моделирование. Линейные же модели вполне обходятся упрощёнными представлениями как о топологии расчётной схемы, так и о методике расчётов, основываясь, фактически, на достижениях сопротивления материалов и классической строительной механики. Такая ситуация приводит к повышенному уровню погрешностей числовой модели прогнозного поведения конструкции, так как действительное распределение характеристик НДС и их значений мало помогает в оценке источников возможных аварийных ситуаций. По этим причинам требуется дальнейшее совершенствование нормативной базы в области расчёта железобетона на основе новых теоретических и расчётных моделей поведения материалов в составе строительных конструкций.

Рассмотренные модели бетона в качестве разносопротивляющегося материала слишком большое внимание уделяют отдельным экспериментально обнаруженным факторам механической работы, но не рассматривают прочие их в совокупности. Например, игнорируются дилатация и зависимость деформационных характеристик бетона от компонентного состава тензора напряжений, несмотря на современный уровень развития МКЭ и проработки численных методов реализации расчётных моделей в системах САЕ.

2. Расчётное моделирование фундаментов на практике применяет модели упругого поведения деформируемого основания. Такие модели не могут давать адекватный прогноз распределения значений характеристик НДС в течении срока эксплуатационного периода. Причины такого положения заключаются в отсутствии в широком применении моделей работы системы «здание + основание», так как подобный подход требует сугубо нелинейного расчётного моделирования, которое учитывало бы изменения и механических характеристик материала, и его поврежденности, и воздействия окружающей среды, и изменение свойств грунтового основания во времени.

3. Согласно статистике, около 75% существующих зданий и сооружений в эксплуатационный период своего существования испытывают воздействие химически активной окружающей среды. Это относится и к атмосфере, и к грунтовым водам, и к деятельности производств, совершающих выбросы концентрированных составов активных ингредиентов.

Наблюдения и прямые эксперименты доказывают существования ряда эффектов, которые вызываются в материале несущих элементов агрессией окружающей среды.

К сожалению, приходится констатировать, что до сего времени нормативная документация мало способствует распространению наработанных моделей влияния химически активных эксплуатационных сред, в которых излагаются методы учёта факторов изменения физико-механических свойств материалов строительных конструкций под указанными воздействиями. Между тем, эти воздействия продолжают уменьшать проектные запасы прогнозной жизнеспособности и безаварийности, зато возрастает экономическая составляющая стоимости стадии эксплуатации строительного объекта в его жизненном цикле.

Что касается существующих теорий учёта последствий взаимодействия материалов несущих элементов с окружающей средой в её агрессивном проявлении, то их структура ориентирована на экспериментальные данные, что вполне понятно. Но единого источника таких данных нет, а в его отсутствии наблюдаются разногласия и в теоретических моделях. Однако исследования продолжаются. В частности, такие факторы нелинейного поведения конструкционных материалов, как разносопротивляемость и повреждаемость, могут существенно уточнить получаемые прогнозные модели НДС в условиях химически активной окружающей среды.

4. В настоящее время исследователями проявляется значительный интерес к взаимодействию температурного и силового нагружения, которое закреплено введением термина «связанная термоупругость». На самом деле проблема ставится более широко, так как рассматривается весь диапазон характеристик НДС, точно также как новые виды учитываемых эффектов поведения материалов: повреждаемость, анизотропия, разносопротивляемость и др.

Новые модели связанной термоупругости создаются с использованием соотношений термодинамики и вариационного подхода. Это позволяет формулировать

более общие постановки для разрешающей системы механико-математических моделей. В том числе, более полно учитывать наработки нелинейных направлений в строительной механике, механике деформируемого твёрдого тела, вычислительной механике. Такой подход обещает обогатить представление о механических эффектах деформирования температурной составляющей этих эффектов в рамках одной модели. Понятно, что без новых вычислительных алгоритмов для решения соответствующих систем уравнений выйти на уровень практического применения даже самых совершенных построений не удастся, поскольку по-прежнему мерилom достоверности моделирования остаются экспериментальные данные

5. Существование аварий строительных объектов не позволяет ослабить интенсивность исследований в области прочности несущих конструкций и поиска факторов их обрушения. В основе таких исследований находятся поиски достоверного описания разрушения отдельного несущего элемента. Однако на сегодня известно, что получить достоверную информацию о состоянии несущего элемента можно, только располагая точными количественными значениями характеристик НДС. Что же касается теоретических предложений по механико-математической формализации, которые предоставляют такую возможность, то их ищут на путях учёта всей совокупности нелинейных свойств материала, проявляющихся в самых разнообразных условиях деформирования.

В этой связи последовательность событий дефект-повреждение-микротрещина- макротрещина-разрыв сплошности материала стала одним из направлений в теоретической механике разрушения. Особые надежды возлагаются на экспериментальные данные, подтверждающие наличие зависимости механических характеристик конструкционных материалов от состава ненулевых компонентов тензора напряжений. Такая зависимость получила наименование «зависимость от вида напряжённого состояния». Результаты исследований в этом направлении показывают их перспективность и актуальность.

2 ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

Деформационные и прочностные характеристики композитных материалов, таких как железобетон, проявляют зависимость от компонентного состава тензора напряжений, которая при эксплуатационных нагрузках оказывается нелинейной. Для определения НДС нелинейных разносопротивляющихся материалов был предложен ряд определяющих соотношений [1, 7, 8, 25–28, 32, 43, 44, 55, 56, 68, 75, 88, 99, 102–104, 106, 109, 110, 121, 122, 127, 140, 142–144, 159–161, 171, 191–193] и прочие. Однако, практически все указанные модели имеют недостатки, ограничивающие их применение для расчёта конструкций, находящихся в сложном напряжённом состоянии [118]. Поэтому в данном диссертационном исследовании используется вариант уравнений состояния изотропных разносопротивляющихся материалов, базирующийся на методике нормированных пространств напряжений [118].

Проведённый анализ существующих методик по определению НДС конструкций, выполненных из физически нелинейных материалов со свойствами, зависимиыми от компонентного состава тензора напряжений, показал, что на данный момент не существует единых рекомендаций по выбору качественных характеристик состояния деформируемых сред. Так же было показано, что непротиворечивой и наиболее подходящей является методика, предложенная А.А. Трещёвым, Н.М. Матченко [118, 119, 174]. В своих работах авторы предлагают использовать для определения НДС два пространства нормированных напряжений.

2.1 Методика нормированных пространств напряжений для материалов, механические характеристики которых зависят от вида напряжённого состояния

В предложенных Н.М. Матченко и А. А. Трещёвым нормированных пространствах при постулировании физических зависимостей различные группы инвариантов тензоров напряжений заменяются характеристиками этих пространств [118, 119]. Рассмотрим данные пространства более детально.

Пространство № 1. В работах [118, 119, 174] рассматривается трёхмерное пространство главных напряжений, в котором напряжённое состояние задаётся вектором полного напряжения S (рисунок 2.1).

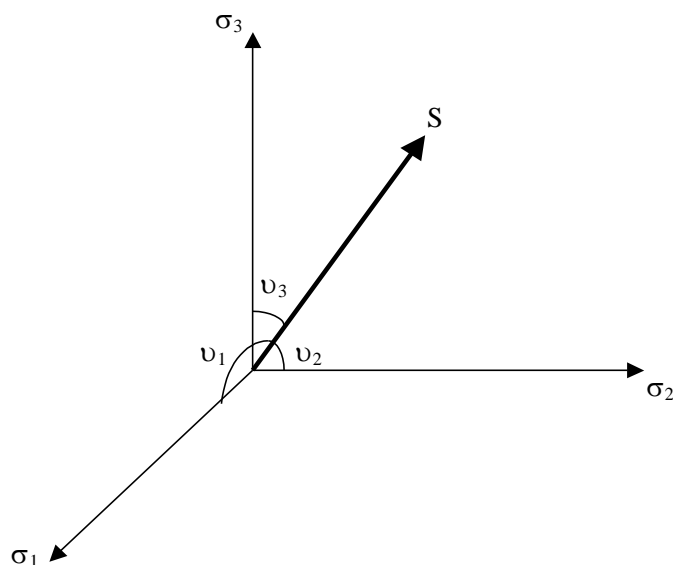


Рисунок 2.1 – Вектор полного напряжения

Этот вектор будет определен однозначно, если известны его модуль и направляющие косинусы. Используя главные напряжения σ_k , можно записать:

$$S = \sqrt{\sigma_k \sigma_k}; \quad \alpha_k = \text{Cos } J_k = \sigma_k / S, \quad (2.1)$$

где $k = 1, 2, 3$; α_k – направляющие косинусы вектора S .

Авторы [118, 119, 174, 215] предлагают рассматривать модуль вектора S как норму векторного пространства главных напряжений. При таком представлении направляющие косинусы α_k получают смысл главных нормированных напряжений, т.е. $|\alpha_k| \leq 1$. Так как нормированные напряжения связаны условием нормировки:

$$\alpha_k \alpha_k = 1, \quad (2.2)$$

то они не могут быть произвольными.

В описанном наборе параметров, характеризующих напряжённое состояние материала, норма пространства (S) исполняет функцию количественной характеристики, а главные нормированные напряжения – функции качественных характеристик. Система инвариантов для главных нормированных напряжений принимает вид:

$$I_\alpha = \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3; \quad II_\alpha = \alpha_k \alpha_k = 1; \quad III_\alpha = \alpha_k \alpha_k \alpha_k. \quad (2.3)$$

Следовательно, при рассмотрении напряжённого состояния в точке, переход от главных напряжений к нормированным осуществляется достаточно просто. При этом мы получаем возможность однозначного определения напряжённого состояния тремя инвариантами нормированного пространства: I_α , III_α , S [118, 119, 174, 215].

Для перехода от главных осей к произвольной ортогональной системе координат предлагается по аналогии ввести инвариантный вектор напряжения в пространстве компонентов тензора напряжений. При этом модуль данного вектора будет вычисляться по формуле

$$S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}, \quad (2.4)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, которые равны проекции вектора S на координатные оси с учётом соответствующих площадок. Направляющие косинусы этого вектора определяются следующим образом:

$$\alpha_{ij} = \sigma_{ij} / S. \quad (2.5)$$

Таким образом, напряжённое состояние в точке можно характеризовать модулем вектора S (2.4) и его направляющими косинусами α_{ij} (2.5).

В произвольной системе координат совокупность параметров α_{ij} можно рассматривать как тензор нормированных напряжений с нормой пространства S . По аналогии с главным нормированным пространством в произвольной системе координат условие нормировки примет вид:

$$\alpha_{ij}\alpha_{ij} = 1. \quad (2.6)$$

В большинстве случаев рассмотренные пространства нормированных напряжений выгоднее заменить на пространство, норма которого связана с октаэдрической площадкой.

Нормированное пространство № 2. В работах [118, 119, 174, 215] вводится вектор полного напряжения на октаэдрической площадке S_0 , модуль которого определяется выражением

$$S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (2.7)$$

где $\sigma = \delta_{ij}\sigma_{ij} / 3$; $\tau = \sqrt{S_{ij}S_{ij} / 3}$; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$; δ_{ij} – символы Кронекера.

Вектор полного напряжения S_0 на октаэдрической площадке задаётся углами ψ , которые вектор S_0 образует с нормалью к этой площадке и углом φ – фазой напряжений (рисунок 2.2).

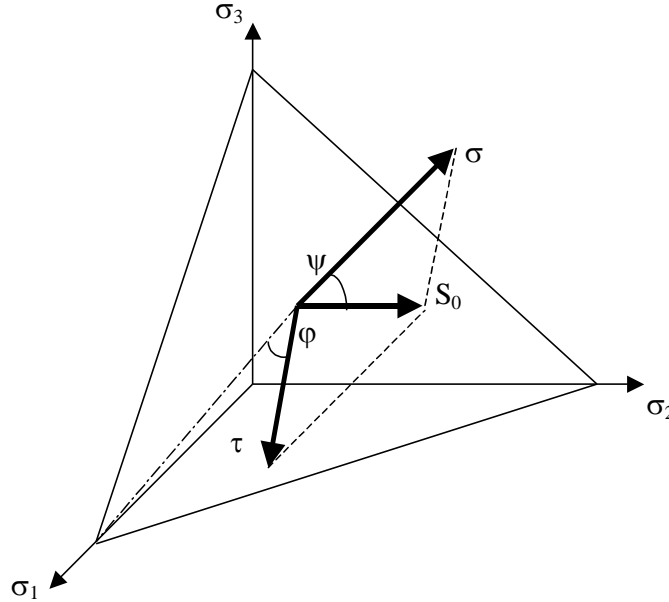


Рисунок 2.2 – Напряжения на октаэдрической площадке

Углы ψ и φ удобнее представить через гармонические функции:

$$\xi = \text{Cos}\psi = \sigma / S_0; \eta = \text{Sin}\psi = \tau / S_0; \text{cos } 3\varphi = \sqrt{2} \det(S_{ij}) / \tau^3, \quad (2.8)$$

где по аналогии с первым нормированным пространством модуль S_0 определяет норму второго пространства напряжений, а гармонические функции $\xi = \text{Cos}\psi$ и $\eta = \text{Sin}\psi$ трактуются как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке. Условие нормировки теперь получить вид

$$\xi^2 + \eta^2 = 1. \quad (2.9)$$

С учётом того, что существуют известные зависимости между главными и октаэдрическими напряжениями в форме

$$\sigma_k = \sigma + \sqrt{2}\tau \text{Cos}\varphi_k, \quad \sigma_k \sigma_k = 3(\sigma^2 + \tau^2), \quad (2.10)$$

получаем однозначную связь параметров 2-го пространства S_0 , ψ и φ с инвариантами 1-го – I_α , III_α , S , выражающуюся соотношениями:

$$S_0 = S / \sqrt{3}; \quad I_\alpha = \sqrt{3}\xi;$$

$$III_{\alpha} = (3\xi^3 + 9\xi\eta^2 + 1,5\sqrt{2}\eta^3 \cos 3\varphi) / \sqrt{3}, \quad (2.11)$$

где $\varphi_1 = \varphi$; $\varphi_2 = \varphi + 2\pi / 3$; $\varphi_3 = \varphi - 2\pi / 3$.

Предложенные во втором нормированном пространстве нормированные напряжения ξ , η и фазовый инвариант $\cos 3\varphi$ имеют простой геометрический смысл. При этом большинство экспериментов по определению сложного напряжённого состояния связаны с вычислением фазы напряжений φ . Таким образом, использование нормированного пространства, связанного с октаэдрической площадкой, для построения определяющих соотношений изотропных разносопротивляющихся материалов является оптимальным.

2.2 Потенциальные соотношения для изотропных материалов, со свойствами, зависимиыми от компонентного состава тензора напряжений

Описанные выше нормированные пространства напряжений были использованы для построения нескольких вариантов потенциальных соотношений для физически нелинейных разносопротивляющихся материалов в работах [117–119, 215, 218]. При этих построениях потенциал деформаций W определяется суммированием квазилинейной W_e и нелинейной W_p частей:

$$W = W_e + W_p. \quad (2.12)$$

В первых работах предлагалось в рамках нормированного пространства № 1 квазилинейную и нелинейную части описывать одинаково, а физическую нелинейность материала учитывать введением показателя степени n :

$$W_e = \Phi_e(I_{\alpha}, III_{\alpha})S^2; W_p = [\Phi_p(I_{\alpha}, III_{\alpha})S^2]^n, \quad (2.13)$$

где n – положительное число, в том числе дробное, Φ_e ; Φ_p – функции, определяемые с помощью полиномиальных разложений по степеням качественных характеристик напряжённого состояния до 3-й степени включительно. В своих работах [117–119, 215] авторы, пренебрегая одновременным влиянием на механические характеристики трех нормированных напряжений $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, приходят к потенциалу деформаций в виде W_1^* :

$$\begin{aligned}
 W_1^* = & (A_1 + B_1\alpha_1)\sigma_1^2 + (A_1 + B_1\alpha_2)\sigma_2^2 + (A_1 + B_1\alpha_3)\sigma_3^2 + \\
 & + [C_1 + D_1(\alpha_1 + \alpha_2)]\sigma_1\sigma_2 + [C_1 + D_1(\alpha_2 + \alpha_3)]\sigma_2\sigma_3 + \\
 & + [C_1 + D_1(\alpha_1 + \alpha_3)]\sigma_1\sigma_3 + \{(A_2 + B_2\alpha_1)\sigma_1^2 + (A_2 + B_2\alpha_2)\sigma_2^2 + \\
 & + (A_2 + B_2\alpha_3)\sigma_3^2 + [C_2 + D_2(\alpha_1 + \alpha_2)]\sigma_1\sigma_2 + \\
 & + [C_2 + D_2(\alpha_2 + \alpha_3)]\sigma_2\sigma_3 + [C_2 + D_2(\alpha_1 + \alpha_3)]\sigma_1\sigma_3\}^n
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

где n -положительное число, в том числе дробное, $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ – константы потенциала квазилинейной и нелинейной частей соответственно.

При рассмотрении нормированного пространства № 2 квазилинейная и нелинейная части потенциала (2.12) получены в виде:

$$W_e = F_e(\psi, \varphi)S_0^2; W_p = [F_p(\psi, \varphi)S_0^2]^n, \quad (2.15)$$

Используя уравнения связи между нормированными пространствами, потенциал деформаций приводят к виду:

$$\begin{aligned}
 W_1 = & (A_e + B_e\xi)\sigma^2 + (C_e + D_e\xi + E_e\eta\cos 3\varphi)\tau^2 + \\
 & + \left[(A_p + B_p\xi)\sigma^2 + (C_p + D_p\xi + E_p\eta\cos 3\varphi)\tau^2 \right]^n,
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $A_e, B_e, C_e, D_e, A_p, B_p, C_p, D_p$ – константы потенциала соответственно квазилинейной и нелинейной частей.

При этом связь констант потенциала W_1^* и W_1 описывается выражениями:

$$\begin{aligned}
 A_e = 3(A_1 + C_1); C_e = 3(A_1 - C_1 / 2); B_e = \sqrt{3}(B_1 + 2D_1); \\
 D_e = \sqrt{27}B_1; E_e = \sqrt{1,5}(B_1 - D_1); A_p = 3(A_2 + C_2); \\
 C_p = 3(A_2 - C_2 / 2); B_p = 3(B_2 + 2D_2); D_p = \sqrt{27}B_2; E_p = \sqrt{1,5}(B_2 - D_2).
 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Зависимости между деформациями и напряжениями получены путём применения формул Кастильяно к потенциалу W_1 . Результат этих операций имеет вид:

$$e_k = \frac{\partial W_1}{\partial \sigma_k}; \gamma_{ij} = \frac{\partial W_1}{\partial \tau_{ij}}; (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2.18)$$

Дифференцированием (2.16) с учётом (2.18) получено выражение

$$e_{ij} = 2C_e\sigma_{ij} / 3 + 2(A_e - C_e)\sigma\delta_{ij} / 3 + T_{ij}, \quad (2.19)$$

где T_{ij} – нелинейная составляющая уравнений состояния. T_{ij} определяется подобно выражению (2.12) суммой двух слагаемых:

$$T_{ij} = T_{ij}^e + T_{ij}^p . \quad (2.20)$$

Здесь T_{ij}^e – параметр, учитывающий зависимость механических свойств материала от компонентного состава тензора напряжений на квазилинейном этапе деформирования, а T_{ij}^p учитывает нелинейность экспериментальных диаграмм деформирования.

Слагаемые T_{ij}^e и T_{ij}^p определяются по формулам (2.21) и (2.22):

$$T_{ij}^e = 2\tau_{ij} (D_e \xi + E_e \eta \cos 3\varphi) / 3 + \{ (B_e \sigma^2 + D_e \tau^2) \xi_{,\tau_{ij}} + E_e \tau^2 [\eta (\cos 3\varphi)_{,\sigma_{kk}} + \eta_{,\sigma_{kk}} \cos 3\varphi] \} / 2 , \text{ при } i \neq j \quad (2.21)$$

$$T_{ij}^p = n [(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2]^{n-1} \left\{ 2\tau_{ij} (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) / 3 + [(B_p \sigma^2 + D_p \tau^2) \xi_{,\tau_{ij}} + E_p \tau^2 (\eta (\cos 3\varphi)_{,\tau_{ij}} + \eta_{,\tau_{ij}} \cos 3\varphi)] / 2 \right\} , \text{ при } i \neq j \quad (2.22)$$

где $\xi_{,\tau_{ij}} = -2\xi\eta^2 S_{ij} / 3\tau^2$ при $i \neq j$; $\eta_{,\sigma_{ij}} = 2\xi^3 S_{ij} / 3\sigma\tau$ при $i \neq j$;

$$(\cos 3\varphi)_{,\sigma_{ii}} = \sqrt{2} \left[(\sigma_{kk} - \sigma) (\sigma_{jj} - \sigma_{ii}) + (\sigma_{jj} - \sigma) (\sigma_{kk} - \sigma_{ii}) + \tau_{ij}^2 + \tau_{ik}^2 - 2\tau_{jk}^2 \right] / (3\tau^3) - \cos 3\varphi (\sigma_{ii} - \sigma) / \tau^2 ;$$

$$(\cos 3\varphi)_{,\tau_{ij}} = 2\sqrt{2} \left[\tau_{ik} \tau_{jk} - \tau_{ij} (\sigma_{kk} - \sigma) \right] / \tau^3 - 2\cos 3\varphi \tau_{ij} / \tau^2 .$$

Применение выражения (2.19) при решении краевых задач усложняется тензорно-нелинейным видом самого соотношения, поэтому в работах [118, 215] предложены варианты упрощения (2.16) в форме двух частных форм:

$$W_2 = (A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta) \tau^2 + \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta) \tau^2 \right]^n , \quad (2.23)$$

$$W_3 = A_e \sigma^2 + C_e \tau^2 + \left[(C_p + D_p \xi + E_p \eta) \tau^2 \right]^n , \quad (2.24)$$

Рассмотрим более детально построение потенциалов W_2 и W_3 . В работе [174] проанализирована зависимости фазовой характеристики $tg\omega$ от фазовых инвариантов $\cos 3\varphi$ в случае нелинейно разнсопротивляющихся материалов. В

результате был сделан вывод, что потенциал (2.16) можно упростить путём исключения из физических зависимостей параметра, содержащего фазовые инварианты. Таким образом, при условии равенства нулю разности фаз ω напряжённого и деформированного состояний, потенциал W_2 рассматривается как сумма квазилинейной и нелинейной частей без фазового инварианта [118, 174].

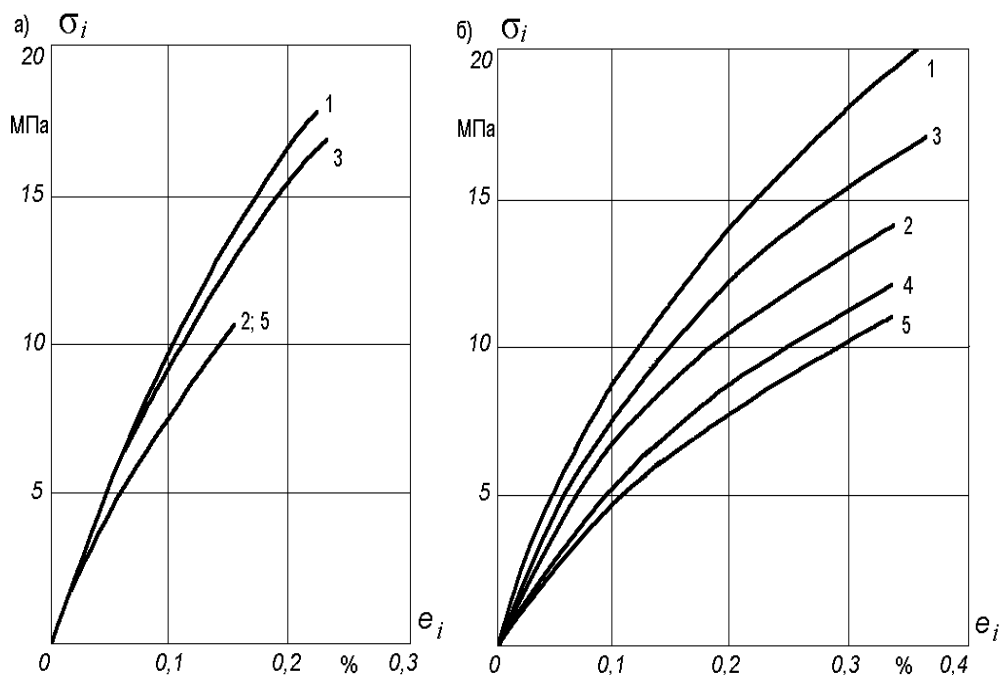


Рисунок 2.3 – Диаграммы деформирования конструкционных графитов: а – графит ВПП; б – графит АРВ, где 1 – одноосное сжатие; 2 – одноосное растяжение; 3- чистый сдвиг; 4, 5 – плоские напряжённые состояния при соотношении главных растягивающих напряжений $(\sigma_3 = 0) : \sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 0,325$ и $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 1$

Потенциал (2.23) наиболее приемлем для материалов, у которых начальный линейный участок на диаграммах деформирования пренебрежимо мал, а расхождение диаграмм наблюдается при малых значениях напряжений. Экспериментальные исследования показали, что к подобным материалам относятся тяжёлые бетоны [177] и некоторые графиты (ВПП и АРВ) [23, 24, 98, 99]. Примеры диаграмм деформирования для бетонов приведены в главе 1. На рисунке 2.3 приведены диаграммы деформирования, полученные при экспериментальном исследовании графитов ВПП (рисунок 2.3, а) и АРВ (рисунок.2.3, б) [23, 24, 98, 99].

Имеются экспериментальные исследования, из результатов которых следует существование материалов с зависимостью деформационных характеристик от

вида нагружения. Такая зависимость в большинстве случаев проявляется при значительных напряжениях и нелинейной деформации. Примером подобных материалов являются чугун СЧ15-32 [93] и среднеуглеродистая сталь, конструкции из которой эксплуатируются при низких температурах. Для них в работах Д.Г. Ковалёва и А.А. Трещёва [85–88] предлагается использовать потенциал вида (2.24), в котором первая его часть выражена через константы, определяемые модулем упругости и коэффициентом Пуассона. Сами экспериментальные диаграммы, обработанные в работе [118], приведены на рисунках 2.4 и 2.5.

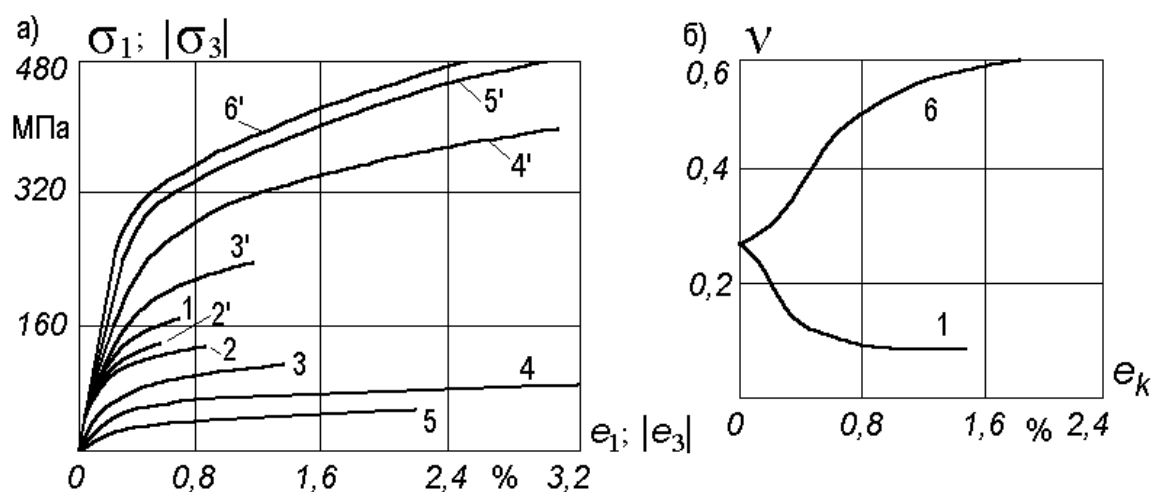


Рисунок 2.4 – Диаграммы деформирования чугуна СЧ15-32

На рисунке 2.4, а показаны экспериментальные зависимости между главными напряжениями и деформациями трубчатых образцов. Они были получены при пропорциональном нагружении осевой силой и крутящим моментом. На рисунке 2.4, б демонстрируются зависимости коэффициентов поперечной деформации от уровня осевой.

Поясним смысл кривых на рисунке 2.4:

- кривая 1 получена при испытании на одноосное растяжение;
- кривые 2 и 2' соответствуют чистому кручению (деформации удлинения и укорочения соответственно);
- кривые 3, 4, 5 зафиксированы при пропорциональных нагружениях с отношением главных напряжений $\sigma_3 : \sigma_1$ равным -2, -4,9, -9,8 соответственно;
- кривая б – результат испытаний на одноосное сжатие.

На рисунке 2.5 приведено семейство диаграмм деформирования, полученных при испытании трубчатых образцов из среднеуглеродистой стали при пропорциональном нагружении осевой силой и внутренним давлением в условиях воздействия температуры минус 150 °С [118, 215].

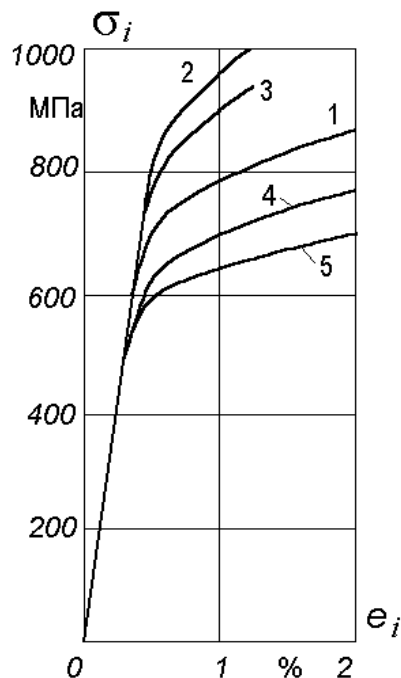


Рисунок 2.5 – Диаграммы деформирования трубчатых образцов из среднеуглеродистой стали при низкой температуре

Здесь кривая 1 получена при испытании на одноосное растяжение; кривая 2 – при одноосном сжатии; кривая 3 – при чистом сдвиге; кривые 4, 5 – при двухосном растяжении с разной величиной отношения σ / σ_i , равного 0,577 и 0,667 соответственно.

В работе [118] показано, что связи между деформациями и напряжениями будет описываться выражением (2.19) независимо от вида потенциала деформирования. При этом нелинейная составляющая уравнений состояния T_{ij} определяется по-прежнему суммой параметра T_{ij}^e , учитывающего зависимость механических свойств материала от компонентного состава тензора напряжений на квазилинейном этапе деформирования, и параметра T_{ij}^p , учитывающего явление разносопротивляемости конструкционного материала и нелинейность

экспериментальных диаграмм деформирования. Представления этих параметров для потенциалов W_2 и W_3 имеют следующий формы:

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^e &= \sigma_{ij} \left[-B_e \xi^3 + D_e \xi (1 + \xi^2) + E_e \eta (2 + \xi^2) \right] / 3 + \\
 &+ \sigma \delta_{ij} \left[3B_e \xi - D_e \xi (1 + \xi^2) - 3E_e \eta \right] / 3 + \tau \delta_{ij} D_e \eta^3 / 3; \\
 T_{ij}^p &= n \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta) \tau^2 \right]^{n-1} \times \\
 &\times \left\{ \sigma_{ij} \left[2C_p - B_p \xi^3 + D_p \xi (1 + \xi^2) + E_p \eta (2 + \xi^2) \right] / 3 + \right. \\
 &+ \left. \sigma \delta_{ij} \left[2(A_p - C_p) + 3B_p \xi - D_p \xi (1 + \xi^2) - 3E_p \eta \right] / 3 + \tau \delta_{ij} D_p \eta^3 / 3 \right\}; \\
 T_{ij}^e &= 0; T_{ij}^p = n \left[(C_p + D_p \xi + E_p \eta) \tau^2 \right]^{n-1} \times \\
 &\times \left\{ \sigma_{ij} \left[2C_p + D_p \xi (1 + \xi^2) + E_p \eta (2 + \xi^2) \right] / 3 + \right. \\
 &+ \left. \sigma \delta_{ij} \left[-2C_p - D_p \xi (1 + \xi^2) - 3E_p \eta \right] / 3 + \tau \delta_{ij} D_p \eta^3 / 3 \right\}.
 \end{aligned}$$

Предложенные потенциалы деформаций (2.16), (2.23), (2.24), а также нелинейные функции (2.20) прошли детальное исследование в работах [118, 119, 215]. Было установлено, что из-за характера нелинейных функций (2.20) невозможно непосредственно перейти от соотношений связи деформаций и напряжений (2.19) к обратным уравнениям относительно напряжений. Для решения этой проблемы в работе [118] из выражения (2.19) были получены следующие зависимости:

$$\sigma_{ij} = 2G(e_{ij} - T_{ij}) + 3\lambda(e - T)\delta_{ij}, \quad (2.25)$$

где $2G = \frac{3}{2C_e}$; $\lambda = \frac{C_e - A_e}{2A_e C_e}$; $3T = T_{ij} \delta_{ij}$; $3e = e_{ij} \delta_{ij}$.

2.2.1 Механические константы потенциала деформаций

Для обеспечения надёжности проектируемых конструкций необходимо иметь достаточную достоверность и точность расчёта, что требует адекватного представления предлагаемых определяющих соотношений в зависимости от конкретных применяемых разносопротивляющихся материалов. Такая задача решается путём определения констант рассматриваемого потенциала деформаций на основе имеющихся экспериментальных исследований.

Количество экспериментов должно быть минимальным, а сами опыты просто реализуемыми в лабораторных условиях. В перечень наиболее важных экспериментов

должны войти эксперименты, проводимые при одноосных сжатиях, растяжениях и простых сдвигах. Проверку адекватности определяющих соотношений для конкретных материалов предлагается проводить посредством сравнения экспериментальных диаграмм деформирования, полученных при сложных видах напряжённого состояния, с теоретически рассчитанными на базе применения полученных констант.

При рассмотрении частных напряжённых состояний константы потенциалов в монографии [118] предлагается применять экспериментальное и теоретическое представление зависимостей между главными напряжениями и деформациями, которое описывается выражениями

$$e_k = P_k S + T_k S^m \text{ при } (k = 1, 2, 3), \quad (2.26)$$

где $m = 2n - 1$; S – модуль вектора полного напряжения; P_k, T_k – коэффициенты, определяемые через константы потенциала.

Применением при обработке экспериментальных диаграмм деформирования метода наименьших квадратов в работе [215] получены следующие выражения для определения коэффициентов P_k, T_k :

$$\begin{aligned} P_k &= \left[\left(\sum e_k S \right) \left(\sum S^{2m} \right) - \left(\sum e_k S^m \right) \left(\sum S^{m+1} \right) \right] / \Delta_k ; \\ T_k &= \left[\left(\sum e_k S^m \right) \left(\sum S^2 \right) - \left(\sum e_k S \right) \left(\sum S^{m+1} \right) \right] / \Delta_k , \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $\sum e_k S^m = \sum_{i=1}^r e_{ki} S_i^m$; i – текущая точка на диаграмме; r – число точек, выбранных

для вычисления $\Delta_k = \left(\sum S^2 \right) \times \left(\sum S^{2m} \right) - \left(\sum S^{m+1} \right)^2$.

В монографии [118] константы потенциала деформаций (2.16), построенного во втором нормированном пространстве, предложено определять с использованием формулы (2.14), построенной в первом нормированном пространстве. Реализация этой рекомендации выполнена с использованием четырёх кривых из экспериментальных диаграмм деформирования. Были использованы:

- для одноосного растяжения ($\sigma_1 = S$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$);
- для одноосного сжатия ($\sigma_1 = -S$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$).

Итогом стали следующие выражения для определения констант потенциала:

$$A_1 = (P_1^+ - P_1^-) / 4; \quad B_1 = (P_1^+ + P_1^-) / 4; \quad C_1 = (P_2^+ - P_2^-) / 2; \quad D_1 = (P_2^+ + P_2^-) / 2;$$

$$A_2 = \left[(T_1^+ / 2n)^{1/n} + (-T_1^- / 2n)^{1/n} \right] / 2; \quad B_2 = \left[(T_1^+ / 2n)^{1/n} - (-T_1^- / 2n)^{1/n} \right] / 2;$$

$$C_2 = \left[T_2^+ / (T_1^+ / 2n)^{(n-1)/n} - T_2^- / (-T_1^- / 2n)^{(n-1)/n} \right] / 2n;$$

$$D_2 = \left[T_2^+ / (T_1^+ / 2n)^{(n-1)/n} + T_2^- / (-T_1^- / 2n)^{(n-1)/n} \right] / 2n,$$

где P_k^+ , T_k^+ , P_k^- , T_k^- – константы, вычисленные соответственно по диаграммам одноосных растяжения и сжатия.

По такой же методике определяются константы и для «упрощённых» потенциалов W_2 и W_3 :

$$A_e = \frac{9}{4}(P_1^+ + P_1^-) - 2C_e - \frac{2\sqrt{6}}{3}E_e; \quad B_e = \frac{1}{\sqrt{3}}(9P_2^+ - 2A_e + 2C_e + \sqrt{6}E_e);$$

$$C_e = \frac{9}{4\sqrt{6}}P^{sh} - E_e; \quad D_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{9}{2}P_1^+ - A_e - \frac{1}{\sqrt{3}}B_e - 2C_e - \frac{2\sqrt{6}}{3}E_e \right);$$

$$E_e = \frac{27}{14\sqrt{6} - 36} \left(P_1^+ + P_1^- - P_2^+ - P_2^- - \frac{3}{\sqrt{6}}P^{sh} \right);$$

$$A_p = \frac{9}{2} \left[\left(\frac{T_1^+}{2n} \right)^{1/n} + \left(\frac{T_1^-}{2n} \right)^{1/n} \right] - 2C_p - \frac{2\sqrt{6}}{3}E_p;$$

$$B_p = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[18 \frac{T_2^+}{T_1^+} \left(\frac{T_1^+}{2n} \right)^{1/n} - 2A_p + 2C_p + \sqrt{6}E_p \right];$$

$$C_p = \left(\frac{3T^{sh}}{4n} \right)^{1/n} \left(\frac{3}{\sqrt{6}} \right)^{2-1/n} - E_p; \quad D_p = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[9 \left(\frac{T_1^+}{2n} \right)^{1/n} - A_p - \frac{1}{\sqrt{3}}B_p - 2C_p - \frac{2\sqrt{6}}{3}E_p \right];$$

$$E_p = \frac{9}{7\sqrt{6} - 18} \left\{ 3 \left[\left(\frac{T_1^+}{2n} \right)^{1/n} \left(1 - \frac{T_2^+}{T_1^+} \right) + \left(\frac{T_1^-}{2n} \right)^{1/n} \left(1 - \frac{T_2^-}{T_1^-} \right) \right] - 2 \left(\frac{3T^{sh}}{4n} \right)^{1/n} \left(\frac{3}{\sqrt{6}} \right)^{2-1/n} \right\};$$

$$A_e = 3(P_1^- + 2P_2^-) / 2; \quad C_e = 3(P_1^- - P_2^-) / 2;$$

$$C_p = \left(\frac{3T^{sh}}{4n} \right)^{1/n} \left(\frac{3}{\sqrt{6}} \right)^{2-1/n} - E_p; \quad D_p = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[9 \left(\frac{T_1^+}{2n} \right)^{1/n} - 2C_p - \frac{2\sqrt{6}}{3}E_p \right];$$

$$E_p = \frac{3}{2\sqrt{6}-6} \left[4,5 \left(\frac{T_1^+}{2n} \right)^{1/n} + 4,5 \left(\frac{T_1^-}{2n} \right)^{1/n} - 2 \left(\frac{3T^{sh}}{4n} \right)^{1/n} \left(\frac{3}{\sqrt{6}} \right)^{2-1/n} \right],$$

где P^{sh}, T^{sh} – константы, вычисленные по диаграммам чистого сдвига.

Процесс вычисления констант потенциалов можно описать следующим алгоритмом [118, 174]:

1. Из условия минимума погрешности аппроксимации экспериментальных кривых определяется оптимальный показатель степени m . Оценка точности аппроксимации на этом шаге определяется отношением среднеквадратичного отклонения погрешности аппроксимации экспериментальных деформаций к среднему уровню этих деформаций:

$$\delta = \frac{\sqrt{\sum (\Delta \bar{e}_k - \Delta e_k)^2 / (r-1)}}{\sum e_k / r}, \quad (2.28)$$

где $\Delta e_k = e_k - P_k S - T_k S^m$; $\Delta \bar{e}_k = \sum \Delta e_k / r$.

2. Для выбранных «эталонных» кривых устанавливаются первоначальные границы разброса, не превышающие $\pm 15\%$ от «эталонного» значения. Конкретизируется число z вариантов кривых в интервале разброса каждой эталонной кривой. При этом общее число вариантов кривых составит z^4 для потенциала W_1 и z^5 для потенциалов W_2 и W_3 .

3. По формулам (2.27) определяются коэффициенты P_k и T_k , которые используются для вычисления констант потенциала каждого из вариантов расширенного спектра «эталонных» кривых.

4. Производится «фильтрация» вычисленных констант, в ходе которой исключаются те из констант, использование которых приводит к отрицательным значениям функций (2.29) для квазилинейной и нелинейной составляющих потенциала (2.16). Знаки определены соотношениями:

$$\begin{aligned} \text{Sign}(W_e) &= \text{Sign}[(A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta \text{Cos} 3\varphi) \tau^2]; \\ \text{Sign}(W_p) &= \text{Sign}[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \text{Cos} 3\varphi) \tau^2]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Появление отрицательных значений функций $Sign(W_e)$ и $Sign(W_p)$ фиксируются в процессе перебора с помощью ЭВМ. Аргументами процесса являются параметры φ (на отрезке $[0, \frac{\pi}{3})$) и ψ (на отрезке $[0, \pi]$). Функции, используемые при «фильтрации» констант потенциалов (2.23) и (2.24) строятся аналогично функциям (2.29). В алгоритм включены следующие действия:

1. Рассчитываются теоретические диаграммы деформирования для сложных видов напряжённого состояния.

2. Выделяется вариант «эталонных» кривых, отвечающий требованию минимума суммарной оценки точности; выполняется первая итерация; полученный набор кривых принимается за исходный при уменьшенных вдвое границах разброса.

3. Процесс вычисления констант повторяется до момента, когда суммарные оценки точности (2.28) перестанут уменьшаться; полученные при этом константы потенциала принимаются за окончательные. Проверка устойчивости потенциала (в малом) проводится параллельно с вычислением констант.

Устойчивость потенциала (2.16) проверяется по методике, описанной в монографии [119], где рассматривается постулат Ильюшина-Друккера, который, применительно к предложенным потенциальным соотношениям, представлен выражением:

$$\delta\sigma_{ij}\delta e_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{km}\partial\sigma_{ij}} \delta\sigma_{km}\delta\sigma_{ij} \geq 0. \quad (2.30)$$

Положительная определённость коэффициентов квадратичной формы обеспечивает выполнение условия (2.30) и подтверждает единственность решения.

Как показано в работах [119, 215, 216], рассмотренные варианты потенциалов можно интерпретировать в виде функций $W_1 = W_1(\psi, \varphi, S_0)$, $W_2 = W_2(\psi, S_0)$, $W_3 = W_3(\psi, S_0)$, либо функциями $W_1 = W_1(\sigma, \tau, \varphi)$, $W_2 = W_2(\sigma, \tau)$, $W_3 = W_3(\sigma, \tau)$. В этом случае применение постулата Друккера приводит к требованию положительной определённости двух квадратичных форм: первой по функциям ψ, φ, S_0 (ψ, S_0) или σ, τ, φ (σ, τ) и второй – по $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}$.

В исследованиях А.А. Трещёва, Н.М. Матченко, Д.Г. Ковалёва [85–88, 116, 118, 119, 215–218] доказано, что вторая квадратичная форма, связанная с поворотом осей, сводится к тривиальному ограничению $|\omega| \leq \pi / 3$ и всегда положительна. Требование положительной определённости первой квадратичной формы согласно критерию Сильвестра, сводится к проверке положительности симметричной матрицы $[C]$, которая для потенциала W_1 имеет размер 3×3 , а для потенциалов W_2 и W_3 – 2×2 . Для положительной определённости матрицы $[C]$ необходимо и достаточно, чтобы главные миноры были положительными:

– для потенциала W_1 :

$$\Delta_1 = C_{11} \geq 0; \Delta_2 = C_{22} \geq 0; \Delta_3 = C_{33} \geq 0; \Delta_4 = C_{11}C_{22} - C_{12}^2 \geq 0;$$

$$\Delta_5 = C_{11}C_{33} - C_{13}^2 \geq 0; \Delta_6 = C_{22}C_{33} - C_{23}^2 \geq 0; \Delta_7 = \det[C_{ij}] \geq 0;$$

– для потенциалов W_2 и W_3 :

$$\Delta_1 = C_{11} \geq 0; \Delta_2 = C_{22} \geq 0; \Delta_3 = C_{11}C_{22} - C_{12}^2 \geq 0.$$

Коэффициенты C_{ij} определяются в зависимости от варианта представления функциональной зависимости потенциалов деформаций [119]:

а) первый вариант представления, потенциал W_1 :

$$C_{11} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial S_0^2}; C_{12} = C_{21} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial S_0 \partial \psi} - \frac{1}{S_0} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial \psi};$$

$$C_{13} = C_{31} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial S_0 \partial \varphi} - \frac{1}{S_0} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}; C_{22} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial \psi^2} + S_0 \frac{\partial W_1}{\partial S_0};$$

$$C_{23} = C_{32} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial S_0 \partial \psi} - \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}; C_{33} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial \varphi^2} + S_0 \eta^2 \frac{\partial W_1}{\partial S_0} + \xi \eta \frac{\partial W_1}{\partial \psi};$$

– потенциалы W_2 и W_3 ($k = 2, 3$):

$$C_{11} = \frac{\partial^2 W_k}{\partial S_0^2}; C_{22} = \frac{\partial^2 W_k}{\partial \psi^2} - S_0 \frac{\partial W_k}{\partial S_0}; C_{12} = C_{21} = \frac{\partial^2 W_k}{\partial S_0 \partial \psi} - \frac{1}{S_0} \cdot \frac{\partial W_k}{\partial \psi};$$

б) второй вариант представления, потенциал W_1 :

$$C_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}; C_{12} = C_{21} = \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right); C_{13} = C_{31} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma \partial \tau};$$

$$C_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \tau \frac{\partial W}{\partial \tau};$$

$$C_{23} = C_{32} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma \partial \varphi}; \quad C_{33} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma^2};$$

– потенциалы W_2 и W_3 ($k = 2, 3$):

$$C_{11} = \frac{\partial^2 W_k}{\partial \tau^2};$$

$$C_{12} = C_{21} = \frac{\partial^2 W_k}{\partial \sigma \partial \tau}; \quad C_{22} = \frac{\partial^2 W_k}{\partial \sigma^2}.$$

Рассмотрим ограничения, накладываемые условием единственности решения на функции и постоянные. Для этого потребуется полная система уравнений теории деформирования разнсопротивляющегося тела [216]:

- уравнения равновесия имеют вид: $\sigma_{ij,j} + F_i = 0$;

- связь между деформациями и напряжениями определяется по формулам Кастильяно $e_{ij} = \partial W_k / \partial \sigma_{ij}$;

- компоненты тензора деформаций в предположении определяются формулами геометрически линейной теории $e_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i})$.

Предположим, что поверхность тела A состоит из двух частей $A = A_U + A_T$, и в какой-то точке x_i этой поверхности заданы условия:

$$u_i = u_i^*; \quad x_i \in A_U;$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i^*; \quad x_i \in A_T.$$

Пусть одним и тем же объёмным силам при одинаковых граничных условиях соответствуют два различных решения $\sigma'_{ij}, e'_{ij}, u'_i$ и $\sigma''_{ij}, e''_{ij}, u''_i$. Состояния, отмеченные одним штрихом и двумя штрихами полагаются бесконечно близкими. Тогда $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}$, $e_{ij} = e'_{ij} - e''_{ij}$, $u_i = u'_i - u''_i$ бесконечно малы и удовлетворяют условиям равновесия при $F_i = 0$. Удовлетворяются также и нулевые граничные условия $\sigma_{ij} n_j = 0$, $x_i \in A_T$, $u_i = 0$, $x_i \in A_U$. Поскольку σ_{ij} , e_{ij} , бесконечно малы, то, пренебрегая величинами второго и более высокого порядка малости, получим

$$e_{ij} = \frac{\partial^2 W_k}{\partial \sigma_{km} \partial \sigma_{ij}} \sigma_{km}.$$

Положив в уравнениях равновесия $F_i = 0$, умножив на u_i и проинтегрировав по объёму, получаем

$$\int_V \sigma_{ij,j} u_i dV = \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV = 0.$$

По формуле Остроградского-Гаусса имеем $\int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV = \int_A \sigma_{ij} n_j u_i dA$. Этот интеграл равен нулю в силу граничных условий на поверхности $\sigma_{ij} n_j = 0$, $x_i \in A_T$; $u_i = 0$, $x_i \in A_U$. Таким образом, получаем

$$\int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV = \int_V \frac{\partial^2 W_k}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{km}} \sigma_{ij} \sigma_{km} dV.$$

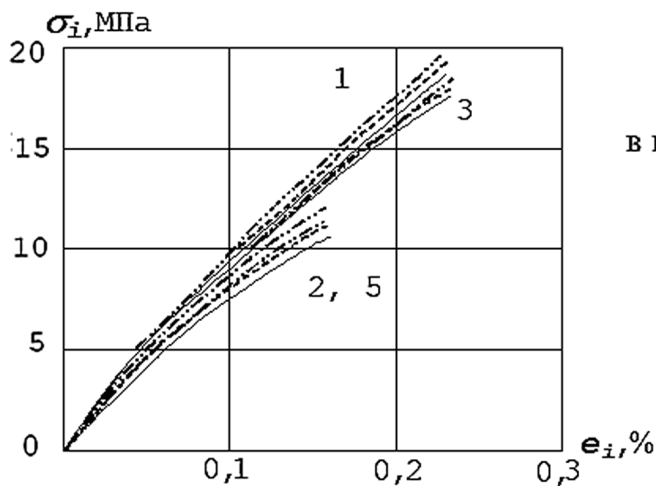
При выполнении постулата Друккера подынтегральное выражение неотрицательно при $\sigma_{km} \neq 0$. Тогда равенство интеграла нулю возможно только при нулевых σ_{ij} . Таким образом, теорема единственности доказана.

В работе [118] построены диаграммы деформирования, описывающие упруго-пластическое деформирование графита ВПП, чугуна СЧ15-32 и тяжёлого бетона с пределом прочности на сжатие $R^c=28,4$ МПа и $R^c=37,0$ МПа.

При этом построении константы потенциала деформаций определялись в соответствии с приведённым выше алгоритмом.

Результаты проведённых исследований представлены на рисунках 2.6–2.8, где показаны:

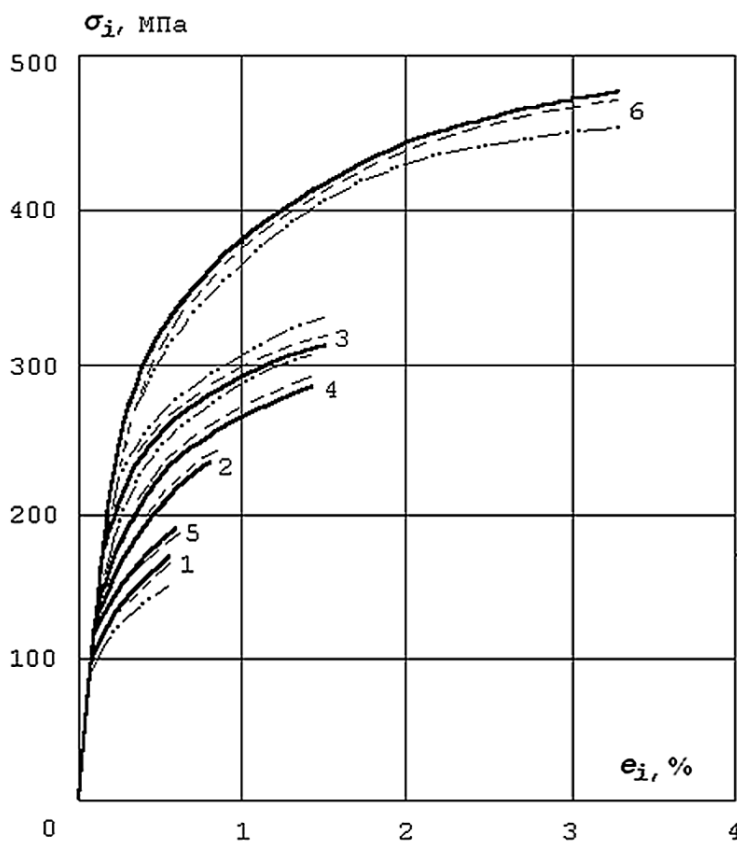
- экспериментальные диаграммы (сплошные линии);
- нелинейные аппроксимации экспериментальных диаграмм для потенциалов деформаций:
 - (2.16) – обозначены штриховой линией (- - -);
 - (2.23) – обозначены штрихпунктирной линией (- · -);
 - (2.24) – штрихпунктирной линией с двумя точками (- · · -)



Пропорциональное нагружении
и нелинейная аппроксимация
в координатах универсальных инвариантов:

- 1 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0 : 0$;
- 2 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0 : 0$;
- 3 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 1 : 0$;
- 4 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0,325 : 0$;
- 5 – при $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 1 : 0$.

Рисунок 2.6 – Диаграмма деформирования графита ВПП



Пропорциональное нагружении
и нелинейная аппроксимация
в координатах универсальных
инвариантов:

- 1 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0 : 0$;
- 2 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : -1 : 0$;
- 3 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0,5 : 0$;
- 4 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0,204 : 0$;
- 5 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0,102 : 0$;
- 6 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0 : 0$.

Рисунок 2.7 – Диаграммы деформирования чугуна СЧ15-32

Сравнение приведённых экспериментальных диаграмм деформирования с их нелинейными аппроксимациями на рисунках 2.6–2.8 (см. также рисунок 1.6) показывает адекватный характер предложенных нелинейных аппроксимаций фактическим НДС рассмотренных материалов в широком диапазоне изменения нагрузки и при достаточно обширном наборе сочетаний главных напряжений [118].

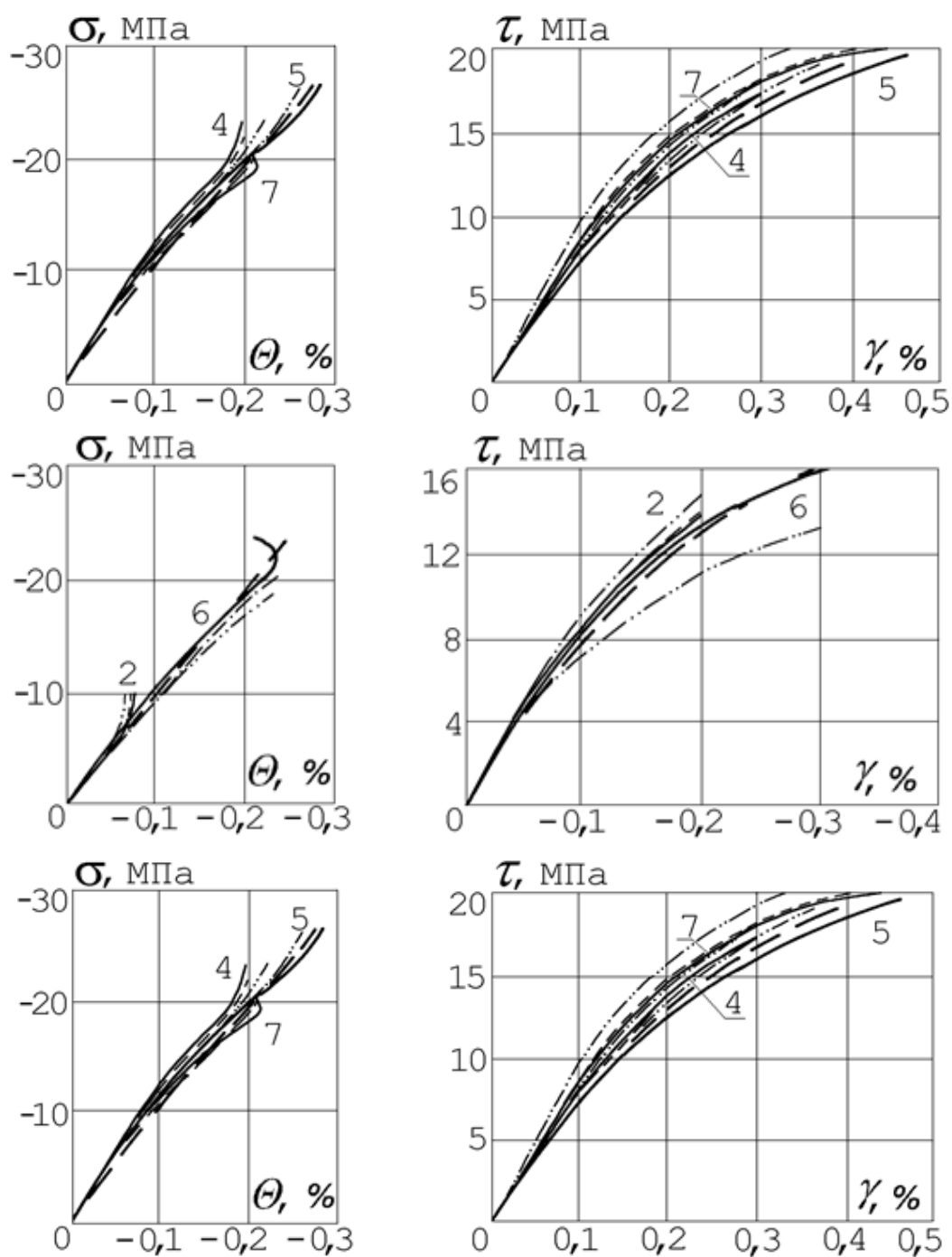


Рисунок 2.8 – Диаграммы деформирования бетона $R=28,4$ МПа при пропорциональном нагружении и их нелинейные аппроксимации в координатах универсальных инвариантов:

- 1 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0 : 0$; 2 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0 : 0$;
 3 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 1 : 0$; 4 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : 0$;
 5 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,52 : -0,06$; 6 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -1 : -0,16$;
 7 – $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : -0,1 : -0,1$

Константы потенциала, рассчитанные согласно алгоритму, приведённому выше, сведены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1 – Константы потенциала деформаций [118, 215, 216]

Потенциал	Материалы					
	Константы потенциала	Графит АРВ	Графит ВПП	Чугун СЧ 15-32	Бетон $R^* = 28,4$ МПа	Бетон $R^* = 37,0$ МПа
1	2	3	4	5	6	7
W_I^*	n	2,1	1,8	3,6	2,75	2,8
	$A_1, \text{МПа}^{-1}$	$6,083 \cdot 10^{-5}$	$4,927 \cdot 10^{-3}$	$7,842 \cdot 10^{-6}$	$3,148 \cdot 10^{-5}$	$2,341 \cdot 10^{-5}$
	$B_1, \text{МПа}^{-1}$	$1,429 \cdot 10^{-5}$	$5,275 \cdot 10^{-4}$	$9,313 \cdot 10^{-8}$	$6,723 \cdot 10^{-6}$	$2,783 \cdot 10^{-6}$
	$C_1, \text{МПа}^{-1}$	$-3,267 \cdot 10^{-5}$	$-2,387 \cdot 10^{-3}$	$-4,333 \cdot 10^{-6}$	$-9,705 \cdot 10^{-6}$	$-1,549 \cdot 10^{-5}$
	$D_1, \text{МПа}^{-1}$	$1,015 \cdot 10^{-5}$	$7,650 \cdot 10^{-5}$	$1,461 \cdot 10^{-6}$	$-4,861 \cdot 10^{-7}$	$-7,794 \cdot 10^{-6}$
	$A_2, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$3,822 \cdot 10^{-4}$	$2,130 \cdot 10^{-3}$	$1,191 \cdot 10^{-5}$	$4,927 \cdot 10^{-4}$	$1,752 \cdot 10^{-4}$
	$B_2, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$1,625 \cdot 10^{-4}$	$3,920 \cdot 10^{-4}$	$7,073 \cdot 10^{-6}$	$3,865 \cdot 10^{-4}$	$8,120 \cdot 10^{-5}$
	$C_2, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$1,857 \cdot 10^{-4}$	$-1,022 \cdot 10^{-3}$	$-4,178 \cdot 10^{-6}$	$6,782 \cdot 10^{-5}$	$-1,056 \cdot 10^{-4}$
$D_2, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$1,943 \cdot 10^{-5}$	$-4,881 \cdot 10^{-5}$	$2,761 \cdot 10^{-6}$	$2,712 \cdot 10^{-4}$	$1,490 \cdot 10^{-5}$	
W_I	n	2,1	1,8	3,6	2,75	2,8
	$A_e, \text{МПа}^{-1}$	$8,448 \cdot 10^{-5}$	$7,620 \cdot 10^{-3}$	$1,053 \cdot 10^{-5}$	$6,533 \cdot 10^{-5}$	$2,376 \cdot 10^{-5}$
	$B_e, \text{МПа}^{-1}$	$5,991 \cdot 10^{-5}$	$1,179 \cdot 10^{-3}$	$5,222 \cdot 10^{-6}$	$9,961 \cdot 10^{-6}$	$-2,218 \cdot 10^{-5}$
	$C_e, \text{МПа}^{-1}$	$2,313 \cdot 10^{-4}$	$1,836 \cdot 10^{-2}$	$3,003 \cdot 10^{-5}$	$1,090 \cdot 10^{-4}$	$9,347 \cdot 10^{-5}$
	$D_e, \text{МПа}^{-1}$	$7,425 \cdot 10^{-5}$	$2,741 \cdot 10^{-3}$	$4,839 \cdot 10^{-7}$	$3,493 \cdot 10^{-5}$	$1,446 \cdot 10^{-5}$
	$E_e, \text{МПа}^{-1}$	$5,070 \cdot 10^{-6}$	$5,524 \cdot 10^{-4}$	$-1,675 \cdot 10^{-6}$	$8,829 \cdot 10^{-6}$	$1,295 \cdot 10^{-5}$
	$A_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$1,704 \cdot 10^{-3}$	$3,325 \cdot 10^{-3}$	$2,320 \cdot 10^{-5}$	$1,682 \cdot 10^{-3}$	$2,088 \cdot 10^{-4}$
	$B_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$3,488 \cdot 10^{-4}$	$5,098 \cdot 10^{-4}$	$2,182 \cdot 10^{-5}$	$1,609 \cdot 10^{-3}$	$1,923 \cdot 10^{-4}$
	$C_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$8,681 \cdot 10^{-4}$	$7,923 \cdot 10^{-3}$	$4,200 \cdot 10^{-5}$	$1,376 \cdot 10^{-3}$	$6,840 \cdot 10^{-4}$
	$D_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$8,444 \cdot 10^{-4}$	$2,037 \cdot 10^{-3}$	$3,675 \cdot 10^{-5}$	$2,008 \cdot 10^{-3}$	$4,219 \cdot 10^{-4}$
$E_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$1,752 \cdot 10^{-4}$	$5,398 \cdot 10^{-4}$	$5,281 \cdot 10^{-6}$	$1,412 \cdot 10^{-4}$	$8,120 \cdot 10^{-5}$	

Исследования, проведённые в работах [118, 174] показали, что суммарная критериальная оценка погрешности аппроксимаций $\sum \delta$ для потенциала (2.16) значительно ниже, чем у других потенциалов. Например, для бетона с пределом прочности на сжатие $R^* = 28,4$ МПа [174] она составила – 2,12%.

Таким образом, в рамках данного диссертационного исследования будет использоваться потенциал деформаций (2.16), который является более универсальным, поскольку применим для расчёта НДС строительных конструкций, выполненных из нелинейных разносопротивляющихся материалов при простом нагружении.

2.2.2 Законы изменения объёма и формы, фазовая характеристика

В монографии [118] для получения выражений, определяющих законы изменения объёма, формы и фазовую характеристику предложено использовать представление вариации удельной дополнительной работы вида:

$$\delta W = e_k \delta \sigma_k \text{ при } (k = 1, 2, 3). \quad (2.31)$$

Главные компоненты тензора деформаций e_k определяются выражением (2.32):

$$e_k = e + \sqrt{2} \mathcal{E} \text{Cos} \beta_k, \quad (2.32)$$

где $\beta = \arccos(\sqrt{2} \det \varepsilon_{ij} / \mathcal{E}^3) / 3$; $\beta_1 = \beta$; $\beta_2 = \beta + 2\pi / 3$; $\beta_3 = \beta - 2\pi / 3$; $e = e_{ij} \delta_{ij} / 3$ – средние деформации; $\mathcal{E} = \gamma / 2$ – деформации сдвига на октаэдрической площадке.

Подставляя соотношения (2.32) в выражение (2.31), получаем зависимость

$$\delta W = 3e \delta \sigma + 3\mathcal{E} [\text{Cos}(\varphi - \beta) \delta \tau - \text{Sin}(\varphi - \beta) \tau \delta \varphi]. \quad (2.33)$$

Сопоставлением вариации потенциала (2.16) с зависимостями (2.33) и приравниванием в них выражений при одноименных вариациях получены зависимости для определения соответственно законов изменения объёма, формы и уравнения, определяющего фазовую характеристику [118]:

$$e = \frac{\sigma}{3K_0} + \frac{\tau}{3D_0}; \quad (2.34)$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \omega} \left[\frac{\tau}{2G_0} + \frac{\sigma}{3D_0} \right]; \quad (2.35)$$

$$\text{tg} \omega = 3R\eta \sin 3\varphi / [3\eta / (2G_0) + \xi / D_0]; \quad (2.36)$$

где K_0 , G_0 , D_0 – соответственно обобщённые функции модуля объёмных деформаций, сдвига и дилатации; $\omega = \varphi - \beta$ – разность фаз напряжённого и деформированного состояния,

$$K_0 = 1 / \left\{ 2A_e + B_e \xi (2 + \eta^2) - E_e \eta^3 \text{Cos} 3\varphi + n[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \text{Cos} 3\varphi) \tau^2]^{n-1} [2A_p + B_p \xi (2 + \eta^2) - E_p \eta^3 \text{Cos} 3\varphi] \right\}, \quad (2.37)$$

$$2G_0 = 3 / \left\{ (2D_e - B_e) \xi^3 + 2C_e + E_e \eta \text{Cos} 3\varphi (2 + \xi^2) + n[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \text{Cos} 3\varphi) \tau^2]^{n-1} [(2D_p - B_p) \xi^3 + 2C_p + E_p \eta \text{Cos} 3\varphi (2 + \xi^2)] \right\} \quad (2.38)$$

$$D_0 = 1 / \{D_e \eta^3 + n[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \times \tau^2]^{n-1} D_p \eta^3\}, \quad (2.39)$$

$$R = E_e + n E_p [(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \times \tau^2]^{n-1}. \quad (2.40)$$

Анализ уравнений (2.34) – (2.40) показывает, что полученные определяющие соотношения для разносопротивляющихся материалов учитывают их дилатационные свойства. Из этих уравнений видно, что изменение формы зависит от средних напряжений с выполнением условия: если касательные напряжения $\tau = 0$, то и $\Delta = 0$. Это означает, что при гидростатическом напряжении для изотропных материалов отсутствуют деформации сдвига [118, 215, 216]. Проявление подобных свойств у разносопротивляющихся материалов подтверждается в широком наборе теоретических и экспериментальных исследований.

Экспериментальные данные по разгрузке разносопротивляющихся материалов немногочисленны, но свидетельствуют о том, что для каждого вида напряжённого состояния при пропорциональной разгрузке (или близкой к ней) остаточные деформации с приемлемой степенью точности могут быть установлены по линейным зависимостям. Для принятого в данном диссертационном исследовании потенциала W_1 закон разгрузки имеет вид [216]:

$$e_{ij}^{res} = e_{ij}^{unl} - e_{ij}^e, \quad (2.41)$$

где e_{ij}^{res} – остаточные деформации после разгрузки; e_{ij}^{unl} – деформации на момент начала разгрузки; e_{ij}^e – величина снижения деформаций, определяемая с учётом только квазилинейных составляющих потенциала (2.16) в соответствии с выражением:

$$e_{ij}^e = 2C_e \sigma_{ij}^{unl} / 3 + 2(A_e - C_e) \sigma^{unl} \delta_{ij} / 3 + T_{ij}^{e, unl}, \quad (2.42)$$

где σ_{ij}^{unl} , σ^{unl} , τ^{unl} – напряжения на момент начала разгрузки.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о влиянии формы потенциала деформаций и набора качественных характеристик напряжённого состояния при описании деформирования разносопротивляющихся материалов. Построение потенциальных соотношений, основанных на предположении о наличии единой касательной к диаграммам деформирования на начальных участках для всех реализуемых видах

напряжённого состояния, приводит к большим погрешностям при определении НДС материалов с неклассическими свойствами. Неучёт влияния фазы напряжений заметно упрощает зависимости между деформациями и напряжениями, приводя их к тензорно-линейной форме. Вместе с тем, применение таких соотношений должно быть предварительно проверено, так как удовлетворительно описать сложное напряжённое состояние с их помощью удаётся не для всех материалов.

Итак, для анализа НДС элементов конструкций, выполненных из материалов, зависящих от компонентного состава тензора напряжений, далее будем использовать потенциал деформаций W_1 , имеющий универсальный характер.

2.3 Термодинамический потенциал Гиббса для нелинейных материалов со свойствами, зависящими от компонентного состава тензора напряжений

Используя методику нормированных пространств напряжений [118], рассмотрим уравнения состояния для нелинейных разносопротивляющихся материалов, находящихся в температурном поле.

Термодинамический потенциал Гиббса для нелинейно разносопротивляющихся материалов получим, объединив потенциал деформаций нелинейных изотропных материалов А.А. Трещёва и Н.М. Матченко [218] с термомеханической частью термодинамического квазилинейного потенциала Гиббса этих же авторов [231, 232].

Термодинамический потенциал деформаций будет складываться из значимо нелинейной механической части и слагаемых, учитывающих влияние полей напряжений и температур для разносопротивляющихся материалов. Предлагаемые зависимости будут использоваться только при малых (по сравнению с начальной абсолютной температурой) изменениях температур. Это должно обеспечивать постоянные значений механических и теплофизических характеристик используемых материалов.

Опираясь на характеристики пространства № 1, потенциал Гиббса перепишем в виде степенного полинома от главных напряжений и изменения температур, удалив те его составляющие, которые приводят к нефизичности формулируемых соотношений [231, 232]:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1^* = & \left\{ \begin{aligned} & (A_1 + B_1\alpha_1)\sigma_1^2 + (A_1 + B_1\alpha_2)\sigma_2^2 + \\ & + (A_1 + B_1\alpha_3)\sigma_3^2 + [C_1 + D_1(\alpha_1 + \alpha_2)]\sigma_1\sigma_2 + \\ & + [C_1 + D_1(\alpha_2 + \alpha_3)]\sigma_2\sigma_3 + [C_1 + D_1(\alpha_1 + \alpha_3)]\sigma_1\sigma_3 \end{aligned} \right\} + \\
 & + \left\{ \begin{aligned} & (A_2 + B_2\alpha_1)\sigma_1^2 + (A_2 + B_2\alpha_2)\sigma_2^2 + \\ & + (A_2 + B_2\alpha_3)\sigma_3^2 + [C_2 + D_2(\alpha_1 + \alpha_2)]\sigma_1\sigma_2 + \\ & + [C_2 + D_2(\alpha_2 + \alpha_3)]\sigma_2\sigma_3 + [C_2 + D_2(\alpha_1 + \alpha_3)]\sigma_1\sigma_3 \end{aligned} \right\}^n \quad (2.43) \\
 & + (B_t\theta + A_t\theta I_\alpha)S + C_\sigma \frac{(\theta)^2}{2T_0},
 \end{aligned}$$

где $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ – константы механической части потенциала, A_t, B_t – константы термомеханической части потенциала; σ_k – главные напряжения; $\alpha_k = \sigma_k / S$ – нормированные главные напряжения; $S = \sqrt{\sigma_k \sigma_k}$ – модуль вектора полного напряжения; n – показатель степени, который в общем случае не является целым числом; $I_\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ – первый инвариант нормированных напряжений первого пространства; C_σ – теплоёмкость материала при постоянном давлении; $\theta = T - T_0$ – изменение температуры тела в точке; T – температура тела в точке для конкретного момент времени; T_0 – начальная температура тела в точке.

Во втором нормированном пространстве с учётом зависимостей между рассмотренными пространствами, потенциал деформаций (2.43) можно преобразовать к форме [232]:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 = & (A_e + B_e\xi)\sigma^2 + (C_e + D_e\xi + E_e\eta\text{Cos}3\varphi)\tau^2 + \\
 & + \left[(A_p + B_p\xi)\sigma^2 + (C_p + D_p\xi + E_p\eta\text{Cos}3\varphi)\tau^2 \right]^n + \quad (2.44) \\
 & + [(b_{t1}\xi + b_{t2})\sigma + b_{t1}\eta\tau]\theta + C_\sigma \frac{(\theta)^2}{2T_0}
 \end{aligned}$$

Форма потенциала деформаций (2.44), представленная через параметры второго пространства, является более компактной и удобной для применения в расчётном моделировании конструкций с оболочками.

Термодинамические потенциалы Гиббса (2.43) и (2.44) являются полными дифференциалами, поэтому должно выполняться соотношение:

$$d\Gamma = -e_{ij}d\sigma_{ij} - LdT, \quad (2.45)$$

где L — плотность энтропии. В силу потенциальности соотношений (2.43) и (2.44), можно воспользоваться соответствующими дифференциальными зависимостями:

$$e_{ij} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{ij}}; L = -\frac{\partial \Gamma}{\partial T}. \quad (2.46)$$

Получение зависимостей между деформациями и напряжениями для нелинейных разносопротивляющихся материалов [232], описываемых потенциалом Γ_1 (2.2), в общем случае производится применением к потенциалу формулы (2.4):

$$e_{ij} = 2F\sigma_{ij} + (K - F\sigma_{ij})\delta_{ij} + \frac{1}{3}(b_{t1}\xi + b_{t2})\theta\delta_{ij}, \quad (2.47)$$

$$F = \frac{2}{3}C_e + \left(\frac{1}{3}D_e + \sqrt{2}E_e\right)\xi + \frac{1}{81}E_e(\xi^2 - 1)\eta \cos 3\varphi + \frac{1}{3}(D_e - B_e)\xi^3 +$$

$$+ \left[\begin{array}{l} 18C_p S_0 + \\ + \frac{1}{3}E_p(\xi^2 - 1)\tau \cos 3\varphi + \\ + 9 \left(\begin{array}{l} D_p + (D_p - B_p)\xi^2 + \\ + 3\sqrt{2}E_p \end{array} \right) \sigma \end{array} \right] \left(\begin{array}{l} 27B_p\sigma^3 + \\ + E_p \cos 3\varphi\tau^3 + \\ + 27A_p S_0\sigma^2 + \\ + 27C_p S_0\tau^2 + \\ + 27D_p\sigma\tau^2 \end{array} \right)^{n-1} n \left(\frac{1}{27}S_0^{-1} \right)^n;$$

$$K = \frac{2}{3}(A_e - C_e)\sigma + \left(B_e - \frac{2}{3}D_e - \frac{5\sqrt{2}}{2}E_e \right)\xi\sigma + \frac{1}{3}\eta\tau D_e + \frac{\sqrt{2}}{2}E_e S_0 +$$

$$+ \left[\begin{array}{l} 18(A_p - C_p)S_0\sigma + \\ + \left(\begin{array}{l} 27B_p - 18D_p - \\ - \frac{135\sqrt{2}}{2}E_p \end{array} \right) \sigma^2 + \\ + 9D_p\tau^2 + \frac{27\sqrt{2}}{2}E_p S_0^2 \end{array} \right] \left(\begin{array}{l} 27B_p\sigma^3 + \\ + E_p \cos 3\varphi\tau^3 + \\ + 27A_p S_0\sigma^2 + \\ + 27C_p S_0\tau^2 + \\ + 27D_p\sigma\tau^2 \end{array} \right)^{n-1} n \left(\frac{1}{27}S_0^{-1} \right)^n;$$

Дифференцируя термодинамический потенциал (2.43), получим [218]:

$$e_{ij} = \left[\begin{array}{l} \{A_1, B_1, C_1, D_1\} + \\ + n(\{A_2, B_2, C_2, D_2\}[W_0])^{n-1} \{A_2, B_2, C_2, D_2\} \end{array} \right] \frac{\partial [W_0]}{\sigma_k} + \quad (2.48)$$

$$+ (A_t + B_t\alpha_k)\theta\delta_{ij},$$

где

$$[W_0] = S^2 \begin{bmatrix} 1; \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3; \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1; \\ \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_1^2 + \alpha_3\alpha_1^2 + \alpha_3\alpha_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial[W_0]}{\sigma_k} = \begin{bmatrix} 2\sigma_k; \sigma_k [3\alpha_k - (\alpha_k^3 + \alpha_m^3 + \alpha_n^3)]; \sigma_m + \sigma_n; \\ \sigma_m\sigma_m + \sigma_n\sigma_n + \sigma_k \begin{bmatrix} 2(\alpha_m + \alpha_n) - \alpha_k(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) - \\ -\alpha_m(\alpha_k^2 + \alpha_n^2) - \alpha_n(\alpha_k^2 + \alpha_m^2) \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Далее потребуется выражение для плотности энтропии, которое можно получить на основании потенциала (2.43), воспользовавшись формулами (2.46):

$$L = (A_t + B_t\alpha_1)\sigma_1 + (A_t + B_t\alpha_2)\sigma_2 + (A_t + B_t\alpha_3)\sigma_3 + C_\sigma \frac{\theta}{T_0}. \quad (2.49)$$

При использовании потенциала Гиббса (2.44) закон изменения плотности энтропии согласно выражениям (2.46) формулируется в виде

$$L = (b_{t1}\xi + b_{t2})\sigma + b_{t1}\eta\tau + C_\sigma \frac{\theta}{T_0}. \quad (2.50)$$

2.3.1 Уравнение притока тепла для разносопротивляющихся материалов

Уравнение притока тепла в предположении бесконечной скорости его распространения будем использовать на базе теории теплопроводности Фурье, что даёт его запись в форме:

$$q_i = -\lambda T_{,i}, \quad (2.51)$$

где q_i – компоненты вектора теплового потока; λ – коэффициент теплопроводности.

Приведём далее локальную форму притока энтропии [232]:

$$TL_{,t} = -q_{i,i} + U, \quad (2.52)$$

где U – удельная мощность источников тепла.

Подставляя выражение (2.51) в (2.52), получаем зависимость между приращением энтропии и температурой [119]:

$$TL_{,t} = \lambda T_{,ii} + U. \quad (2.53)$$

Дифференцируя уравнение для плотности энтропии (2.49) по времени и умножая его на температуру, получим:

$$TL_{,t} = (3A_t\sigma_{,t} + B_tS_{,t})T + C_\sigma T_{,t}. \quad (2.54)$$

Наконец, совместное использование уравнений (2.53) и (2.54) позволяет сформулировать дифференциальное уравнение теплопроводности [119]:

$$(3A_t\sigma_{,t} + B_tS_{,t})T + C_\sigma T_{,t} - \lambda T_{,ii} - U = 0. \quad (2.55)$$

Если в выражении $T = T_o(1 + \theta/T_o)$ рассматривать малые изменения температуры, то можно пренебречь членом $\theta/T_o \ll 1$ и получить линеаризованную форму уравнения теплопроводности [119]:

$$(3A_t\sigma_{,t} + B_tS_{,t})T_o + C_\sigma T_{,t} - \lambda T_{,ii} - U = 0. \quad (2.56)$$

Замена абсолютных температур на их изменения даёт окончательный вариант уравнения притока тепла:

$$\lambda\theta_{,ii} - C_\sigma\theta_{,t} - (3A_t\sigma_{,t} + B_tS_{,t})T_o + U = 0. \quad (2.57)$$

Уравнение (2.57) позволяет учесть связанность полей напряжений и температур, а также зависимость материала от компонентного состава тензора напряжений.

Представим уравнение (2.57) в перемещениях. Для этого потребуются уравнения состояния (2.47) и связь компонентов вектора деформаций с перемещениями в форме тензора Коши:

$$e_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.58)$$

После выполнения преобразований получим уравнение теплопроводности в перемещениях:

$$\lambda\theta_{,ii} - R_1\theta_{,t} - R_2u_{i,it} + R_3\theta - R_4u_{i,i} = R_5 - U, \quad (2.59)$$

где

$$R_1 = C_\sigma - \frac{b_{11}\xi A_t T_o}{F}; \quad R_2 = \frac{A_t T_o}{F}; \quad R_3 = A_t T_o \left(\frac{b_{11}\xi}{F} \right)_{,t};$$

$$R_4 = A_t T_o \frac{F_{,t}}{F^2}; \quad R_5 = -B_t T_o S_{,t} - 3A_t T_o \left(\frac{K}{F} \right)_{,t}.$$

Уравнения (2.57) и (2.59) решают проблему учёта связанности полей напряжений и температур, а также зависимости свойств материала от компонентного состава тензора напряжений.

2.3.2 Механические константы термодинамического потенциала Гиббса

Для расчёта конструкций требуется правильно представить предлагаемые определяющие соотношения, учитывая свойства конкретного класса материалов, чьи свойства активно зависят от напряженного состояния [69]. Проблема решается вычислением констант потенциалов деформаций на основе имеющихся экспериментальных данных. Количество экспериментов должно быть минимальным и они должны быть легко реализуемы в лабораторных условиях. Это позволит значительно упростить использование новых материалов в рамках предлагаемой методики расчёта. Проверка пригодности определяющих соотношений для конкретного материала следует проводить, сравнивая соответствующие экспериментальные диаграммы деформирования с теоретическими.

Алгоритм вычисления констант нелинейных потенциалов через обработку экспериментальных данных по методу наименьших квадратов подробно описан в разделе 2.2.1 [118]. Параллельно с вычислением констант производится проверка устойчивости потенциала в малом для обеспечения единственности решения.

Применительно к предложенным соотношениям постулат Друккера в общем виде можно представить соотношением:

$$\delta\sigma_{ij}\delta e_{ij} = \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial\sigma_{km}\partial\sigma_{ij}} \delta\sigma_{km}\delta\sigma_{ij} \geq 0. \quad (2.60)$$

Коэффициенты квадратичной формы, положительная определённость которых гарантирует выпуклость потенциала и выявляет ограничения, накладываемые на механические характеристики разносопротивляющихся материалов, определяются применением следующей далее последовательностью соотношений:

$$C_{11} = \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial S_0^2} = 2B_e \xi^3 + 2B_e \xi \eta^2 + 2E_e \eta^3 \cos 3\varphi + 2A_e \xi^2 + 2C_e \eta^2 +$$

$$+n \left[\begin{aligned} & \left(A_p + B_p \xi \right) \sigma^2 + \\ & + \left(C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi \right) \tau^2 \end{aligned} \right]^{(n-1)} \left(\begin{aligned} & 2A_p \xi^2 + 2C_p \eta^2 + \\ & + 2B_p \xi^3 + 2D_p \xi \eta^2 + 2E_p \eta^3 \cos 3\varphi \end{aligned} \right) +$$

$$+4S_0^2 n(n-1) \left[\left(A_p + B_p \xi \right) \sigma^2 + \left(C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi \right) \tau^2 \right]^{(n-2)} \times$$

$$\times \left(B_p \xi^3 + D_p \xi \eta^2 + A_p \xi^2 + C_p \eta^2 + E_p \eta^3 \cos 3\varphi \right)^2;$$

$$C_{12} = \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial S_0 \partial \psi} - \frac{1}{S_0} \cdot \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \psi} = S_0 \left[\begin{aligned} & 2(C_e - A_e) \xi \eta - 3B_e \xi^2 \eta - D_e \eta (\eta^2 - 2\xi^2) + \\ & + 3E_e \xi \eta^2 \cos 3\varphi \end{aligned} \right] +$$

$$+2S_0^3 n(n-1) \left[\begin{aligned} & \left(A_p + B_p \xi \right) \sigma^2 + \left(\begin{aligned} & C_p + D_p \xi + \\ & + E_p \eta \cos 3\varphi \end{aligned} \right) \tau^2 \end{aligned} \right]^{(n-2)} \times$$

$$\times \left(B_p \xi^3 + D_p \xi \eta^2 + A_p \xi^2 + C_p \eta^2 + E_p \eta^3 \cos 3\varphi \right) \times$$

$$\times \left[2(C_p - A_p) \xi \eta - 3B_p \xi^2 \eta - D_p \eta (\eta^2 - 2\xi^2) + 3E_p \xi \eta^2 \cos 3\varphi \right] +$$

$$+S_0 n \left[\left(A_p + B_p \xi \right) \sigma^2 + \left(C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi \right) \tau^2 \right]^{(n-1)} \times$$

$$\times \left[2(C_p - A_p) \xi \eta - 3B_p \xi^2 \eta - D_p \eta (\eta^2 - 2\xi^2) + 3E_p \xi \eta^2 \cos 3\varphi \right];$$

$$C_{13} = \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial S_0 \partial \varphi} - \frac{1}{S_0} \cdot \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \varphi} =$$

$$= -3S_0 E_e \eta^3 \sin 3\varphi - 3S_0 n \left[\begin{aligned} & \left(A_p + B_p \xi \right) \sigma^2 + \\ & + \left(C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi \right) \tau^2 \end{aligned} \right]^{(n-1)} E_p \eta^3 \sin 3\varphi -$$

$$-6S_0^3 n(n-1) \times$$

$$\times \left[\left(A_p + B_p \xi \right) \sigma^2 + \left(C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi \right) \tau^2 \right]^{(n-2)} E_p \eta^3 \sin 3\varphi \times$$

$$\times \left(B_p \xi^3 + D_p \xi \eta^2 + A_p \xi^2 + C_p \eta^2 + E_p \eta^3 \cos 3\varphi \right);$$

$$C_{22} = \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial \psi^2} + S_0 \cdot \frac{\partial \Gamma_1}{\partial S_0} =$$

$$= S_0^2 \left[\begin{aligned} & 2(A_e - C_e) (\eta^2 - \xi^2) + 2(A_e \xi^2 + C_e \eta^2) + \\ & + B_e \xi (2\eta^2 - \xi^2) + D_e \xi (2\xi^2 - 5\eta^2) + E_e \eta (6\xi^2 - \eta^2) \cos 3\varphi \end{aligned} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & +S_0^2 n \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^{(n-1)} \times \\
 & \times \left[2(A_p - C_p)(\eta^2 - \xi^2) + 2(A_p \xi^2 + C_p \eta^2) + B_p \xi (2\eta^2 - \xi^2) + \right. \\
 & \left. + D_p \xi (2\xi^2 - 5\eta^2) + E_p \eta (6\xi^2 - \eta^2) \cos 3\varphi \right] + \\
 & + S_0^4 n(n-1) \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^{(n-2)} \times \\
 & \times \left[2(C_p - A_p) \xi \eta - 3B_p \xi^2 \eta - D_p \eta (\eta^2 - 2\xi^2) + 3E_p \xi \eta^2 \cos 3\varphi \right]^2 + \\
 & + \theta b_{11} (\sigma + \tau \eta) + 3E_p \xi \eta^2 \cos 3\varphi]^2 + \theta b_{11} (\sigma + \tau \eta);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{23} &= \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial \psi \partial \varphi} - \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \varphi} = \\
 &= -6S_0^2 E_e \xi \eta^2 \sin 3\varphi - 6S_0^2 n \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + \right. \\
 & \left. + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^{(n-1)} E_p \xi \eta^2 \sin 3\varphi - \\
 & - 3S_0^4 n(n-1) \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \right]^{(n-2)} \times \\
 & \times E_p \eta^3 \sin 3\varphi \left[2(C_p - A_p) \xi \eta - 3B_p \xi^2 \eta - D_p \eta (\eta^2 - 2\xi^2) + \right. \\
 & \left. + 3B_p \xi^2 \eta - D_p \eta (\eta^2 - 2\xi^2) + 3E_p \xi \eta^2 \cos 3\varphi \right]; \\
 C_{33} &= \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial \varphi^2} + S_0 \eta^2 \cdot \frac{\partial \Gamma_1}{\partial S_0} + \xi \eta \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \psi} = \\
 &= S_0^2 \eta^2 \left[2(C_e - A_e) \xi^2 + 2(A_e \xi^2 + C_e \eta^2) - B_e \xi^2 + \right. \\
 & \left. + D_e \xi (2\xi^2 + \eta^2) + E_e \eta (3\xi^2 + 2\eta^2 - 9) \cos 3\varphi \right] + \\
 & + S_0^2 \eta^2 n \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^{(n-1)} \times \\
 & \times \left[2(C_p - A_p) \xi^2 + 2(A_p \xi^2 + C_p \eta^2) - B_p \xi^2 + \right. \\
 & \left. + D_p \xi (2\xi^2 + \eta^2) + E_p \eta (3\xi^2 + 2\eta^2 - 9) \cos 3\varphi \right] + \\
 & + S_0^4 n(n-1) \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + \right. \\
 & \left. + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^{(n-2)} (E_p \eta^3 \sin 3\varphi)^2 + \\
 & + \eta^2 \theta b_{11} (\xi + \eta \tau).
 \end{aligned}$$

Константы потенциала деформаций определяются по методике [118], которая использовалась для описания диаграмм деформирования графита АРВ, чтобы

избежать заметных погрешностей, которые характерны при квазилинейной аппроксимация при выходе на ветви упрочнения.

На рисунке 2.9 приведены экспериментальные диаграммы деформирования (сплошные линии) и их нелинейные аппроксимации (сплошные линии с маркерами), полученные на основе соотношений (2.47), (2.49) для графита АРВ [166, 210, 223].

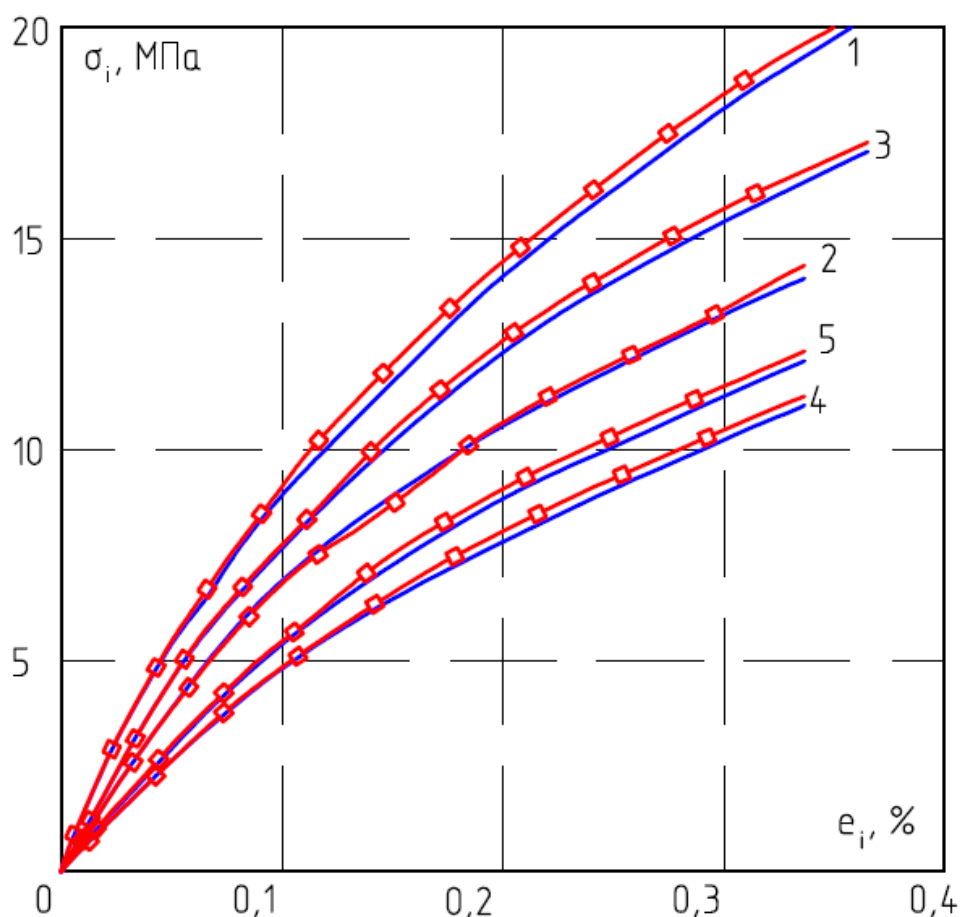


Рисунок 2.9 – Диаграммы деформирования графита АРВ при пропорциональном нагружении и их нелинейные аппроксимации:

$$1 - \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : 0 : 0; 2 - \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : 0 : 0;$$

$$3 - \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = -1 : +1 : 0; 4 - \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : +1 : 0;$$

$$5 - \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : +0,325 : 0$$

Очевидно, что предлагаемые к использованию потенциальные соотношения достаточно универсальны и вполне применимы для расчёта НДС конструкций, выполненных из нелинейных материалов, чьи механические свойства проявляют зависимость от характеристик напряжённого состояния в точке.

2.3.3 Температурные константы термодинамического потенциала Гиббса

Теплофизические константы термодинамического потенциала можно вычислить по результатам обработки опытов, связанных с нагреванием и охлаждением одноосно растягиваемых и одноосно сжимаемых образцов из разносопротивляющегося материала. Обоснованно полагая, что полная деформация образца определяется суммой изотермической составляющей e^W и деформации, полученной вследствие изменения температуры e^T . Тогда выполняются соотношения [119]:

- при одноосном растяжении вдоль оси k :

$$\begin{aligned} e_k^+ &= e_k^{W^+} + e_k^{T^+}, \\ e_k^{T^+} &= e_k^+ - e_k^{W^+} = (A_t + B_t)\theta = \alpha_{t1}^+\theta, \\ e_m^{T^+} &= e_m^+ - e_m^{W^+} = A_t\theta = \alpha_{t2}^+\theta; \end{aligned} \quad (2.61)$$

- при одноосном сжатии вдоль оси k :

$$\begin{aligned} e_k^- &= e_k^{W^-} + e_k^{T^-}, \\ e_k^{T^-} &= e_k^- - e_k^{W^-} = (A_t - B_t)\theta = \alpha_{t1}^-\theta, \\ e_m^{T^-} &= e_m^- - e_m^{W^-} = A_t\theta = \alpha_{t2}^-\theta. \end{aligned} \quad (2.62)$$

В соотношениях (2.61–2.62) обозначено: α_{t1}^\pm – коэффициенты линейного температурного расширения в продольном направлении; α_{t2}^\pm – такие же коэффициенты в поперечном направлении. Те и другие получены при растяжении (+) и сжатии (–) опытных образцов. Таким образом, получаем [119]:

$$A_t = \frac{1}{2}(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t1}^-), \quad B_t = \frac{1}{2}(\alpha_{t1}^+ - \alpha_{t1}^-), \quad (2.63)$$

С учётом отношений связи (1.28), температурные константы нормированного пространства № 2 будут определяться выражениями:

$$b_{t1} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_{t1}^+ - \alpha_{t1}^-); \quad b_{t2} = \frac{3}{2}(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t1}^-). \quad (2.64)$$

Наличие в полиномиальном разложении (2.43) и (2.44) только двух констант приводит к ограничениям на экспериментально определяемые коэффициенты теплового расширения [119]:

$$\alpha_{t2}^+ = \alpha_{t2}^- = 0,5(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t1}^-). \quad (2.65)$$

Однако, по крайней мере в своей первой части, ограничение (2.63) не вызывает возражений. Это объясняется тем, что предположить независимость коэффициентов линейного теплового расширения в поперечном направлении от знака напряжений в продольном направлении вполне естественно.

*2.3.4 Законы изменения объёма и формы,
фазовая характеристика, плотность энтропии*

Выражения законов изменения объёма, формы, фазовую характеристику и плотность энтропии значимо нелинейного изотропного разносопротивляющегося материала можно представить в форме последовательности соотношений:

а) закон изменения объёма –

$$e = \frac{\sigma}{K_0} + \frac{\tau}{D_0} + (b_{t1}\xi + b_{t2})\theta; \quad (2.66)$$

б) закон изменения формы –

$$1,5\gamma = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega} \left(\frac{1,5\tau}{G_0} + \frac{\sigma}{D_0} + b_{t1}\eta\theta \right); \quad (2.67)$$

в) фазовая характеристика –

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{3 \left(E_e + n \left(\begin{array}{l} A_p \sigma^2 + C_p \tau^2 + B_p \xi \sigma^2 + \\ + D_p \xi \tau^2 + E_p \eta \tau^2 \cos 3\varphi \end{array} \right)^{n-1} E_p \right) \eta \sin 3\varphi}{\left(\frac{1,5\eta}{G_0} + \frac{\xi}{D_0} + \frac{b_{t1}\theta^0}{S_0} \right)}, \quad (2.68)$$

г) закон изменения плотности энтропии

$$L = (b_{t1}\xi + b_{t2})\sigma + b_{t1}\eta\tau + \frac{C_\sigma\theta}{T_0}. \quad (2.69)$$

В формулах (2.66–2.69) использованы обозначения:

$$K_0 = \left[\begin{array}{c} 2A_e + 2n \left(\begin{array}{c} A_p \sigma^2 + C_p \tau^2 + B_p \xi \sigma^2 + \\ + D_p \xi \tau^2 + E_p \eta \tau^2 \cos 3\varphi \end{array} \right)^{n-1} A_p + \\ + \xi (2 + \eta^2) \left(\begin{array}{c} B_e + \\ + n \left(\begin{array}{c} A_p \sigma^2 + C_p \tau^2 + B_p \xi \sigma^2 + \\ + D_p \xi \tau^2 + E_p \eta \tau^2 \cos 3\varphi \end{array} \right)^{n-1} \end{array} \right) B_p \\ - \eta^3 \cos 3\varphi \left(\begin{array}{c} E_e + \\ + n \left(\begin{array}{c} A_p \sigma^2 + C_p \tau^2 + B_p \xi \sigma^2 + \\ + D_p \xi \tau^2 + E_p \eta \tau^2 \cos 3\varphi \end{array} \right)^{n-1} \end{array} \right) E_p \end{array} \right]^{-1} ; \\ \\
 G_0 = 1,5 \left[\begin{array}{c} 2 \left(C_e + n \left(\begin{array}{c} A_p \sigma^2 + C_p \tau^2 + B_p \xi \sigma^2 + \\ + D_p \xi \tau^2 + E_p \eta \tau^2 \cos 3\varphi \end{array} \right)^{n-1} \right) C_p \\ - \xi^3 \left(B_e + n \left(\begin{array}{c} A_p \sigma^2 + C_p \tau^2 + B_p \xi \sigma^2 + \\ + D_p \xi \tau^2 + E_p \eta \tau^2 \cos 3\varphi \end{array} \right)^{n-1} \right) B_p \\ + 2\xi^3 \left(D_e + n \left(\begin{array}{c} A_p \sigma^2 + C_p \tau^2 + B_p \xi \sigma^2 + \\ + D_p \xi \tau^2 + E_p \eta \tau^2 \cos 3\varphi \end{array} \right)^{n-1} \right) D_p \\ + (2 + \xi^2) \eta \cos 3\varphi \left(\begin{array}{c} E_e + \\ + n \left(\begin{array}{c} A_p \sigma^2 + C_p \tau^2 + B_p \xi \sigma^2 + \\ + D_p \xi \tau^2 + E_p \eta \tau^2 \cos 3\varphi \end{array} \right)^{n-1} \end{array} \right) E_p \end{array} \right]^{-1} ; \\ \\
 D_0 = \left[\eta^3 \left(D_e + n \left(\begin{array}{c} A_p \sigma^2 + C_p \tau^2 + B_p \xi \sigma^2 + \\ + D_p \xi \tau^2 + E_p \eta \tau^2 \cos 3\varphi \end{array} \right)^{n-1} \right) D_p \right]^{-1} .$$

2.4 Выводы по главе 2

1. Выполнен анализ современных потенциалов деформаций для материалов, относящихся к классу разносопротивляющихся, которые проявляют нелинейные свойства. Особенностью таких потенциалов, предложенных А.А. Трещёвым, Н.М.

Матченко в печатных работах [118, 119], является их формализация в пространстве нормированных напряжений.

Сделан вывод об универсальности и эффективности применения потенциала деформаций, формализованного как W_I , для моделирования механического поведения материалов, свойства которых зависят от компонентного состава тензора напряжений.

2. Проведена детализация алгоритма, обеспечивающего вычисления постоянных в составе выражений потенциалов W_1 - W_3 по экспериментальным данным для следующего перечня материалов: графитов АРВ и ВПП, чугуна СЧ15-32 и тяжёлого бетона, имеющего значения прочности $R^* = 28,4$ МПа и $R^* = 37,0$ МПа. Контроль достоверности вычислений осуществлялся сравнением аппроксимаций диаграмм деформирования с данными, полученными опытным путём. Подтверждён высокий уровень точности расчётного моделирования НДС с применением разработанных определяющих соотношений на примере расчёта конструкций из материала, обладающего выраженными свойствами разносопротивляемости.

3. Предложены модифицированные формы термодинамического потенциала Гиббса с целью учёта нелинейных эффектов разносопротивляемости при расчётном моделировании в условиях термомеханического нагружения [116, 117, 331]).

3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН ИЗ ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Теория деформирования материалов с усложнёнными свойствами – относительно молодая ветвь механики деформируемого твёрдого тела. Её становление относится к середине шестидесятых годов прошлого столетия. За прошедшие годы были сформулированы и применены разнообразные модели учёта свойств для разносопротивляющихся и дилатирующих материалов. Такая оценка справедлива и в отношении развития механики материалов, учитывающей зависимость их механических характеристик от компонентного состава тензора напряжений. Немало определяющих соотношений разносопротивляющихся сред, базирующихся на различных технических гипотезах и теоретических предпосылках, продемонстрировали свою работоспособность. Тем не менее, оказалось, что физическая природа этих тонких эффектов исследована недостаточно, так как применяемые теории далеко не всегда отражают реальное механическое поведение материалов [118, 119, 174].

Одной из причин наличия зависимости деформационных характеристик материалов от вида напряжённого состояния являются дефекты типа пор и трещин. Их появление происходит в начально бездефектном материале, который в ходе деформирования сталкивается со стадией образования, накопления и слияния микродефектов, что порождает образование макроскопической трещины [26, 27, 186, 187].

Наиболее отчётливо это явление проявляется при деформировании композиционных материалов (например, бетона, конструкционных графитов и др.), в которых стадия рассеянного разрушения реализуется, будучи сильно выраженной. Причиной тому является наличие в композитах большого количества границ раздела фаз, тормозящих трещины. Эффекты такого рассеянного разрушения наблюдаются и в вершине магистральной трещины, за счёт чего она и перемещается в повреждённом материале.

Возникновение микродефектов, таким образом, является причиной последующего окончательного разрушения. Они влияют на механические и физические характеристики материала, приводят к изменению скорости ультразвука, модуля упругости, пределов пропорциональности, поверхности текучести, изменению

декрементов затухания и т.д. Поэтому о степени повреждения материала можно судить по внешним проявлениям, а по изменениям таких характеристик – о степени его дефектности. При наличии критерия образования макроскопической трещины и формализации связи изменений характеристик материала с ансамблем микроскопических трещин, образованных в теле под воздействием внешних условий, можно было решать проблему прогнозирования разрушающих нагрузок для конкретного материала несущего элемента, этот материал использующий.

Разрушение – это центральная проблема прочности конструкций. Изучение условий распространения трещины или системы трещин, приводящих к разрушению, разработка методов идентификации дефектности материала, построение физических и математических моделей описания деформирования сред с дефектами может предоставить возможность для анализа текущих условий эксплуатации конструкции на предмет её разрушения.

В диссертационном исследовании, на основе полученной в работах А.А. Трещёва и Н.М. Матченко [118] оптимальной формы потенциала деформаций W_I , для нелинейных изотропных материалов, сформулированы уравнения состояния материалов для плоского напряжённого состояния, особенностью которых является использование определяющих соотношений для изотропных материалов со свойствами, зависящими от компонентного состава тензора напряжений. Эти соотношения получены в рамках подхода, использующего нормированные пространства напряжений, с применением методики исследования трещинообразования для материалов, чьи свойства зависят от вида напряжённого состояния. Такая методика была предложена в работе А.В. Березина [26], где получены дифференциальные уравнения, описывающее плоское напряжённое состояние тонкой пластинки с учётом повреждаемости в форме трещины поперечного сдвига (трещины сдвига [187]) и трещины нормального разрыва.

Решение данного класса задач представляет собой значительный интерес для механики разрушения, позволяя исследовать процессы, протекающие около вершины трещины при наличии повреждений в этой области. Это позволяет получить дополнительную информацию о форме разрушения твёрдого тела, что, в свою очередь, способствует

исследованию механизмов разрушения для разносопротивляющихся материалов со свойствами, зависящими от компонентного состава тензора напряжений.

3.1 Решение задач

Задача № 1. Тонкая полубесконечная пластина с дефектом в форме трещины сдвига. Рассматривается задача об осесимметричном НДС тонкой пластины шириной B с бесконечной длиной при образовании трещины поперечного сдвига со свободными от усилий берегами [26, 187]. В качестве граничных условий заданы значения функции и её производных как функции полярного угла θ раскрытия трещины. Выполнено сравнение результатов расчёта по предложенной модели с данными, полученными на базе физических соотношений классической теории, которая не принимает во внимание эффекты разносопротивляемости. Проведён анализ влияния учёта свойств разносопротивляемости материалов при наличии повреждаемости указанного выше вида на НДС пластины, находящейся в плоском напряжённом состоянии.

Параметры пластины в решаемой задаче проиллюстрированы рисунком 3.1.

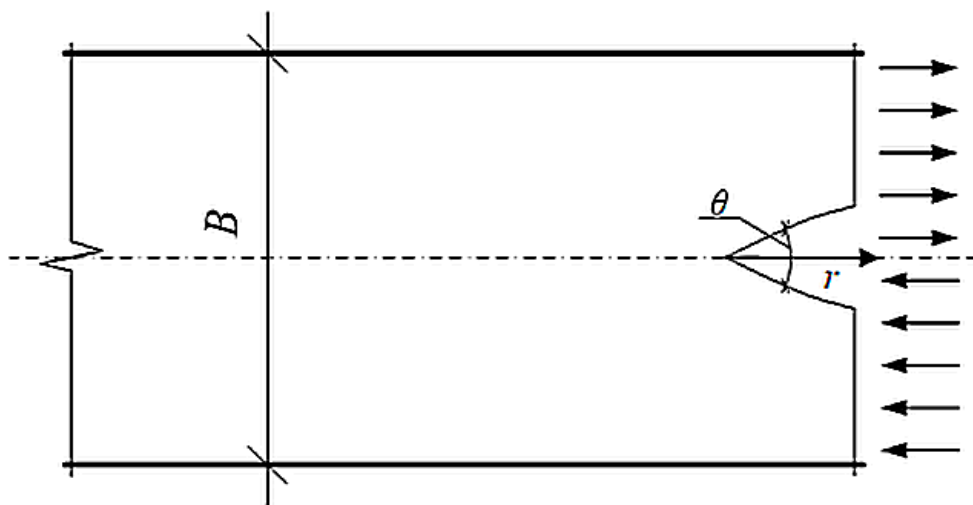


Рисунок 3.1 – Схема модельной задачи № 1 для пластины

Здесь r – малое расстояние от вершины трещины. Учитывая осевую симметрию геометрии пластины для её решения, можно воспользоваться полярной системой координат с центром в вершине трещины. Пластина считается ограниченной по торцам абсолютно жёсткими и гладкими плоскостями. В качестве материала пластины были использованы бетон с пределом прочности на сжатие $R^- = 28,4$ МПа и графит АРВ [26, 98, 118].

Граничные условия задачи формулируются следующими образом:

- при $\theta = 0$, $f(\theta = 0) = f''(\theta = 0) = 0$, $f'(\theta = 0) = 1$;

- при $\theta = \pi$, $f(\theta = \pi) = f'(\theta = \pi) = 0$,

где $f(\theta)$ – функция, учитываемая в функции напряжений, имеющая аргументом только угол раскрытия трещины θ .

Как показали ранее проведённые эксперименты по решению задач механики деформируемого твёрдого тела и строительной механики для изотропных материалов, свойства которых зависимы от компонентного состава тензора напряжений, определение их механического поведения можно проводить, используя потенциал W_1 , предложенный в работах [118, 187]. Этот потенциал позволяет эффективно и сравнительно просто формулировать физические зависимости между напряжениями и деформациями для значимо нелинейных изотропных материалов с разными механическими характеристиками на растяжение и сжатие [187].

Вначале сформулируем определяющие соотношения для изотропного тела с отмеченными выше нелинейными свойствами. Для этого будут привлечены соотношения [176].

$$\{e\} = [A]\{\sigma\}, \quad (3.1)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & A_{14} & A_{15} \\ & A_{22} & A_{26} & A_{24} & A_{25} \\ & & A_{66} & A_{64} & A_{65} \\ & sim & & A_{44} & A_{45} \\ & & & & A_{55} \end{bmatrix}; \quad (3.2)$$

$$A_{11} = \{2(R_1 + 2R_2)/3 + R_3\xi(1 - \xi^2)/3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) + 4(\sigma_{11} - 2\sigma_{22})/9S_0] + R_5[\eta \cos 3\varphi(1 + \xi^2) + 2\sqrt{2}\xi - 2\cos 3\varphi - \sqrt{2}\sigma_{22}/S_0]\}/3;$$

$$A_{12} = \{2(R_1 - R_2)/3 + (R_3 + R_4/3)\xi + R_5[\cos 3\varphi(1 - \xi) - \sqrt{2}\xi]\}/3;$$

$$A_{16} = (2R_4/3 + \sqrt{2}R_5)\tau_{12}/3S_0; \quad A_{26} = A_{16};$$

$$A_{14} = (2R_4/3 + \sqrt{2}R_5)\tau_{13}/3S_0;$$

$$A_{15} = 2(R_4/3 - \sqrt{2}R_5)\tau_{23}/3S_0;$$

$$A_{22} = \{2(R_1 + 2R_2) / 3 + R_3[\xi(1 - \xi^2) / 3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) + 4(\sigma_{22} - 2\sigma_{11}) / 9S_0] + R_5[\eta \cos 3\varphi(1 + \xi^2) + 2\sqrt{2}\xi - 2\cos 3\varphi - \sqrt{2}\sigma_{11} / S_0]\} / 3;$$

$$A_{24} = 2(R_4 / 3 - \sqrt{2}R_5)\tau_{13} / 3S_0;$$

$$A_{25} = (2R_4 / 3 + \sqrt{2}R_5)\tau_{23} / 3S_0;$$

$$A_{66} = 2\{2R_2 - R_3\xi^3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) - (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / 3S_0] + R_5[\sqrt{2}\eta(\sigma_{11} - \sigma_{22}) / 2 - \eta^3 \cos 3\varphi]\} / 3;$$

$$A_{64} = \sqrt{2}R_5\tau_{23} / S_0; \quad A_{65} = \sqrt{2}R_5\tau_{13} / S_0;$$

$$A_{44} = 2\{2R_2 - R_3\eta^3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) - (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / 3S_0] + R_5[\sqrt{2}\eta(\sigma_{11} - 2\sigma_{22}) / 2 - \eta^3 \cos 3\varphi]\} / 3;$$

$$A_{45} = \sqrt{2}R_5\tau_{12} / S_0;$$

$$A_{55} = 2\{2R_2 - R_3\eta^3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) - (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / 3S_0] + R_5[\sqrt{2}\eta(\sigma_{22} - 2\sigma_{11}) / 2 - \eta^3 \cos 3\varphi]\} / 3.$$

В соотношениях (3.2) используются следующие обозначения: R_i – константы потенциала деформаций W_1 ; S_0 – модуль вектора полного напряжения на октаэдрической площадке; ξ , η – гармонические функции, которые трактуются как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке; φ – фаза напряжений; $A_e \dots E_e$ и $A_p \dots E_p$ – константы, определяемые из экспериментов. Таким образом, получаем

$$\{R\} = \left\{ \begin{array}{l} A_e + n(A_p\sigma^2 + C_p\tau^2 + B_p\xi\sigma^2 + D_p\xi\tau^2 + E_p\eta\tau^2 \cos 3\varphi)^{n-1} A_p \\ C_e + n(A_p\sigma^2 + C_p\tau^2 + B_p\xi\sigma^2 + D_p\xi\tau^2 + E_p\eta\tau^2 \cos 3\varphi)^{n-1} C_p \\ B_e + n(A_p\sigma^2 + C_p\tau^2 + B_p\xi\sigma^2 + D_p\xi\tau^2 + E_p\eta\tau^2 \cos 3\varphi)^{n-1} B_p \\ D_e + n(A_p\sigma^2 + C_p\tau^2 + B_p\xi\sigma^2 + D_p\xi\tau^2 + E_p\eta\tau^2 \cos 3\varphi)^{n-1} D_p \\ E_e + n(A_p\sigma^2 + C_p\tau^2 + B_p\xi\sigma^2 + D_p\xi\tau^2 + E_p\eta\tau^2 \cos 3\varphi)^{n-1} E_p \end{array} \right\}. \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что определяющие соотношения для изотропных разносопротивляющихся материалов [118] могут быть записаны в матричном виде. В этой

форме они и будут положены в основу разрешающих уравнений, которые учитывают возникновение трещины сдвига.

В соответствии с условиями плоского напряжённого состояния, значения компонентов тензора напряжений τ_{13} , τ_{23} , σ_{33} и соответствующих компонентов тензора деформаций принимаются нулевыми. Теперь определяющие соотношения представляются выражениями:

$$e_{11} = A_{11}\sigma_{11} + A_{12}\sigma_{22}; e_{22} = A_{12}\sigma_{11} + A_{22}\sigma_{22}, e_{12} = A_{66}\tau_{12}. \quad (3.4)$$

Для получения распределения напряжений и деформаций у вершины трещины в зависимости от полярного угла θ (угол раскрытия трещины) требуется выполнить следующие действия:

- ввести полярные координаты с центром в вершине трещины (r, θ) ;
- ввести функцию напряжений $\chi(r, \theta)$.

В данном исследовании не рассматривается та область трещины, где реализуется асимптотика, так что функция напряжений принимает вид $\chi(r, \theta) = r^{3/2} f(\theta)$ [23].

Воспользуемся дифференциальными уравнениями напряжений, приведёнными в монографии А.В. Березина [23] для трещин сдвига в телах, характеристики которых зависят от вида напряжённого состояния [187]:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}; \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}; \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta}. \quad (3.5)$$

Запишем условие совместности, которому должны удовлетворять деформации в системе полярных координат:

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_\theta)}{\partial r^2}, \quad (3.6)$$

где из условия равновесия деформации представляются функциями

$$e_r = A_{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right),$$

$$e_\theta = A_{12} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), \varepsilon_{r\theta} = A_{66} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} \right). \quad (3.7)$$

Выражения для деформаций (3.7) подставляем в уравнение совместности деформаций (3.6):

$$-\frac{A_{11}f^{(IV)}(\theta)}{\sqrt{r}} + A_{11}\sqrt{r}f'''(\theta) + \left(-\frac{A_{66}}{2\sqrt{r}} - \frac{3A_{11}}{2\sqrt{r}} - \frac{A_{12}}{2\sqrt{r}}\right)f''(\theta) + \left(\frac{3A_{11}\sqrt{r}}{2} + \frac{3A_{12}\sqrt{r}}{4}\right)f'(\theta) + \left(\frac{3A_{12}}{8\sqrt{r}} + \frac{3A_{22}}{16\sqrt{r}}\right)f(\theta) = 0. \quad (3.8)$$

или

$$f^{(IV)}(\theta) - r \cdot f'''(\theta) + \frac{3}{2}f''(\theta) + \frac{A_{12}}{2A_{11}}f''(\theta) + \frac{A_{66}}{2A_{11}}f''(\theta) - \frac{3}{2}r \cdot f'(\theta) - \frac{3A_{12}r}{4A_{11}}f'(\theta) - \frac{3}{8}\frac{A_{12}}{A_{11}}f(\theta) - \frac{3A_{22}}{16A_{11}}f(\theta) = 0. \quad (3.9)$$

В работе [23] показано, что решение такого вида уравнений можно получить методом малого параметра [59, 251]. Для подготовки уравнения к применению этого метода запишем его в рекомендованной форме [186, 187], которая гарантированно позволяет находить нулевое приближение. Оно может быть также уже известным, например, если является решением одного из классических видов дифференциальных уравнений. Используя эти рекомендации, запишем:

$$f^{(IV)}(\theta) + \frac{5}{2}f''(\theta) + \frac{9}{16}f(\theta) = b \begin{pmatrix} r \cdot f'''(\theta) + f''(\theta) - \frac{A_{12}}{2A_{11}}f''(\theta) - \\ -\frac{A_{66}}{2A_{11}}f''(\theta) + \frac{3}{2}r \cdot f'(\theta) + \\ + \frac{3A_{12}r}{4A_{11}}f'(\theta) + \frac{3}{8}\frac{A_{12}}{A_{11}}f(\theta) + \\ + \frac{3A_{22}}{16A_{11}}f(\theta) + \frac{9}{16}f(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Решение уравнения (10) будем искать в характерном для метода малого параметра виде [59, 187, 251]:

$$f(\theta) = f_0(\theta^*) + bf_1(\theta^*) + b^2f_2(\theta^*) + \dots; \theta = \theta^*(1 + g_1b + g_2b^2 + \dots).$$

Запишем граничные условия для свободных от усилий берегов трещины: $f(\pi) = f'(\pi) = 0$, $f(0) = f''(0) = 0$. Нормируя, согласно условию $f'(0) = 1$, получим уравнения, которым будут удовлетворять $f_i(\theta)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) [23]:

$$f^{(IV)} + \frac{5}{2}f'' + \frac{9}{16}f = 0,$$

$$f^{(IV)}_1 + \frac{5}{2}f''_1 + \frac{9}{16}f_1 = bg_1 \left(\begin{array}{l} r \cdot f''' + f'' - \frac{A_{12}}{2A_{11}}f'' - \frac{A_{66}}{2A_{11}}f'' + \frac{3}{2}r \cdot f' + \\ + \frac{3A_{12}r}{4A_{11}}f' + \frac{3}{8}\frac{A_{12}}{A_{11}}f + \frac{3A_{22}}{16A_{11}}f + \frac{9}{16}f \end{array} \right). \quad (3.11)$$

Нулевое приближение получается в форме $f_0(\theta) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{3}{2}\theta + \sin \frac{1}{2}\theta \right)$.

Первое приближения описывается выражением

$$f_1(\theta^*) = A_1 \cos \frac{\theta^*}{2} + B_1 \cos \frac{3\theta^*}{2} + C_1 \sin \frac{\theta^*}{2} + D_1 \sin \frac{3\theta^*}{2} + \\ + 1/3 \left\{ \begin{array}{l} -3 \cos \frac{\theta^*}{2} \int_0^{\theta^*} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta + 3 \sin \frac{\theta^*}{2} \int_0^{\theta^*} \Omega_1 \cos \frac{\theta}{2} d\theta + \\ + \cos \frac{3\theta^*}{2} \int_0^{\theta^*} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta - \sin \frac{3\theta^*}{2} \int_0^{\theta^*} \Omega_1 \cos \frac{3\theta}{2} d\theta. \end{array} \right\} = 0.$$

Здесь:

$$\Omega_1 = bg_1 \left(\begin{array}{l} r \cdot f''' + f'' - \frac{A_{12}}{2A_{11}}f'' - \frac{A_{66}}{2A_{11}}f'' + \frac{3}{2}r \cdot f' + \\ + \frac{3A_{12}r}{4A_{11}}f' + \frac{3}{8}\frac{A_{12}}{A_{11}}f + \frac{3A_{22}}{16A_{11}}f + \frac{9}{16}f \end{array} \right).$$

Учёт граничных условия определяет значения $A_1 = B_1 = 0$, так что для первого приближения имеет место соотношение:

$$f(\theta) = f_0\left(\frac{\theta}{1+g_1b}\right) + bf_1\left(\frac{\theta}{1+g_1b}\right) = \left(C_0 + bC_1 + b \int_0^{\theta/(1+g_1b)} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right) \times \\ \times \sin \frac{\theta}{2(1+g_1b)} + \left(D_0 + bD_1 + b/3 \int_0^{\theta/(1+g_1b)} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta \right) \times \\ \times \sin \frac{3\theta}{2(1+g_1b)} - b \cos \frac{\theta}{2(1+g_1b)} \int_0^{\theta/(1+g_1b)} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta + \\ + b/3 \cos \frac{3\theta}{2(1+g_1b)} \int_0^{\theta/(1+g_1b)} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta. \quad (3.12)$$

Из разложения в ряды по b граничных условий и условия нормировки с точностью до первой степени b получаем:

$$C_0 = D_0 = \frac{1}{2}, \quad C_1 = \frac{1}{4}g_1 - \frac{3}{4} \int_0^\pi \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta - \frac{1}{4} \int_0^\pi \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta,$$

$$D_1 = \frac{1}{4} g_1 + \frac{1}{4} \int_0^\pi \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta - \frac{1}{12} \int_0^\pi \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta, \quad (3.13)$$

$$g_1 = \frac{2}{3\pi} \Omega_1(\pi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta.$$

Учитывая, что $C_1 = (2 - 3\pi) / 8g_1$, $D_1 = (1 + 2\pi) / 8g_1$ искомая функция будет:

$$\begin{aligned} f(\theta) = & \left(\frac{1}{2} + b \frac{2-3\pi}{8} g_1 + b \int_0^{\frac{\theta}{(1+g_1b)}} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right) \sin \frac{\theta}{2(1+g_1b)} + \\ & + \left(\frac{1}{2} + b \frac{1+2\pi}{8} g_1 - \frac{b}{3} \int_0^{\frac{\theta}{(1+g_1b)}} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta \right) \times \sin \frac{3\theta}{2(1+g_1b)} - \\ & - b \cos \frac{\theta}{2(1+g_1b)} \int_0^{\frac{\theta}{(1+g_1b)}} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{b}{3} \cos \frac{3\theta}{2(1+g_1b)} \int_0^{\frac{\theta}{(1+g_1b)}} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Выражения для напряжений в полярной системе координат, связанной с вершиной трещины, будут выглядеть следующим образом:

$$\sigma_r = \frac{C_0 r^{-1/2}}{(1+g_1b)} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{5+12g_1b}{4} \left(\frac{1}{2} + b \frac{2-3\pi}{8} g_1 + b \int_0^{\theta/(1+g_1b)} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right) \sin \frac{\theta}{2(1+g_1b)} - \\ & - \frac{7-4g_1b}{4} \left(\frac{1}{2} + b \frac{2-3\pi}{8} g_1 + b \int_0^{\theta/(1+g_1b)} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right) \sin \frac{3\theta}{2(1+g_1b)} - \\ & - \frac{b(2+6g_1b)}{4} \cos \frac{\theta}{2(1+g_1b)} \int_0^{\theta/(1+g_1b)} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta - \\ & + \frac{b(1-g_1b)}{4} \int_0^{\theta/(1+g_1b)} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta - \\ & - \frac{b(1-g_1b)}{4} \int_0^{\theta/(1+g_1b)} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta + \frac{3b}{4} \Omega_1 \left[\begin{aligned} & \sin \frac{\theta}{(1+g_1b)} - \sin \frac{3\theta}{(1+g_1b)} - \\ & \cos \frac{\theta}{(1+g_1b)} - \cos \frac{\theta}{(1+g_1b)} \end{aligned} \right] + \\ & + \frac{b}{4} \Omega_1' \left[2 - 3 \cos \frac{\theta}{(1+g_1b)} + \cos \frac{3\theta}{(1+g_1b)} - 3 \sin \frac{\theta}{(1+g_1b)} + \sin \frac{3\theta}{(1+g_1b)} \right] \end{aligned} \right\};$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{3}{4} C_0 r^{-1/2} = \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + b \frac{2-3\pi}{8} g_1 + b \int_0^{\theta/(1+g_1 b)} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right) \sin \frac{\theta}{2(1+g_1 b)} + \\ & + \left(\frac{1}{2} + b \frac{2-3\pi}{8} g_1 + b \int_0^{\theta/(1+g_1 b)} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right) \sin \frac{3\theta}{2(1+g_1 b)} - \\ & - b \cos \frac{\theta}{2(1+g_1 b)} \int_0^{\theta/(1+g_1 b)} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta + \\ & + \frac{b}{3} \cos \frac{\theta}{2(1+g_1 b)} \int_0^{\theta/(1+g_1 b)} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta \end{aligned} \right\};$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{C_0 r^{-1/2}}{4(1+g_1 b)} = \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + b \frac{2-3\pi}{8} g_1 + b \int_0^{\theta/(1+g_1 b)} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right) \cos \frac{\theta}{2(1+g_1 b)} + \\ & + \left(1 - b \frac{2-3\pi}{8} g_1 - b/3 \int_0^{\theta/(1+g_1 b)} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta \right) \cos \frac{3\theta}{2(1+g_1 b)} + \\ & + b \sin \frac{\theta}{2(1+g_1 b)} \int_0^{\theta/(1+g_1 b)} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta - \\ & - b \sin \frac{3\theta}{2(1+g_1 b)} \int_0^{\theta/(1+g_1 b)} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta + \\ & + \frac{b}{4} \Omega_1' \left[\begin{array}{l} 2 - 3 \cos \frac{\theta}{(1+g_1 b)} + \cos \frac{3\theta}{(1+g_1 b)} - \\ - 3 \sin \frac{\theta}{(1+g_1 b)} + \sin \frac{3\theta}{(1+g_1 b)} \end{array} \right] \end{aligned} \right\}.$$

Используя физические соотношения для связи деформаций и напряжений (3.4), можно определить аналогичные выражения для деформаций.

Результаты расчёта. В ходе выполнения расчётного моделирования, была решена модельная задача о плоском напряжённом состоянии тонкой пластинки из изотропного разносопротивляющегося материала с повреждением в форме трещины поперечного сдвига. Расчёт выполнен для бетона и графита АРВ. Значения материальных констант [118] приведены в таблице 2.1.

На рисунках 3.2–3.3 показаны результаты расчёта напряжений вблизи вершины трещины (при $r = 0,05$), для двух вариантов расчёта: с учётом теории деформирования материалов, свойства которых зависимы от компонентного состава

тензора напряжений, и без неё. В качестве материала пластины использован бетон с пределом прочности на сжатие $R^- = 28,4$ МПа.

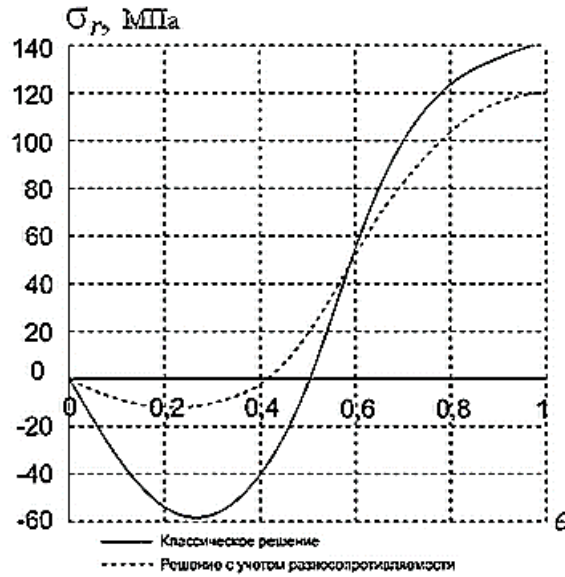


Рисунок 3.2 – Напряжения $\sigma_r(\theta)$ вблизи вершины трещины ($r=0,05$), бетон $R^- = 28,4$ МПа

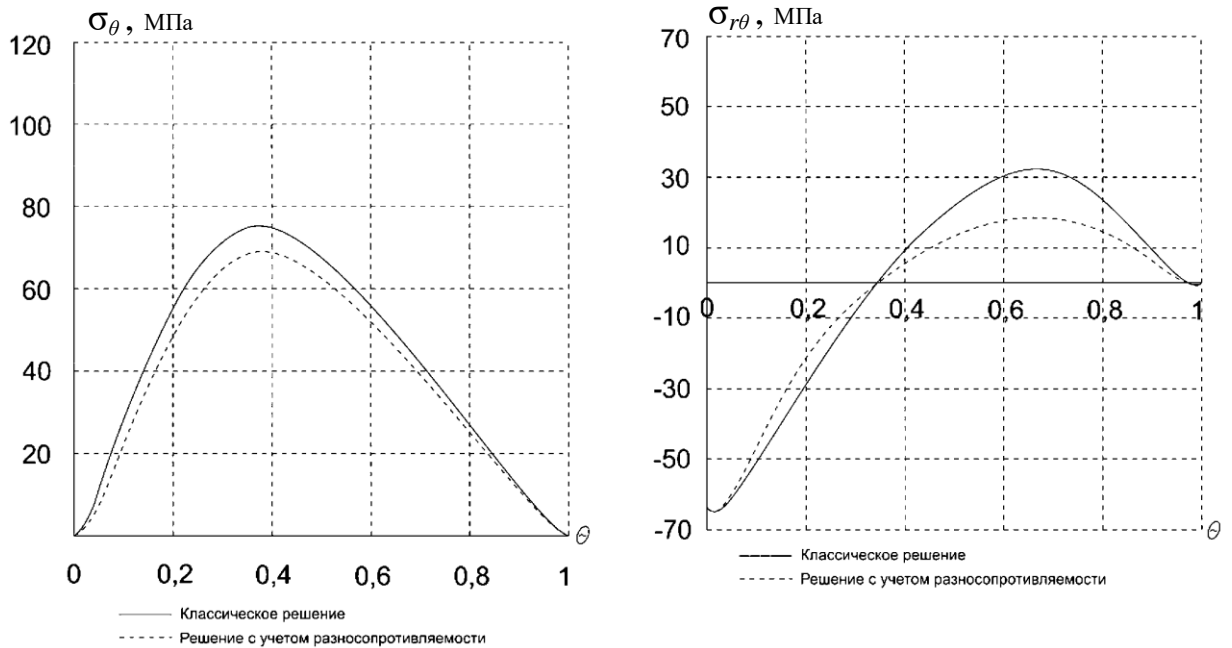


Рисунок 3.3 – Напряжения $\sigma_\theta(\theta)$ и $\sigma_{r\theta}(\theta)$ вблизи вершины трещины, бетон $R^- = 28,4$ МПа

Анализируя результаты, показанные на рис. 3.2–3.3, отметим, что при учёте эффекта разнотензивности – зависимости свойств материала от компонентного состава тензора напряжений, наблюдается значительное снижение уровня

возникающих напряжений вблизи вершины трещины. Параметром снижения является угол раскрытия трещины θ .

На рис. 3.2 для напряжений σ_r разница достигает 290% в сжатой зоне и 17% в растянутой, при зависимости от полярного угла θ , заданного в радианах.

На рисунке 3.3 для напряжений σ_θ разница достигает 15% процентов, в зависимости от величины полярного угла. Для напряжений $\sigma_{r\theta}$ разница в сжатой зоне достигает 31%, а растянутой 86% при сохранении зависимости от значения полярного угла θ . Наблюдаются также качественные различия результатов.

Выявленные качественные и количественные эффекты хорошо согласуются с характером численных исследований, приведённых в известной работе А.В. Березина [23], что позволяет с уверенностью утверждать, что предлагаемая методика решения задач механики разрушения, для материалов, чьи свойства зависят от параметров напряженного состояния, является вполне адекватной и может быть применена для решения практических задач [187].

На рис. 3.4, 3.5 показаны результаты расчёта деформаций вблизи вершины трещины при значении $r = 0,05$.

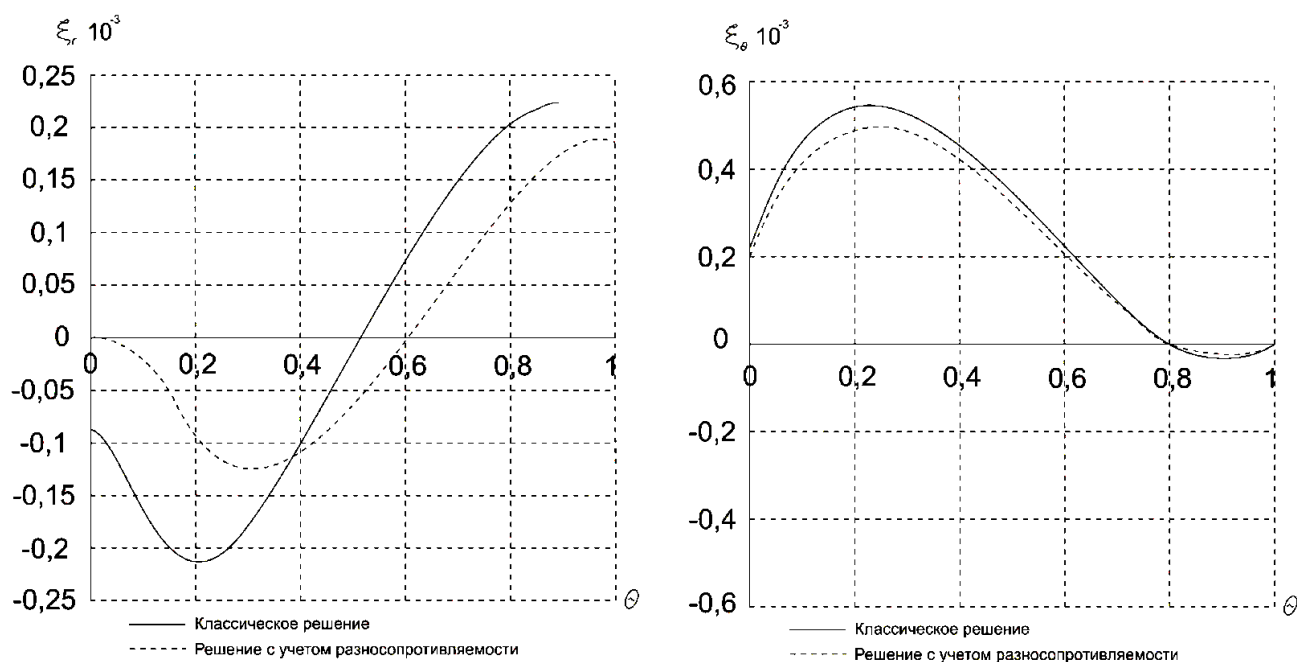


Рисунок 3.4 – Деформации $\varepsilon_r(\theta)$ и $\varepsilon_\theta(\theta)$ вблизи вершины трещины

бетон $R^- = 28,4$ МПа

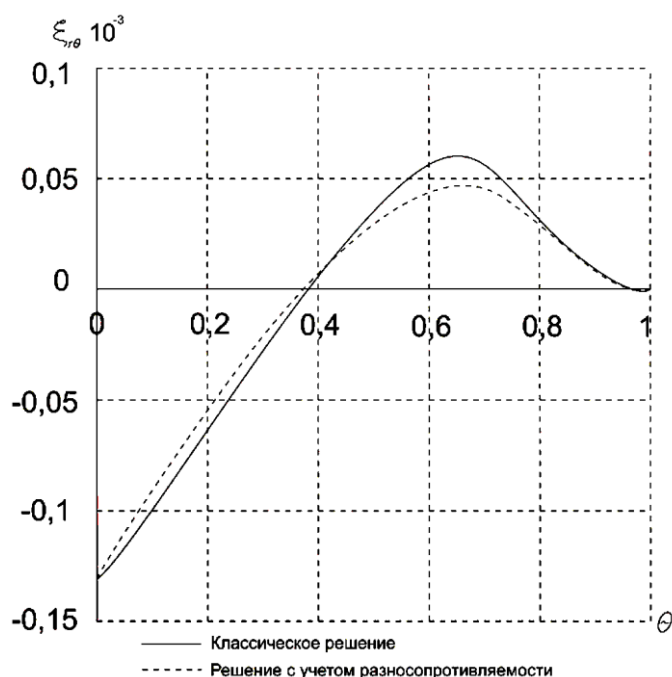


Рисунок 3.5 – Деформации $\varepsilon_{r,\theta}(\theta)$, бетон $R_c = 28,4$ МПа

Разница в расчётных значениях деформаций, по экстремальным значениям, достигает величины в 19–110%.

На рис. 3.6–3.8 показаны результаты расчёта деформаций и напряжений в пластине из графита АРВ (см. таблицу 2.1) вблизи вершины трещины при $r = 0,045$).

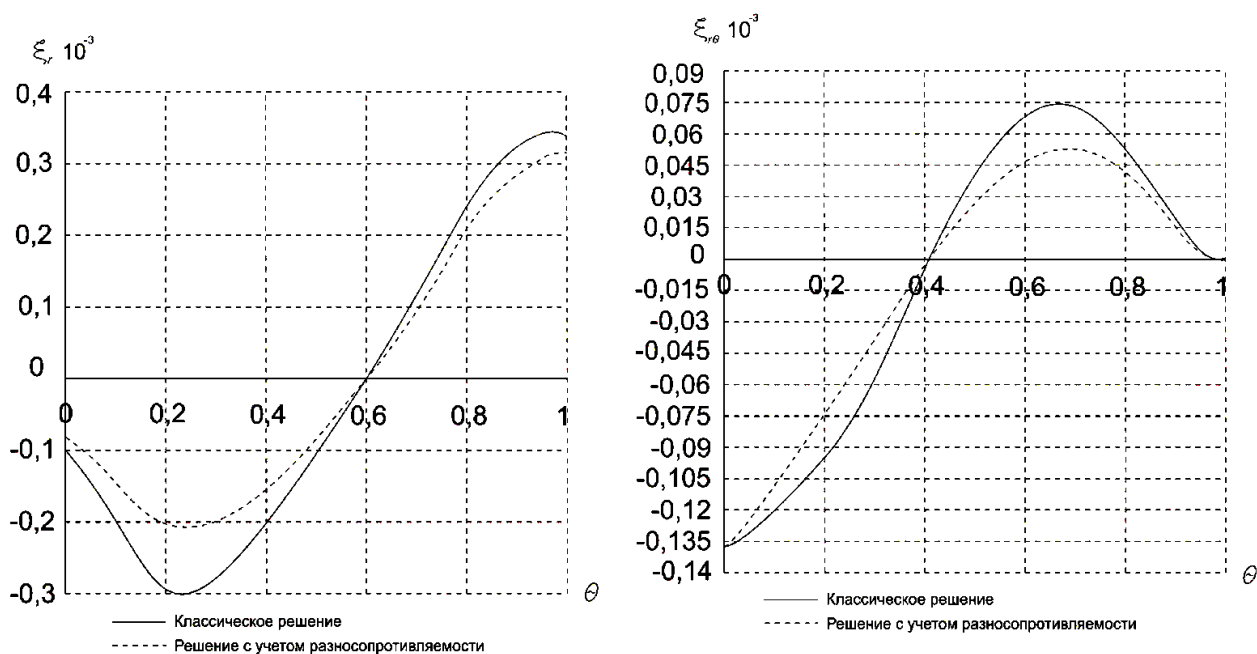


Рисунок 3.6 – Деформации $\varepsilon_r(\theta)$ и $\varepsilon_{r,\theta}(\theta)$ вблизи вершины трещины, графит АРВ

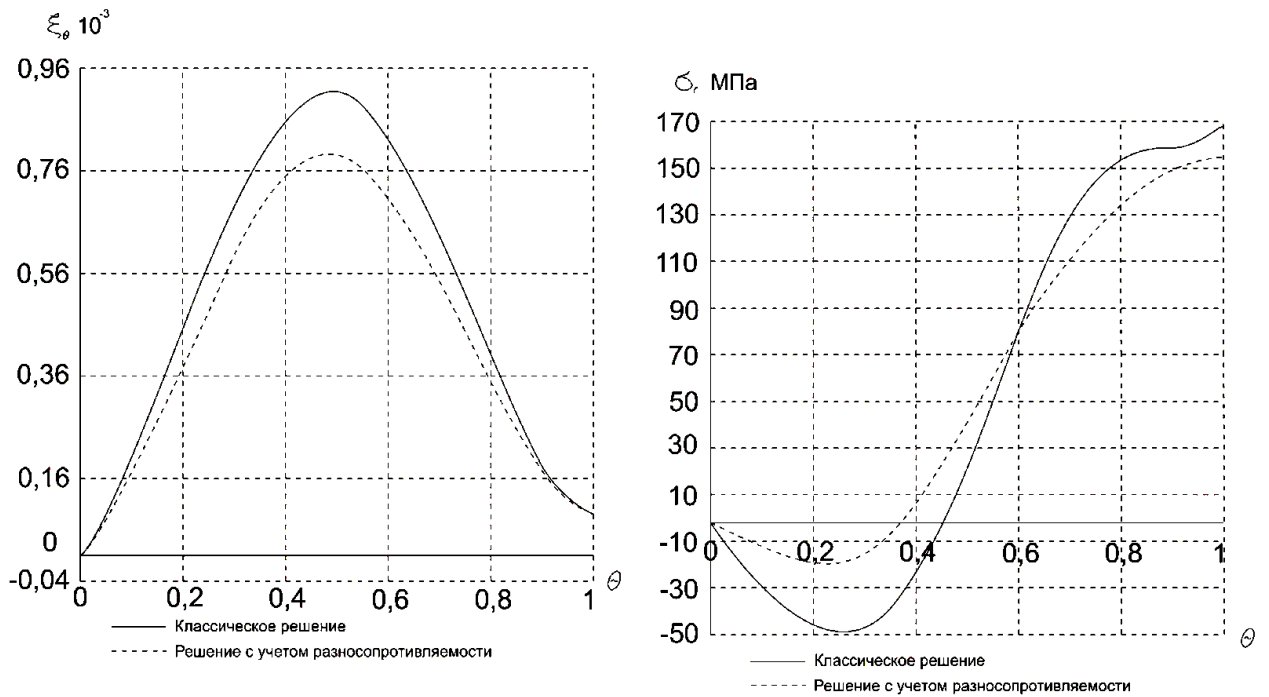


Рисунок 3.7 – Деформации $\varepsilon_\theta(\theta)$ и напряжения $\sigma_r(\theta)$ вблизи вершины трещины, графит АРВ

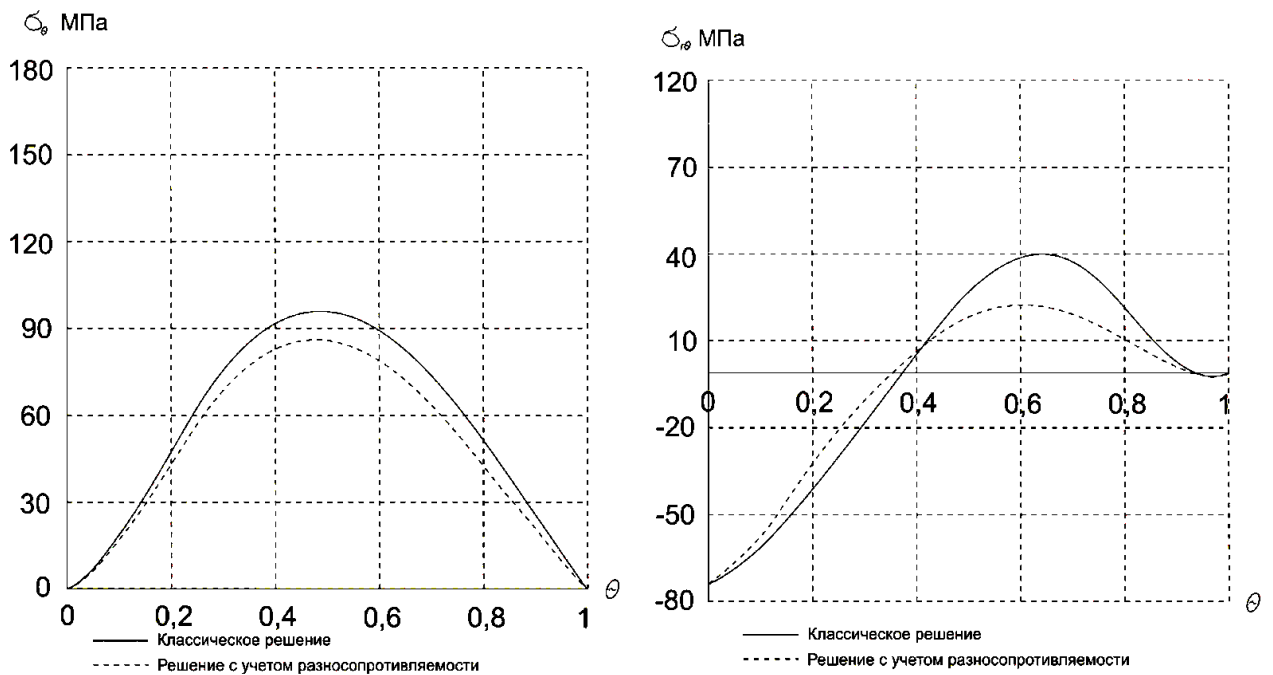


Рисунок 3.8 – Напряжения $\sigma_\theta(\theta)$ и напряжения $\sigma_{r,\theta}(\theta)$ вблизи вершины трещины, графит АРВ

Разница в результатах определения параметров НДС по напряжениям достигает значений в 45–150%, в зависимости от угла раскрытия трещины. Для значений деформаций, в зависимости от угла и конкретной величины, разница колеблется в пределах 18–96%. Можно утверждать, что учёт зависимости механических характеристик

материала от параметров напряженного состояния, а также различной работы материала на растяжение и сжатие, вносит существенную поправку в результаты и не может быть проигнорировано.

Задача № 2. Полубесконечная пластина с дефектом в форме трещины нормального разрыва. Рассматривается задача об осесимметричном НДС тонкой пластины шириной B и бесконечной длины с учётом наличия трещины нормального разрыва с берегами, свободными от усилий. Граничные условия задаются значениями функции $f(\theta)$ и её производных, аргументом которых является полярный угол θ [23, 26, 186]. В этой публикации проводится сравнение результатов применения предложенной модели, которая учитывает разнотвердость материалов, с результатами расчёта модели из классического изотропного материала. Выполнен анализ учёта влияния свойств разнотвердости материалов и наличия повреждаемости (в виде трещины сдвига) на НДС тонкой пластинки в условиях плоского напряжённого состояния.

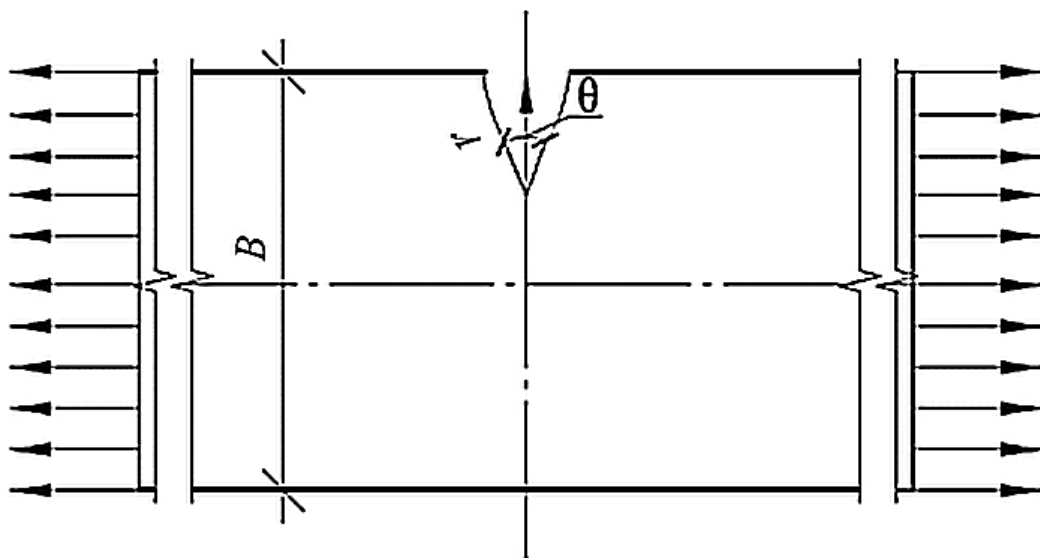


Рисунок 3.9 – Схема модельной задачи пластины в плоском напряжённом состоянии

На рисунке 3.9 использованы следующие обозначения: r – расстояние от вершины трещины. Симметричность расчётной схемы пластины позволяет использовать полярную систему координат с центром в вершине трещины. Пластина считается ограниченной по торцам абсолютно жёсткими и гладкими плоскостями. Используемые варианты материала пластины – бетон с пределом прочности на

сжатие $R^- = 28,4$ МПа и графиты АРВ и ВПП. Отметим, что указанные материалы в постановке этой задаче ещё не применялись [186].

Формулировка граничных условий в полярной системе координат представлена равенствами:

$$\text{- при } \theta = 0, f'(\theta = 0) = f'''(\theta = 0) = 0, f(\theta = 0) = 1;$$

$$\text{- при } \theta = \pi, f(\theta = \pi) = f'(\theta = \pi) = 0.$$

Здесь $f(\theta)$ – функция, учитываемая при определении напряжений. Она зависит только от полярного угла, именуемого углом раскрытия трещины.

Методология расчёта. Проведённые вычислительные эксперименты по решению задач механики твёрдого тела для начально-изотропных материалов со свойствами, зависящими от компонентного состава тензора напряжений, показали эффективность применения потенциала W_1 (1) [118]. Используем этот потенциал для задачи № 2 по алгоритму, показанному в задаче № 1.

Определяющие соотношения для начально-изотропного тела получим, опираясь на соотношения (3.1)–(3.2) и результаты работы [119].

Повторяя действия, продемонстрированные в задаче № 1, введём полярные координаты (r, θ) с начальной точкой в вершине трещины и функцию напряжений $\chi(r, \theta)$. Ограничиваясь плоским напряжённым состоянием, будем исследовать распределение характеристик НДС в районе начала координат.

Поскольку в данном исследовании не рассматривается область трещины, где реализуется асимптотика, становится возможным использование функции напряжений в форме $\chi(r, \theta) = r^{3/2} f(\theta)$ [23].

Для получения разрешающего уравнения воспользуемся дифференциальными уравнениями для компонент тензора напряжений (3.5)–(3.7). Их применение позволяет получить уравнение [186]:

$$\begin{aligned} -A_{11}f^{(IV)}(\theta) + A_{11}r \cdot f'''(\theta) - \frac{1}{2}(A_{66} + 3A_{11} + A_{12})f''(\theta) + \\ + \frac{1}{4}r(6A_{11} + 3A_{12})f'(\theta) + \frac{1}{16}(6A_{12} + 3A_{22})f(\theta) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Это дифференциальное уравнение имеет характер разрешающего и сформулировано относительно функции $f(\theta)$, определяющей функцию напряжения с учётом наличия трещины нормального разрыва. Однако получение аналитического решения этого уравнения серьёзно затруднено. Поэтому его решение будем получить численным методом конечных разностей, эффективно проявившим себя в решении подобных уравнения [36, 38, 186]. Использование метода конечных разностей (МКР), при дискретизации по независимой переменной θ на отрезке $[0; \pi]$, проводилось с постоянным шагом π / n на $n - 1$ секторах угла раскрытия трещины.

Замена производных функции $f(\theta)$ выражениями в конечных разностях, приводит к формированию разностного аналога разрешающего дифференциального уравнения [36, 123]. Аппроксимация первой и более высоких производных функции $f(\theta)$ по полярному углу использует центральную разность обычной точности ($\Delta\theta^2$), что даёт нам их выражения в виде [38]:

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= (f_{i+1} - f_{i-1}) / 2\Delta\theta, \\ f''(\theta) &= (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) / \Delta\theta^2, \\ f'''(\theta) &= (f_{i+2} - 2(f_{i+1} - f_{i-2}) - f_{i-2}) / 2\Delta\theta^3, \\ f^{IV}(\theta) &= (6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2} - 4f_{i-1} + f_{i-2}) / \Delta\theta^4. \end{aligned}$$

Чтобы избежать введения законтурных неизвестных, в граничных точках применяются односторонние (левые и правые) четырёхточечные разности порядка точности (Δr^2). Тот же подход реализован для вычисления производных функции $f(\theta)$ по полярному углу трещины:

$$\begin{aligned} &\text{при } \theta = 0: \\ f^{IV}(\theta) &= (f_i - 4f_{i-1} + 6f_{i-2} - 4f_{i-3} + f_{i-4}) / \Delta\theta^4, \\ f''(\theta) &= (f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}) / \Delta\theta^2; \\ &\text{при } \theta = \pi: \\ f^{IV}(\theta) &= (f_{i+4} - 4f_{i+3} + 6f_{i+2} - 4f_{i+1} + f_i) / \Delta\theta^4, \\ f'''(\theta) &= (f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i) / \Delta\theta^3, \\ f''(\theta) &= (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) / \Delta\theta^2. \end{aligned}$$

Для получения численных данных были использованы три вида материалов, чьи физико-механические характеристики значимо зависят от вида напряжённого состояния. На рис.3.10–3.11 показаны результаты расчёта напряжений вблизи вершины трещины (при $r = 0,04$), для двух вариантов расчёта: с учётом теории деформирования разносопротивляющихся материалов и без. Приведём краткий алгоритм расчёта.

Первый шаг. Формируются системы алгебраических уравнений согласно (3.15) в конечно-разностной форме.

Второй шаг. Получение решения системы в форме численных значений функции $f(\theta)$ для каждого заданного значения полярного угла.

Третий шаг. По известным функциям $f(\theta)$ в каждой узловой точке сетки определяются значения деформаций и напряжений ε_r , ε_θ , $\varepsilon_{r\theta}$, σ_r , σ_θ , $\sigma_{r\theta}$.

Четвёртый шаг. Вычисление нелинейных коэффициентов из определяющих соотношений, используемых при формировании системы алгебраических уравнений, для получения последующих приближений искомого решения. Далее повторяются второй, третий и четвёртый этапы расчёта до получения удовлетворительной точности.

Итерационная процедура ограничивается при достижении разницы между последующими и предыдущими приближениями порядка 0,1% (по максимальным перемещениям), которая достигается через 7–8 итераций.

На рис. 3.10 приведены результаты оценки сходимости конечно-разностной схемы для разных шагов разбиения полярного угла раскрытия трещины.

Наглядно показано, что итерационно-циклический алгоритм достижения заданной точности уверенно сходится по мере увеличения числа точек разбиения. Конкретно можно указать на число точек разбиения равное $n = 160$, которое является оптимальным для обеспечения сходимости вычислительного процесса с заданной точностью. Такая точность достигнута при получении числовых значений вычисляемых параметров с погрешностью $E = 0,1...0,05\%$.

Анализ качественных различий в результатах на рисунках 3.11–3.13 (см. ниже) показал, что при учёте эффекта разносопротивляемости и зависимости свойств материала от компонентного состава тензора напряжений наблюдается заметное и даже

значительное увеличение уровня возникающих напряжений вблизи вершины трещины, причём эта разница явно зависит от угла раскрытия трещины θ (полярного угла).

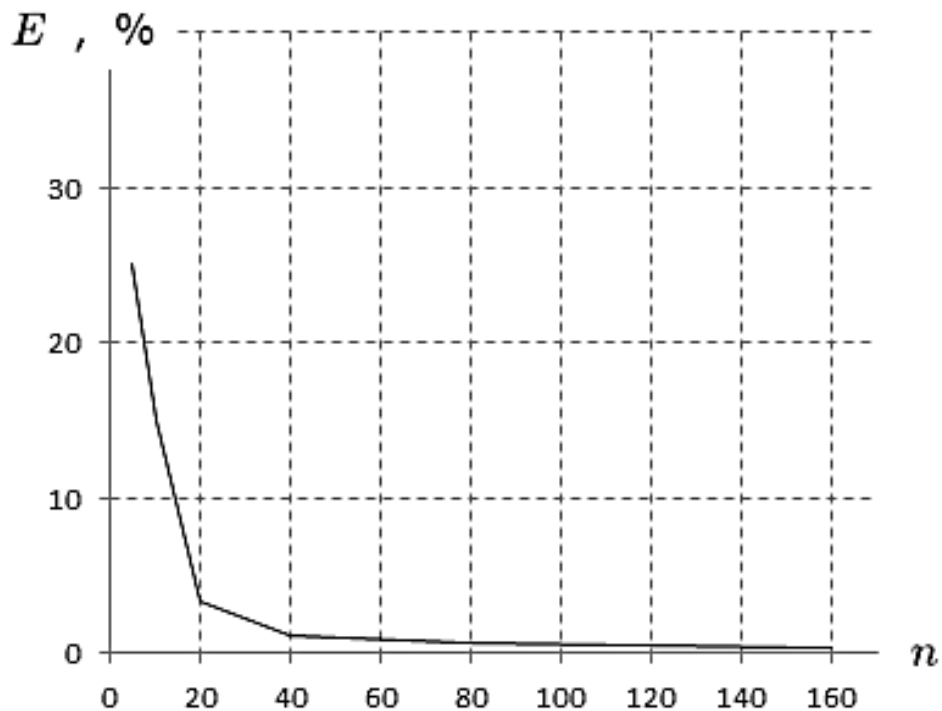


Рисунок 3.10 – График сходимости метода конечных разностей по максимальным функциям $f(\theta)$ в зависимости от количества точек дискретизации по независимой переменной

Анализ количественных показателей данных на рисунках 3.11–3.13 позволяет сделать вывод, что учёт зависимости механических характеристик от параметров напряжённого состояния при расчёте тонких пластин [151], имеющих дефект в форме трещины, значительно влияет на величины параметров НДС. Расхождения, в целом, могут достигать 123% по напряжениям и 99% по деформациям, в зависимости от материала, рассматривания экстремально достигаемые значения.

При детальном рассмотрении полученных результатов, можно сделать также вывод, что при плоском напряженном состоянии деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{r\theta}$ и напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$ значительно зависят от особых свойств материала, и решение, полученное с их учётом, имеет расхождение от 20% до 40% с решением, полученным по классической теории, то есть без учёта зависимости свойств материала от компонентного состава тензора напряжений.

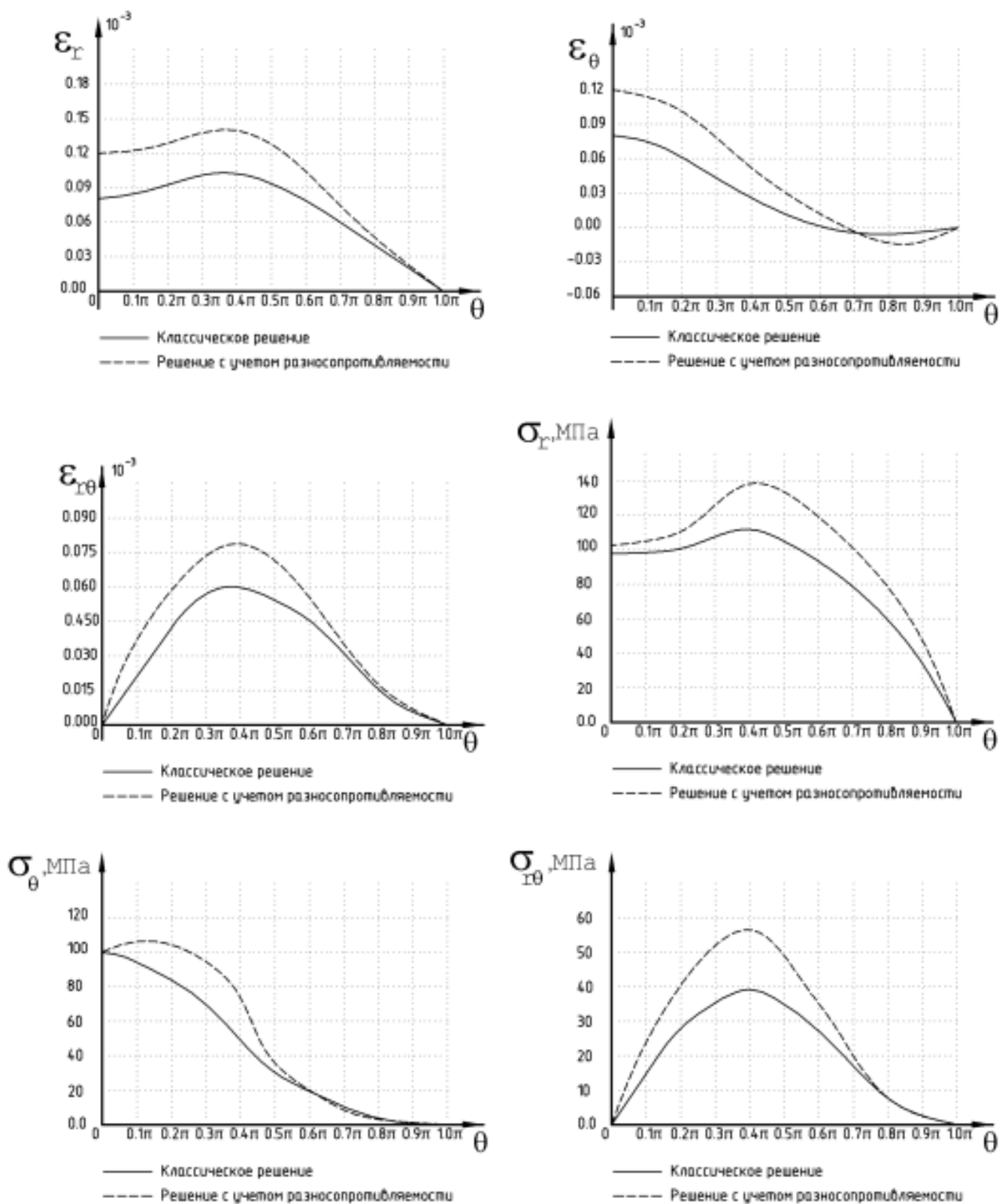


Рисунок 3.11 – Характеристики НДС вблизи вершины трещины в пластине, выполненной из графита марки ВПП

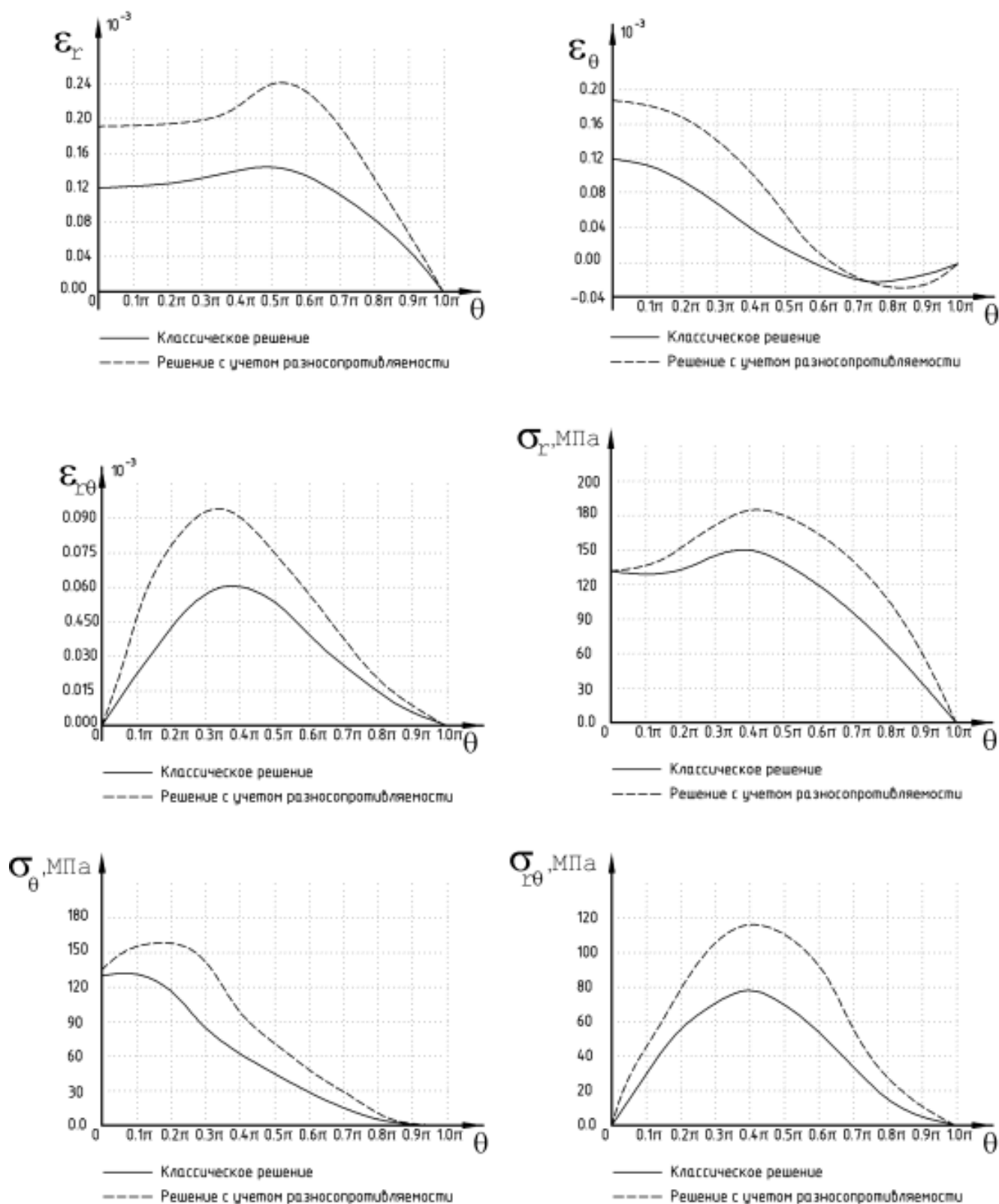


Рисунок 3.12 – Характеристики НДС вблизи вершины трещины в пластине, выполненной из графита марки АРВ

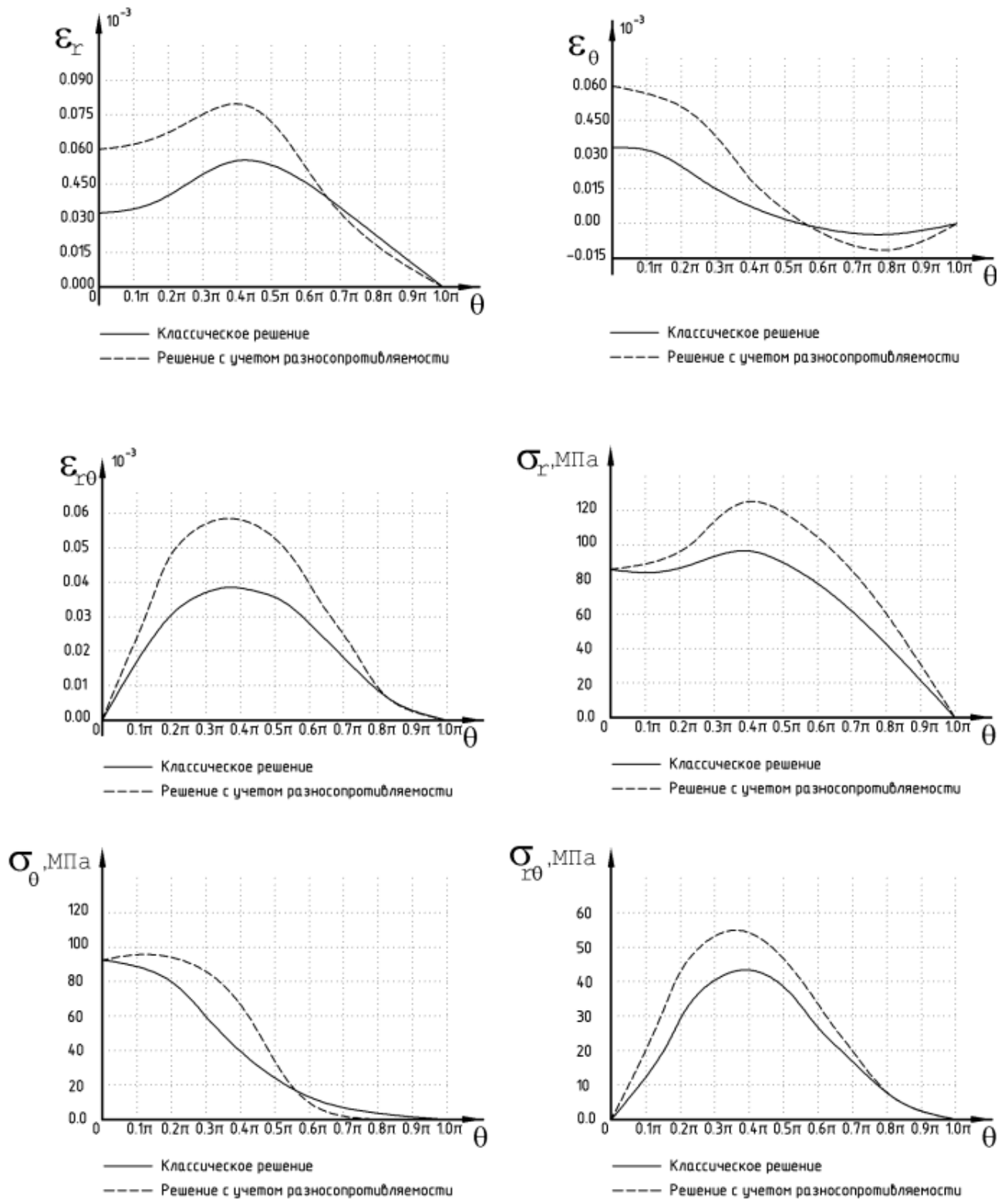


Рисунок. 3.13 – Характеристики НДС вблизи вершины трещины в пластине, выполненной из бетона с пределом прочности на сжатие $R^- = 28,4$ МПа

Для графита ВПП (рисунок 3.11) разница по деформациям составила до 39%, по напряжениям – до 50%; для графита АРВ (рисунок 3.12) по деформациям до 45%, по напряжениям – до 49%; для бетона (рисунок 3.13) – 72% и 87%, соответственно.

3.2 Выводы по главе 3

1. Используемый для проведения расчётного моделирования распределения характеристик НДС потенциал деформаций обеспечивает учёт участвующих в деформировании под нагрузкой материалов, которые обладают зависимостью от компонентного состава тензора напряжений [23–26, 118, 119, 186, 187, 216].

2. Представленная методика формирования разрешающих уравнений усложнённых моделей поведения материалов, имеющих дефекты, обеспечивает уравнениям тип, допускающий применение численных методов для получения их решения. И тем самым обеспечивает возможность расчётного моделирования тонких пластин из изотропного материала, при зависимости его свойств от компонентного состава тензора напряжений, с повреждением в форме трещин различного вида, для задачи получения характеристик НДС.

3. Результаты вычислительных экспериментов с новыми расчётными моделями зафиксировали осязаемое влияние наличия разнородности при постановке задач о разрушении несущих элементов конструкции. Доказано, что числовая модель характеристик НДС в зоне локализации дефекта получила изменения значений своих составляющих, порядок которых чётко указывает на наличие их зависимости от компонентного состава тензора напряжений в зоне развития дефекта в форме трещины.

4. Материалы этого раздела и полученные в нём результаты решения модельных задач уточняют прогноз числовой модели характеристик НДС при наличии факторов разрушаемости несущих элементов конструкции в форме трещин в условиях, когда применяемый материал является разнородным.

4 ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

4.1 Выбор метода решения поставленной задачи

В настоящее время многие жилые многоэтажные здания из монолитного железобетона представлены несущими элементами преимущественно в форме параллелепипеда, то есть элементами, один геометрический размер которого на несколько порядков меньше, чем два других. Это даёт основание при расчётном моделировании заменять их плоскостными моделями плит или оболочек.

В первой главе диссертации было отмечено, что все САЕ системы при расчёте зданий из железобетона используют МКЭ независимо от того, плоская или объёмная модель несущего элемента применяется. Поэтому и на базе теории нормированных пространств Матченко-Трещёва [118, 119, 174, 176] требуется получить конечный элемент, позволяющий учитывать разносопротивляемость при определении НДС конструкции.

Анализ подходов к реализации сформулированной задачи показал, что интерес представляет использование гибридной концепции МКЭ, базирующейся на модифицированной вариационной формулировке для сопряжённого гибридного потенциала [176, 281, 282, 304, 326].

Основанием для сделанного выше выбора служит тот факт, что на множестве всех допустимых напряжений и перемещений сопряжённый гибридный функционал принимает стационарное значение при действительном решении задачи, которое является единственным. Напряжения принадлежат множеству допустимых, если они в каждом элементе непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям равновесия. Функции перемещений являются допустимыми, если на границах элемента они непрерывны и удовлетворяют заданным кинематическим условиям.

Модификация вариационной формулировки направлена на учёт объёмных сил, начальных деформаций и упрощение оценки практической сходимости процесса вычислений. Модификация направлена на создание конечного элемента для описания поведения вертикальных и горизонтальных элементов строительного объекта. Основы необходимой конечно-элементной формулировки изложены в

работе [156, 164, 326], а в этой главе будут приведены основные формулы и соотношения, реализующие поставленную цель.

На рисунке 4.1 приведены основные виды конечных элементов, применяемых для построения расчётных моделей зданий и сооружений.

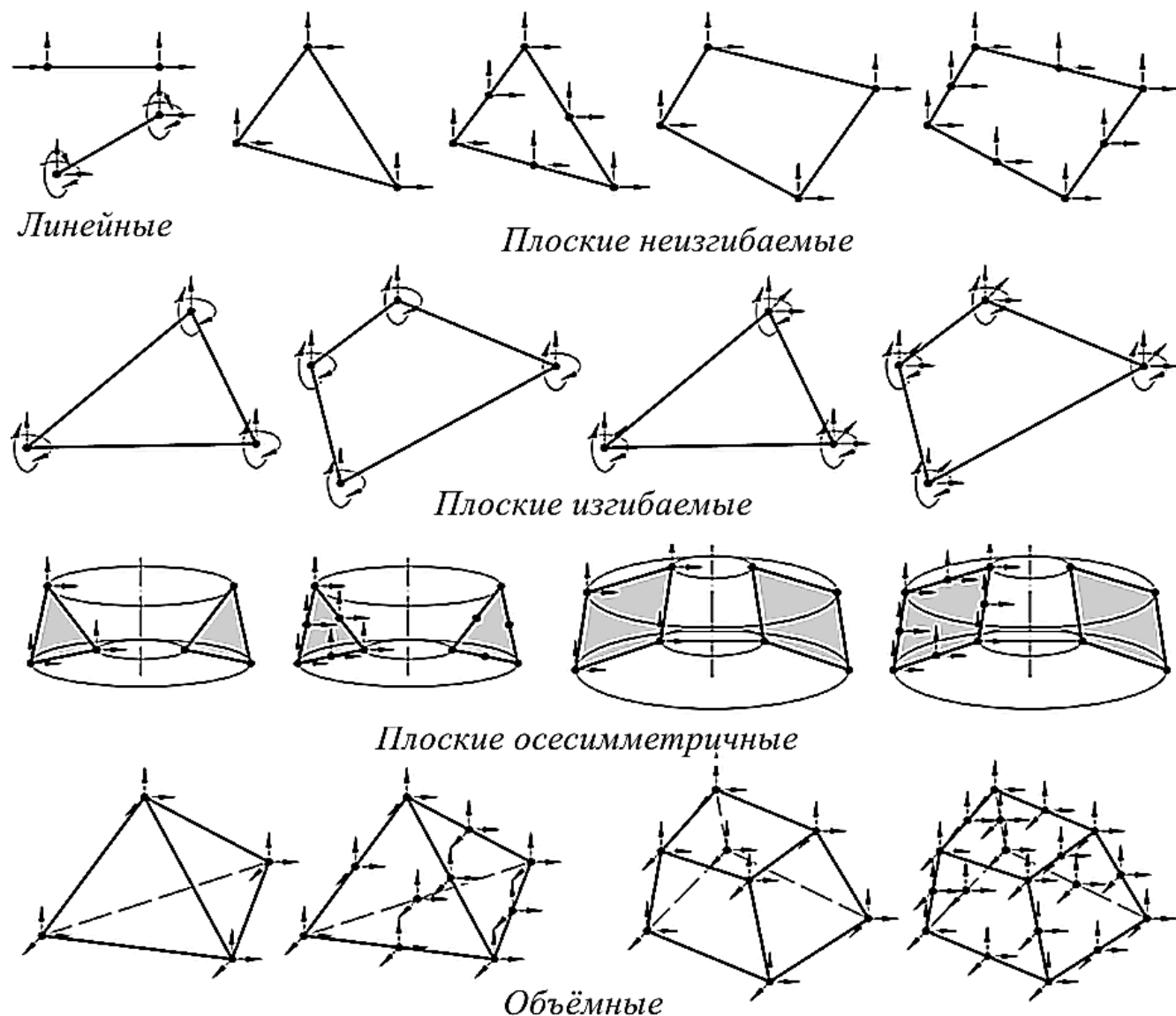


Рисунок 4.1 – Основные типы применяемых конечных элементов

Основной задачей проектировщика, который занимается расчётным моделированием, является получение числовых значений характеристик НДС реальной конструкции, среди которых определяющими являются поля напряжений и перемещений. Решение этой задачи опирается на то разнообразие аналитических и численных методов, которое доступно в настоящее время. В то же время следует отметить, что для материалов сложной структуры возможности аналитических методов ограничены весьма узким классом задач. Такие задачи включает простейшие гипотезы о распределении

параметров НДС по несущим элементам конструкции с учётом ограниченного числа значений их механических характеристик.

Одним из магистральных направлений развития строительной механики как науки является использование новых теоретических моделей, разрабатываемых механикой деформируемого твёрдого тела применительно к экспериментально проявившимся эффектам, связанным со свойствами материалов, используемых в несущих элементах строительных конструкций. Такие модели основаны на отказе от части гипотез, регламентирующих как форму конструкции, так и приближённых способов описания реальных свойств материала. Реализация этого направления развития строительной механики приводит к усложнению системы разрешающих уравнений, что делает невозможным использование новых моделей в практических целях. Эта проблема в настоящее время решается применением достижений вычислительной математики на пути развития численных методов, одним из которых является МКЭ.

МКЭ развивался стремительными темпами, что стало особенно заметно с появлением широкого спектра вычислительных средств. Внедрение персональных компьютеров в исследовательские и проектные организации привело к многочисленным, и достаточно успешным, попыткам применить достижения теории на практике, используя возможности комплексов программ в составе САЕ система. Именно эти системы используют МКЭ в качестве главного инструмента как для расчётного моделирования, так и вычислительных экспериментов с новыми теоретическими моделями.

МКЭ в строительной механике и механике деформируемого твёрдого тела пользуется представлением о сплошной среде, как множестве идентифицированных фрагментов – конечных элементов (КЭ), которые, несмотря на незначительный размер, обладают всеми свойствами исходной среды.

Опыт применения МКЭ в средах САЕ показывает, что большинство современных задач строительной механики может быть представлено в виде совокупности конечных элементов того или иного вида, обеспечивающих вычисление НДС с допустимой погрешностью. На сегодня имеется большое разнообразие специализированных конечных элементов, ориентированных на решение определённого

класса задач. Среди них можно найти и конечные элементы, учитывающие различные дополнительные свойства используемых материалов.

Массово применяемые конечные элементы приведены на рисунке 4.1. Каждый из типов можно характеризовать геометрическим признаком (одномерные, двумерные и трёхмерные), а также числом степеней свободы в узле дискретизации, которые определяют возможный вид НДС. Для целей дальнейшего изложения введём обозначения: n – количество узлов дискретизации, представляющего КЭ в исходной среде, r – число степеней свободы узла в качестве количества допустимых независимых перемещений в некоторой системе координат: локальной, связанной с КЭ, или глобальной – общей для всех КЭ среды.

4.2 Описание модели плоского конечного элемента и её адаптация

Выбор КЭ-модели изгиба железобетонных конструктивных элементов, первоначально был основан на треугольных изопараметрических КЭ, представленных в [131, 164], что предполагало получение простыми средствами приемлемых по точности результатов. Однако, численные эксперименты с пластинами и оболочками из упругого изотропного линейного материала показали, что при уменьшении их толщины проявляется эффект прогрессирующего возрастания изгибной жёсткости (широко известное явление «паразитных жёсткостей» [176]), отсутствующий в классической теории изгиба тонких пластин и оболочек [37, 45, 317]. В плоских железобетонных элементах уменьшение толщины происходит по мере образования и расширения трещин, что весьма увеличивает погрешность расчётов. Кроме того, треугольные элементы, основанные на гибридной формулировке МКЭ, позволяют получать результаты, сравнимые по точности с четырёхугольными элементами, но при этом, не имеют ограничений на тип и вид триангулируемой поверхности [174, 176].

Свободными от «паразитных жёсткостей» элементами оказались гибридные конечные элементы [176, 279, 281, 282], которые применяются в отечественном комплексе STARK ES. R.D. Cook приводит две модификации гибридного конечного элемента с тремя степенями свободы в узле [281], различие между которыми проявляется в степени точности интегрирования. Прямое применение таких конечных элементов к расчёту железобетонных оболочек невозможно, так как они не

учитывают продольные усилия и перемещения срединной плоскости. Потребовалась разработка более эффективной модификации гибридного КЭ с пятью степенями свободы в узле, для которого была сформирована матрица жёсткости плоского треугольного элемента.

4.2.1 Матрица жёсткости конечного элемента

Связь между деформациями и перемещениями в рамках гипотез Власова-Тимошенко использует соотношения:

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_{1,1} + x_3 \psi_{2,1}; \quad e_{22} = u_{2,2} - x_3 \psi_{1,2}; \quad e_{33} = 0; \\ \gamma_{12} &= u_{1,2} + u_{2,1} + x_3 (\psi_{2,2} - \psi_{1,1}); \quad \gamma_{13} = \psi_2 + w_{1,1}; \quad \gamma_{23} = -\psi_1 + w_{2,1}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где u_k – горизонтальные перемещения; x_3 – координата по толщине; ψ_k – углы поворота срединной поверхности; γ_k – деформации поперечного сдвига; w_k – производная от прогиба. Уравнения равновесия имеют традиционную форму записи:

$$\begin{aligned} N_{11,1} + N_{12,2} &= 0; \quad N_{12,1} + N_{22,2} = 0; \\ M_{11,1} + M_{12,2} &= Q_1; \quad M_{12,1} + M_{22,2} = Q_2; \quad Q_{1,1} + Q_{2,2} = q. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Зависимость между деформациями и напряжениями, вытекающая из потенциала W_1 (см. главу 2) в матричном виде формулируется произведением матриц [176]:

$$\{e\} = [A]\{\sigma\}, \quad (4.3)$$

где

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}; \quad \{e\} = \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & A_{14} & A_{15} \\ & A_{22} & A_{26} & A_{24} & A_{25} \\ & & A_{66} & A_{64} & A_{65} \\ & & \text{sim} & A_{44} & A_{45} \\ & & & & A_{55} \end{bmatrix}.$$

Здесь $A_{11}, A_{12}, A_{16}, A_{14}, A_{15}, A_{22}, A_{26}, A_{24}, A_{26}, A_{66}, A_{64}, A_{65}, A_{44}; A_{45}, A_{55}$ – компоненты симметричной матрицы $[A]$, включающей функции и константы потенциала W_1 , обозначенные через R_k [118].

Связь между напряжениями и деформациями представим в виде [176]:

$$\{\sigma\} = [B]\{e\}, \quad (4.4)$$

где $[B] = [A]^{-1}$.

Тогда усилия в сечении элемента определяются следующим образом [176]:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3; \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3; \quad Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{i3} dx_3, \quad (i, j = 1, 2) \quad (4.5)$$

Связь между вектором обобщённых сил и вектором обобщённых деформаций срединной поверхности использует матрицы:

$$M = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix}; \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & K_{14} & K_{15} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ & D_{22} & D_{26} & K_{24} & K_{25} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ & & D_{66} & K_{64} & K_{65} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{14} & C_{24} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{15} & C_{25} & C_{65} \\ & Sim & & & & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & & & & & & C_{22} & C_{26} \\ & & & & & & & C_{66} \end{bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \psi_{2,1} \\ -\psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} - \psi_{1,1} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix}; \quad (4.6)$$

где $C_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} dx_3$; $K_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3 dx_3$; $D_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3^2 dx_3$ – интегральные жёсткие параметры, получаемые в результате выполнения численного интегрирования по толщине элемента, и зависящие от напряжённого состояния.

Внутри конечного элемента вектор обобщённых сил представим следующим образом [176]:

Внутри конечного элемента вектор обобщённых сил представим следующим образом [176]:

$$\{M\} = [P]\{\beta\}, \quad (4.7)$$

где $[P]$ – матрица некоторых функций от координат точки элемента; $\{\beta\}$ – вектор коэффициентов, подлежащих определению.

Вектор обобщённых деформаций запишем в виде

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{M\} = [E]\{M\}. \quad (4.8)$$

Учитывая, что матрица $[E]$ представляет собой интеграл по толщине плоского элемента, определим энергию деформации для объёма конечного элемента, как интеграл по его площади

$$U = \frac{1}{2} \int_s \{M\}^T [E] \{M\} dS. \quad (4.9)$$

Р. Tong и Т.Т.Н. Pian показали [311, 326], что конечные элементы данного класса основаны на функционале вида

$$\Pi = \sum_n \left(U_n - \int_{V_n} \{\Phi\}^T \{t\} dS + \int_S \{\bar{\Phi}\}^T \{t\} dS \right), \quad (4.10)$$

где V_n – граница объёма элемента; S – часть V_n , подвергнутая действию внешнего вектора сил $\{\bar{\Phi}\}$; n – количество элементов; $\{t\}$ – граничные перемещения, связанные с узловыми перемещениями $\{q\}$ выражением

$$\{t\} = [L]\{q\}. \quad (4.11)$$

Вектор сил на границе элемента $\{\Phi\}$ определяется из уравнения:

$$\{\Phi\} = [R]\{\beta\}, \quad (4.12)$$

где $[R]$ – матрица $[P]$ для контура V_n элемента.

Подставляя выражения (4.6), (4.9), (4.11), (4.12) в уравнение (4.10), получим

$$\Pi = \sum_n \left(\frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [T] \{q\} + \{\Phi_0\}^T \{q\} \right), \quad (4.13)$$

где

$$[H] = \int_S [P]^T [E] [P] dS; \quad (4.14)$$

$$[T] = \int_{V_n} [R]^T [L] dS; \quad (4.15)$$

$$\{\Phi_0\}^T = \int_S \{\bar{\Phi}\} [L] dS. \quad (4.16)$$

Определяя вариации функционала (4.13) по параметрам $\{\beta\}$, $\{q\}$ и приравнявая эти вариации нулю, можно получить выражение вида [176]:

$$\sum_n [T]^T [H]^{-1} [T] \{q\} = \sum_n \{\Phi_0\}, \quad (4.17)$$

откуда можно выделить матрицу жёсткости элемента

$$[K] = [T]^T [H]^{-1} [T]. \quad (4.18)$$

Кроме того, при определении вариации функционала (4.13) по неизвестным

коэффициентам $\{\beta\}$ можно установить связь этих коэффициентов с узловыми перемещениями

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (4.19)$$

Подставляя коэффициенты $\{\beta\}$ в соотношения (4.13), приходим к зависимостям вида

$$\{M\} = [P][H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (4.20)$$

Таким образом, вектор обобщённых сил $\{M\}$ полностью определён сразу после вычисления узловых перемещений.

4.2.2 Матрица [H]

Вектор обобщённых сил $\{M\}$ через неизвестные коэффициенты $\{\beta\}$:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \beta_1 + \beta_4 x_1 + \beta_9 x_2; M_{22} = \beta_2 + \beta_5 x_2 + \beta_{10} x_1; M_{12} = \beta_3 + \beta_{12} x_1 + \beta_{11} x_2; \\ Q_1 &= \beta_4 + \beta_{11}; Q_2 = \beta_5 + \beta_{12}; N_{11} = \beta_6; N_{22} = \beta_7; N_{12} = \beta_8. \end{aligned} \quad (4.21)$$

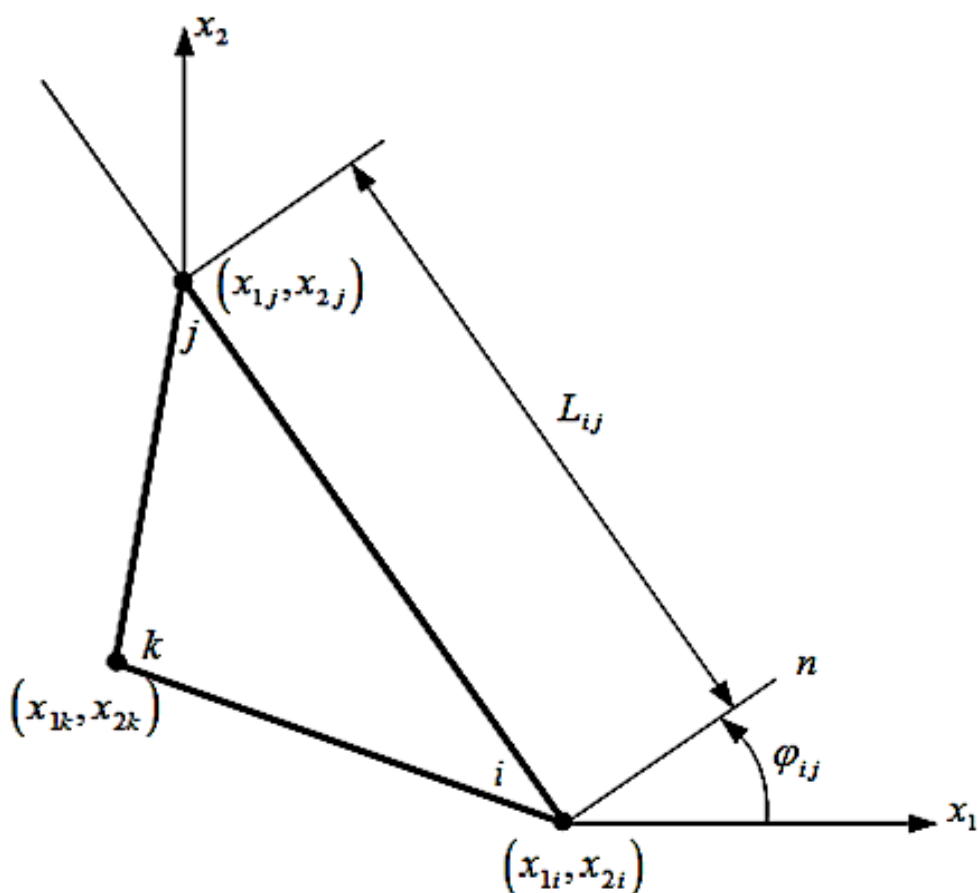


Рисунок 4.2 – Схема треугольного конечного элемента в плоскости $x_1 O x_2$

Тогда имеем:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.22)$$

$$\{\beta\} = \{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 \beta_6 \beta_7 \beta_8 \beta_9 \beta_{10} \beta_{11} \beta_{12}\}^T \quad (4.23)$$

Подставляя (4.22) в соотношение (4.14) и учитывая выражения [123]

$$S_0 = \int_S x_1 dx_1 dx_2 = \int_S x_2 dx_1 dx_2 = 0,$$

$$S = \int_S dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{vmatrix} - \text{площадь треугольника}, \quad (4.24)$$

$$S_1 = \int_S x_1^2 dx_1 dx_2 = \frac{S}{12} (x_{1i}^2 + x_{1j}^2 + x_{1k}^2), S_2 = \int_S x_2^2 dx_1 dx_2 = \frac{S}{12} (x_{2i}^2 + x_{2j}^2 + x_{2k}^2),$$

$$S_3 = \int_S x_1 x_2 dx_1 dx_2 = \frac{S}{12} (x_{1i} x_{2i} + x_{1j} x_{2j} + x_{1k} x_{2k}),$$

выражения для компонентов квадратной матрицы двенадцатого порядка $[H]$:

$$\begin{aligned} H_{1,1} &= S \cdot E_{11}; & H_{2,1} &= S \cdot E_{12}; & H_{3,1} &= S \cdot E_{16}; & H_{4,1} &= S \cdot E_{14}; \\ H_{1,2} &= S \cdot E_{12}; & H_{2,2} &= S \cdot E_{22}; & H_{3,2} &= S \cdot E_{26}; & H_{4,2} &= S \cdot E_{24}; \\ H_{1,3} &= S \cdot E_{16}; & H_{2,3} &= S \cdot E_{26}; & H_{3,3} &= S \cdot E_{66}; & H_{4,3} &= S \cdot E_{64}; \\ H_{1,4} &= S \cdot E_{14}; & H_{2,4} &= S \cdot E_{24}; & H_{3,4} &= S \cdot E_{64}; & H_{4,4} &= S \cdot E_{44} + S_1 \cdot E_{11}; \\ H_{1,5} &= S \cdot E_{15}; & H_{2,5} &= S \cdot E_{25}; & H_{3,5} &= S \cdot E_{65}; & H_{4,5} &= S \cdot E_{45} + S_3 \cdot E_{12}; \\ H_{1,6} &= S \cdot E_{11}; & H_{2,6} &= S \cdot E_{12}; & H_{3,6} &= S \cdot E_{16}; & H_{4,6} &= S \cdot E_{14}; \\ H_{1,7} &= S \cdot E_{12}; & H_{2,7} &= S \cdot E_{22}; & H_{3,7} &= S \cdot E_{26}; & H_{4,7} &= S \cdot E_{24}; \\ H_{1,8} &= S \cdot E_{16}; & H_{2,8} &= S \cdot E_{26}; & H_{3,8} &= S \cdot E_{66}; & H_{4,8} &= S \cdot E_{64}; \\ H_{1,11} &= S \cdot E_{14}; & H_{2,11} &= S \cdot E_{24}; & H_{3,11} &= S \cdot E_{64}; & H_{4,9} &= S_3 \cdot E_{11}; & H_{4,10} &= S_1 \cdot E_{12}; \\ H_{1,12} &= S \cdot E_{15}; & H_{2,12} &= S \cdot E_{25}; & H_{3,12} &= S \cdot E_{65}; & H_{4,11} &= S_3 \cdot E_{16} + S \cdot E_{44}; \\ H_{4,12} &= S_1 \cdot E_{16} + S \cdot E_{45}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{5,1} &= S \cdot E_{15}; & H_{6,1} &= S \cdot E_{11}; & H_{7,1} &= S \cdot E_{12}; & H_{8,1} &= S \cdot E_{16}; \\
 H_{5,2} &= S \cdot E_{25}; & H_{6,2} &= S \cdot E_{12}; & H_{7,2} &= S \cdot E_{22}; & H_{8,2} &= S \cdot E_{26}; \\
 H_{5,3} &= S \cdot E_{65}; & H_{6,3} &= S \cdot E_{15}; & H_{7,3} &= S \cdot E_{26}; & H_{8,3} &= S \cdot E_{66}; \\
 H_{5,4} &= S_3 \cdot E_{12} + S \cdot E_{46}; & H_{6,4} &= S \cdot E_{14}; & H_{7,4} &= S \cdot E_{24}; & H_{8,4} &= S \cdot E_{46}; \\
 H_{5,5} &= S_2 \cdot E_{22} + S \cdot E_{55}; & H_{6,5} &= S \cdot E_{15}; & H_{7,5} &= S \cdot E_{25}; & H_{8,5} &= S \cdot E_{65}; \\
 H_{5,6} &= S \cdot E_{15}; & H_{6,6} &= S \cdot E_{11}; & H_{7,6} &= S \cdot E_{12}; & H_{8,6} &= S \cdot E_{16}; \\
 H_{5,7} &= S \cdot E_{25}; & H_{6,7} &= S \cdot E_{12}; & H_{7,7} &= S \cdot E_{22}; & H_{8,7} &= S \cdot E_{26}; \\
 H_{5,8} &= S \cdot E_{65}; & H_{6,8} &= S \cdot E_{16}; & H_{7,8} &= S \cdot E_{26}; & H_{8,8} &= S \cdot E_{66}; \\
 H_{5,9} &= S_2 \cdot E_{12}; & H_{6,11} &= S \cdot E_{14}; & H_{7,11} &= S \cdot E_{24}; & H_{8,11} &= S \cdot E_{46}; \\
 H_{5,10} &= S_3 \cdot E_{22}; & H_{6,12} &= S \cdot E_{15}; & H_{7,12} &= S \cdot E_{25}; & H_{8,12} &= S \cdot E_{65}; \\
 H_{9,4} &= S_3 \cdot E_{11}; H_{9,5} = S_2 \cdot E_{12}; & H_{9,9} &= S_2 \cdot E_{11}; \\
 H_{9,10} &= S_3 \cdot E_{12}; H_{9,11} = S_2 \cdot E_{16}; \\
 H_{9,12} &= S_3 \cdot E_{16}; & H_{5,11} &= S_2 \cdot E_{26} + S \cdot E_{46}; & H_{5,12} &= S_3 \cdot E_{26} + S \cdot E_{55}; \\
 H_{10,4} &= S_1 \cdot E_{12}; & H_{11,1} &= S \cdot E_{14}; & H_{12,1} &= S \cdot E_{15}; \\
 H_{10,5} &= S_3 \cdot E_{22}; & H_{11,2} &= S \cdot E_{24}; & H_{12,2} &= S \cdot E_{25}; \\
 H_{10,9} &= S_3 \cdot E_{12}; & H_{11,3} &= S \cdot E_{64}; & H_{12,3} &= S \cdot E_{65}; \\
 H_{10,10} &= S_1 \cdot E_{22}; & H_{11,4} &= S_3 \cdot E_{16} + S \cdot E_{44}; & H_{12,4} &= S_1 \cdot E_{16} + S \cdot E_{46}; \\
 H_{10,11} &= S_3 \cdot E_{26}; & H_{11,5} &= S_2 \cdot E_{26} + S \cdot E_{45}; & H_{12,5} &= S_3 \cdot E_{26} + S \cdot E_{55}; \\
 H_{10,12} &= S_1 \cdot E_{26}; & H_{11,6} &= S \cdot E_{14}; & H_{12,6} &= S \cdot E_{15}; \\
 H_{11,7} &= S \cdot E_{24}; & H_{11,11} &= S_2 \cdot E_{66} + S \cdot E_{44}; & H_{12,7} &= S \cdot E_{25}; \\
 H_{11,8} &= S \cdot E_{46}; & H_{11,12} &= S_3 \cdot E_{66} + S \cdot E_{45}; & H_{12,8} &= S \cdot E_{65}; \\
 H_{11,9} &= S_2 \cdot E_{16}; & H_{12,11} &= S_3 \cdot E_{66} + S \cdot E_{46}; & H_{12,9} &= S_3 \cdot E_{12}; \\
 H_{11,10} &= S_3 \cdot E_{26}; & H_{12,12} &= S_1 \cdot E_{66} + S \cdot E_{55}; & H_{12,10} &= S_1 \cdot E_{26},
 \end{aligned}$$

где E_{ij} – элементы матрицы $[E]$, а прочие элементы матрицы $[H]$ – нулевые [176].

4.2.3 Матрица $[T]$

Определение элементов матрицы $[T]$ непосредственно по формуле (4.15) оказалось трудоёмким, так как квадратная матрица $[L]$ для треугольного конечного элемента с пятью степенями свободы в узле имеет порядок 15 [176]. Но матрицу $[T]$ можно получить другим способом. Для этого запишем выражение работы вектора обобщённых сил $\{M\}$ вдоль контура конечного элемента, а затем выделим из этого выражения векторы $\{\beta\}^T$ и $\{q\}$, тогда то, что останется, и будет матрицей $[T]$.

Из условия равновесия элементарного треугольника ABC , приведённого на рисунке 4.3, вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} &= M_{11}C_{ij} + M_{12}S_{ij}; \quad \bar{M}_{22} = -M_{22}S_{ij} - M_{12}C_{ij}; \\ \bar{N}_{11} &= N_{11}C_{ij} + N_{12}S_{ij}; \quad \bar{N}_{22} = N_{22}S_{ij} + N_{12}C_{ij}; \\ \bar{Q} &= Q_1C_{ij} + Q_2S_{ij}, \quad C_{ij} = \cos \varphi_{ij}; S_{ij} = \sin \varphi_{ij}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Учитывая зависимости (4.25), определим работу распределённых вдоль стороны $i-j$ сил и моментов следующим образом (см. рисунок 4.3):

$$\begin{aligned} A_{ij} &= L_{ij} \int_0^1 [(Q_1C_{ij} + Q_2S_{ij})w - (M_{12}C_{ij} + M_{22}S_{ij})\psi_1 + (M_{12}S_{ij} + M_{11}C_{ij})\psi_2 + \\ &+ (N_{11}C_{ij} + N_{12}S_{ij})u_1 + (N_{22}S_{ij} + N_{12}C_{ij})u_2] d\xi, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $\xi = l / L_{ij}$ – безразмерная координата, измеряемая вдоль стороны конечного элемента $i-j$.

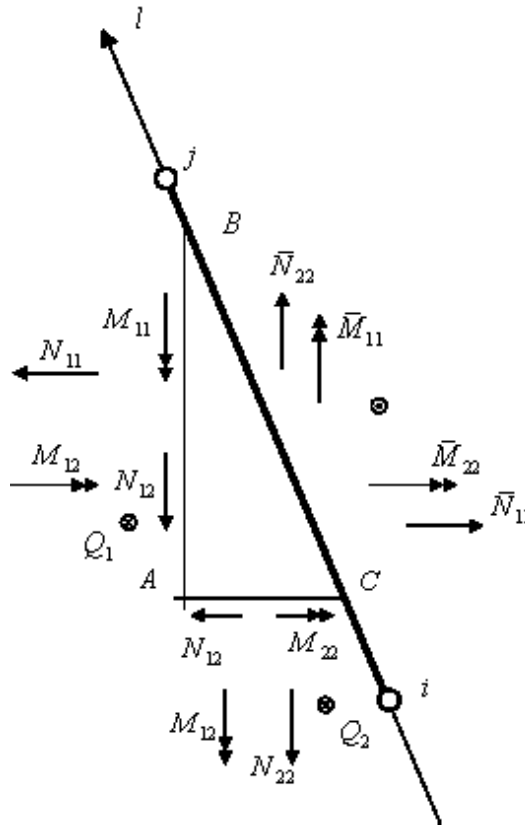


Рисунок 4.3 – Схема усилий и перемещений на стороне конечного элемента [176]

Работа усилий и моментов, совершаемая на соответствующих перемещениях вдоль всего контура треугольного конечного элемента, может быть представлена суммой:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} \quad (4.27)$$

Зададим вектор перемещений в i -ом узле конечного элемента

$$\{q_i\} = \{w_i \ \psi_{1i} \ \psi_{2i} \ u_{1i} \ u_{2i}\}^T = \{q_{i1} \ q_{i2} \ q_{i3} \ q_{i4} \ q_{i5}\}^T. \quad (4.28)$$

Тогда вектор узловых перемещений всего конечного элемента можно записать в форме

$$\{q\} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_{15}\}^T. \quad (4.29)$$

Аппроксимацию граничных перемещений проведём с учётом узловых перемещений, воспользовавшись представлением [176]:

$$\begin{aligned} w &= [(1-\xi) \ \xi] \{w_i \ w_j\} + L_{ij} \xi (1-\xi) (\theta_i - \theta_j) / 2; \\ \psi_1 &= [(1-\xi) \ \xi] \{\psi_{1i} \ \psi_{1j}\}; \psi_2 = [(1-\xi) \ \xi] \{\psi_{2i} \ \psi_{2j}\}; \\ u_1 &= [(1-\xi) \ \xi] \{u_{1i} \ u_{1j}\}; u_2 = [(1-\xi) \ \xi] \{u_{2i} \ u_{2j}\}; \end{aligned} \quad (4.30)$$

где $\theta_i = \psi_{1i} c_{ij} + \psi_{2i} s_{ij}$; $\theta_j = \psi_{1j} c_{ij} + \psi_{2j} s_{ij}$; L_{ij} – длина стороны $i-j$.

Представим текущие координаты x_1, x_2 на стороне $i-j$ через координаты узлов в виде

$$x_1 = x_{1i} - L_{ij} \xi s_{ij}; \ x_2 = x_{2i} + L_{ij} \xi c_{ij}. \quad (4.31)$$

Подставляя зависимости (4.21), (4.26), (4.30), (4.31) в уравнение (4.27), учитывая при этом (4.29) и выделяя векторы $\{\beta\}^T, \{q\}$, получим выражения для элементов матрицы $[T]$, порядка 12×15 :

$$\begin{aligned} T_{1,1} &= y_j / 2 - y_k / 2; \ T_{1,8} = -y_i / 2 + y_k / 2; \ T_{1,13} = -y_j / 2 + y_i / 2; \\ T_{2,2} &= x_j / 2 - x_k / 2; \ T_{2,7} = -x_i / 2 + x_k / 2; \ T_{2,12} = x_j / 2 + x_i / 2; \\ T_{3,2} &= -y_j / 2 + y_k / 2; \ T_{3,3} = -x_j / 2 + x_k / 2; \ T_{3,7} = y_i / 2 - y_k / 2; \\ T_{3,8} &= x_i / 2 - x_k / 2; \ T_{3,12} = y_j / 2 - y_i / 2; \ T_{3,13} = x_j / 2 - x_i / 2; \\ T_{4,1} &= y_j / 2 - y_k / 2; \ T_{4,2} = y_j^2 / 12 - y_j y_i / 6 + y_i y_k / 6 - y_k^2 / 12; \\ T_{4,3} &= 5 / 12 x_i y_j + x_j y_j / 12 - x_j y_i / 12 + y_i x_k / 12 - y_k x_k / 12 - 5 / 12 y_k x_i; \\ T_{4,6} &= -y_i / 2 + y_k / 2; \ T_{4,7} = y_j y_i / 6 - y_i^2 / 12 + y_k^2 / 12 - y_m y_j / 6; \\ T_{4,8} &= x_i y_j / 12 - x_i y_i / 12 - 5 / 12 x_j y_i + y_k x_k / 12 + 5 / 12 y_k x_j - y_j x_k / 12; \\ T_{4,11} &= -y_j / 2 + y_i / 2; \ T_{4,12} = y_k y_j / 6 - y_j y_j / 12 + y_i y_i / 12 - y_i y_k / 6; \\ T_{4,13} &= x_i y_i / 12 - x_j y_j / 12 + 5 / 12 y_i x_k - y_k x_i / 12 + y_k x_j / 12 - 5 / 12 y_j x_k; \end{aligned}$$

$$T_{5,1} = -x_j / 2 + x_k / 2;$$

$$T_{5,2} = -x_i y_j / 12 + x_j y_j / 12 + 5 / 12 x_j y_i - 5 / 12 y_i x_k - y_k x_k / 12 + y_k x_i / 12;$$

$$T_{5,3} = -x_i x_j / 6 + x_j x_j / 12 - x_k x_k / 12 + x_k x_i / 6; T_{5,6} = x_i / 2 - x_k / 2;$$

$$T_{5,7} = -5 / 12 x_i y_j - x_i y_i / 12 + x_j y_i / 12 + y_k x_k / 12 - y_k x_j / 12 + 5 / 12 y_j x_k;$$

$$T_{5,8} = -x_i x_i / 12 + x_i x_j / 6 - x_j x_k / 6 + x_k x_k / 12; T_{5,11} = x_j / 2 - x_i / 2;$$

$$T_{5,12} = x_i y_i / 12 - x_j y_j / 12 - y_i x_k / 12 + 5 / 12 y_k x_i - 5 / 12 y_k x_j + y_j x_k / 12;$$

$$T_{5,13} = -x_j^2 / 12 + x_j x_k / 6 - x_k x_i / 6 + x_i^2 / 12;$$

$$T_{6,4} = y_j / 2 - y_k / 2; T_{6,9} = -y_i / 2 + y_k / 2; T_{6,14} = -y_j / 2 + y_i / 2;$$

$$T_{7,5} = -x_j / 2 + x_k / 2; T_{7,10} = x_i / 2 - x_k / 2; T_{7,15} = x_j / 2 - x_i / 2;$$

$$T_{8,4} = -x_j / 2 + x_k / 2; T_{8,5} = y_j / 2 - y_k / 2; T_{8,9} = x_i / 2 - x_k / 2;$$

$$T_{8,14} = x_j / 2 - x_i / 2; T_{8,15} = -y_j / 2 + y_i / 2;$$

$$T_{9,3} = y_j^2 / 6 + y_j y_i / 6 - y_i y_k / 6 - y_k^2 / 6;$$

$$T_{9,8} = -y_j y_i / 6 - y_i^2 / 6 + y_k^2 / 6 + y_k y_j / 6; T_{8,13} = -y_k y_j / 6 - y_j^2 / 6 + y_i^2 / 6 + y_i y_k / 6;$$

$$T_{10,2} = x_i x_j / 6 + x_j^2 / 6 - x_k^2 / 6 - x_k x_i / 6; T_{10,12} = -x_j^2 / 6 - x_j x_k / 6 + x_k x_i / 6 + x_i^2 / 6;$$

$$T_{10,7} = -x_i^2 / 6 - x_i x_j / 6 + x_j x_k / 6 + x_k^2 / 6;$$

$$T_{11,1} = y_j / 2 - y_k / 2; T_{11,2} = -y_j^2 / 12 - y_j y_i / 3 + y_i y_k / 3 + y_k^2 / 12;$$

$$T_{11,3} = x_i y_j / 4 - x_j y_j / 4 - x_j y_i / 4 + y_i x_k / 4 + y_k^2 / 4 - y_k x_i / 4; T_{11,6} = -y_i / 2 + y_k / 2;$$

$$T_{11,7} = y_j y_i / 3 + y_i^2 / 12 - y_k^2 / 12 - y_k y_j / 3;$$

$$T_{11,8} = x_i y_j / 4 + x_i y_i / 4 - x_j y_i / 4 + y_k x_j / 4 - y_k x_k / 4 - y_j x_k / 4;$$

$$T_{11,11} = -y_j / 2 + y_i / 2; T_{11,12} = y_k y_j / 3 + y_j^2 / 12 - y_i^2 / 12 - y_i y_k / 3;$$

$$T_{11,13} = y_k x_j / 4 + x_j y_j / 4 - y_j x_k / 4 + y_i x_k / 4 - x_i y_i / 4 - y_k x_i / 4;$$

$$T_{12,1} = -x_j / 2 + x_k / 2; T_{12,2} = -x_i y_j / 4 - x_j y_j / 4 + x_j y_i / 4 - y_i x_k / 4 + y_k x_k / 4 + y_k x_i / 4;$$

$$T_{12,3} = -x_i^2 / 3 - x_j^2 / 12 + x_k^2 / 12 + x_k x_i / 3;$$

$$T_{12,6} = x_i / 2 - x_k / 2; T_{12,7} = -x_i y_j / 4 + x_i y_i / 4 + x_j y_i / 4 - y_k x_k / 4 - y_k x_j / 4 + y_j x_k / 4;$$

$$T_{12,8} = x_i^2 / 12 + x_i x_j / 3 - x_j x_k / 3 - x_k^2 / 12; T_{12,11} = x_j / 2 - x_i / 2;$$

$$T_{12,12} = -x_i y_i / 4 + x_j y_j / 4 - y_i x_k / 4 + y_k x_i / 4 - y_k x_j / 4 + y_j x_k / 4;$$

$$T_{12,13} = x_j^2 / 12 + x_j x_k / 3 - x_k x_i / 3 - x_i^2 / 12.$$

Все другие элементы матрицы $[T]$ тождественно равны нулю.

Численные эксперименты [176, 181] в программе авторов [183] показали, что даже для несимметричной сетки КЭ, результаты, полученные для прямоугольных элементов [214] и треугольных [176] КЭ практически не отличаются.

4.2.4 Технические гипотезы и математические модели фиктивных слоёв

Математическая модель определения НДС армированных плит, из которых состоит здание, должна достаточно точно отражать специфические особенности взаимодействия неоднородной среды типа «бетон-арматура» на различных стадиях деформирования. И конечно она должна быть практически реализуемой. Понятно, что такая модель не может быть полностью свободной от дополнительных технических гипотез, которые соответствуют следующим положениям [174, 176, 200]:

1) нагрузка является простым, деформации – активные, деформации ползучести бетона не рассматриваются;

2) поскольку размеры плит сооружения в плане велики по сравнению со средним расстоянием между арматурными стержнями, арматура моделируется «размазанным» слоем с учётом коэффициента его армирования;

3) ввиду неоднородности конструкции по толщине, плиты расчленяются на ряд фиктивных слоёв:

- не армированные (бетонные) слои без трещин;
- армированные (железобетонные) слои без трещин;
- не армированные (бетонные) слои с трещинами;
- армированные (железобетонные) слои с трещинами;
- армированные (железобетонные) слои с пересекающимися трещинами;

4) напряжения в пределах армированных слоёв элемента определяются как сумма напряжений в бетоне и арматуре, а за условие совместности бетона и арматуры принимается равенство деформаций этих двух материалов;

5) срединная поверхность плиты представляется сетью гибридных конечных элементов, которые по толщине разделены на ряд фиктивных слоёв [176, 310];

6) жёсткостные характеристики, рассчитанные для центра фиктивного слоя данного конечного элемента, распространяются на весь слой;

7) критерий прочности бетона в каждом фиктивном слое принимается согласно условию П.П. Баландина [15, 53, 174];

8) трещины в области дефектного фиктивного слоя в пределах конечного элемента считаются сквозными и параллельными друг другу; влияние растянутого

бетона учитывается коэффициентом В.И. Мурашева и характеристикой поврежденности бетона [174, 176];

9) при наличии трещин бетон в пределах фиктивного слоя моделируется трансверсально-изотропным телом с плоскостью изотропии, параллельной плоскости трещин.

Далее рассматривается моделирование фиктивных слоёв [174, 176].

Неармированные (бетонные) слои без трещин. Связь деформаций и напряжений имеет вид:

$$\{e\} = [A]\{\sigma\}, \quad (4.32)$$

где $[A]$ симметричная квадратная матрица размером 5×5 (при расчёте пренебрегаем напряжениями σ_{33}).

$$A_{11} = \{2(R_1 + 2R_2) / 3 + R_3\xi(3 - 2\xi^2) / 3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) + 4(\sigma_{11} - 2\sigma_{22}) / 9S_0] + R_5[\eta \cos 3\varphi(1 + \xi^2) + 2\sqrt{2}\xi - 2\cos 3\varphi - \sqrt{2}\sigma_{22} / S_0]\} / 3;$$

$$A_{12} = \{2(R_1 - R_2) / 3 + (R_3 + R_4 / 3)\xi + R_5[\cos 3\varphi(1 - \xi) - \sqrt{2}\xi]\} / 3;$$

$$A_{16} = (2R_4 / 3 + \sqrt{2}R_5)\tau_{12} / 3S_0; \quad A_{26} = A_{16};$$

$$A_{14} = (2R_4 / 3 + \sqrt{2}R_5)\tau_{13} / 3S_0; \quad A_{15} = 2(R_4 / 3 - \sqrt{2}R_5)\tau_{23} / 3S_0;$$

$$A_{22} = \{2(R_1 + 2R_2) / 3 + R_3[\xi(3 - 2\xi^2) / 3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) + 4(\sigma_{22} - 2\sigma_{11}) / 9S_0] + R_5[\eta \cos 3\varphi(1 + \xi^2) + 2\sqrt{2}\xi - 2\cos 3\varphi - \sqrt{2}\sigma_{11} / S_0]\} / 3;$$

$$A_{24} = 2(R_4 / 3 - \sqrt{2}R_5)\tau_{13} / 3S_0; \quad A_{25} = (2R_4 / 3 + \sqrt{2}R_5)\tau_{23} / 3S_0;$$

$$A_{66} = 2\{2R_2 - R_3\xi^3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) - (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / 3S_0] + R_5[\sqrt{2}\eta(\sigma_{11} - \sigma_{22}) / 2 - \eta^3 \cos 3\varphi]\} / 3;$$

$$A_{64} = \sqrt{2}R_5\tau_{23} / S_0; \quad A_{65} = \sqrt{2}R_5\tau_{13} / S_0;$$

$$A_{44} = 2\{2R_2 - R_3\eta^3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) - (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / 3S_0] + R_5[\sqrt{2}\eta(\sigma_{11} - 2\sigma_{22}) / 2 - \eta^3 \cos 3\varphi]\} / 3;$$

$$A_{45} = \sqrt{2}R_5\tau_{12} / S_0;$$

$$A_{55} = 2\{2R_2 - R_3\eta^3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) - (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / 3S_0] + R_5[\sqrt{2}\eta(\sigma_{22} - 2\sigma_{11}) / 2 - \eta^3 \cos 3\varphi]\} / 3.$$

Здесь: $\xi = \sigma / S_0$, $\eta = \tau / S_0$ – нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке; $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ – модуль вектора полного напряжения на октаэдрической площадке; $\sigma = \delta_{ij}\sigma_{ij} / 3$ и $\tau = \sqrt{S_{ij}S_{ij} / 3}$ – нормальные и касательные напряжения; $\text{Cos}3\phi = \sqrt{2} \det(S_{ij}) / \tau^3$; ϕ – фаза напряжений; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$.

Матрица «упругости» $[B]$ для каждого из неармированных слоёв КЭ выражается через матрицу податливости:

$$[B] = [A]^{-1}. \quad (4.33)$$

Армированные (железобетонные) слои без трещин. Принятые выше гипотезы позволяют записать совместную работу бетона и арматуры в форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{B11} + \sigma_{S11}; & \sigma_{22} &= \sigma_{B22} + \sigma_{S22}; \\ \tau_{12} &= \tau_{B12}; & \tau_{13} &= \tau_{B13}; & \tau_{23} &= \tau_{B23}, \end{aligned}$$

где $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{ij}$ – напряжения в железобетонных слоях; $\sigma_{B22}, \sigma_{B11}, \sigma_{Bij}$ – напряжения в бетоне железобетонного слоя; $\sigma_{S11}, \sigma_{S22}$ – напряжения в арматуре.

Условие совместности деформаций бетона и арматуры для железобетонных слоёв представляется соотношениями:

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{B11} = e_{S11}; & e_{22} &= e_{B22} = e_{S22}; \\ \gamma_{12} &= \gamma_{B12} = \gamma_{S12}; & \gamma_{13} &= \gamma_{B13} = \gamma_{S13}; & \gamma_{23} &= \gamma_{B23} = \gamma_{S23}, \end{aligned}$$

где $e_{11}, e_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ – компоненты деформаций железобетонного слоя;

$e_{B11}, e_{B22}, \gamma_{B12}, \gamma_{B13}, \gamma_{B23}$ – деформации бетона в железобетонном слое;

$e_{S11}, e_{S22}, e_{S12}, e_{S13}, e_{S23}$ – деформации арматуры.

Так как, напряжения в железобетонном слое представлены суммой напряжений в бетоне и арматуре, можно получить матрицу «упругости» для армированных слоёв без трещин в виде

$$[B] = [A]^{-1} + [B_S], \quad (4.34)$$

где

$$[B_S] = \begin{bmatrix} \mu_{11} \frac{E_s}{1-\nu_s^2 \mu_{11}} & \mu_{11} \frac{E_s \nu_s}{1-\nu_s^2 \mu_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{22} \frac{E_s \nu_s}{1-\nu_s^2 \mu_{22}} & \mu_{22} \frac{E_s}{1-\nu_s^2 \mu_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{11} \frac{E_s}{1+\nu_s \mu_{11}} + \mu_{22} \frac{E_s}{1+\nu_s \mu_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{22} \frac{E_s}{1+\nu_s \mu_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{11} \frac{E_s}{1+\nu_s \mu_{11}} \end{bmatrix};$$

E_s – модуль упругости арматуры, ν_s – коэффициент Пуассона арматуры; $\mu_{11} = A_{s1} / S_{i11} h_s$, $\mu_{22} = A_{s2} / S_{i22} h_s$ – коэффициенты армирования в направлении осей X_1 и X_2 исходной системы координат; A_{si} – площадь сечения арматурного стержня; S_{i11} , S_{i22} – шаг стержней, параллельных осям X_1 и X_2 ; h_s – суммарная толщина армированных слоёв.

Почеркнём, что компоненты матрицы $[A]^{-1}$ в выражении (4.34) определяются по формулам, в которых вместо полных напряжений σ_{ij} должны использоваться напряжения в бетоне – σ_{bij} .

Неармированные (бетонные) слои с трещиной. Согласно гипотезе № 7 трещины будут образовываться, если выполняется условие:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3 \cdot (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2) - (\sigma_{11} \sigma_{22}) - (R_{bt} - R_b)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - R_{bt} R_b > 0, \quad (4.35)$$

где $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ – напряжения в бетоне в момент трещинообразования, рассчитанные для центра фиктивного слоя. Здесь R_{bt}, R_b – предел прочности бетона при осевом растяжении и сжатии, соответственно.

Выполнение условия (4.35) в бетонном слое образуется трещина вдоль площадок, ортогональных к направлению наибольшего из главных растягивающих напряжений, вычисляемого по формуле для плоского напряжённого состояния:

$$\sigma_{1t} = [\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2}] / 2.$$

Направление развития трещин определяется величиной угла между нормалью к трещине и осью x_1 – $\chi_1 = \arctg[(\sigma_{1t} - \sigma_{11}) / \tau_{12}]$.

При возникновении параллельных друг другу трещин в слое КЭ начально-изотропный бетон приобретает свойства ортотропии, что ведёт к потере применимости потенциальных определяющих соотношений, ориентированных на нелинейный дилатирующий разносопротивляющийся изотропный материал. Но можно считать применение указанных потенциальных соотношений возможным только для направлений, вдоль которых не нарушена целостность бетона. Это направления вдоль трещин. Для них физически нелинейные свойства бетона будем аппроксимировать секущим модулем упругости E_B и секущим коэффициентом поперечных деформаций ν_B , определяемых из уравнения:

$$e_{22}^* = A_{12}^* \sigma_{11}^* + A_{22}^* \sigma_{22}^* = (\sigma_{22}^* - \nu_B \sigma_{11}^*) / E_B,$$

т.е.

$$E_B = 1 / A_{22}^*; \nu_B = -A_{12}^* / A_{22}^*,$$

где A_{12}^* , A_{22}^* – компоненты матрицы податливостей, рассчитываемые по формулам для бетонных слоёв без трещин; σ_{ij}^* – напряжения в бетоне, рассчитанные в ортогональной системе координат $X_1^*OX_2^*$, повёрнутой относительно исходной системы X_1OX_2 на угол χ_1 .

Используя полученные соотношения, зависимости между деформациями и напряжениями в повёрнутой системе координат можно записать в форме

$$\{e^*\} = [A^*] \{\sigma_B^*\},$$

где

$$\{e^*\} = \begin{Bmatrix} e_{11}^* \\ e_{22}^* \\ \gamma_{12}^* \\ \gamma_{13}^* \\ \gamma_{23}^* \end{Bmatrix}; [A^*] = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66}^* & 0 & 0 \\ Sim & & & A_{44}^* & 0 \\ & & & & A_{55}^* \end{bmatrix}; \{\sigma_B^*\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{B11}^* \\ \sigma_{B22}^* \\ \tau_{B12}^* \\ \tau_{B13}^* \\ \tau_{B23}^* \end{Bmatrix};$$

$$A_{11}^* = 1 / (E_B \omega); A_{12}^* = -\nu_B / E_B; A_{22}^* = 1 / E_B;$$

$$A_{44}^* = A_{66}^* = 2(1 + \nu_B) / (E_B \omega); A_{55}^* = 2(1 + \nu) / E_B.$$

Модуль деформации бетона определим величиной $E_B \omega$ ($0 < \omega \leq 1$ – функция, характеризующая степень разрушения бетона [39, 174]).

Для случая с образованием трещины в направлении оси X_1^* :

$$[B^*] = [A^*]^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ & B_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ & & B_{66}^* & 0 & 0 \\ Sim & & & B_{44}^* & 0 \\ & & & & B_{55}^* \end{bmatrix};$$

где – $B_{11}^* = 0$; $B_{12}^* = 0$; $B_{22}^* = E_B$; $B_{44}^* = B_{66}^* = 0$; $B_{55}^* = E_B / [2(1 + \nu)]$.

Выполнив преобразование координат из системы $X_1^* O X_2^*$ в исходную, получим матрицу жёсткости для треснувшего бетона $[B^c]$:

$$[A^c]^{-1} = [B^c] = \begin{bmatrix} B_{11}^c & B_{12}^c & B_{16}^c & 0 & 0 \\ & B_{22}^c & B_{26}^c & 0 & 0 \\ & & B_{66}^c & 0 & 0 \\ sim & & & B_{44}^c & 0 \\ & & & & B_{55}^c \end{bmatrix}.$$

где

$$B_{11}^c = B_{22}^* \sin^4 \chi_1; B_{22}^c = B_{22}^* \cos^4 \chi_1; B_{12}^c = B_{22}^* \sin^2 \chi_1 \cos^2 \chi_1;$$

$$B_{16}^c = B_{22}^* \cos \chi_1 \sin^3 \chi_1; B_{26}^c = B_{22}^* \cos^3 \chi_1 \sin \chi_1;$$

$$B_{66}^c = 4B_{22}^* \sin^2 \chi_1 \cos^2 \chi_1; B_{44}^c = B_{55}^* \sin^2 \chi_1; B_{55}^c = B_{55}^* \cos^2 \chi_1.$$

Армированные (железобетонные) слои с трещиной. Появление трещин определяется по срабатыванию условия Баландина [15] в пределах фиктивного слоя КЭ:

$$\sigma_{B11}^2 + \sigma_{B22}^2 + 3 \cdot (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2) - (\sigma_{B11} \sigma_{B22}) - (R_{bt} - R_b)(\sigma_{B11} + \sigma_{B22}) - R_{bt} R_b > 0, \quad (4.36)$$

где σ_{Bij} – напряжения в бетоне армированного слоя.

Направление развития трещин определяется величиной угла χ_1 между нормалью к трещине и осью X_1 исходной системы: $\chi_1 = \arctg[(\sigma_{1t} - \sigma_{B11}) / \tau_{12}]$, где σ_{1t} – наибольшие из главных растягивающих напряжений в несущем слое (бетоне).

Далее, учитывая использованные выше рассуждения, получим:

$$e_{22}^* = A_{12}^* \sigma_{B11}^* + A_{22}^* \sigma_{B22}^* = (\sigma_{B22}^* - \nu_B \sigma_{B11}^*) / E_B, \quad (4.37)$$

т. е. $E_B = 1 / A_{22}^*$; $\nu_B = -A_{12}^* / A_{22}^*$, где A_{12}^* , A_{22}^* – компоненты матрицы податливостей, рассчитываемые по формулам, в которых σ_{11} и σ_{22} необходимо заменить напряжениями, рассчитанными в ортогональной системе координат $X_1^*OX_2^*$, повёрнутой относительно исходной системы X_1OX_2 на угол χ_1 ; σ_{B11}^* , σ_{B22}^* – напряжения бетона в этой системе координат.

Зависимости между деформациями и напряжениями в повёрнутой системе координат приобретают вид:

$$\{e^*\} = [A^*] \{\sigma_B^*\}, \quad (4.38)$$

где

$$\{e^*\} = \begin{Bmatrix} e_{11}^* \\ e_{22}^* \\ \gamma_{12}^* \\ \gamma_{13}^* \\ \gamma_{23}^* \end{Bmatrix}; [A^*] = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66}^* & 0 & 0 \\ \text{Sim} & & & A_{44}^* & 0 \\ & & & & A_{55}^* \end{bmatrix}; \{\sigma_B^*\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{B11}^* \\ \sigma_{B22}^* \\ \tau_{B12}^* \\ \tau_{B13}^* \\ \tau_{B23}^* \end{Bmatrix};$$

$$A_{11}^* = 1 / (E_B \omega); A_{12}^* = -\nu_B / E_B; A_{22}^* = 1 / E_B;$$

$$A_{44}^* = A_{66}^* = 2(1 + \nu_B) / (E_B \omega); A_{55}^* = 2(1 + \nu) / E_B,$$

и секущий модуль упругости (модуль деформации бетона) в направлении оси X_1^* определяется величиной $E_B \omega$ (ω – функция, с помощью которой учитывается степень повреждения бетона, $0 < \omega \leq 1$). В исходной системе координат матрица податливостей для треснувшего бетона примет вид $[A^c]$:

$$[A^c] = \begin{bmatrix} A_{11}^c & A_{12}^c & A_{16}^c & 0 & 0 \\ & A_{22}^c & A_{26}^c & 0 & 0 \\ & & A_{66}^c & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & A_{44}^c & 0 \\ & & & & A_{55}^c \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Матрица «упругости» для арматуры треснувшего армированного слоя в исходной ортогональной системе координат X_1OX_2 определена матричным выражением

$$[B_S^C] = \begin{bmatrix} \mu_{11} \frac{E_{s11}\chi_{11}}{(1-\nu_{s11}^2\mu_{11})\lambda_{11}} & \mu_{11} \frac{E_{s11}\nu_{s11}\chi_{11}}{(1-\nu_{s11}^2\mu_{11})\lambda_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{22} \frac{E_{s22}\nu_{s22}\chi_{22}}{(1-\nu_{s22}^2\mu_{22})\lambda_{22}} & \mu_{22} \frac{E_{s22}\chi_{22}}{(1-\nu_{s22}^2\mu_{22})\lambda_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{S3,3}^C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{S4,4}^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{S5,5}^C \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

где E_{skk} – секущие модули деформаций арматуры, расположенной вдоль осей X_1 и X_2 , ν_{skk} – секущий коэффициент поперечных деформаций арматуры ($k = 1, 2$).

Чтобы учесть развитие пластических деформаций в арматуре, будем вычислять их значения по формулам $E_{skk} = \begin{cases} E_s & \text{при } \sigma_{Skk} < \sigma_p \mu_{kk} \\ \sigma_p / e_{kk} & \text{при } \sigma_{Skk} \geq \sigma_p \mu_{kk} \end{cases}, k = 1, 2$, где σ_p – предел текучести материала арматуры. Коэффициенты, учитывающие зацепление и нагельный эффект представлены выражениями:

$$B_{S3,3}^C = \frac{\mu_{11}E_{s11}\chi_{11}}{(1+\nu_{s11}\mu_{11})\lambda_{11}\text{ctg}^2\chi_1} + \frac{\mu_{22}E_{s22}\chi_{22}}{(1+\nu_{s22}\mu_{22})\lambda_{22}\text{tg}^2\chi_1},$$

$$B_{S4,4}^C = \frac{\mu_{22}E_{s22}\chi_{22}}{(1+\nu_{s22}\mu_{22})\lambda_{22}\text{ctg}^2\chi_1}, B_{S5,5}^C = \frac{\mu_{11}E_{s11}\chi_{11}}{(1+\nu_{s11}\mu_{11})\lambda_{11}\text{tg}^2\chi_1},$$

где

$$\chi_{11} = 1 + \frac{\mu_{11}(1-\lambda_{11}\psi_s)E_s \cos^2 \chi_1}{E_B}, \quad \chi_{22} = 1 + \frac{\mu_{22}(1-\lambda_{22}\psi_s)E_s \sin^2 \chi_1}{E_B},$$

$$\lambda_{11} = \frac{\eta_\tau \mu_{11}}{\eta_\tau \mu_{11} + \mu_{22} \text{ctg}^2 \chi_1}, \quad \lambda_{22} = \frac{\eta_\tau \mu_{22}}{\eta_\tau \mu_{22} + \mu_{11} \text{tg}^2 \chi_1},$$

η_τ – коэффициент, учитывающий повышенную податливость арматурных стержней тангенциальным перемещениям в бетоне у трещины $\eta_\tau \approx 16$ [79, 81].

Матрицу «упругости» армированного слоя представим в виде

$$[B] = [B_B^C] + [B_S^C], \quad (4.41)$$

где $[B_B^C] = [A^C]^{-1}$.

Для детализации модели треснувшего армированного слоя задаётся функция поврежденности ω , определяемая с помощью параметра В.И. Мурашева ψ_s , который учитывает работу растянутого бетона на участках между трещинами и представлен формулой

$$\psi_s = E_{sn} / (E_B \omega + E_{sn}), \quad (4.42)$$

где E_{sn} – модуль упругости арматуры в направлении вдоль нормали к трещине,

$$E_{sn} = E_{S11} \mu_{11} \cos^4 \chi_1 + E_{S22} \mu_{22} \sin^4 \chi_1. \quad (4.43)$$

Решая совместно уравнения (4.42) и (4.43) относительно функции поврежденности, получаем выражение вида:

$$\omega = (E_{S11} \mu_{11} \cos^4 \chi_1 + E_{S22} \mu_{22} \sin^4 \chi_1) (1 / \psi_s - 1) / E_B. \quad (4.44)$$

Параметр ψ_s вычислим, применяя эмпирическую формулу, рекомендованную в работах Г.А. Гениева, В.Н. Киссюк и Г.А. Тюпина [50]:

$$\psi_s = 1 - 0,7 R_{bt} / \sigma_{11}^*, \quad (4.45)$$

В которой принято, что $\sigma_{B11}^* = 0,7 R_{bt}$, а σ_{11}^* , σ_{B11}^* – нормальные напряжения в железобетоне и бетоне на площадках, совпадающих с трещиной.

Расписав выражение для σ_{B11}^* , с учётом правил преобразования координат, для напряжений σ_{Bij} получим нелинейное уравнение относительно ω :

$$\begin{aligned} & (B_{B11}^C e_{11} + B_{B12}^C e_{22} + B_{B16}^C \gamma_{12}) \cos^2 \chi_1 + (B_{B12}^C e_{12} + B_{B22}^C e_{22} + B_{B26}^C \gamma_{12}) \sin^2 \chi_1 + \\ & + (B_{B16}^C e_{11} + B_{B26}^C e_{26} + B_{B66}^C \gamma_{12}) \sin 2\chi_1 = 0,7 R_{bt}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

где B_{Bij}^C ($i, j = 1, 2, 6$) – компоненты матрицы упругости треснувшего бетона железобетонного слоя $[B_B^C]$.

Решение этого уравнения строится методом последовательных приближений.

В итоге получаем возможность определения матриц $[A^c]$ и компонентов матрицы «упругости» $[B]$ по рассчитываемой функции поврежденности и параметру В.И. Мурашева [174, 176].

Очевидно, что уравнение (4.46) нелинейно относительно параметра ω . Решение этого уравнения выполняется последовательными приближениями по алгоритму, блок-схема которого приведена на рисунке 4.4 [224].

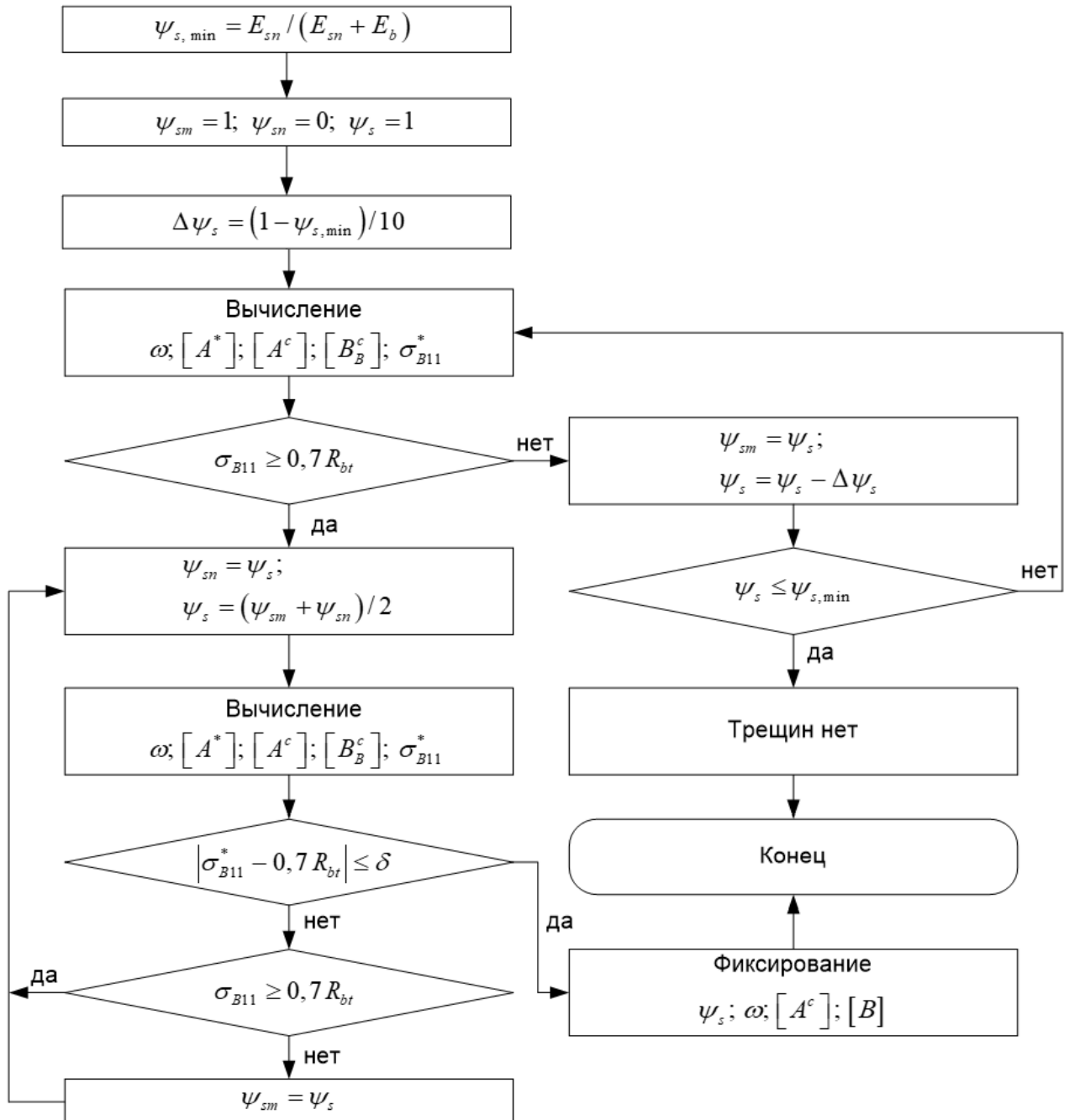


Рисунок 4.4 – Алгоритм решения уравнения

Рассмотрим особенности итерационной процедуры решения уравнения (4.46). Положим, что к началу решения исходного уравнения (4.46) выполнен критерий трещинообразования (4.35), так что уже определены следующие параметры: E_b , ν_b , E_{skk} , e_{kk} , γ_{12} .

Решение уравнения строим в две стадии. Вначале значение коэффициента ψ_s уменьшаем с шагом $\Delta\psi_s = (1 - \psi_{s,\min}) / 10$, начиная с $\psi_s = 1$, где $\psi_{s,\min}$ – минимальное значение коэффициента ψ_s , соответствующее стадии работы железобетонного элемента без трещин. Для каждого шага в соответствии с величиной ψ_s последовательно вычисляется параметр ω по формуле (4.60), а также формируются матрица $[A^*]$, матрица $[A^c]$, матрица $[B_B^c]$ и определяются напряжения σ_{B11}^* .

По мере уменьшения коэффициента ψ_s степень повреждения бетона трещинами снижается и при некотором шаговом значении ψ_s напряжение σ_{B11}^* впервые превысит величину $0,7R_{bt}$. С этого момента включается вторая стадия решения, на которой функция ψ_s определяется как среднеарифметическое значений ψ_{sm} и ψ_{sn} , где ψ_{sm} – последнее значение ψ_s , при котором $\sigma_{B11}^* < 0,7R_{bt}$, а ψ_{sn} – первое значение ψ_s , при котором $\sigma_{B11}^* \geq 0,7R_{bt}$. Далее на каждой итерации второй стадии расчёта происходит корректировка величин ψ_{sm} или ψ_{sn} (а следовательно, и ψ_s) до тех пор, пока напряжения σ_{B11}^* не достигнут значения $0,7R_{bt}$ с предварительно заданной погрешностью δ .

После совпадения σ_{B11}^* с величиной $0,7R_{bt}$ (в пределах заданной погрешности δ) процесс решения прекращается, а параметры ψ_s , ω и матрица $[A^c]$ считаются окончательно вычисленными. Далее вычисляются компоненты матрицы упругости $[B]$ (4.41).

Отметим, что приведённый итерационный алгоритм сходится достаточно быстро: при погрешности $\delta = 0,005 R_{bt}$ решение сходится за 8–10 итераций второй стадии расчёта).

Армированные (железобетонные) слои с пересекающимися трещинами. С учётом принятой модели армированного слоя с трещинами и введённых ранее гипотез матрицу «упругости» в пределах фиктивного слоя можно получить в виде

$$[B] = [B_s^c], \quad (4.47)$$

где матрица $[B_s^c]$ определяется согласно условию (4.32).

4.3 Решение задач с применением плоского конечного элемента

Рассмотрим построение матрицы жёсткости КЭ стержня [164] при наличии деформаций изгиба и растяжения сжатия, возникающих одновременно. Такой КЭ используется при моделировании НДС оболочки положительной гауссовой кривизны, опёртой на фермы. Подобная конструкция широко используется в строительной практике.

На элемент стержня длиной a , изгибными жёсткостями EI_y и EI_z , жёсткостью растяжения EF действуют поперечная нагрузка интенсивностью q_y и q_z , а также продольная нагрузка интенсивностью τ . Эти данные используются следующие обозначения: xu и xz – плоскости изгиба, E – модуль упругости материала, I_y и I_z моменты инерции вокруг осей y и z , y и z – направления поперечной распределённой нагрузки, F – площадь поперечного сечения стержня,

Приводя заданные нагрузки к узловым, мы сможем однозначно задать его деформированную форму десятью (10) узловыми перемещениями в глобальной системе координат (ГСК): по три поступательных и два угловых перемещения в каждом узле (вокруг осей y и z).

Зависимость между вектором узловых усилий $\{R\} = \{R_1, R_2, R_3 \dots R_{10}\}$ и вектором узловых перемещений $\{q\} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_{10}\}$ можно записать в виде:

$$\{R\} = [K]\{q\}, \quad (4.48)$$

где $[K]$ – матрица жёсткости стержневого конечного элемента, при его совместном изгибе и растяжении.

Зависимость (4.48) в развёрнутом виде записывается, следующим образом [164, 228]:

$$\begin{matrix}
 \left. \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ R_{10} \end{matrix} \right\} = & \left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{EF}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_y}{a^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{a^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{a^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{a^2} & 0 \\
 & \frac{12EI_z}{a^3} & \frac{6EI_z}{a^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{a^3} & \frac{6EI_z}{a^2} & 0 & 0 \\
 & & \frac{4EI_z}{a} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{a^2} & \frac{2EI_z}{a} & 0 & 0 \\
 & & & \frac{4EI_y}{a} & 0 & -\frac{6EI_y}{a^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{a} & 0 \\
 & & & & \frac{EF}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \frac{12EI_y}{a^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{a^2} & 0 \\
 & & & & & & \frac{12EI_z}{a^3} & \frac{6EI_z}{a^2} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{4EI_z}{a} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & \frac{4EI_y}{a} & 0
 \end{array} \right] & \left. \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \end{matrix} \right\}
 \end{matrix} \quad (4.49)$$

Здесь $\{R\} = \{R_1, R_2, \dots, R_{10}\}$ и соответствует вектору $\{F\} = \{F_x, F_y, F_z, M_y, M_z, \dots\}$, а $\{q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_{10}\}$ вектору узловых перемещений $\{F\} = \{u_x, u_y, u_z, \varphi_y, \varphi_z, \dots\}$, где u_i – узловые перемещения, φ_i – углы поворота.

Наличие армирования стержнями учитывается путём задания коэффициента армирования μ_x вдоль оси стержня, и вычисления матрицы упругости его материала, принимая во внимание (4.34), следующим образом:

$$[B] = [A]^{-1} + [B_s], \quad (4.50)$$

где $B_{s11} = E_s \mu_x$; $B_{s22} = E_s \mu_x$; E_s – модуль упругости материала арматуры. Так что матрица $[B_s]$ приобретает следующее содержание:

$$[B_s] = \begin{bmatrix}
 B_{s11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & B_{s22} & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & sim & 0 & 0 \\
 & & & & & 0
 \end{bmatrix}.$$

Модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν вычисляются аналогично (4.37), по формулам:

$$\begin{aligned} E &= 1 / [B]_{11}^{-1}; \\ \nu &= -[B]_{12}^{-1} / [B]_{22}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Учёт нелинейного поведения материала, трещинообразования и пластических деформаций в арматуре стержня, выполняется по аналогии с моделью деформирования фиктивных слоёв оболочки из железобетона с трещинами.

Таким образом, зависимость свойств материала от его напряжённого состояния выражается формулами (4.1), а учёт поведения железобетона с трещинами осуществляется посредством введения коэффициента Мурашова [176] и сводится к решению уравнения (4.46) относительно параметра ω по указанному выше алгоритму для оболочки. Однако в стержне учитывается только одно напряжение – σ_{11} , которое действует в направлении вдоль оси стержня.

При расчёте НДС конструкций, содержащих как оболочечные элементы, так и стержневые, принимаются все указанные ранее гипотезы. Алгоритм расчёта рисунка 4.4 реализуется с применением метода пошаговых нагружений и метода переменных «переменных параметров упругости» [29].

Для иллюстрации работоспособности математической модели и алгоритма определения НДС оболочек из материалов с усложнёнными механическими свойствами типа разнсопротивляемости, дилатации, структурной анизотропии и др., предложено решение нескольких прикладных задач:

- определение НДС трубчатых железобетонных элементов при чистом кручении;
- определение НДС железобетонной оболочки положительной гауссовой кривизны, квадратной в плане, опёртой на типовые фермы ФКБ-24;
- расчёт НДС цилиндрической оболочки из графита АРВ, находящейся под действием равномерно распределённой нагрузки;
- расчёт НДС железобетонных незамкнутых цилиндрических оболочек, размерами в плане 24×12 и 6×12 , испытывающих действие равномерно распределённой нагрузки, ортогональной к поверхности оболочек.

4.3.1 Определение НДС трубчатых элементов при чистом кручении

Чтобы продемонстрировать эффективность разработанной математической модели и приведённого на рисунке 4.4 алгоритма расчёта НДС железобетонных оболочек, была решена задача о чистом кручении трубчатых железобетонных образцов (рисунки 4.5–4.6).

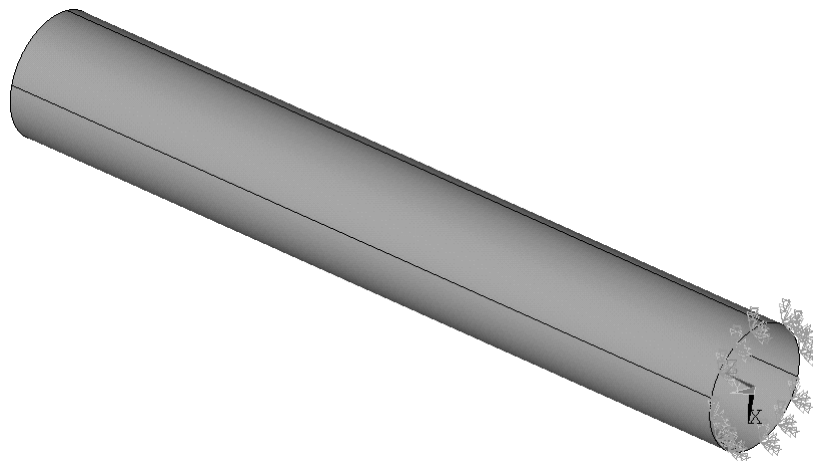


Рисунок 4.5 – Характер закрепления исследуемых образцов: жёсткое защемление на одном из концов трубчатого образца

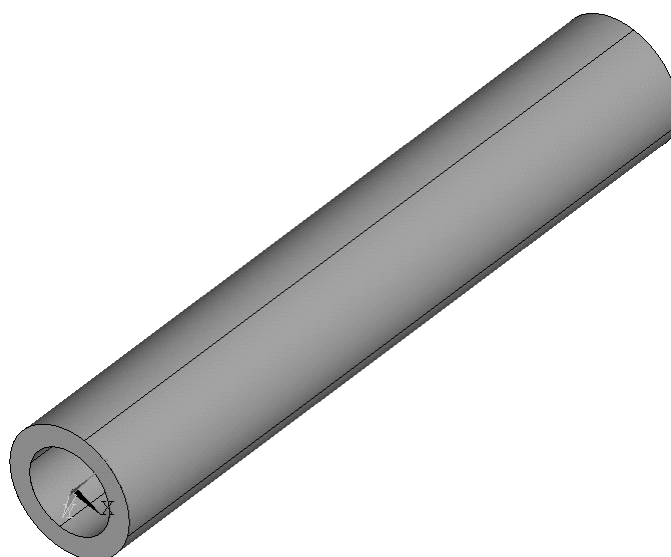


Рисунок 4.6 – Трёхмерная модель образца

Проверялась теория и проводился сравнительный анализ с данными экспериментов, выполненных в НИИЖБ Э.Г. Елагиным. Эксперименты проводили на образцах кольцевого сечения наружным диаметром 0,3 м, внутренним – 0,2 м, длиной 3,34 м. Арматура для продольных стержней – класса А400 (предел текучести $\sigma_p = 390 \text{ МПа}$, модуль упругости $E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$), диаметр 12 мм, класс А240);

арматура поперечная – класса А240 (предел текучести $\sigma_p = 235 \text{ МПа}$, модуль упругости $E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$), диаметр 6,5 мм).

Кубиковая прочность бетона принималась в диапазоне от 27 до 44 МПа, варьировались также количество стержней в сечении для продольной арматуры и расстояние между стержнями для поперечной арматуры. Величина максимального крутящего момента, для которого проводился расчёт в зависимости от образца колебалась от 25 до 28 $\text{кН} \cdot \text{м}$ [181].

В испытаниях приняли участи 10 образцов:

- шесть имели ненапрягаемую арматуру (образцы ОК-7, ОК-2, ОК-4, ОК-14 и ОК-15);

- четыре образца – с напрягаемой арматурой (ОНК-7, ОНК-8, ОНК-14, ОНК-15), в которых предварительному напряжению подвергались 50% продольных стержней.

Испытание на кручение производили на специальной установке НИИЖБ. Подробные данные опытных образцов приведены в работах [176, 181]. В диссертации решены задачи для следующих образцов: ОК-14, ОК-4, ОК-7, ОНК-7, данные о которых приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Характеристики образцов арматуры

Образец	Продольная арматура	Поперечная арматура	Кубиковая прочность бетона на сжатие	Преднапряжение
ОК-4	А400; диаметр 12 мм; 12 стержней в сечении	А240; диаметр 6,5 мм; шаг 0,06 м	28,4 МПа	нет
ОК-14	А400; диаметр 12 мм; 16 стержней в сечении	А240; диаметр 6,5 мм; шаг 0,09 м	37 МПа	нет
ОК-7	А400; диаметр 12 мм; 10 стержней в сечении	А240; диаметр 6,5 мм; шаг 0,05 м	28,4 МПа	нет
ОНК-7	А400; диаметр 12 мм; 10 стержней в сечении	А240; диаметр 6,5 мм; шаг 0,05 м	37 МПа	есть

Значения коэффициентов армирования μ_{11} и μ_{22} для образцов принимались в соответствии с данными таблицы 4.2.

Таблица 4.2. Значения коэффициентов армирования

Образец	μ_{11}	μ_{22}
ОК-4	0,0553	0,0346
ОК-14	0,0369	0,0462
ОК-7	0,0664	0,0289
ОНК-7	0,0664	0,0289

Значения констант, определены по данным эксперимента с использованием методики А.А. Трещёва и Н.М. Матченко [118], а также с деталями главы 2 диссертации. Результаты применения методики сведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Константы потенциала W_I

Константы потенциала	Материалы		
	Графит АРВ	Бетон $R^- = 28,4 \text{ МПа}$	Бетон $R^- = 37 \text{ МПа}$
n	2,1	2,75	2,8
$A_e, \text{ МПа}^{-1}$	$6,083 \cdot 10^{-5}$	$3,148 \cdot 10^{-5}$	$2,341 \cdot 10^{-5}$
$B_e, \text{ МПа}^{-1}$	$1,429 \cdot 10^{-5}$	$6,723 \cdot 10^{-6}$	$2,783 \cdot 10^{-6}$
$C_e, \text{ МПа}^{-1}$	$-3,267 \cdot 10^{-5}$	$-9,705 \cdot 10^{-6}$	$-1,549 \cdot 10^{-5}$
$D_e, \text{ МПа}^{-1}$	$1,015 \cdot 10^{-5}$	$-4,861 \cdot 10^{-7}$	$-7,794 \cdot 10^{-6}$
$A_p, \text{ МПа}^{(1-2n)/n}$	$3,822 \cdot 10^{-4}$	$4,927 \cdot 10^{-4}$	$1,752 \cdot 10^{-4}$
$B_p, \text{ МПа}^{(1-2n)/n}$	$1,625 \cdot 10^{-4}$	$3,865 \cdot 10^{-4}$	$8,120 \cdot 10^{-5}$
$C_p, \text{ МПа}^{(1-2n)/n}$	$1,857 \cdot 10^{-4}$	$6,782 \cdot 10^{-4}$	$-1,056 \cdot 10^{-4}$
$D_p, \text{ МПа}^{(1-2n)/n}$	$1,943 \cdot 10^{-4}$	$2,712 \cdot 10^{-4}$	$1,490 \cdot 10^{-5}$

В своей работе Н.И. Карпенко показал, что правильность модели в общем виде могут характеризовать углы закручивания [81]. Результаты расчёта углов закручивания по разработанной теории для образцов из таблицы 4.2 приведены ниже на рисунках 4.7–4.10, где использованы следующие обозначения:

- штрихпунктирная линия – результаты, полученные с применением разработанной теории расчёта НДС;
- сплошная линия – результаты по теории Карпенко Н.И.;
- пунктирная линия – данные эксперимента НИИЖБ.

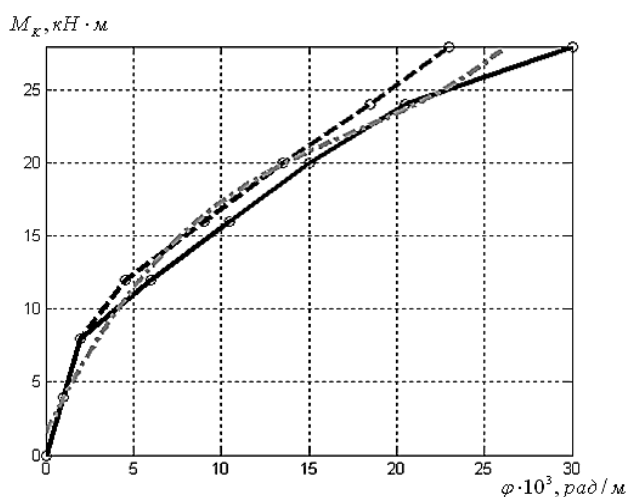


Рисунок 4.7 – Образец ОК-14

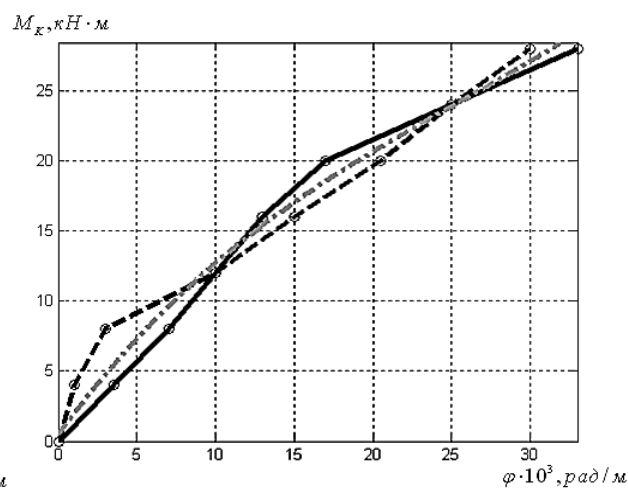


Рисунок 4.8 – Образец ОК-4

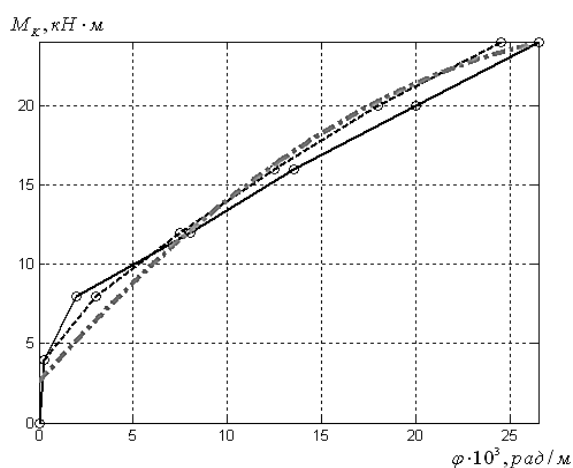


Рисунок 4.9 – Образец ОК-7

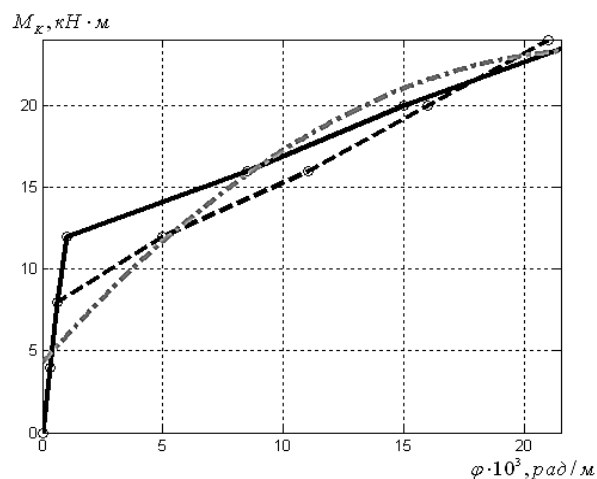


Рисунок 4.10 – Образец ОНК-7

Сравнение с экспериментальными данными и теорией Н.И. Карпенко свидетельствует об адекватности разработанной механико-математической модели, правильности работы разработанного алгоритма и его реализации на ЭВМ, а также возможности её применения для решения задач определения НДС железобетонных оболочек.

На рисунке 4.11 показаны специальные точки в зоне контура опирания образца, для которых выводились результаты расчёта напряжений.

На рисунках 4.12–4.15 показано удлинение исследуемого образца от действия механического момента M_K для: ОК-4, ОК-14, ОК-7, ОНК-7. Отметим, что удлинение образца является особым эффектом, присущим только разносопротивляющимся и дилататирующим материалам, таким как рассматриваемые в диссертации. В случае игнорирования «усложнённых» свойств изменение длины цилиндрических оболочек, очевидно, не наблюдается [181].

На рисунках 4.16–4.19 показаны распределения касательных напряжений τ_{12} в зоне заземления, для исследуемых трубчатых образцов, при следующем значении крутящего момента (для визуализации применялся комплекс ANSYS, посредством создания отдельных подпрограмм на языке APDL [174]):

$M_K = 28 \text{ кН} \cdot \text{м}$ для образца ОК-4; $M_K = 28 \text{ кН} \cdot \text{м}$ для образца ОК-14;

$M_K = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$ для образца ОК-7; $M_K = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$ для образца ОНК-7.

На рисунке 4.20 показана вычисленная схема трещинообразования для рассматриваемых объектов. Полученная теоретическая схема корректно отображает данные, полученные в ходе экспериментов НИИЖБ [174, 181] и результаты, полученные в работах [82–84].

На рисунках 4.21–4.24 показано распределение касательных напряжений τ_{12} в точках А и В (см. рисунок 4.11) по толщине в образцах ОК-4, ОК-14, ОК-7, ОНК-7.

На рис. 4.25–4.28 показана зависимость углов закручивания φ от крутящего момента M_K на различном расстоянии от зоны заземления: 20%, 40%, 70% и 90% длины образца $l = 3,34 \text{ м}$.

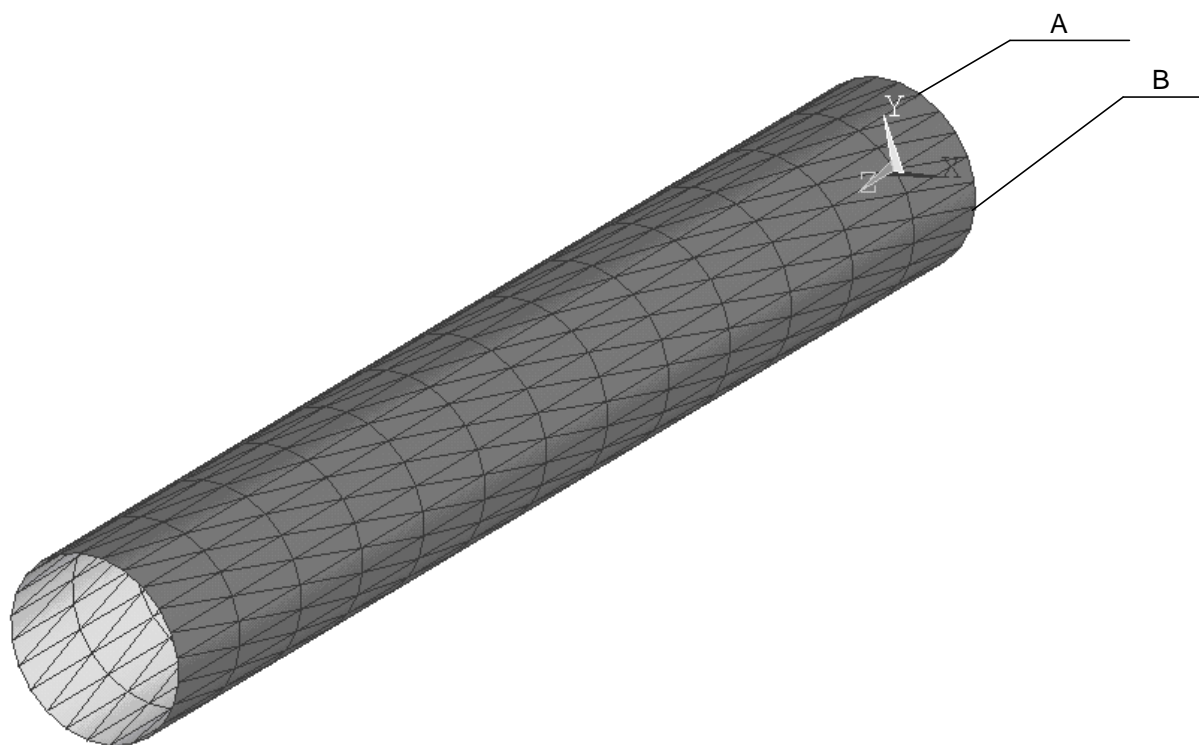


Рисунок 4.11 – Схема дискретизации образца на КЭ, точки А,В

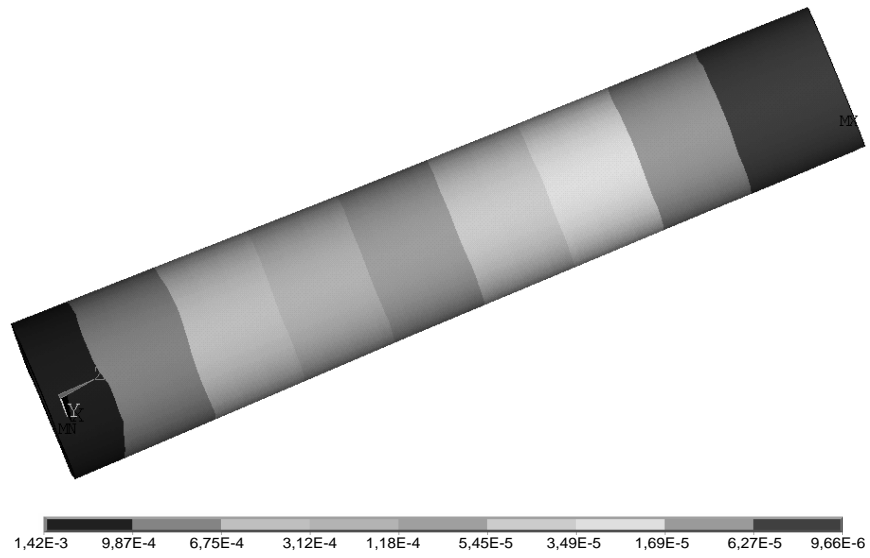


Рисунок 4.12 – Горизонтальные смещения вдоль образующих образца ОК-14 (м)

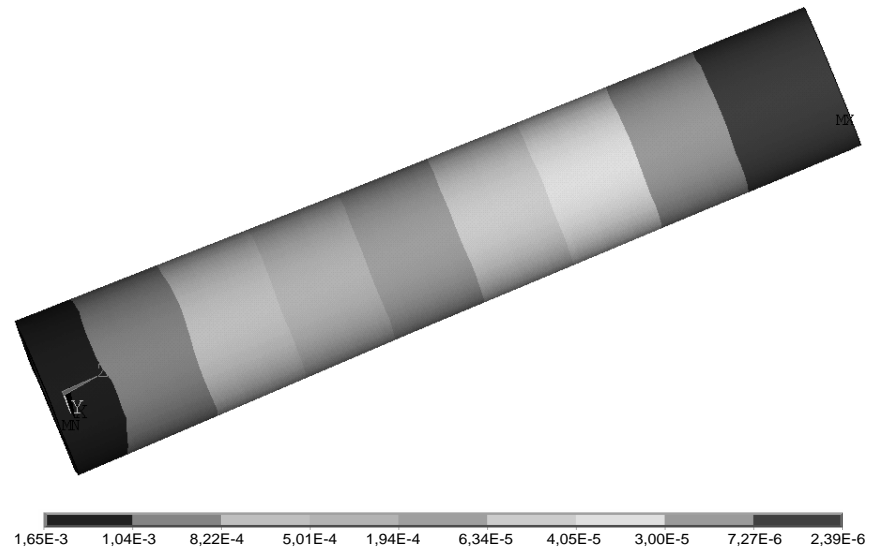


Рисунок 4.13 – Горизонтальные смещения вдоль образующих образца ОК-4 (м)

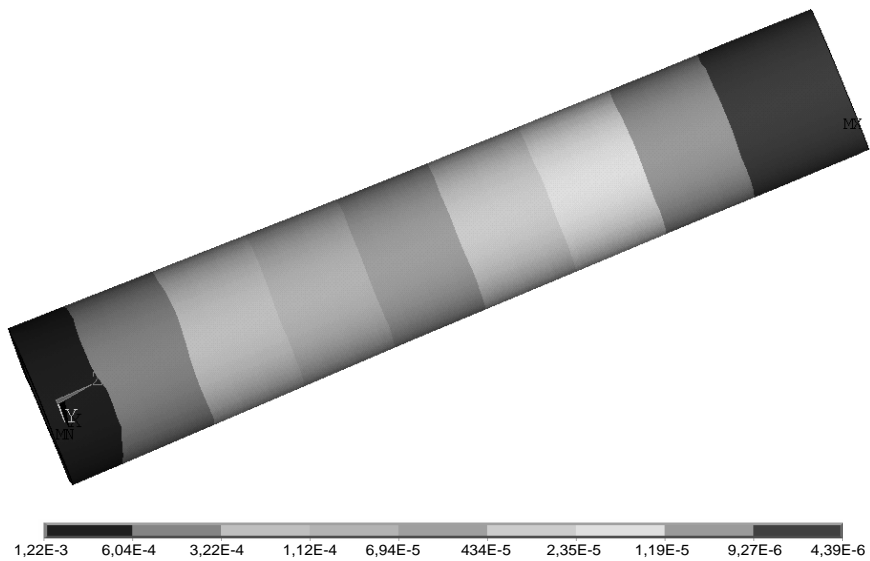


Рисунок 4.14 – Горизонтальные смещения вдоль образующих образца ОК-7 (м)

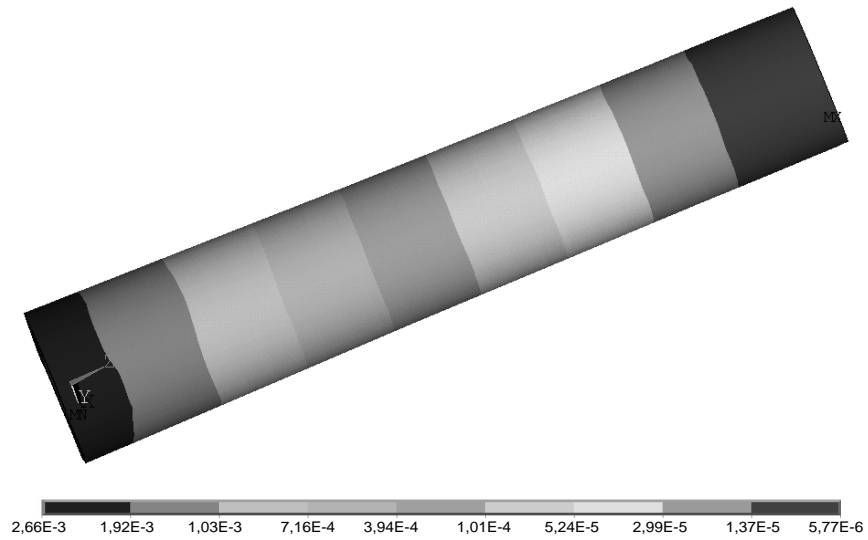


Рисунок 4.15 – Горизонтальные смещения вдоль образующих образца ОК-7 (м)

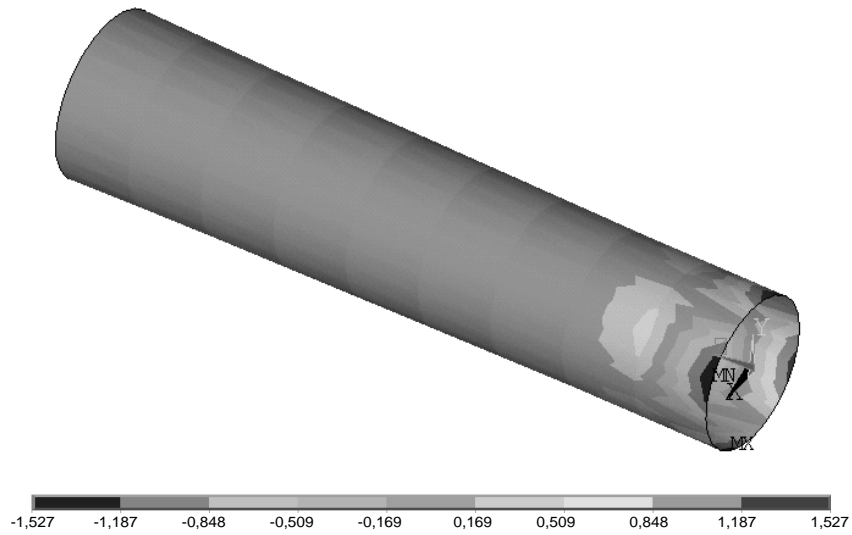


Рисунок 4.16 – Поле напряжений τ_{12} в зоне опирания образца ОК-14 (МПа)

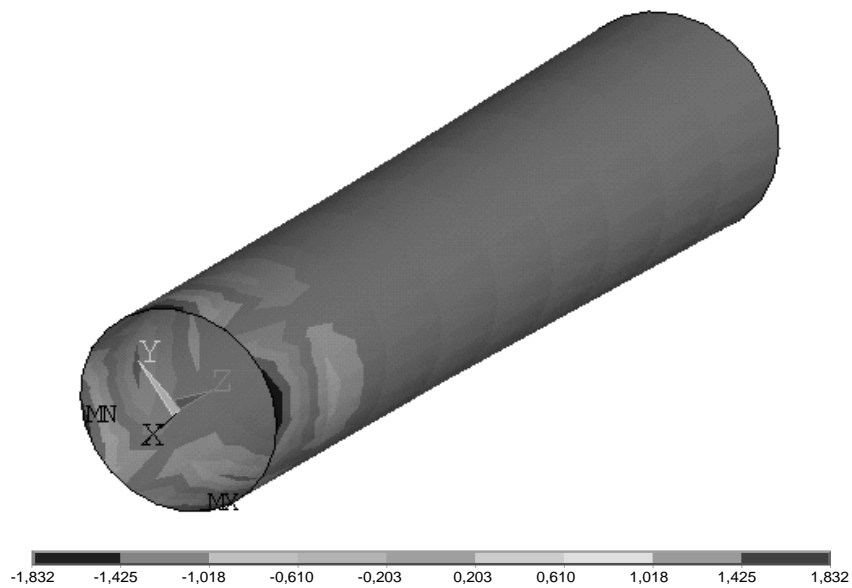


Рисунок 4.17 – Поле напряжений τ_{12} в зоне опирания образца ОК-4 (МПа)

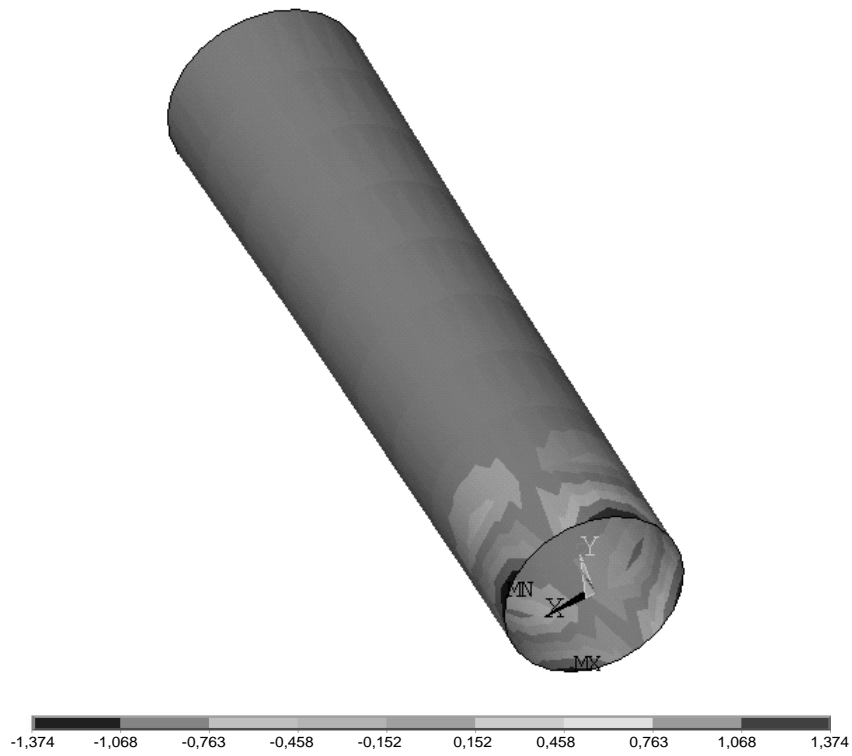


Рисунок 4.18 – Поле напряжений τ_{12} в зоне опирания образца ОК-7 (МПа)

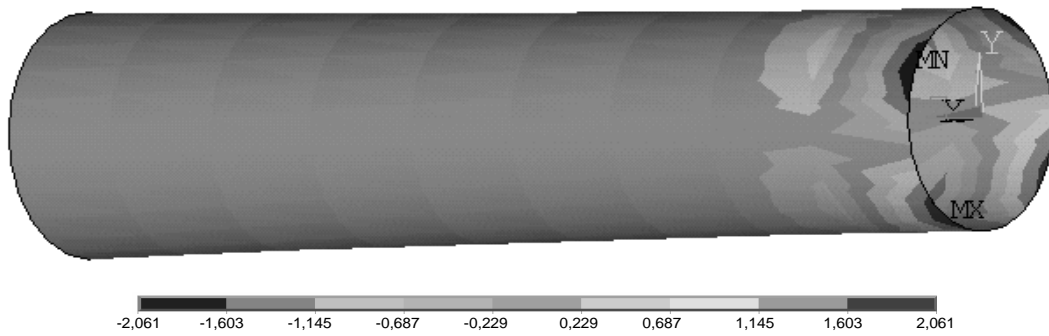


Рисунок 4.19 – Поле напряжений τ_{12} в зоне опирания образца ОНК-7 (МПа)

Линии вдоль которых образуются трещины
(теоретические данные полученные с помощью
разработанной модели)

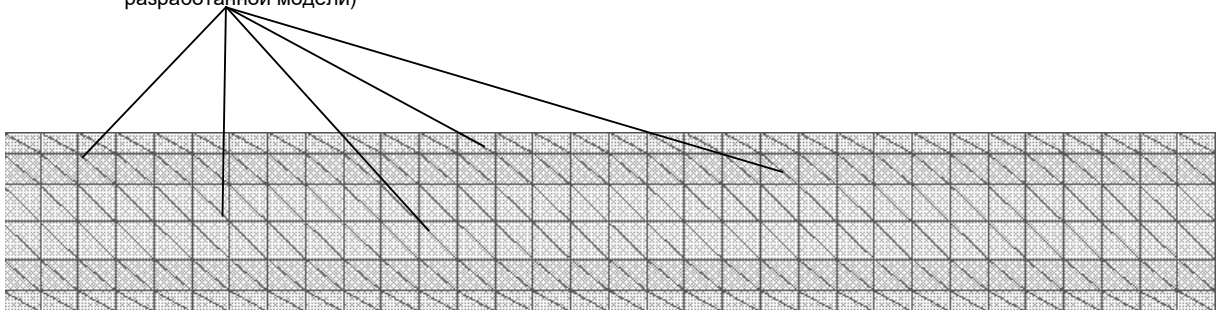


Рисунок 4.20 – Схема траекторий возникновения трещин при кручении
в отобранных образцах ОК-14, ОК-4, ОК-7, ОНК-7

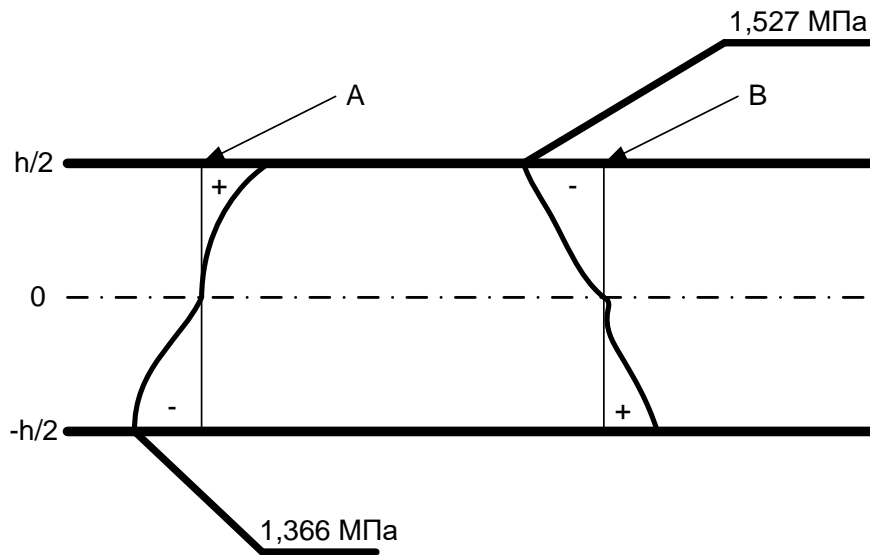


Рисунок 4.21 – Распределение напряжений τ_{12} в точках А и В по толщине (ОК-4)

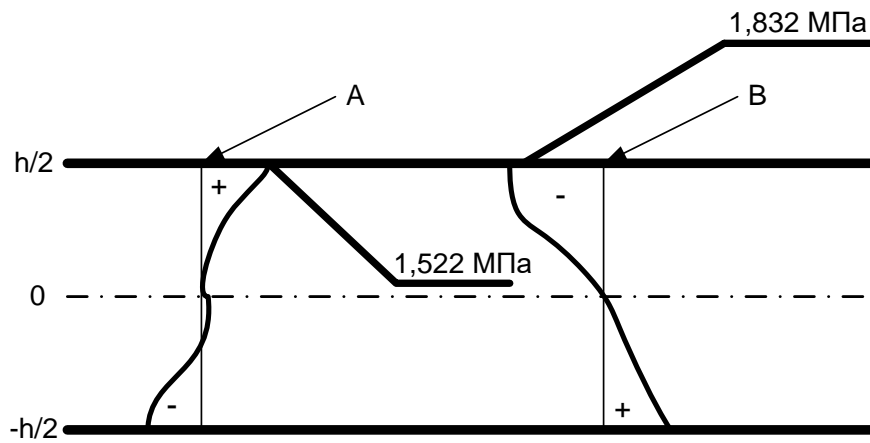


Рисунок 4.22 – Распределение напряжений τ_{12} в точках А и В по толщине (ОК-14)

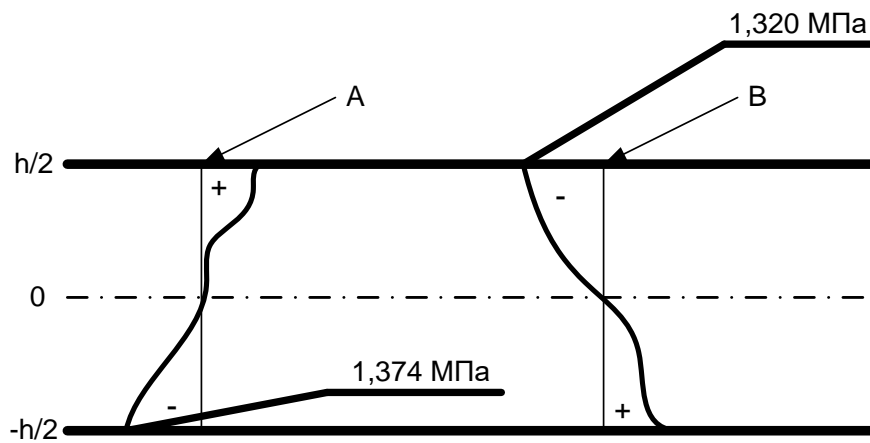


Рисунок 4.23 – Распределение напряжений τ_{12} в точках А и В по толщине (ОК-7)

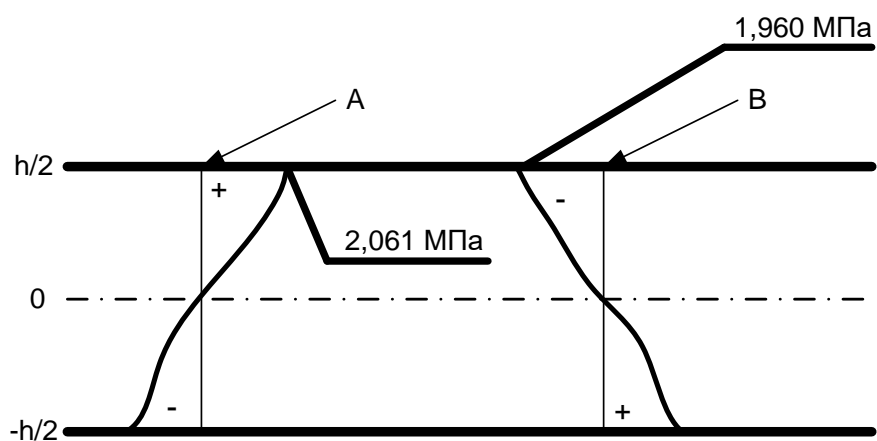


Рисунок 4.24 – Распределение напряжений τ_{12} в точках А и В по толщине (ОНК-7)

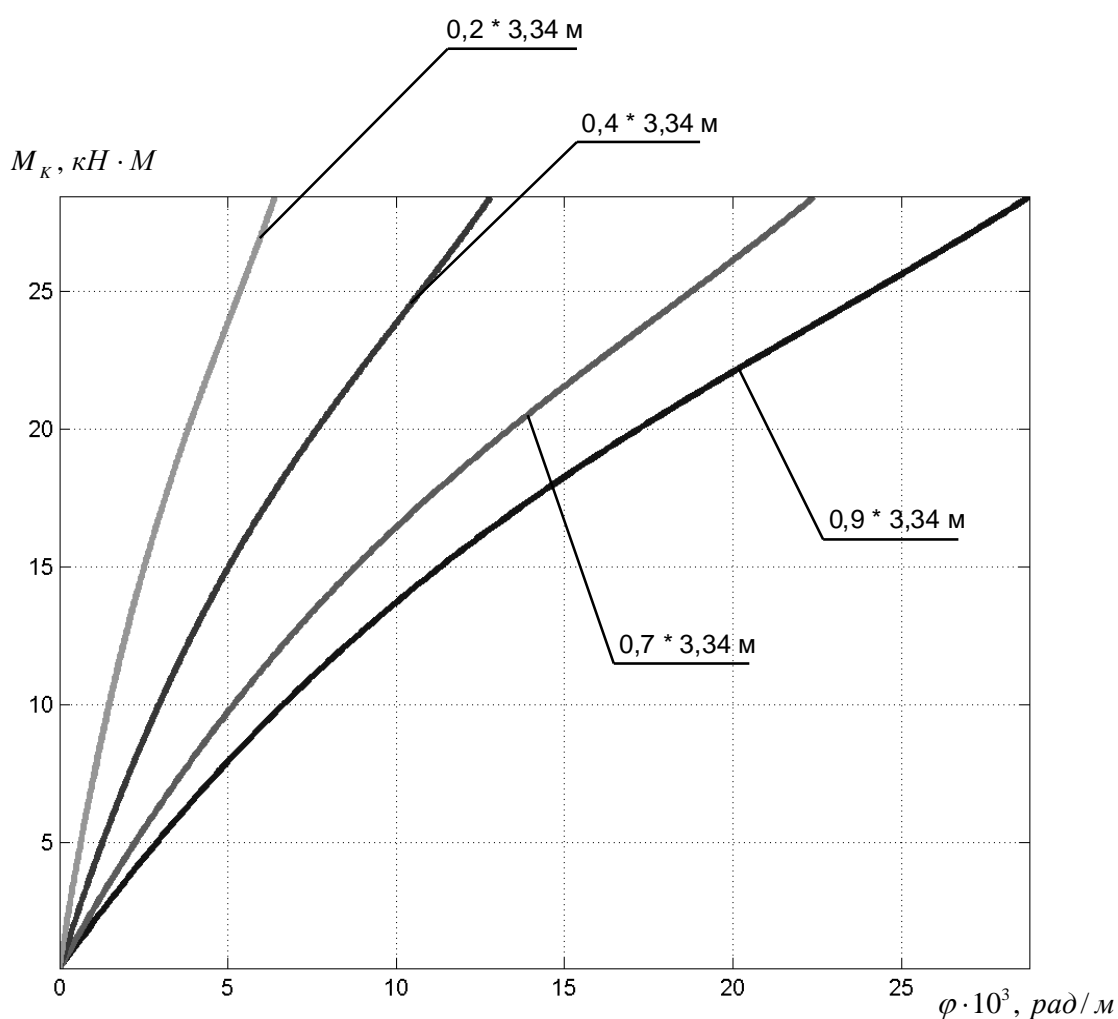


Рисунок 4.25 – Расчетная зависимость углов закручивания φ от механического момента M_k на различном расстоянии от опорного контура: 20%, 40%, 70% и 90% длины образца $l = 3,34$ м (ОК-4)

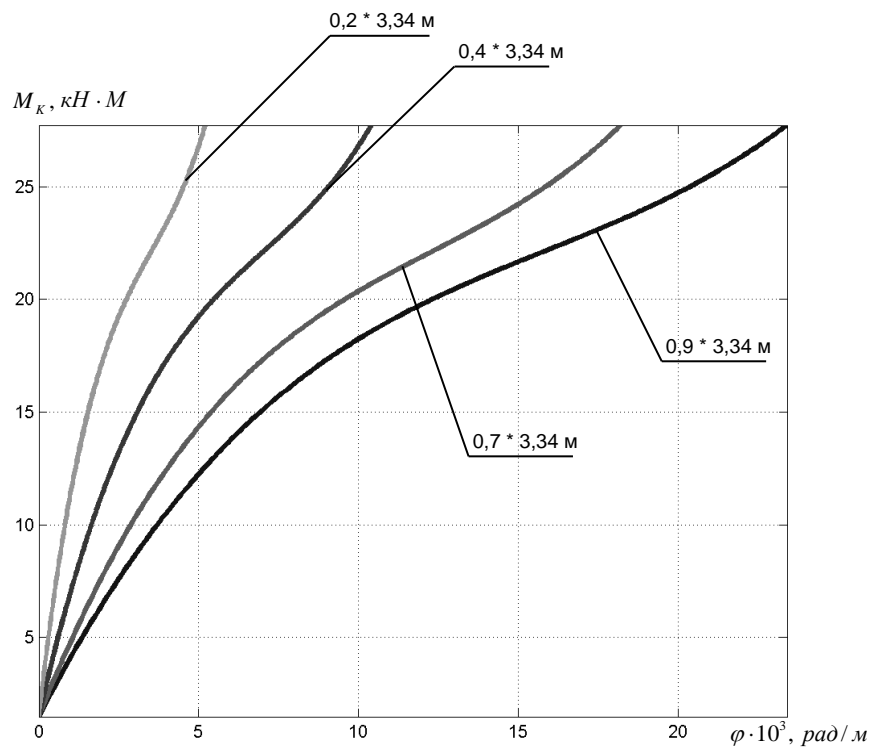


Рисунок 4.26 – Расчетная зависимость углов закручивания φ от механического момента M_k на различном расстоянии от опорного контура: 20%, 40%, 70% и 90% длины образца $l = 3,34$ м (ОК-14)

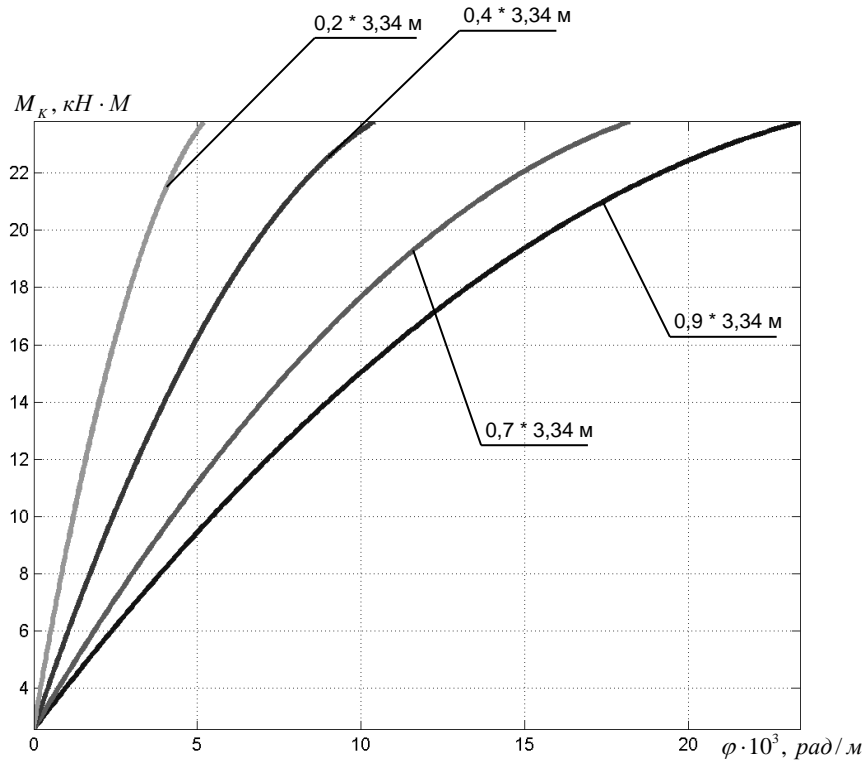


Рисунок 4.27 – Расчетная зависимость углов закручивания φ от механического момента M_k на различном расстоянии от опорного контура: 20%, 40%, 70% и 90% длины образца $l = 3,34$ м (ОК-7)

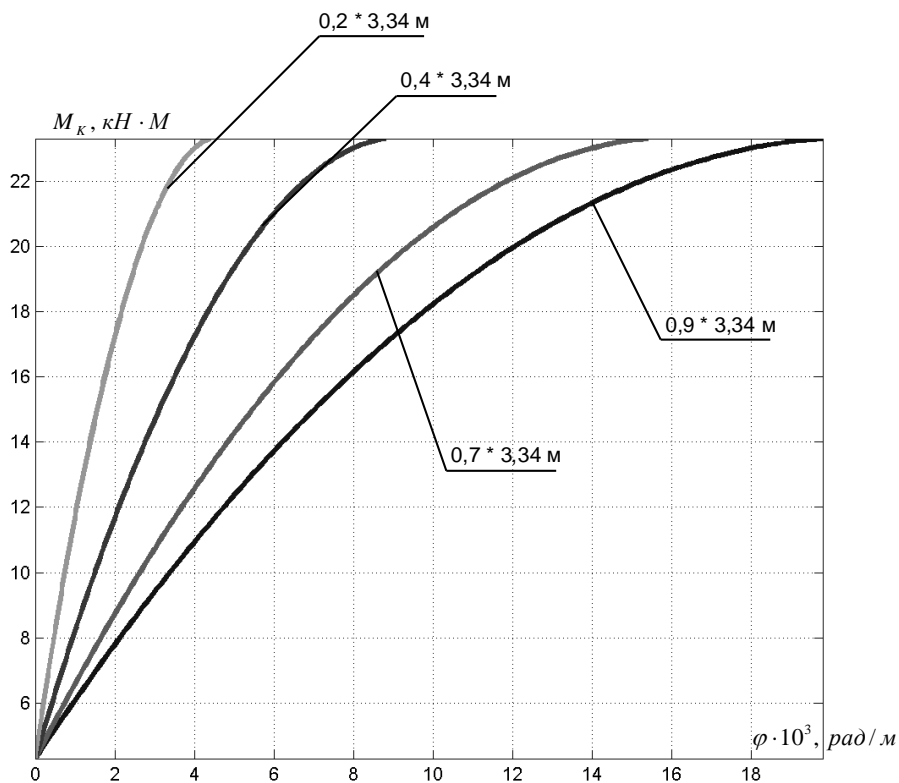


Рисунок 4.28 – Расчетная зависимость углов закручивания φ от механического момента M_k на различном расстоянии от опорного контура: 20%, 40%, 70% и 90% длины образца $l = 3,34$ м (ОНК-7)

4.3.2 Расчет НДС жёстко защемлённой, по образующим, цилиндрической оболочки из графита АРВ

Для демонстрации эффективности предлагаемой КЭ-модели при использовании разносопротивляющегося материала, для которого справедливы определяющие соотношения А.А. Трещёва и Н.М. Матченко, была решена задача о расчёте НДС оболочки, жёстко защемлённой по образующим, на которую действует равномерно распределённая нагрузка q .

Линейные размеры оболочки 0,6х0,3 м, высота подъёма 0,0625 м; толщина 0,002 м; интенсивность нагрузки q – от 0 кПа до 10 кПа. Константы материала взяты из таблицы 4.3. Данные модели МКЭ, использованные для расчётной модели, приведены на рисунках 4.29–4.30.

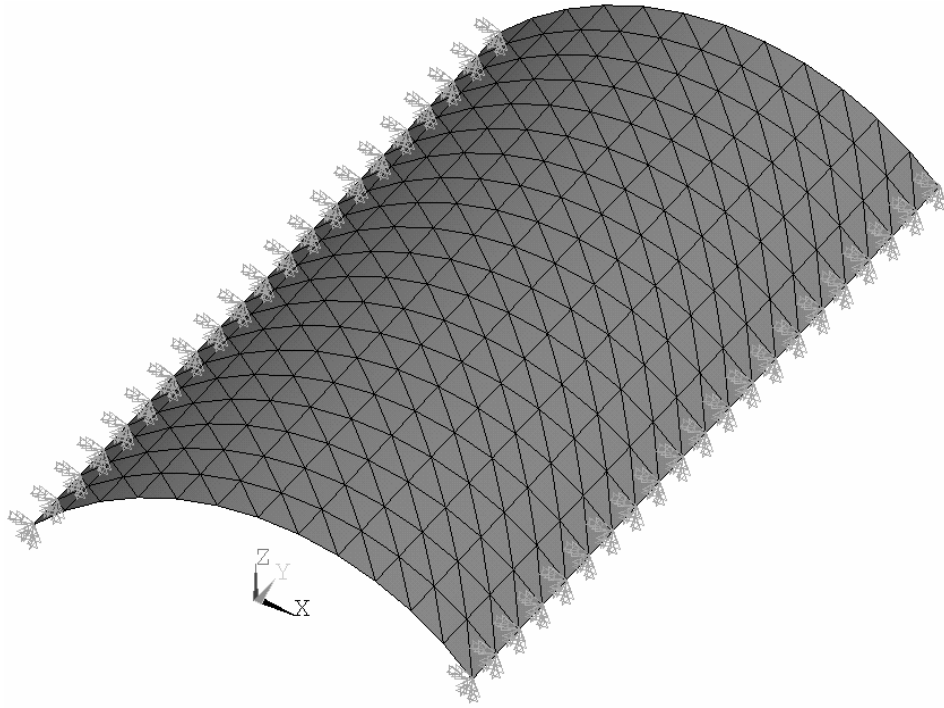


Рисунок 4.29 – Схема разбиения цилиндрической оболочки из графита АРВ на конечные элементы

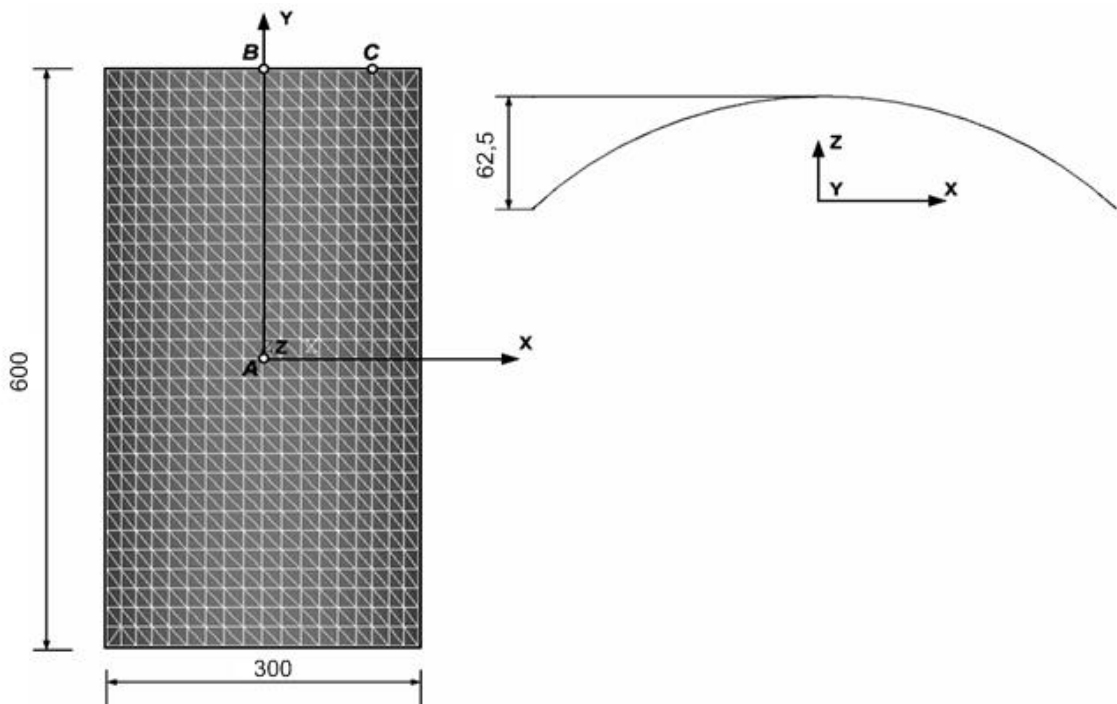


Рисунок 4.30 – Схема рассчитываемой оболочки (схема разбиения на конечные элементы)

На рисунках 4.31–4.33 показаны графики зависимости вертикальных прогибов W в характерных точках **A**, **B**, **C**, от равномерно распределённой нагрузки q .

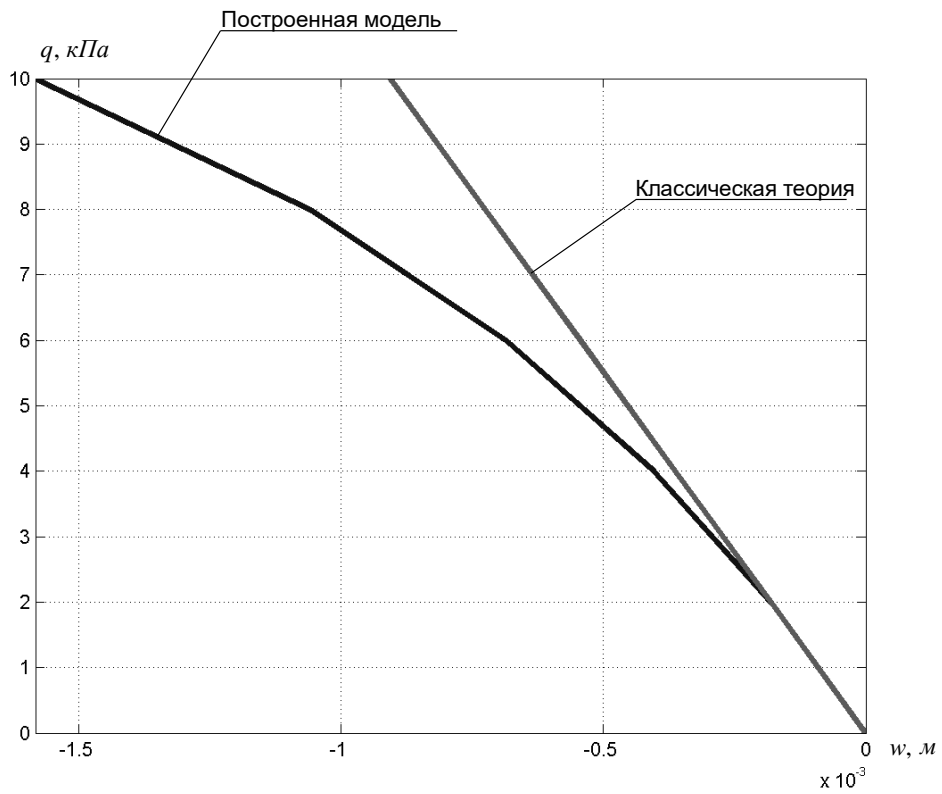


Рисунок 4.31 – График вертикальных прогибов W в точке **A** (см. рисунок 4.12) в зависимости от равномерно распределенной нагрузки q

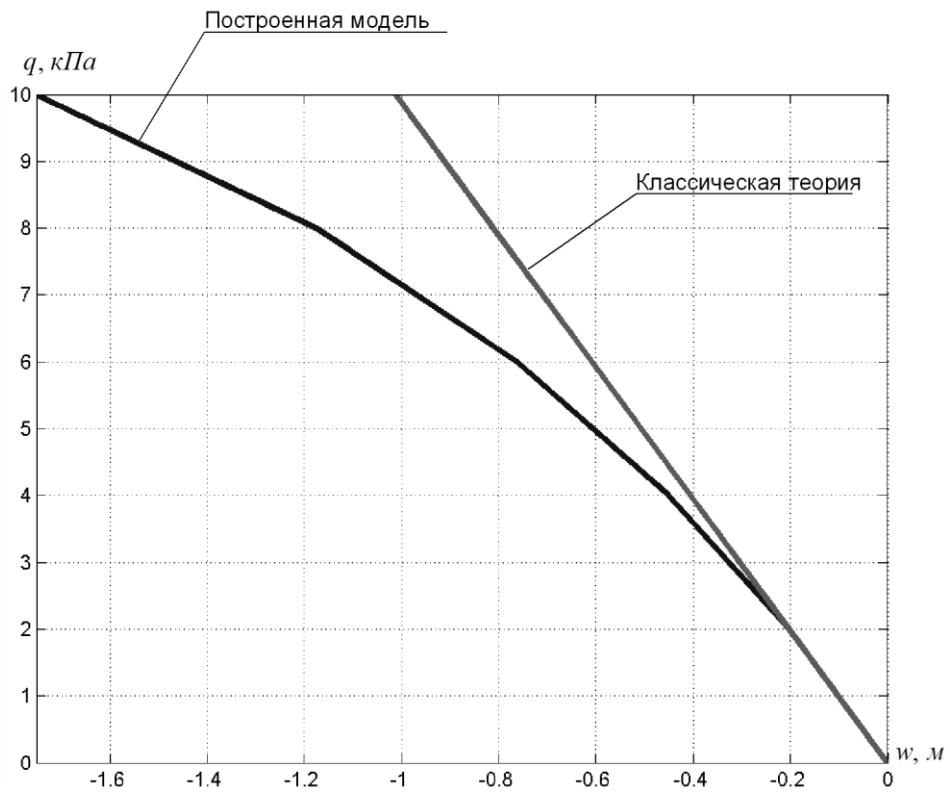


Рисунок 4.32 – График вертикальных прогибов W в точке **B** (см. рисунок 4.30) в зависимости от равномерно распределенной нагрузки q

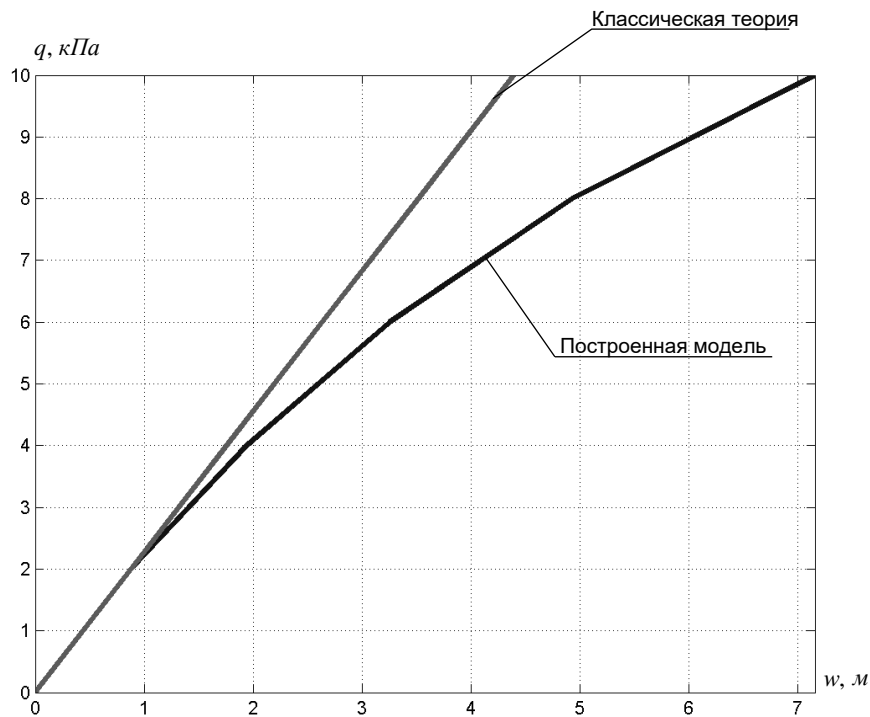


Рисунок 4.33 – График вертикальных прогибов W в точке **С** (см. рисунок 4.30) в зависимости от равномерно распределенной нагрузки q

В таблице 4.4 показано сопоставление напряжений σ_{11} , σ_{22} , τ_{12} , τ_{13} , τ_{23} , вычисленных для оболочки из графита АРВ в точках **А**, **В**, **С** с помощью разработанной модели и с помощью конечно-элементного вычислительного комплекса ANSYS, на верхней поверхности оболочки при нагрузке $q = 10 \text{ кПа}$.

Таблица 4.4 – Сравнение результатов с расчётом в ПО ANSYS [266, 320]

	σ_{11}	σ_{22}	τ_{12}	τ_{13}	τ_{23}
Точка А					
ANSYS,	$-0,629 \cdot 10^7$	$-0,146 \cdot 10^7$	$0,291 \cdot 10^4$	$0,11 \cdot 10^2$	$-0,257 \cdot 10^2$
Н15	$-0,825 \cdot 10^7$	$-0,166 \cdot 10^7$	$0,150 \cdot 10^4$	$0,07 \cdot 10^2$	$-0,202 \cdot 10^2$
Разница, %	31	13	94	57	27
Точка В					
ANSYS,	$-0,636 \cdot 10^7$	$-0,362 \cdot 10^6$	$-0,917 \cdot 10^4$	$0,128 \cdot 10^4$	$0,835 \cdot 10^5$
Н15	$-0,755 \cdot 10^7$	$-0,522 \cdot 10^6$	$-0,630 \cdot 10^4$	$0,099 \cdot 10^4$	$0,905 \cdot 10^5$
Разница, %	18	44	45	29	8
Точка С					
ANSYS,	$-0,335 \cdot 10^7$	$0,422 \cdot 10^6$	$0,111 \cdot 10^5$	$-0,859 \cdot 10^5$	$-0,184 \cdot 10^7$
Н15	$-0,435 \cdot 10^7$	$0,516 \cdot 10^6$	$0,177 \cdot 10^5$	$-0,565 \cdot 10^5$	$-0,233 \cdot 10^7$
Разница, %	29	22	59	52	26

Первая строка в каждом разделе таблицы 4.4 содержит результаты по теории тонких оболочек [151, 152], положенной в основу элемента SHELL63 CAE системы

ANSYS фирмы ANSYS Inc., которая не учитывает зависимость физико-механических свойств материала от напряженного состояния в рассматриваемой точке пространства.

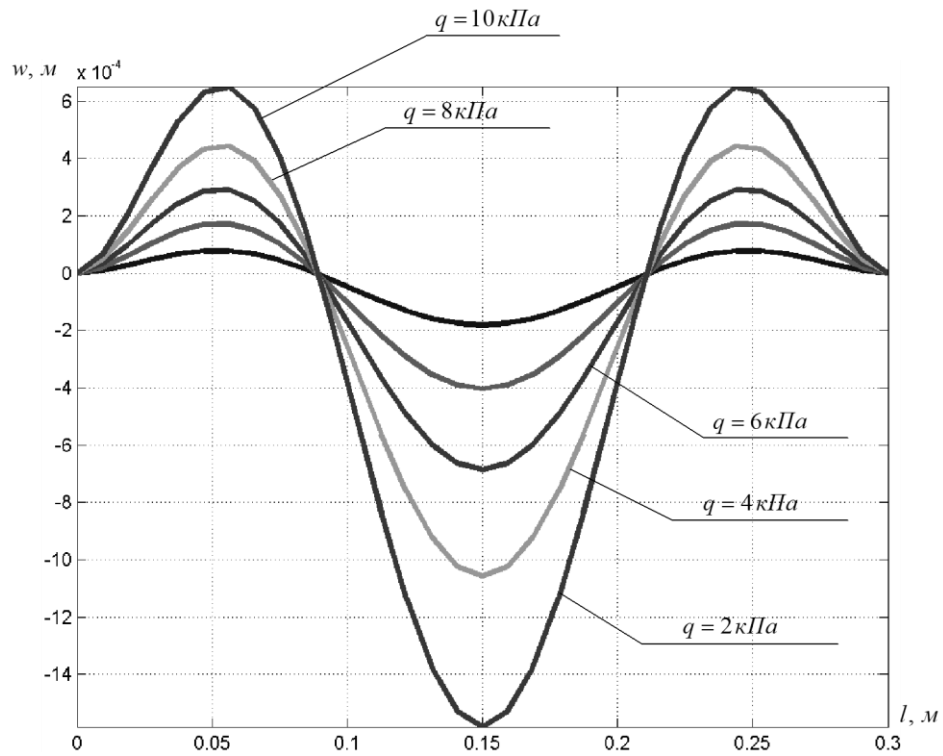


Рисунок 4.33 – Вертикальные перемещения вдоль оси симметрии AX (см. рисунок 4.30) оболочки, в зависимости от линейной координаты l

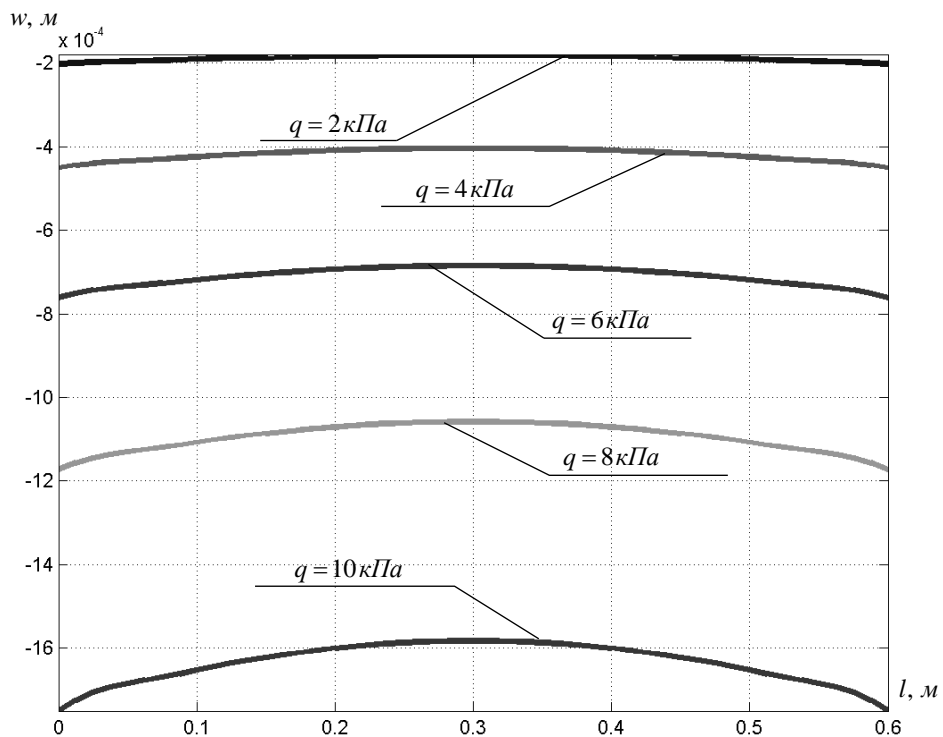


Рисунок 4.34 – Вертикальные перемещения вдоль оси симметрии AY (см. рисунок 4.30) оболочки, в зависимости от линейной координаты l

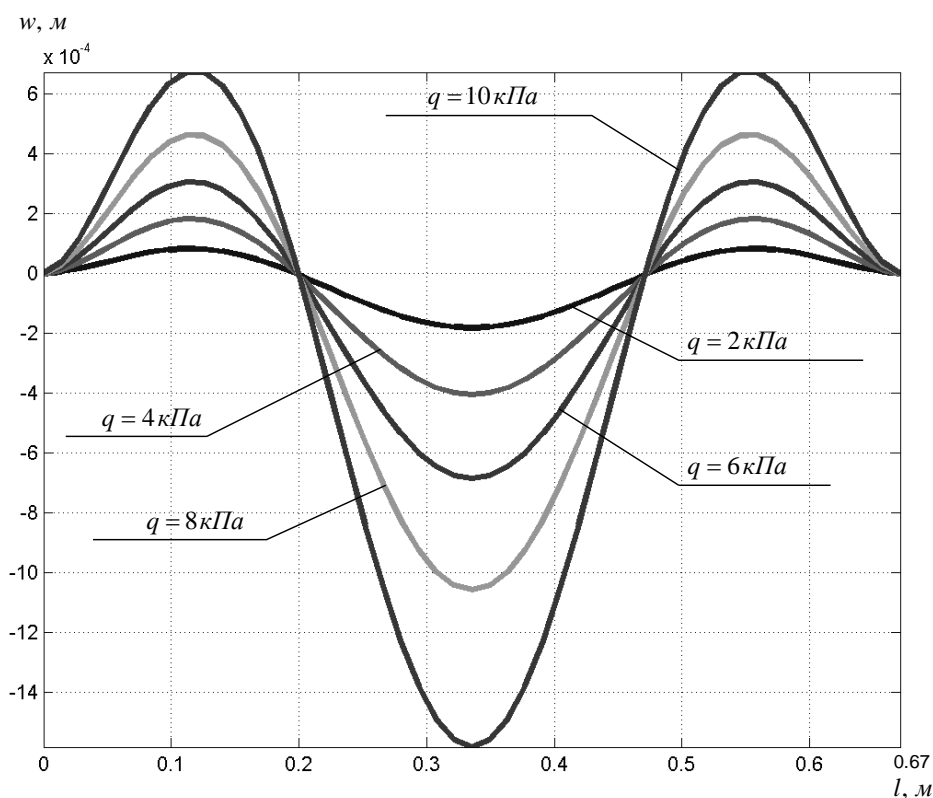


Рисунок 4.35 – Вертикальные перемещения вдоль диагонали плана (см. рисунок 4.30) оболочки, в зависимости от линейной координаты l

На рисунках 4.34–4.36 показаны графики распределения вертикальных перемещений для оболочки из конструкционного графита АРВ. Результаты, полученные в расчёте, позволяют сделать вывод, что учёт разнсопротивляемости уточняет результаты классической теории оболочек [111] на 45–60% для перемещений и углов поворота, а для напряжений на поверхностях оболочки – в среднем на величину до 40%.

Таким образом, решение задачи об определении НДС цилиндрической оболочки из графита АРВ и задачи о чистом кручении железобетонных трубчатых образцов показывают, что разработанная математическая модель является вполне адекватной и пригодной для исследования НДС пространственных оболочечных конструкций из материалов с усложнёнными механическими свойствами, проявляющимися эффектами разнсопротивляемости, дилатации и др.

4.3.3 Расчёт НДС железобетонных цилиндрических оболочек на действие равномерно распределённой нагрузки

Рассчитывались два варианта оболочки.

Вариант 1. Жёстко защемлённая вдоль образующих цилиндрическая оболочка с размерами в плане 24×12 м из бетона с прочностью на сжатие

$R = 28,4 \text{ МПа}$. Толщина оболочки 0,095 м, высота подъёма 2,5 м, интенсивность равномерно распределённой нагрузки q составляет от 0 до 40 кПа (с учётом собственного веса). На рисунке 4.37 представлена схема КЭ-разбиения оболочки.

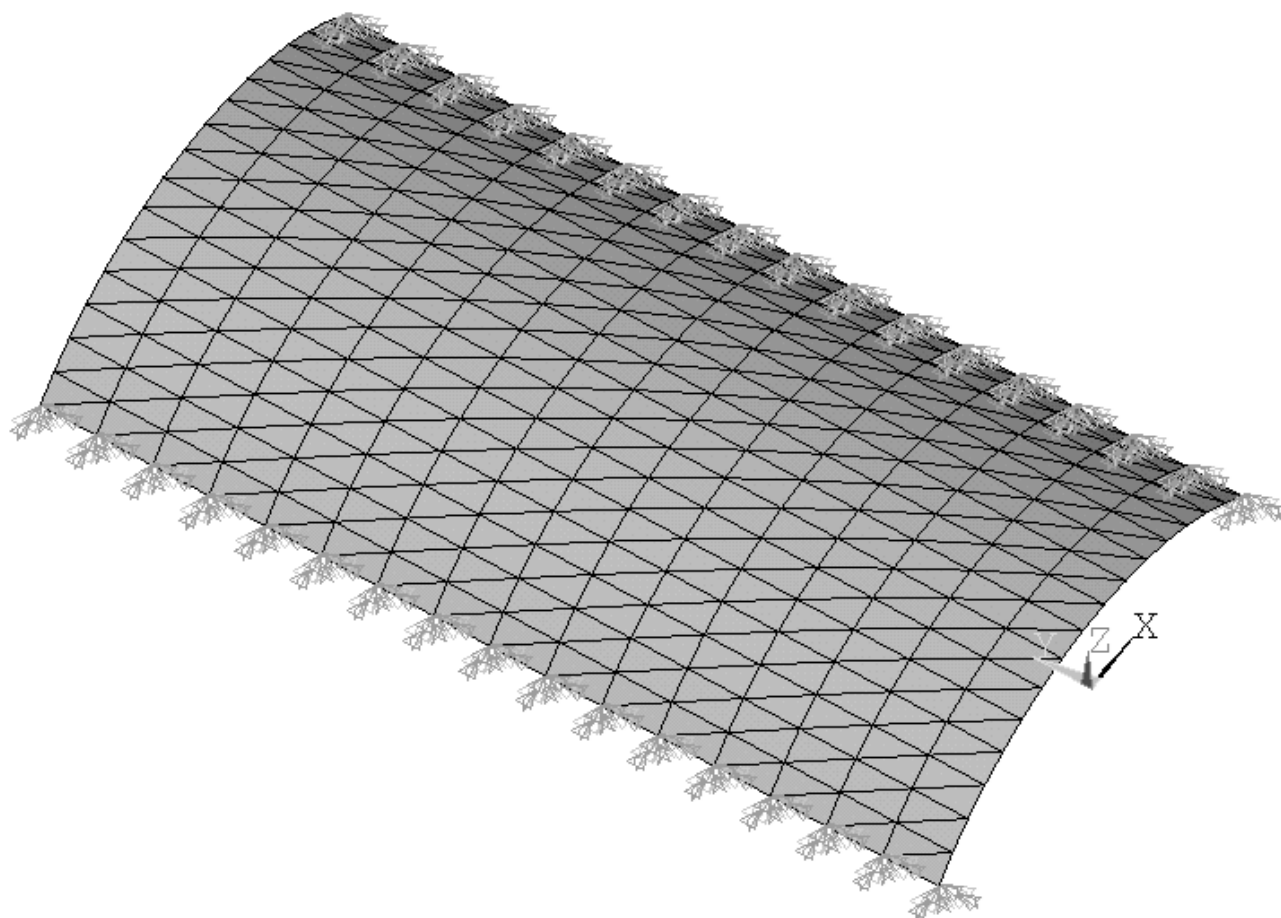


Рисунок 4.37 – Схема дискретизации ж/б цилиндрической оболочки 24×12 м в плане на треугольные КЭ

Армирование оболочки: в срединной поверхности оболочки расположена сетка из стержней класса А400 диаметром 10 мм, параллельных образующей оболочки и перпендикулярных к ней. Кроме того, в угловых зонах располагалась косая арматура класса А400с диаметром 6 мм; коэффициенты армирования $\mu_{11} = 0,0212$ и $\mu_{22} = 0,0168$.

Расчёт проводился с учётом разнотвердости для основного материала на основе алгоритма рисунка 4.4, реализованного в разработанном программном обеспечении (ПО) для решения задач расчёта НДС оболочечных конструкций. Для сравнения был также выполнен расчёт без учёта эффекта разнотвердости. Это выполнено

средствами вычислительной среды ПО ANSYS [266]. Разница по перемещениям достигает 20%, что иллюстрируют данные на рисунке 4.38.

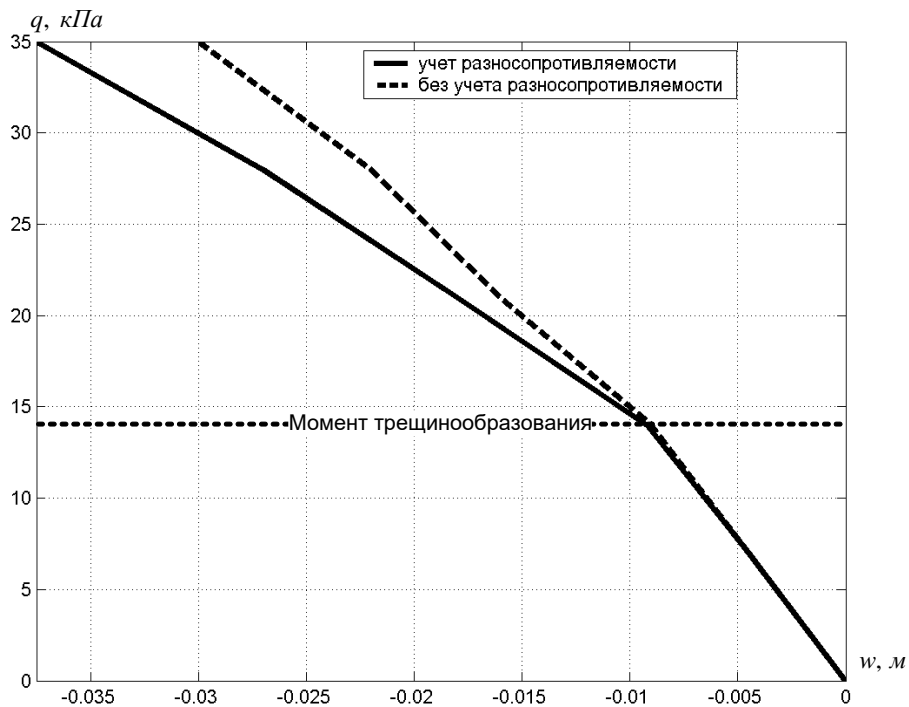


Рисунок 4.38 – График вертикальных прогибов W , м в центре плана оболочки в зависимости от равномерно распределённой нагрузки q

На рисунках 4.39–4.40 приведён график распределения прогибов W вдоль короткой и длинной осей симметрии в зависимости от координаты l по поверхности оболочки для оболочки 24×12 м.

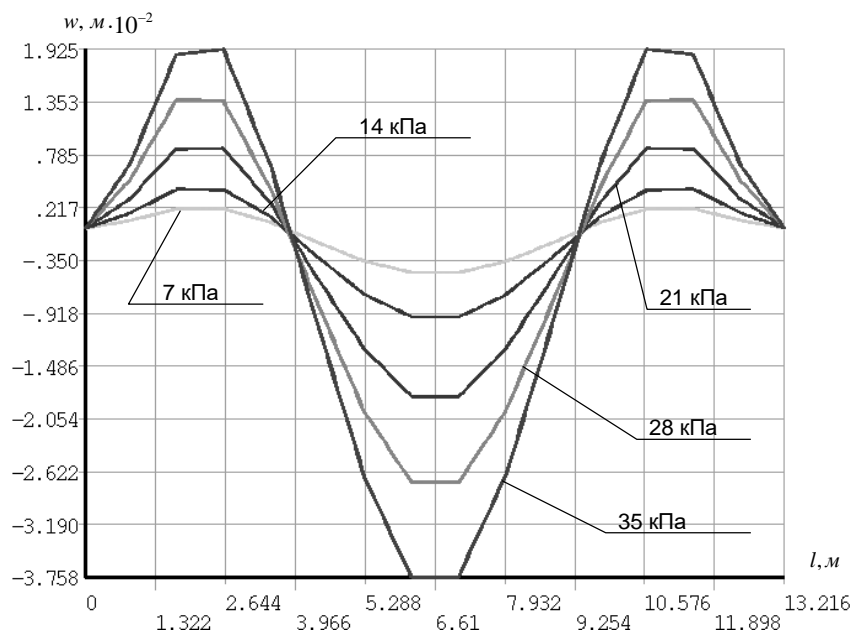


Рисунок 4.39 – Вертикальные перемещения вдоль короткой оси симметрии плана оболочки, в зависимости от координаты l (по поверхности)

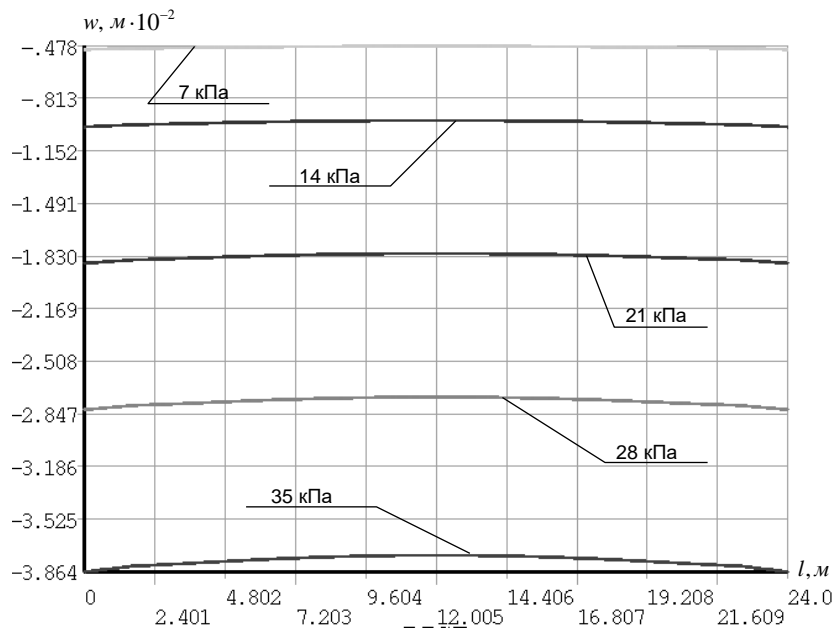


Рисунок 4.40 – Вертикальные перемещения вдоль длинной оси симметрии плана оболочки, в зависимости от координаты l (по поверхности)

На рисунках 4.41, 4.42 приведены схемы образования первичных трещин в оболочке 24×12 м, а на рисунках 4.43, 4.44 показано картина развития пластических деформаций в арматуре оболочки 24×12 м при различных нагрузках.

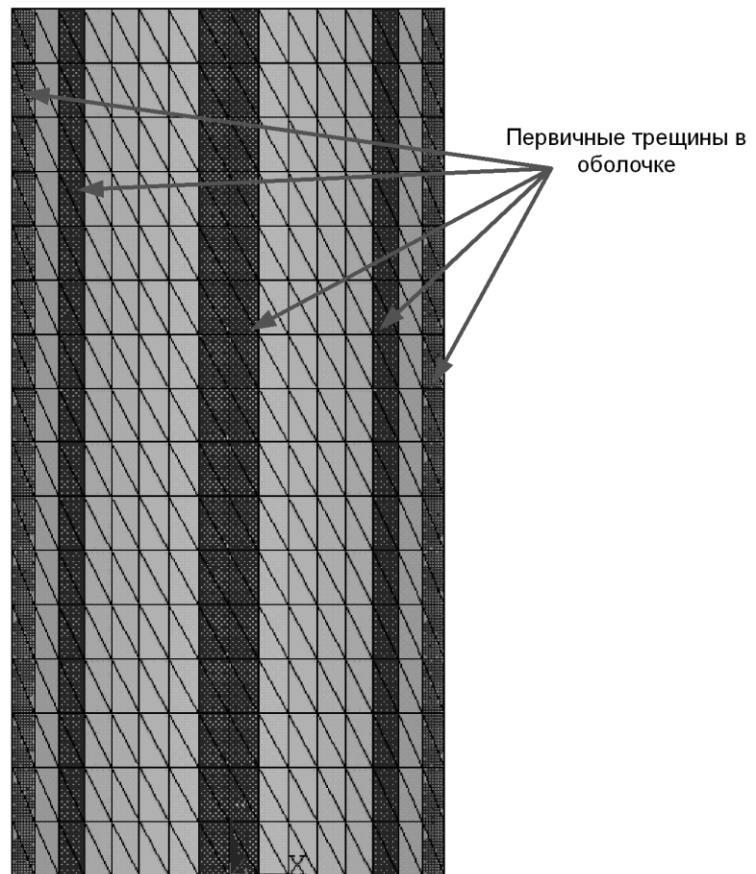


Рисунок 4.41 – Схема образования трещин в оболочке ($q=21$ кПа)

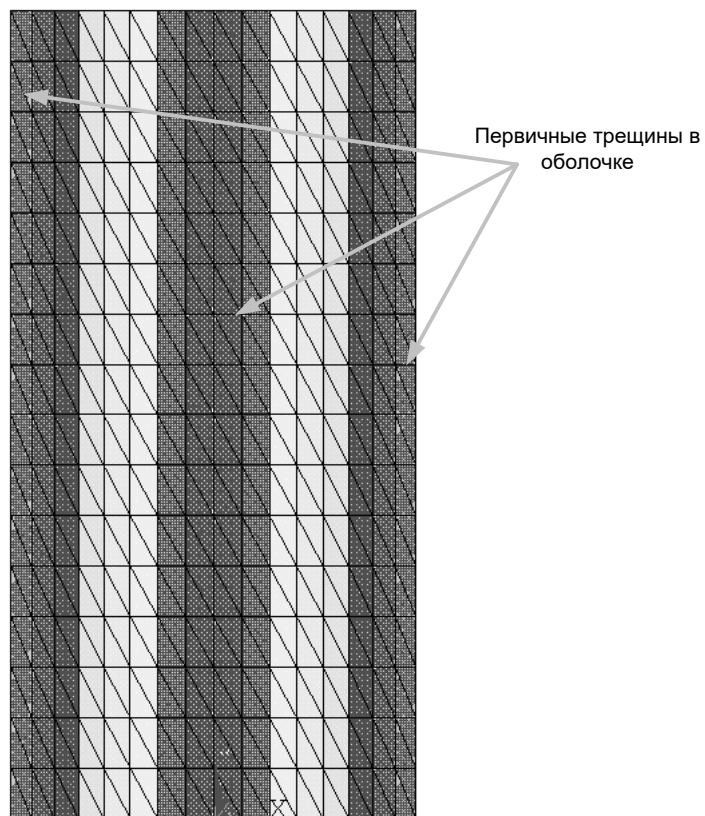


Рисунок 4.42 – Схема образования трещин в оболочке ($q=28$ кПа)

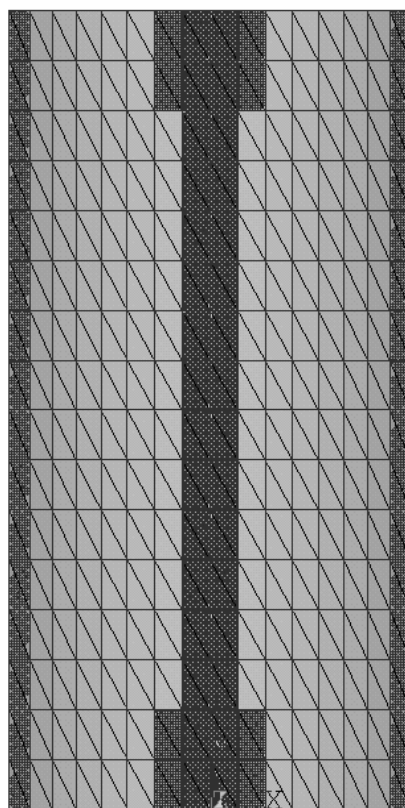


Рисунок 4.43 – Схема отображения процесса развития пластических деформаций в арматуре ($q=21$ кПа)

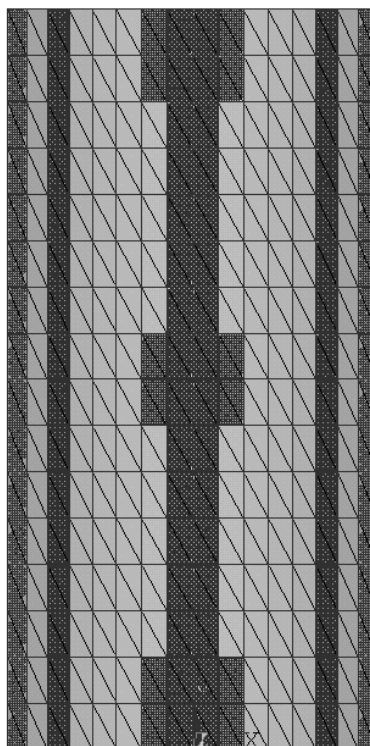


Рисунок 4.44 – Схема отображения процесса развития пластических деформаций в арматуре ($q=28$ кПа)

Вариант 2. Шарнирно опёртая вдоль образующих цилиндрическая оболочка с размерами в плане 6×12 м из бетона с прочностью на сжатие $R^c = 28,4$ МПа. Толщина оболочки 0,07 м; высота подъёма 1,8 м; интенсивность равномерно распределённой нагрузки q от 0 до 35 кПа (с учётом собственного веса). Армирование оболочки: в срединной поверхности оболочка армирована сеткой из арматуры класса А300 диаметром 10 мм параллельной образующим оболочки. В угловых зонах располагалась косая арматура класса А240 диаметром 6 мм; коэффициенты армирования $\mu_{11} = 0,0189$ и $\mu_{22} = 0,0225$. КЭ-разбиение представлено на рисунке 4.45.

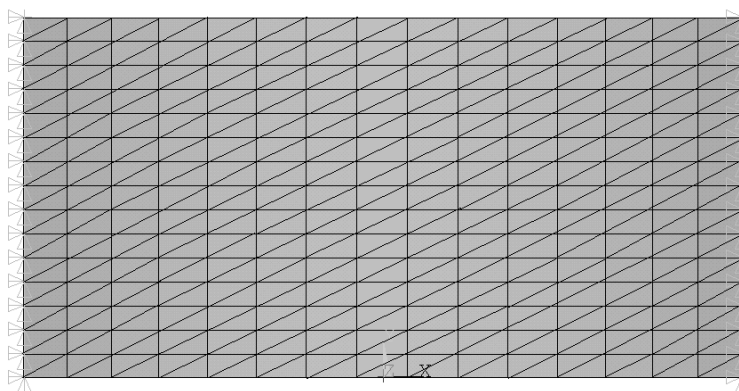


Рисунок 4.45 – Схема дискретизации ж/б цилиндрической оболочки 6×12 м в плане на КЭ

На рисунке 4.46 показан график зависимости прогибов W от величины равномерно распределённой нагрузки q в центре плана оболочки 6×12 м. Расчёт проводился с учётом зависимости свойств материала от компонентного состава тензора напряжений для основного материала. Для этого было использовано то же ПО, что и для задачи варианта 1. Данные, необходимые для сравнения с решением без учёта эффекта разнотензорности были получены в среде ПО ANSYS. Разница по перемещениям достигает 33%, что иллюстрируется данными рисунка 4.46.

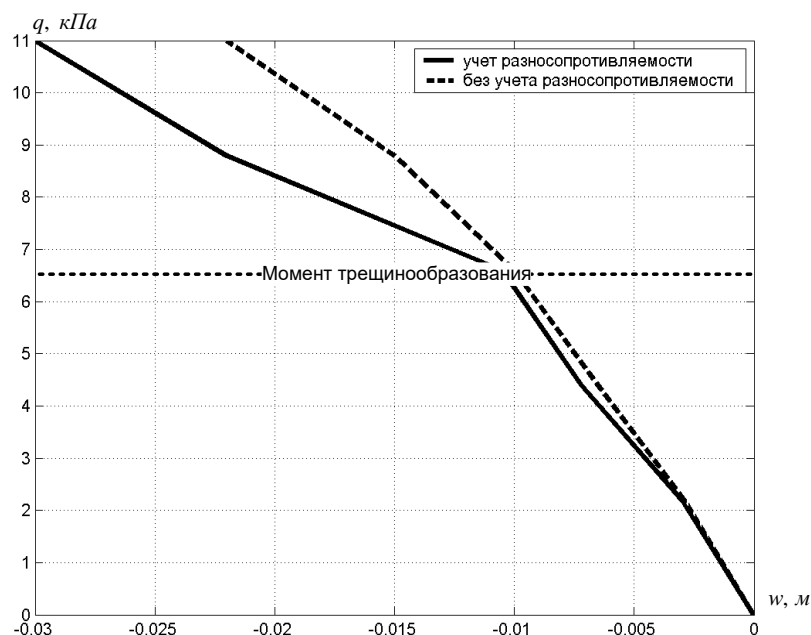


Рисунок 4.46 – График вертикальных прогибов W , м в центре плана оболочки в зависимости от равномерно распределенной нагрузки q

Анализ полученных результатов расчёта для цилиндрических оболочек показал, что учёт усложнённых свойств является значимым при проведении статических расчётов. Было подтверждено наличие известных фактов и обнаружены новые качественные эффекты деформирования, связанные с пластической работой арматуры и развитием трещин в бетоне.

4.4.4 Определение НДС железобетонной оболочки положительной гауссовой кривизны опёртой на типовые железобетонные фермы ФКБ-24

Расчёт проводился для оболочки с геометрическими параметрами: квадратное основание размерами в плане 24×24 м, высота подъёма 6 м, толщина оболочки принималась постоянной по её площади и равнялась 0,12 м [228, 320]. В качестве

основного материала оболочки использовался бетон с пределом прочности на сжатие $R_c = 28,4 \text{ МПа}$. Армирование оболочки принималось следующим:

- по всей поверхности оболочка армировалась двумя сетками из арматуры класса А240 диаметром 6 мм с шагом 0,25 м на расстоянии 0,025 м от верхнего и от нижнего края соответственно;

- в приконтурных полосах для восприятия изгибающих моментов укладывалась арматура класса А400 диаметром 6 мм в виде сетки, расположенной в растянутой от изгиба зоне на расстоянии 0,015 м от нижней поверхности оболочки с шагом 0,15 м;

- в угловых областях оболочки под углом в 45° на глубине центра тяжести поперечного сечения располагалась рабочая арматура класса А300 диаметром 10 мм (предел текучести $\sigma_p = 295 \text{ МПа}$, модуль упругости $E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$).

Расчёт проводился для оболочки шарнирно-опёртой по углам плана. По контуру оболочка опёрта на железобетонные фермы типа ФКБ24 – контурные фермы пролётом 24 м, цельные, безраскосные с предварительно напряжённым нижним поясом.

На рисунке 4.47 приведена схема КЭ-разбиения оболочки.

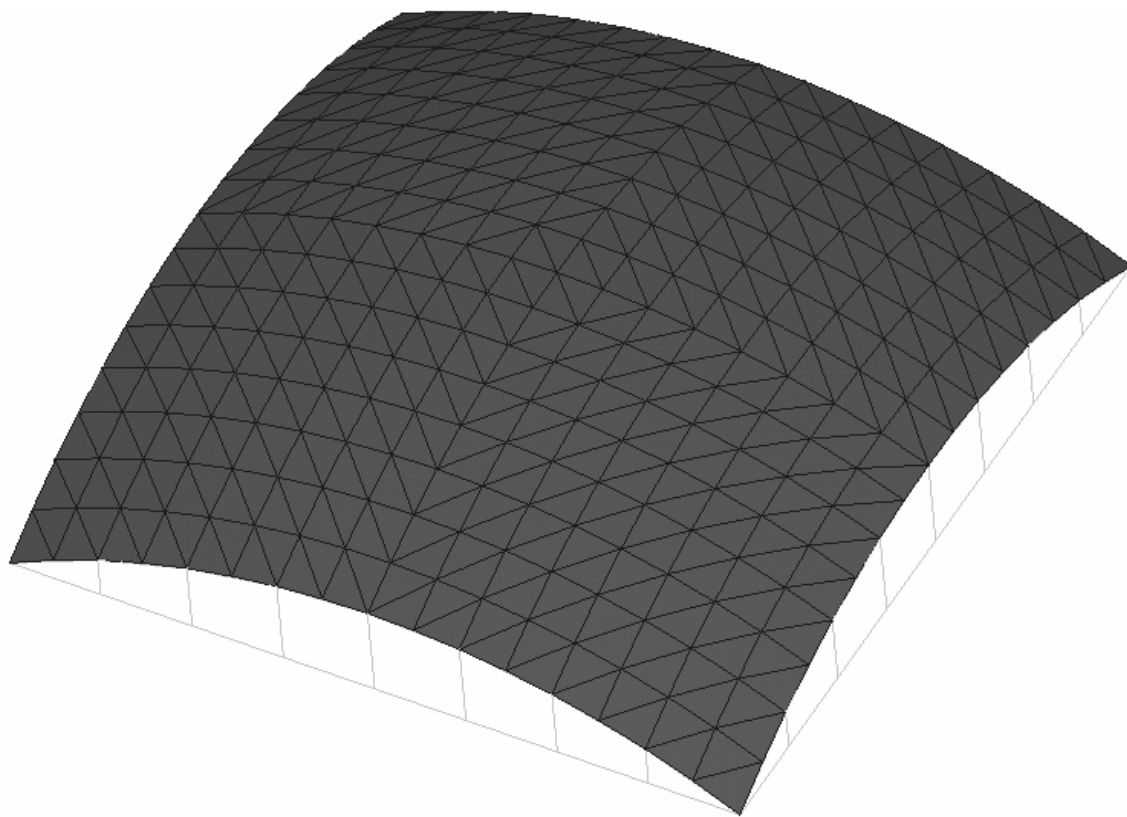


Рисунок 4.47 – Схема дискретизации оболочки положительной гауссовой кривизны на КЭ [228]

В качестве напрягаемой арматуры для стержней нижнего пояса фермы принята горячекатаная арматура класса А500с (предел текучести $\sigma_p = 785 \text{ МПа}$, модуль упругости $E_s = 1,9 \cdot 10^5 \text{ МПа}$) диаметром 20 мм, использовался бетон с пределом прочности на сжатие $R^- = 37 \text{ МПа}$, в качестве ненапрягаемой арматуры для остальных стержней использовалась арматура класса А300 диаметром 18 мм. В стержнях учитывались усложнённые свойства, такие как разнсопротивляемость материала, трещинообразование и пластические деформации в арматуре. Для моделирования стержней применялся конечный элемент, приведённый в работе М. Секуловича [164], модифицированный с целью учёта особых свойств железобетона.

Оболочка нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивности от 0 до 78 кПа с учётом собственного веса оболочки. Коэффициенты армирования для оболочки $\mu_{11} = \mu_{22} = 0,0215$, для нижнего пояса фермы $\mu = 0,0185$, для остальных стержней фермы $\mu = 0,0164$.

На рисунке 4.48 приведены результаты расчёта вертикальных прогибов w в центре оболочки при нагрузке от 0 до максимума 78 кПа с учётом преднапряжения в нижнем поясе фермы и при его отсутствии.

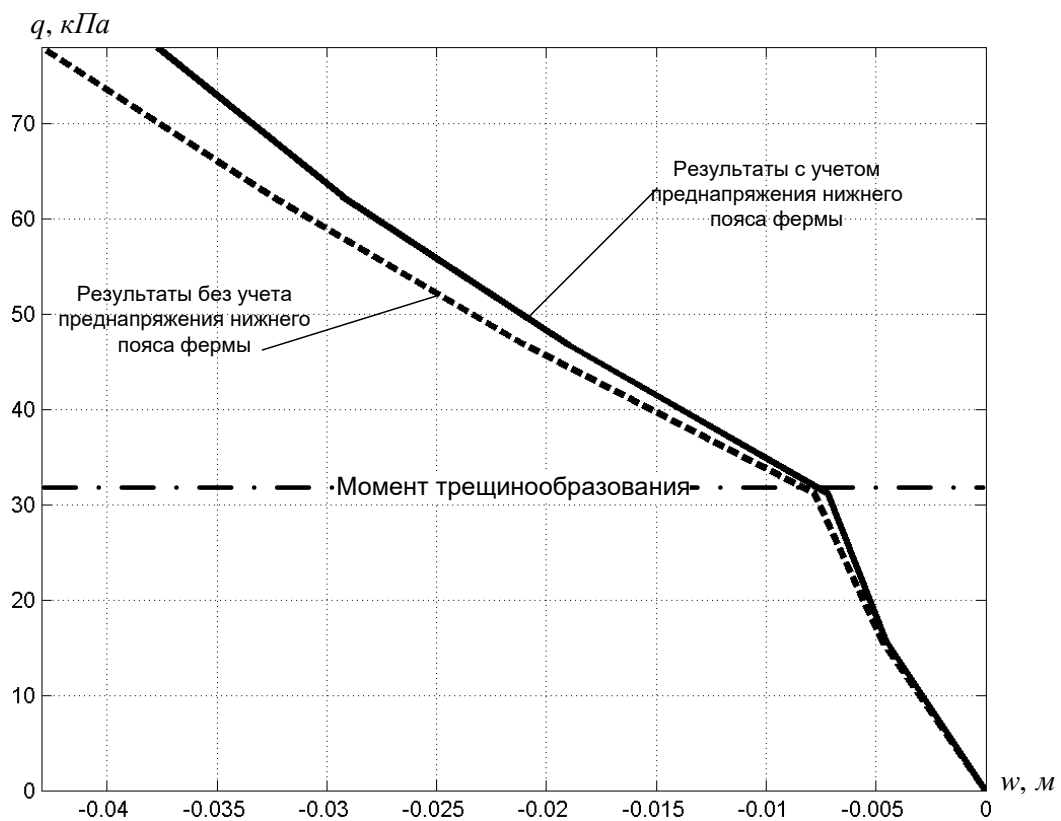


Рисунок 4.48 – Прогибы w , м в центре плана оболочки

Из данных рисунка. 4.48 следует, что преднапряжение в нижнем поясе фермы увеличивает жёсткость всей конструкции, повышая его прочность.

Из графика также следует, что разнсопротивляемость материала, повреждаемость в форме трещинообразование и пластические деформации в арматуре приводят к значимо нелинейному изменению параметров НДС по сравнению с расчётом по классической теории оболочек (при учёте продольных перемещений и поперечных сдвигов).

На рисунке 4.49 показано распределение вертикальных прогибов W по поверхности оболочки при максимальной нагрузке 78 кПа.

На рисунке 4.50 дано распределение вертикальных прогибов W вдоль диагонали плана железобетонной оболочки в зависимости от координаты l по поверхности оболочки.

На рисунках 4.51, 4.52 показано распределение напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} вдоль диагонали плана железобетонной оболочки сверху и снизу в зависимости от координаты l по поверхности оболочки. Здесь справедливы те же замечания, что уже были сделаны для цилиндрических оболочек: о смещении максимумов напряжений из зон активной повреждаемости.

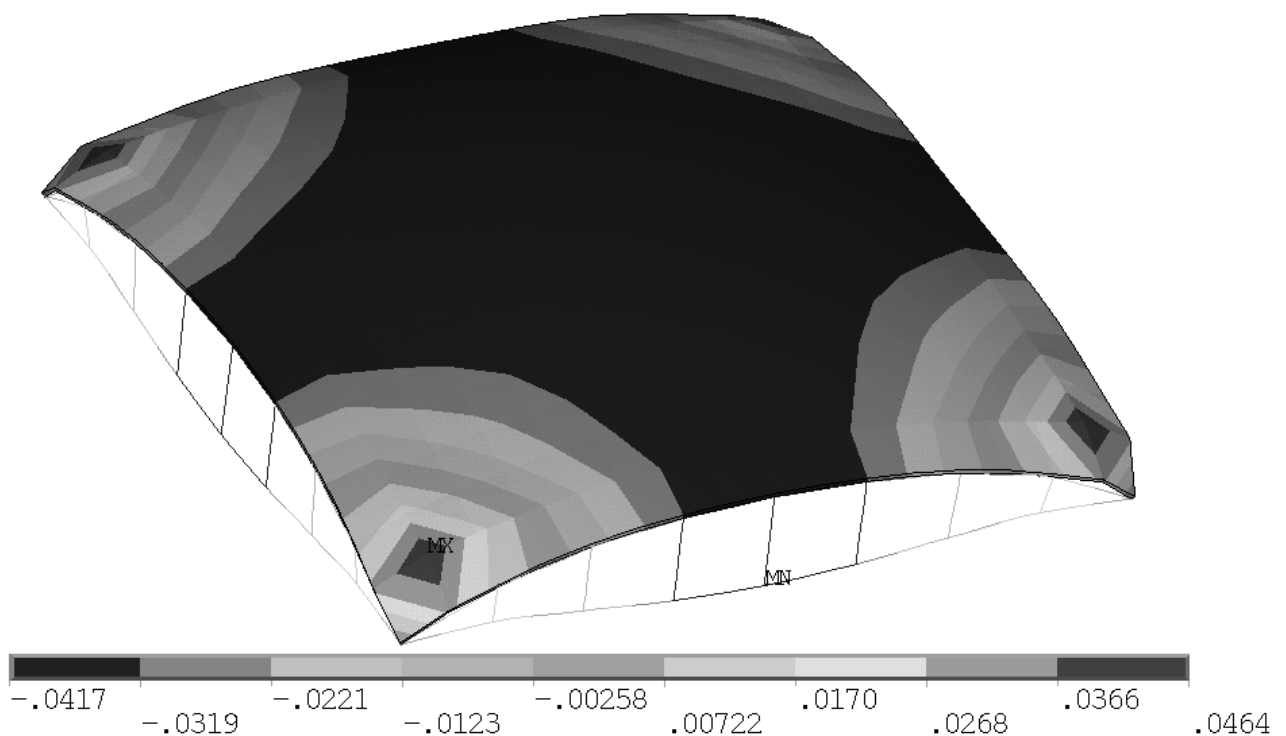


Рисунок 4.49 – Поле вертикальных перемещений в оболочке (м)

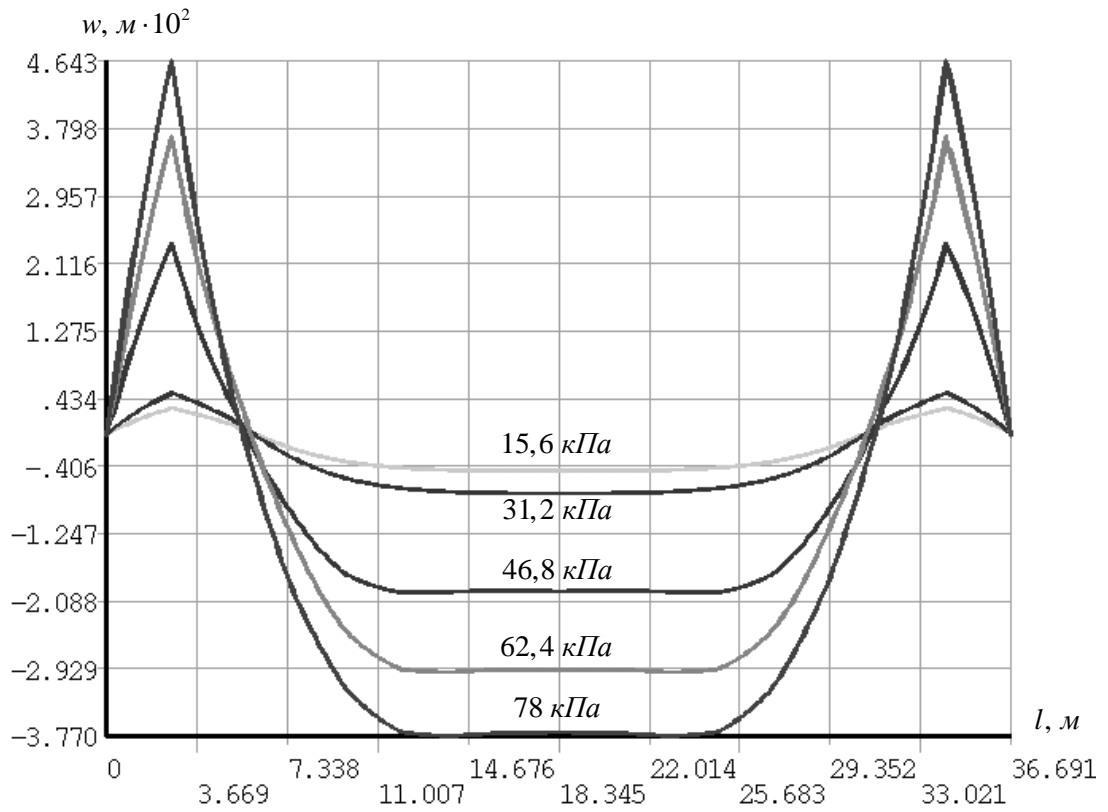


Рисунок 4.51 – Вертикальные перемещения вдоль диагонали плана ж/б оболочки, в зависимости от расстояния по **поверхности** оболочки

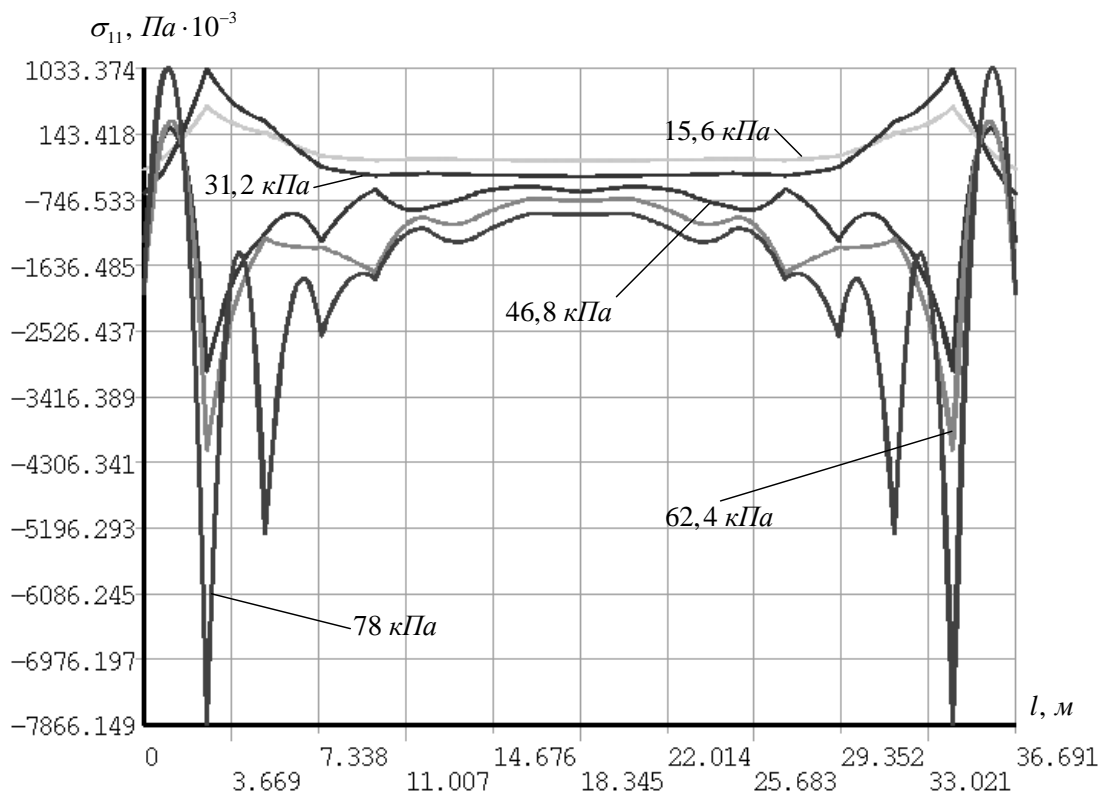


Рисунок 4.51 – Нормальные напряжения $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ вдоль диагонали плана ж/б оболочки, в зависимости от расстояния по **поверхности** оболочки (сверху)

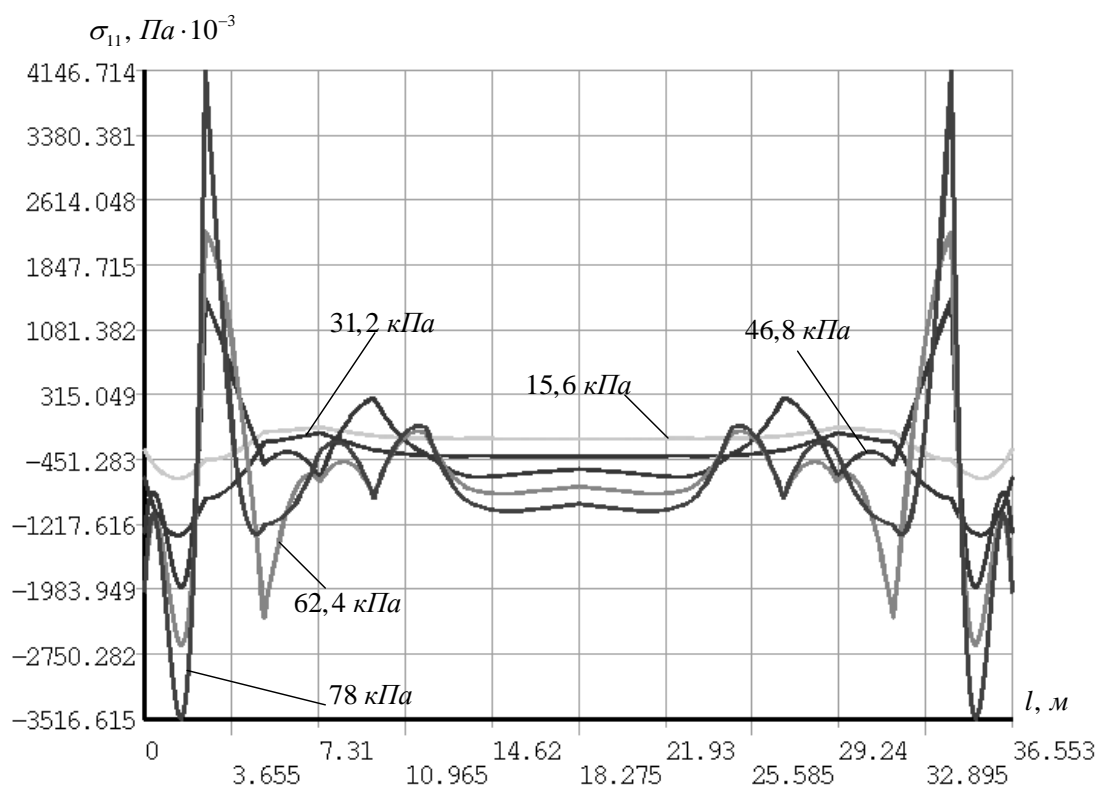


Рисунок 4.52 – Нормальные напряжения $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ вдоль диагонали плана ж/б оболочки, в зависимости от расстояния по поверхности оболочки (снизу)

4.4 Построение матрицы жёсткости для объёмного элемента

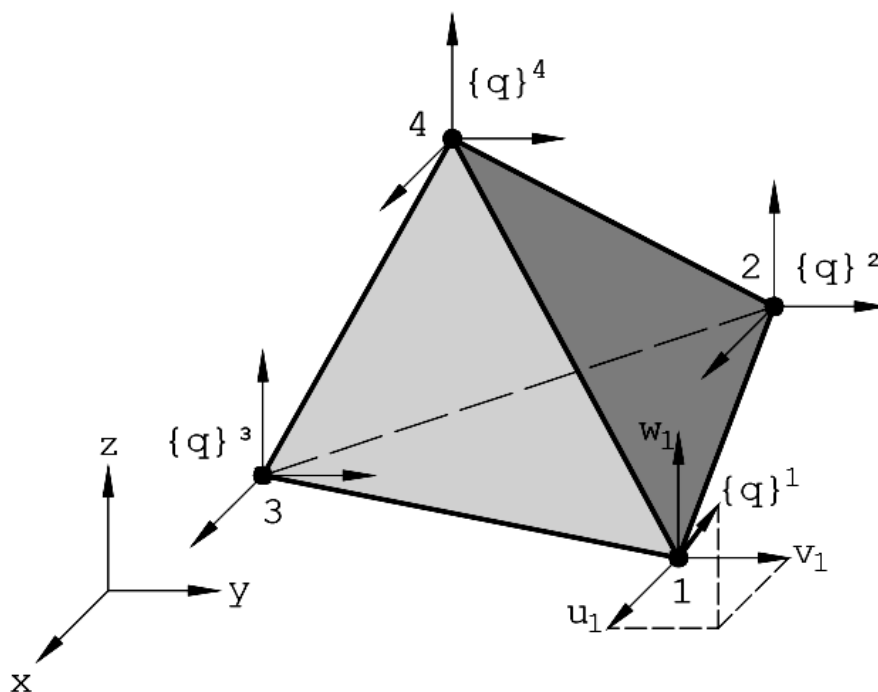


Рисунок 4.53 – Конечный элемент в виде тетраэдра

В диссертационной работе разработана новая модификация объёмных конечных элементов для моделирования различных массивных объектов таких как

грунтовые массивы или деформируемые тела, не допускающие своего представления в виде пластин или плит. Для рассматриваемого класса задач наиболее целесообразно применять изопараметрический, четырёхузловой конечный элемент в форме тетраэдра, который приведён на рисунке 4.53.

Рассмотрим получение выражений для матрицы жёсткости КЭ. Матрица жёсткости $[K]_i$ объёмного КЭ в виде тетраэдра с четырьмя узлами при механическом нагружении имеет блочную структуру [222]:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} & [K]_{i1}^{(4)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} & [K]_{i2}^{(4)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} & [K]_{i3}^{(4)} \\ [K]_{i4}^{(1)} & [K]_{i4}^{(2)} & [K]_{i4}^{(3)} & [K]_{i4}^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

здесь типовой блок определяется по формулам [72]:

$$[K]_{ij}^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D] [B]^{(k)} dV, \quad (4.53)$$

где $[B]$ – матрица деформаций; $[D]$ – матрица упругости; V – объём конечного элемента. Матрица деформаций $[B]$ также блочная [222]:

$$[B] = \left[[B]^{(1)} [B]^{(2)} \dots [B]^{(k)} \dots [B]^{(n)} \right],$$

где $[B]^k = [\Phi][C]^{(k)}$, $[C]$ – матрица интерполяционных функций; $[\Phi]$ – матрица дифференциальных операторов

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial / \partial z \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial z & \partial / \partial y \\ \partial / \partial z & 0 & \partial / \partial x \end{bmatrix};$$

Чтобы получить матрицы для конечного элемента, необходимо выразить перемещения точек внутри КЭ через перемещения узлов:

$$\{u\} = [C]\{q\}_i = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(n)} \right] \{q\}_i,$$

где $\{u\} = \{u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\}$ – вектор перемещений точек внутри элемента, $[C]$ – матрица интерполяционных функций; $\{q\}_i$ – вектор-столбец перемещений узлов КЭ.

Матрица интерполяционных функций для тетраэдра будет иметь четыре блока – по одному для каждого узла:

$$[C] = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} [C]^{(3)} [C]^{(4)} \right]. \quad (4.54)$$

Отдельный блок – это результат вычислений по формуле $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$, где E_3 – единичная матрица третьего порядка [222]. Законы изменения перемещений u , v и w внутри КЭ аппроксимируются линейными функциями координат [72], т.е.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z; \\ v(x, y, z) &= \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z; \\ w(x, y, z) &= \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Функции (4.55) обеспечивают неразрывность перемещений на границе между конечными элементами.

Для определения 12-ти неизвестных коэффициентов в выражениях (4.55) привлекается 12 условий – по одному на каждую проекцию вектора узлового перемещения (4 узла по 3 проекции вектора перемещений в каждом) [222]. Например, $u(x_1, y_1, z_1) = u_1 = \alpha_1 + \alpha_4 x_1 + \alpha_7 y_1 + \alpha_{10} z_1$ и т.д.

Перепишем систему соотношений

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) + C_2(x, y, z) + C_3(x, y, z) + C_4(x, y, z) &= 1; \\ C_1(x, y, z)x_1 + C_2(x, y, z)x_2 + C_3(x, y, z)x_3 + C_4(x, y, z)x_4 &= x; \\ C_1(x, y, z)y_1 + C_2(x, y, z)y_2 + C_3(x, y, z)y_3 + C_4(x, y, z)y_4 &= y; \\ C_1(x, y, z)z_1 + C_2(x, y, z)z_2 + C_3(x, y, z)z_3 + C_4(x, y, z)z_4 &= z, \end{aligned} \quad (4.56)$$

в матричную форму:

$$\begin{Bmatrix} C_1(x, y, z) \\ C_2(x, y, z) \\ C_3(x, y, z) \\ C_4(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (4.57)$$

Запишем функции:

$$\begin{aligned}
 C_1(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_1 + b_1x + c_1y + d_1z); \\
 C_2(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_2 + b_2x + c_2y + d_2z); \\
 C_3(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_3 + b_3x + c_3y + d_3z); \\
 C_4(x, y, z) &= \frac{1}{6V_i}(a_4 + b_4x + c_4y + d_4z);
 \end{aligned}
 \tag{4.58}$$

$$\text{где } a_1 = \det \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}; \quad b_1 = -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}; \quad c_1 = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix};$$

$$d_1 = -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}; \quad a_2 = -\det \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}; \quad b_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}; \quad c_2 = -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix};$$

$$d_2 = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}; \quad a_3 = \det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix}; \quad b_3 = -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix}; \quad c_3 = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix};$$

$$d_3 = -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \end{vmatrix}; \quad a_4 = -\det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}; \quad b_4 = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}; \quad c_4 = -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix};$$

$$d_4 = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}; \quad 6V_i = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \text{ — шесть объёмов тетраэдра.}$$

Каждая из функций (4.58) представляет собой отношение объёма тетраэдра (см. рисунок 4.54) с вершиной в конкретной точке ко всему объёму КЭ. Наличие такой интерпретации функций (4.58) позволяет записать:

$$\begin{aligned}
 C_1(x, y, z) &= \frac{V_{m234}}{V_i}, & C_2(x, y, z) &= \frac{V_{m134}}{V_i}, \\
 C_3(x, y, z) &= \frac{V_{m124}}{V_i}, & C_4(x, y, z) &= \frac{V_{m123}}{V_i},
 \end{aligned}
 \tag{4.59}$$

$$V_{m234} = \frac{(a_1 + b_1x + c_1y + d_1z)}{6}, V_{m134} = \frac{(a_2 + b_2x + c_2y + d_2z)}{6},$$

$$V_{m124} = \frac{(a_3 + b_3x + c_3y + d_3z)}{6}, V_{m123} = \frac{(a_4 + b_4x + c_4y + d_4z)}{6}.$$

Функции, определённые соотношением (4.59), называют объёмными L-координатами (рисунок 4.54). Такие координаты называются нормализованными координатами для тетраэдра [223].

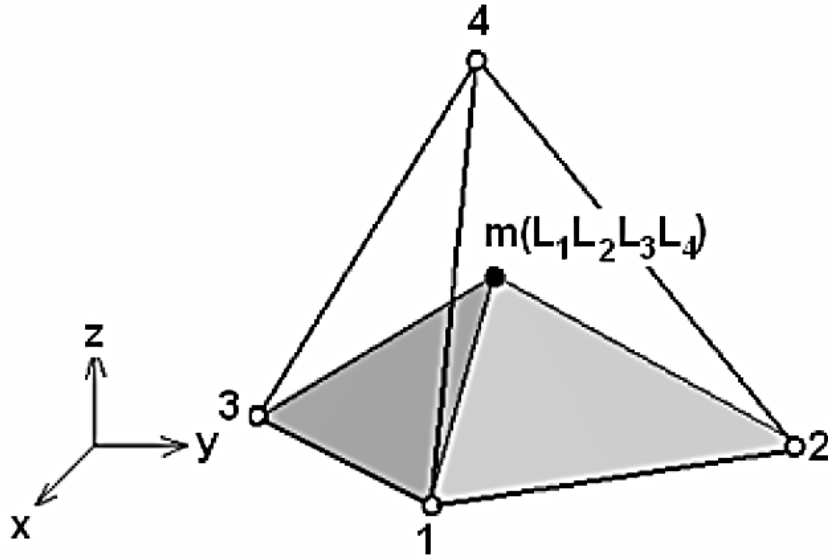


Рисунок 4.54 – К определению L-координат

Таким образом, можно записать

$$\begin{aligned} L_1 &= C_1(x, y, z); L_2 = C_2(x, y, z); \\ L_3 &= C_3(x, y, z); L_4 = C_4(x, y, z). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Значения L-координат изменяются в интервале 0–1 и удовлетворяют условиям

$$L_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & \text{при } j = k; \\ 0, & \text{при } j \neq k. \end{cases} \quad (4.61)$$

Из четырёх L-координат только три являются независимыми, поскольку они связаны между собой выражением

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \quad (4.62)$$

L-координаты будут использоваться для интерполяции узловых перемещений в область тех конечных элементов, которые отображаются на тетраэдр [222].

Каждый из четырёх блоков матрицы деформаций можно выразить как:

$$[B]^{(k)} = [\Phi] C_k(x, y, z) = \frac{1}{6V_i} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix}, (k=1,2,3,4). \quad (4.63)$$

Для определения матрицы упругости $[D]$ получим зависимости между деформациями и напряжениями с помощью дифференцирования потенциала Гиббса без температурной составляющей:

$$e_{ij} = A_{ijkm} \sigma_{km}; (i, j, k, m = 1, 2, 3), \quad (4.64)$$

где применяется следующая система обобщающих обозначений:

$$[A_{ijkm}] = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1112} & A_{1123} & A_{1113} \\ & A_{2222} & A_{2233} & A_{2212} & A_{2223} & A_{2213} \\ & & A_{3333} & A_{3312} & A_{3323} & A_{3313} \\ & & & A_{1212} & A_{1223} & A_{1213} \\ & & & & A_{2323} & A_{2313} \\ & & & & & A_{1313} \end{bmatrix};$$

$$A_{1111} = \frac{1}{3} \left[\begin{array}{l} -B_e \cdot \xi^3 + \frac{4}{3} C_e + \frac{1}{3} D_e \cdot (1 + 3 \cdot \xi^2) \cdot \xi - \\ -\frac{2\sqrt{6}}{3} E_e \cdot (\alpha_{33} + \alpha_{22}) - E_e \cdot \cos(3\varphi) \cdot \eta^3 + \\ + \frac{1}{\sigma_{11}} \left(+2 \cdot A_e \cdot \sigma + 3 \cdot B_e \cdot \sigma \cdot \xi + \right. \\ \left. + D_e \cdot \tau \cdot \eta + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot E_e \cdot S_0 \right) \end{array} \right] +$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \cdot \left[\begin{array}{l} -B_p \cdot \xi^3 + \frac{4}{3} C_p + \frac{1}{3} D_p \cdot (1 + 3 \cdot \xi^2) \cdot \xi - \\ -\frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3} E_p \cdot (\alpha_{33} + \alpha_{22}) - E_p \cdot \cos(3\varphi) \cdot \eta^3 + \\ + \frac{1}{\sigma_{11}} \cdot \left(2 \cdot A_p \cdot \sigma + 3 \cdot B_p \cdot \sigma \cdot \xi + \right. \\ \left. + D_p \cdot \tau \cdot \eta + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot E_p \cdot S_0 \right) \end{array} \right];$$

$$\begin{aligned}
 A_{2222} &= \frac{1}{3} \left[\begin{aligned} &\frac{4}{3} C_e + \left(\frac{1}{3} + \xi^2 \right) D_e \cdot \xi - B_e \cdot \xi^3 + \\ &+ E_e \left(\begin{aligned} &\sqrt{6} \cdot \alpha_{11} + \sqrt{6} \cdot \alpha_{22} - \\ &-\frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \alpha_{33} + \cos(3\varphi) \cdot \eta^3 \end{aligned} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sigma_{22}} \left(\begin{aligned} &2 \cdot A_e \cdot \sigma + 3 \cdot B_e \cdot \sigma \cdot \xi + \\ &+ D_e \cdot \tau \cdot \eta - S_0 \cdot E_e \cdot \sqrt{2} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] + \\
 &+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[\begin{aligned} &\frac{4}{3} C_p + \left(\frac{1}{3} + \xi^2 \right) D_p \cdot \xi - B_p \cdot \xi^3 + \\ &+ E_p \cdot \left(\begin{aligned} &\sqrt{6} \cdot \alpha_{11} + \sqrt{6} \cdot \alpha_{22} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \alpha_{33} + \\ &+ \cos(3\varphi) \cdot \eta^3 \end{aligned} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sigma_{22}} \left(\begin{aligned} &2 \cdot A_p \cdot \sigma + 3 \cdot B_p \cdot \sigma \cdot \xi + D_p \cdot \eta \cdot \tau - E_p \cdot S_0 \cdot \sqrt{2} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right]; \\
 A_{1212} &= \frac{1}{3} \left[\begin{aligned} &2 \cdot D_e \cdot (1 + \xi^2) \cdot \xi - 2 \cdot B_e \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_e + \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{3} E_e \cdot (7\alpha_{11} + \alpha_{22} - 8\alpha_{33} - \sqrt{6} \cos(3\varphi) \cdot \eta^3) \end{aligned} \right] + \\
 &+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[\begin{aligned} &2 \cdot (1 + \xi^2) \cdot D_p \cdot \xi - 2 \cdot \xi^3 \cdot B_p + 4 \cdot C_p + \\ &+ \frac{\sqrt{6}}{3} E_p \cdot (7\alpha_{11} + \alpha_{22} - 8\alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \cos(3\varphi) \cdot \eta^3) \end{aligned} \right]; \\
 A_{3333} &= \frac{1}{3} \left[\begin{aligned} &\frac{4}{3} C_e + \left(\frac{1}{3} + \xi^2 \right) D_e \cdot \xi - B_e \cdot \xi^3 + \\ &+ E_e \cdot \left(\begin{aligned} &\frac{\sqrt{6}}{3} \alpha_{11} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \alpha_{22} + \\ &+ \sqrt{6} \cdot \alpha_{33} - \eta^3 \cdot \cos(3\varphi) \end{aligned} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sigma_{33}} \left(\begin{aligned} &2 \cdot A_e \cdot \sigma + 3 \cdot B_e \cdot \sigma \cdot \xi + D_e \cdot \eta \cdot \tau - \\ &- E_e \cdot S_0 \cdot \sqrt{2} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[\begin{aligned} & \frac{4}{3} C_p + \left(\frac{1}{3} + \xi^2 \right) \cdot D_p \cdot \xi - B_p \cdot \xi^3 + \\ & + E_p \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \alpha_{11} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \alpha_{22} + \right. \\ & \left. + \sqrt{6} \cdot \alpha_{33} - \eta^3 \cdot \cos(3\varphi) \right) \\ & + \frac{1}{\sigma_{33}} \left(2 \cdot A_p \cdot \sigma + 3 \cdot B_p \cdot \sigma \cdot \xi + D_p \cdot \eta \cdot \tau - E_p \cdot S_0 \cdot \sqrt{2} \right) \end{aligned} \right];$$

$$A_{2323} = \frac{1}{3} \left[\begin{aligned} & -2 \cdot B_e \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_e + \frac{2}{3} D_e (1 + \xi^2) \cdot \xi + \\ & + \frac{\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \left(-2 \cdot \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \cos(3\varphi) \cdot \eta^3 \right) \end{aligned} \right] +$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[\begin{aligned} & -2 \cdot B_p \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_p + \frac{2}{3} D_p (1 + \xi^2) \cdot \xi + \\ & + \frac{\sqrt{6}}{3} E_p \cdot \left(-2 \cdot \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \cos(3\varphi) \cdot \eta^3 \right) \end{aligned} \right];$$

$$A_{1313} = \frac{1}{3} \left[\begin{aligned} & 2 \cdot (\xi^2 + 1) D_e \cdot \xi - 2 \cdot B_e \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_e + \\ & + \frac{\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \left(7 \cdot \alpha_{11} - 8 \cdot \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \eta^3 \cdot \cos(3\varphi) \right) \end{aligned} \right] +$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[\begin{aligned} & 2 \cdot (\xi^2 + 1) D_p \cdot \xi - 2 \cdot B_p \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_p + \\ & + \frac{\sqrt{6}}{3} E_p \cdot \left(7 \cdot \alpha_{11} - 8 \cdot \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \eta^3 \cdot \cos(3\varphi) \right) \end{aligned} \right];$$

$$A_{1122} = \frac{1}{3} \left[-\frac{2}{3} D_e \cdot \xi - \sqrt{6} \cdot E_e \cdot \alpha_{22} + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \alpha_{33} - \frac{2}{3} C_e \right] +$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left(-\frac{2}{3} D_p \cdot \xi - \sqrt{6} \cdot E_p \cdot \alpha_{22} + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_p \cdot \alpha_{33} - \frac{2}{3} C_p \right);$$

$$A_{1133} = \frac{1}{3} \left[-\frac{2}{3} D_e \cdot \xi + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \alpha_{22} - \sqrt{6} \cdot E_e \cdot \alpha_{33} - \frac{2}{3} C_e \right] +$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left(-\frac{2}{3} D_p \cdot \xi + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_p \cdot \alpha_{22} - \sqrt{6} \cdot E_p \cdot \alpha_{33} - \frac{2}{3} C_p \right);$$

$$A_{1112} = -\frac{\sqrt{6}}{9} \cdot E_e \cdot \alpha_{12} - Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{12};$$

$$A_{1123} = -\frac{10\sqrt{6}}{9} \cdot E_e \cdot \alpha_{23} - Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{10\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{23};$$

$$A_{1113} = -\frac{\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{13} - Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{13};$$

$$A_{2233} = \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} D_e \cdot \xi + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \alpha_{11} - \frac{2}{3} C_e \right) + \\ + \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \left[-\frac{2}{3} D_p \cdot \xi + \frac{2\sqrt{6}}{3} E_p \cdot \alpha_{11} - \frac{2}{3} C_p \right];$$

$$A_{2212} = \frac{5\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{12} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{5\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{12}; \quad A_{2223} = \frac{5\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{23} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{5\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{23};$$

$$A_{3312} = -\frac{4\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{12} - Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{4\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{12}; \quad A_{3323} = \frac{5\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{23} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{5\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{23};$$

$$A_{3313} = \frac{5\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{13} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{5\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{13}; \quad A_{2213} = -\frac{4\sqrt{6}}{9} E_e \cdot \alpha_{13} - Y_u^{n-1} \cdot n \cdot \frac{4\sqrt{6}}{9} E_p \cdot \alpha_{13};$$

$$A_{1223} = E_e \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{13} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot E_p \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{13};$$

$$A_{1213} = E_e \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{23} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot E_p \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{23};$$

$$A_{2313} = E_e \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{12} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot E_p \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{12};$$

$$Y_u = \sigma^2 \cdot A_p + \sigma^2 \cdot \xi \cdot B_p + \tau^2 \cdot C_p + D_p \cdot \sigma \cdot \tau \cdot \eta + \tau^2 \cdot \eta \cdot E_p \cdot \cos(3\varphi);$$

$$\alpha_{ij} = \sqrt{3} \cdot \sigma_{ij} / S_0.$$

Матрицы упругости может быть вычислена посредством обращения матрицы $[A_{ijkm}]^{-1}$. В разработанном программном обеспечении матрицы обращаются численно для каждого узла конструкции. С учётом этого замечания матрица упругости записывается в форме:

$$[D_{ijkm}] = [A_{ijkm}]^{-1} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1113} \\ & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2213} \\ & & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3313} \\ & & & D_{1212} & D_{1223} & D_{1213} \\ & & & & D_{2323} & D_{2313} \\ & & & & & D_{1313} \end{bmatrix}; \quad (4.65)$$

Элементы матрицы $[D_{ijkm}]$ в тексте диссертации не приводятся, так как их объём в символьной форме требует неприемлемо большого количества страниц для воспроизведения.

Применение тензора Коши обеспечивает представление связи между деформациями и перемещениями в форме

$$e_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.66)$$

4.5 Расчёт НДС

комбинированных систем «здание-основание»

В главе 1 на основе анализа экспериментальных данных, полученных за последние полвека, сделан вывод, что зависимость деформационных характеристик материалов от вида нагружения чаще всего наблюдаются при достаточно высоком уровне напряжений в области нелинейных деформаций. Подтверждено также нарушение гипотезы «единой кривой» для традиционных строительных материалов, к которым относятся бетон, железобетон и прочие композиционные материалы.

Установлено также, что для бетона характерно явление дилатации и ярко выраженная зависимость от компонентного состава тензора напряжений [118, 174], особенно для тяжёлых и мелкозернистых его видов. Кроме того, отдельные виды бетонов имеют слабо нелинейные диаграммы деформирования, в то время как у других уровень проявления подобного эффекта зависит от вида напряжённого состояния.

Действующая нормативная документация предписывает производить расчёты железобетонных элементов по нелинейной деформационной модели на основе диаграмм состояния бетона и арматуры, которые получены при простом напряжённом состоянии конструкции. Вместе с тем, в ней не указано, каким образом учитывать различные усложняющие задачу факторы, такие как разнсопротивляемость, дилатацию, влияние химически активных сред, температуры и др. [16, 86, 119, 146, 174, 176, 211].

Между тем, неучёт этих факторов приводит к избыточному запасу прочности конструкций, который закрепляется в ходе проектирования и возведения зданий и конструкций из тяжёлых бетонов [86]. С учётом того, что в Российской Федерации и за

рубежом объёмы строительства зданий и сооружений с применением сборных и монолитных конструкций из железобетона с каждым годом возрастают, повышение точности расчёта подобных конструкций приведёт к меньшему расходу материала и, как следствие, к большой экономической выгоде [174].

На основании многолетних исследований [118, 119, 174, 215, 216] был решён целый ряд задач [16, 87, 146, 147, 181, 201, 203–206, 211, 212–214, 220–224] и др. Однако, в перечисленных исследованиях были рассмотрены только отдельные несущие элементы строительных конструкций, такие как балки, плиты или оболочки. Комплексные задачи в виде расчёта конструкций, включающих набор подобных элементов с учётом зависимости физико-механических свойств материала от компонентного состава тензора напряжений, трещинообразование и другие «усложнённые» свойства, ранее не решались. В связи с этим ниже решается задача расчётного моделирования высотное здания и его основания, представленных единым объектом.

Методология расчёта приведена в работах автора диссертационного исследования [174, 178, 179, 182, 199, 225, 233, 328, 330, 332].

Для реализации предлагаемой модели используются экспериментальные данные, опубликованные в работах А.Н. Ставрогина и А.Г. Протосени [169, 170], а также работе [118, 174].

Испытания стандартных образцов проводились в условиях сжатия по первой оси с боковым поджатием по второй оси [169, 170].

Указанные выше результаты испытаний обрабатывались и аппроксимировались по методике, предложенной А.А. Трещёвым [118, 119] и изложенной в разделе 2.2.1. Они оказались также эффективными для определения констант потенциала (1.1), (2.16) каждого из четырёх слоёв грунта: известняка, талькохлорита-1, кварцевого диорита Д-2 и песчаника П-026.

На рисунках 4.55–4.59 показаны использованные экспериментальные данные в форме кривых из точек и аппроксимирующих кривых – пунктиры.

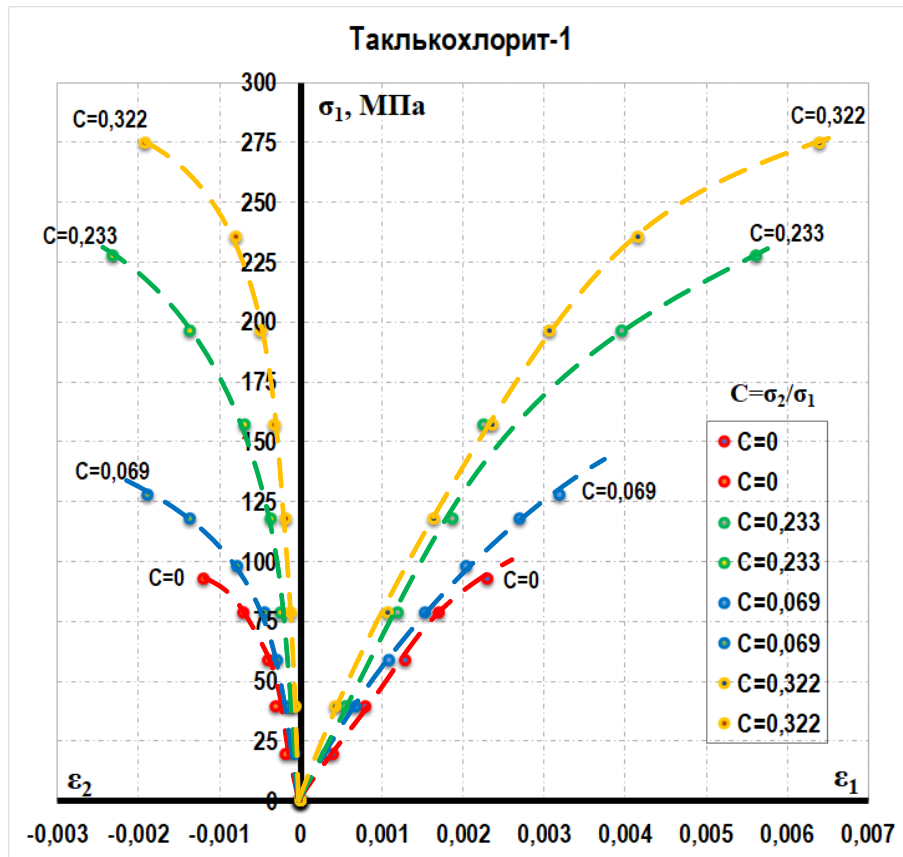


Рисунок 4.55 – Таклькохлорит-1: диаграммы деформирования и их аппроксимации

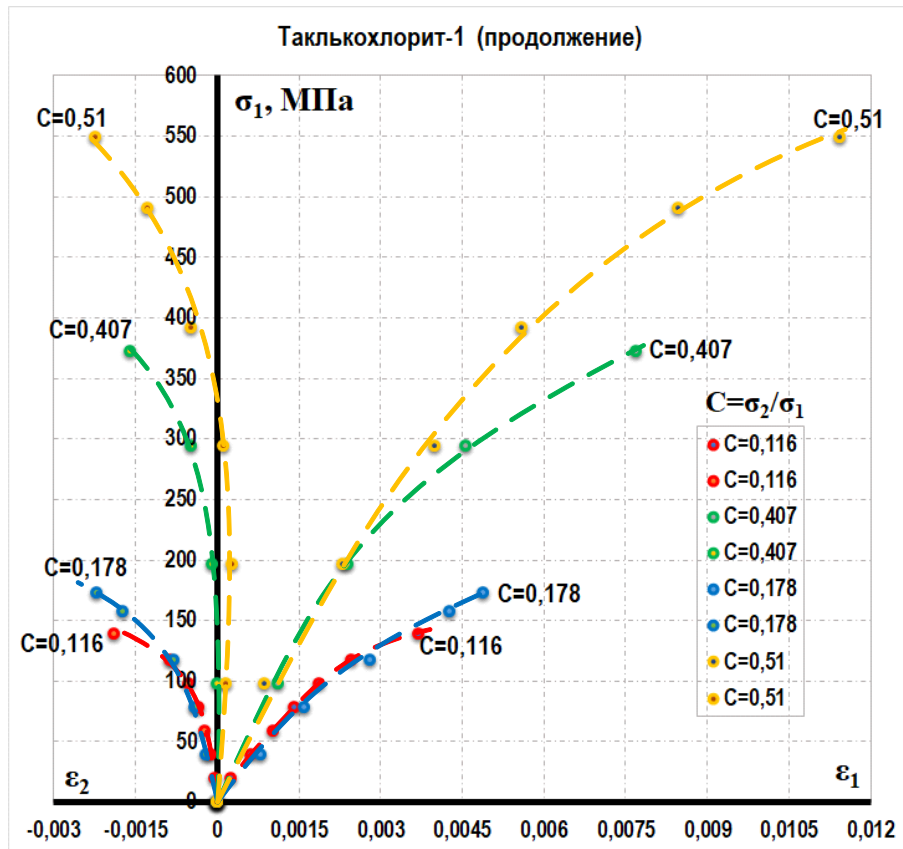


Рисунок 4.56 – Таклькохлорит-1 (продолжение рисунка 4.24)

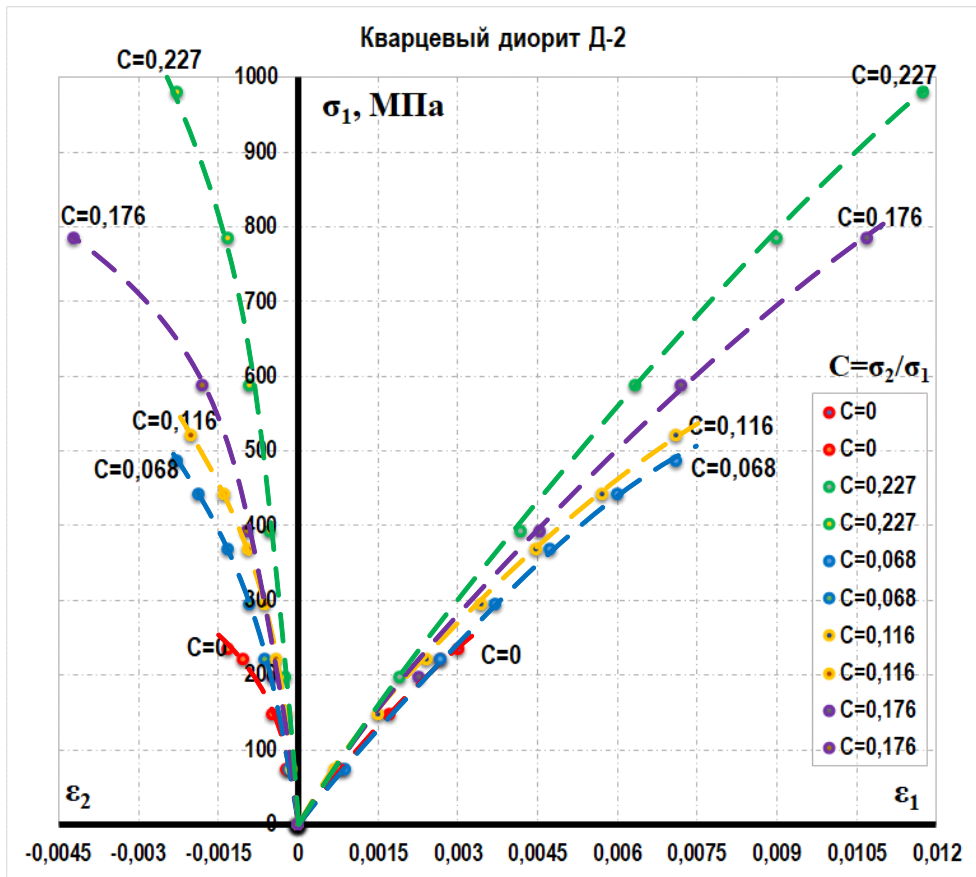


Рисунок 4.57 – Кварцевый диорит Д-2, диагр. деформирования и их аппроксимации

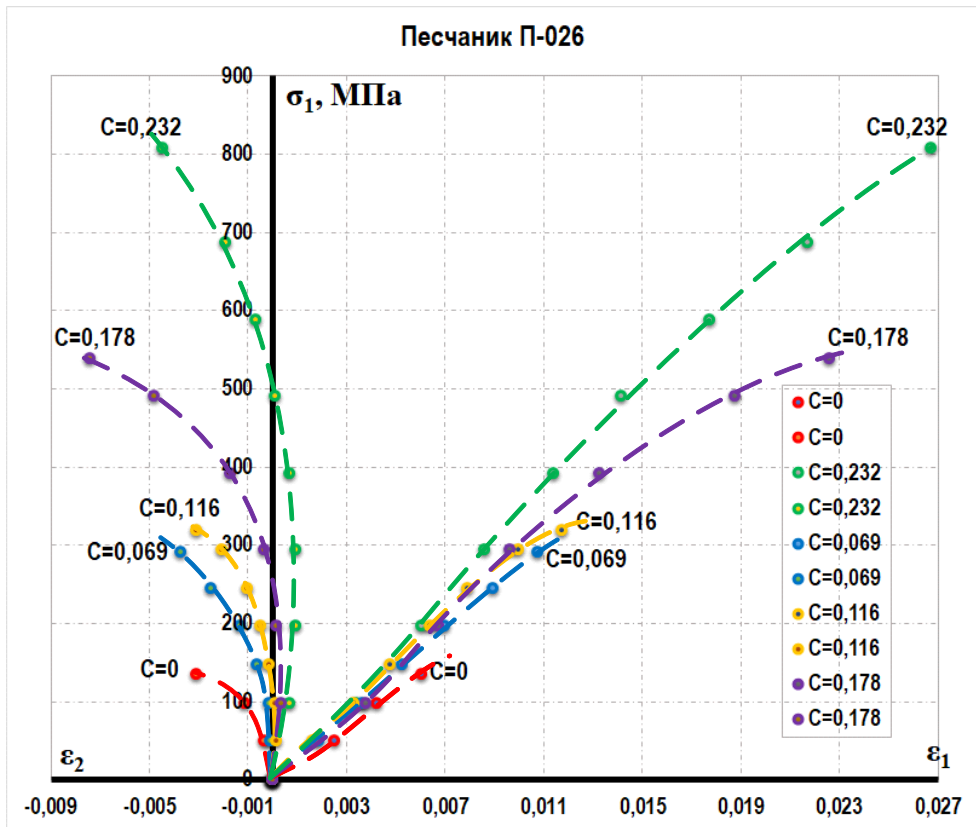


Рисунок 4.58 – Песчаник П-026, диагр. деформирования и их аппроксимации

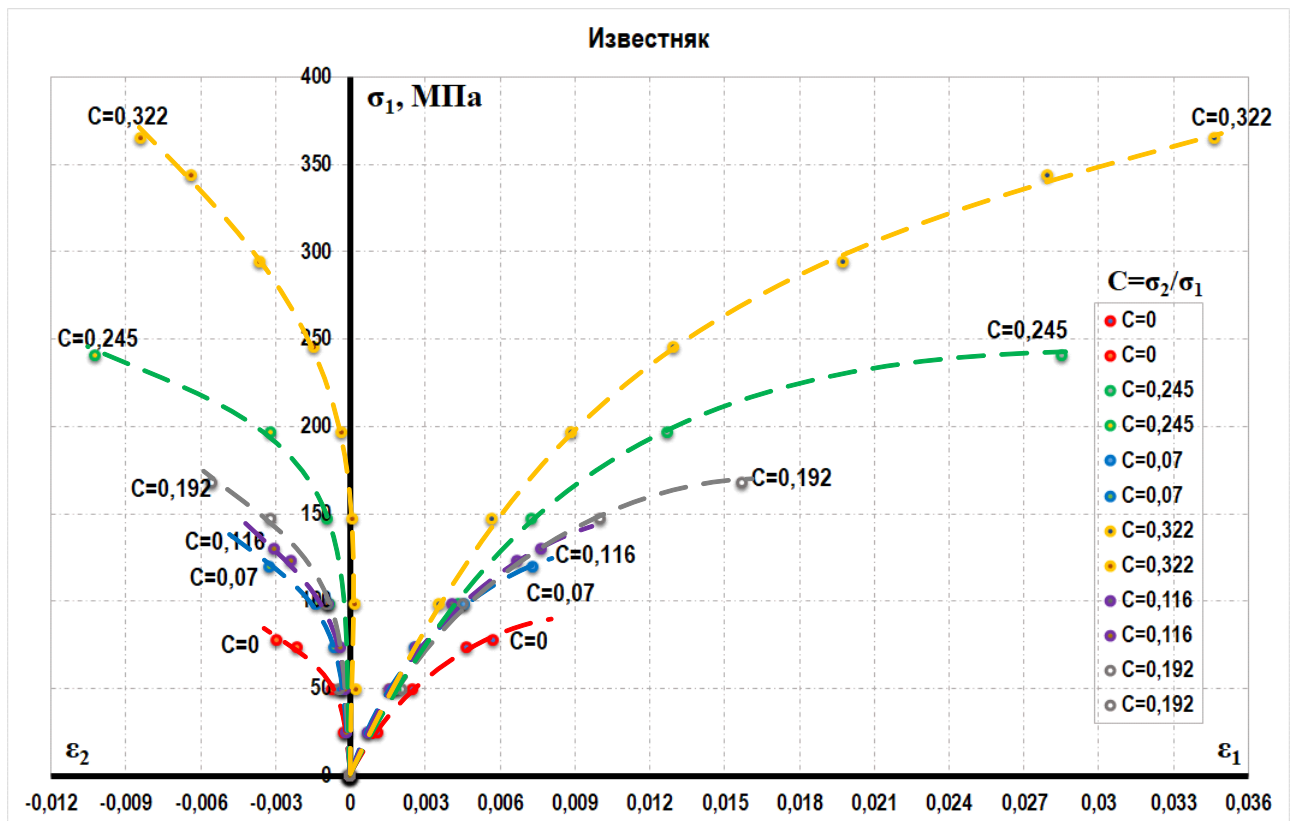


Рисунок 4.59 – Известняк, диагр. деформирования и их теоретические аппроксимации

Представленные на диаграммах рисунков 4.55–4.59 типы грунтов являются достаточно распространёнными, в том числе, и своим сочетанием. Данные о свойствах этих грунтов использовались в работах Е.В. Ломакина и А.В. Березина [25, 99, 101].

Для определения констант потенциала использовались одноосные испытания, а другие варианты экспериментальных данных, потребовались для контроля адекватности модели и доказательства корректности проводимых теоретических аппроксимаций. Вычисленные константы представлены в таблице 4.5.

Таблица 4.5 – Вычисленные константы потенциала

Константы потенциала	Талькохлорит-1	Кварцевый диорит Д-2	Песчаник П-026	Известняк
n	3,05	3,26	2,5	2,27
$A_e, \text{МПа}^{-1}$	$2,115 \cdot 10^{-5}$	$1,917 \cdot 10^{-5}$	$6,148 \cdot 10^{-5}$	$1,177 \cdot 10^{-4}$
$B_e, \text{МПа}^{-1}$	$4,557 \cdot 10^{-6}$	$2,238 \cdot 10^{-6}$	$2,016 \cdot 10^{-5}$	$4,225 \cdot 10^{-5}$
$C_e, \text{МПа}^{-1}$	$-1,936 \cdot 10^{-5}$	$-2,654 \cdot 10^{-5}$	$-4,667 \cdot 10^{-6}$	$-9,522 \cdot 10^{-6}$
$D_e, \text{МПа}^{-1}$	$-6,458 \cdot 10^{-6}$	$-5,865 \cdot 10^{-6}$	$-2,574 \cdot 10^{-7}$	$-1,594 \cdot 10^{-7}$

$A_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$1,454 \cdot 10^{-4}$	$1,221 \cdot 10^{-4}$	$3,725 \cdot 10^{-4}$	$8,319 \cdot 10^{-4}$
$B_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$5,045 \cdot 10^{-5}$	$3,561 \cdot 10^{-5}$	$1,551 \cdot 10^{-4}$	$3,117 \cdot 10^{-4}$
$C_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$-1,356 \cdot 10^{-4}$	$2,056 \cdot 10^{-4}$	$8,226 \cdot 10^{-4}$	$-1,027 \cdot 10^{-3}$
$D_p, \text{МПа}^{(1-2n)/n}$	$1,701 \cdot 10^{-5}$	$1,887 \cdot 10^{-5}$	$1,662 \cdot 10^{-4}$	$3,982 \cdot 10^{-5}$

4.5.1 Расчёт штампа на грунтовом основании

Производится расчёт давления штампа на грунтовое основание, показанное на рисунке 4.60.

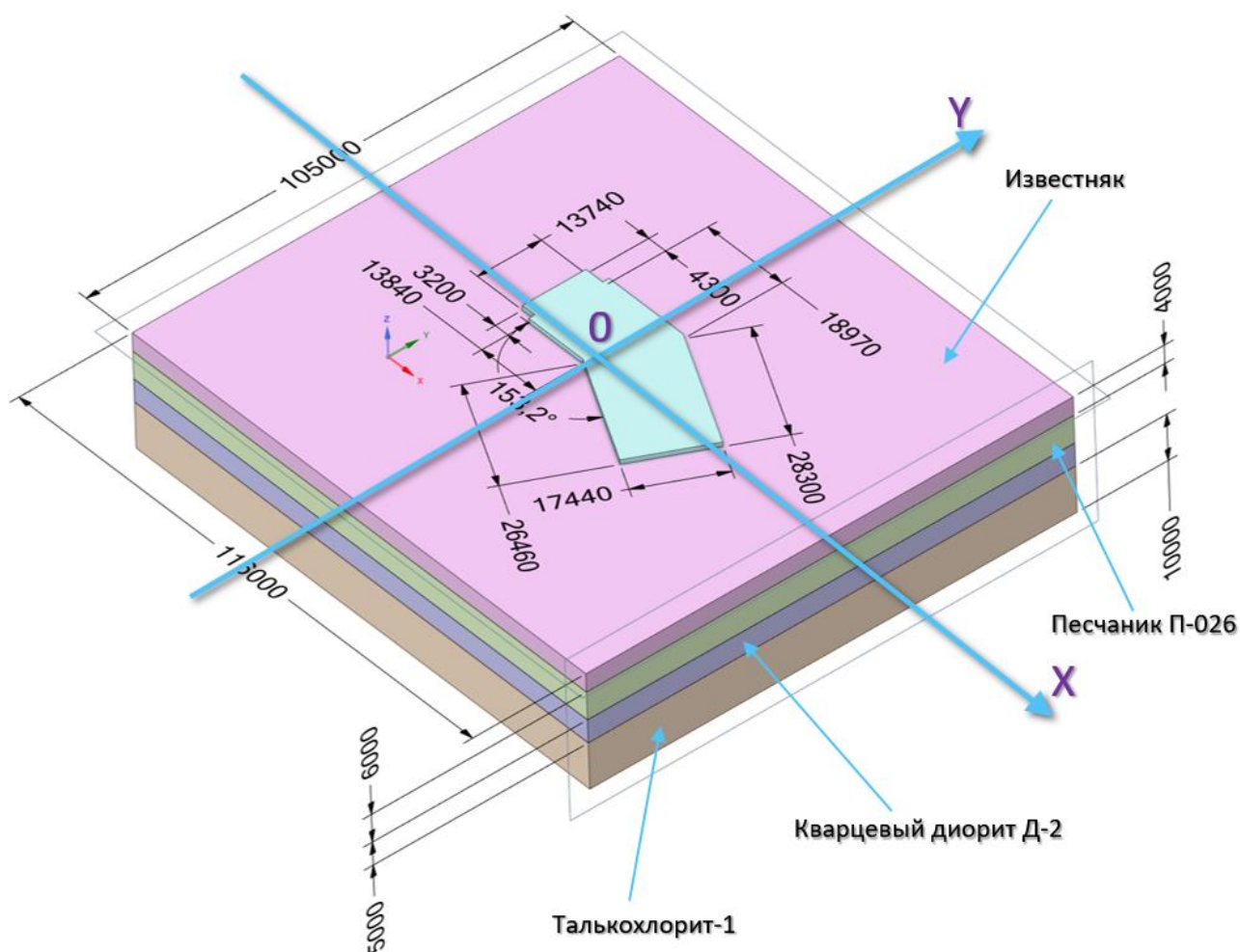


Рисунок 4.60 – Схема штампа на грунтовом основании (линейные размеры в мм)

Применительно к конечно-элементной модели кластер грунта полагается жёстко закреплённым по контуру со всех сторон, кроме верха.

В состав кластера входят четыре слоя грунта:

- известняк – 4 м;
- талькохлорит-1 – 10 м;

- кварцевый диорит Д-2 – 5 м;
- песчаник П-026 – 6 м.

Расчёт выполняется в трёх вариантах:

- с учётом нелинейности разнсопротивляющихся материалов;
- с учётом нелинейных диаграмм деформирования с привлечением вычислительной среды ПО ANSYS (нелинейные диаграммы деформирования интегрированы в базу данных числовым массивом);
- с усреднёнными механическими характеристиками, когда отсутствуют эффекты, связанные с зависимостью свойств материала от компонентного состава тензора напряжений.

На рисунке. 4.61 приведены графики зависимости прогиба от величины нагрузки (q имеет значения от 0 до 3,468 МПа).

По результатам расчётного моделирования установлено, что разница вычисленных величин осадки по расчёту с учётом разнсопротивляемости достигает:

- 97% по отношению к расчёту с усреднёнными характеристиками;
- 27% по отношению к расчёту в среде ANSYS.

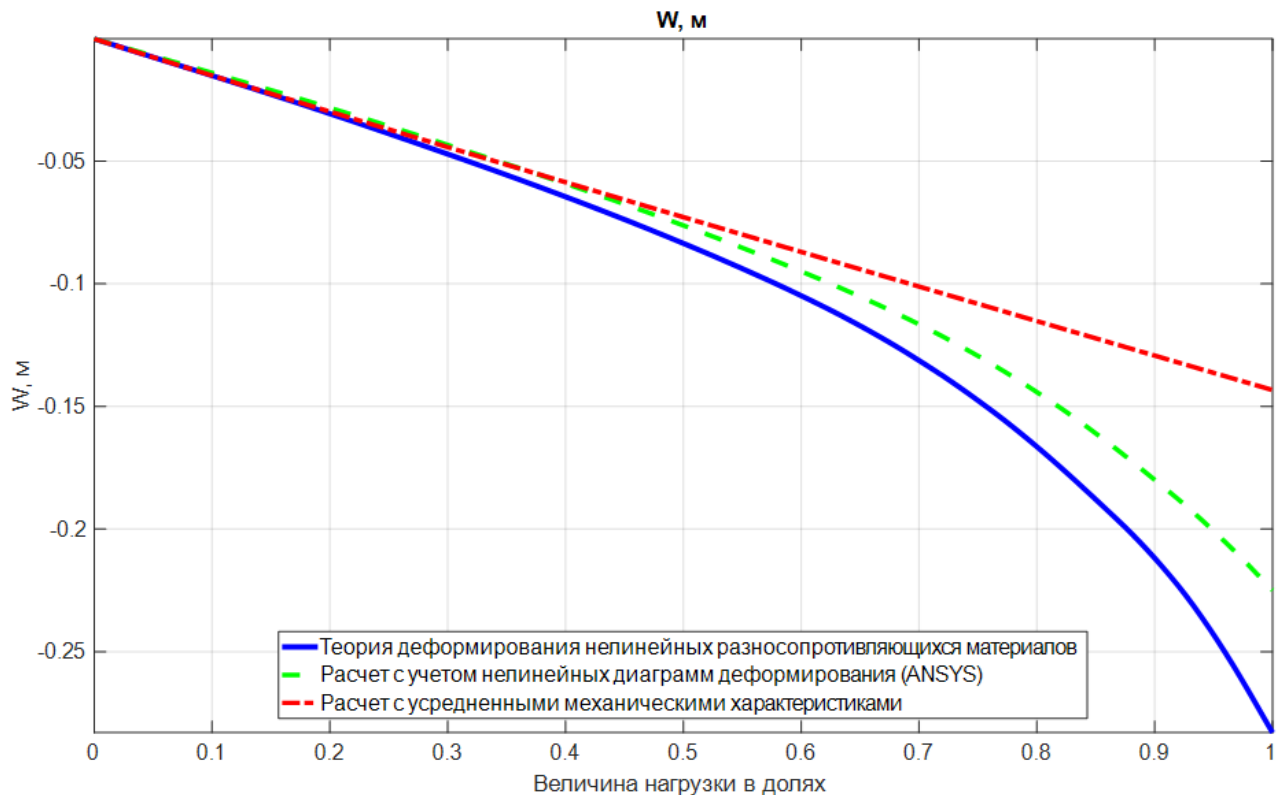


Рисунок 4.61 – Максимальная осадка $W(q)$, м под штампом

Рисунки 4.31–4.34 иллюстрируют зависимость осадок и горизонтальных перемещений по осям симметрии при нагрузке $q = 3,468$ МПа

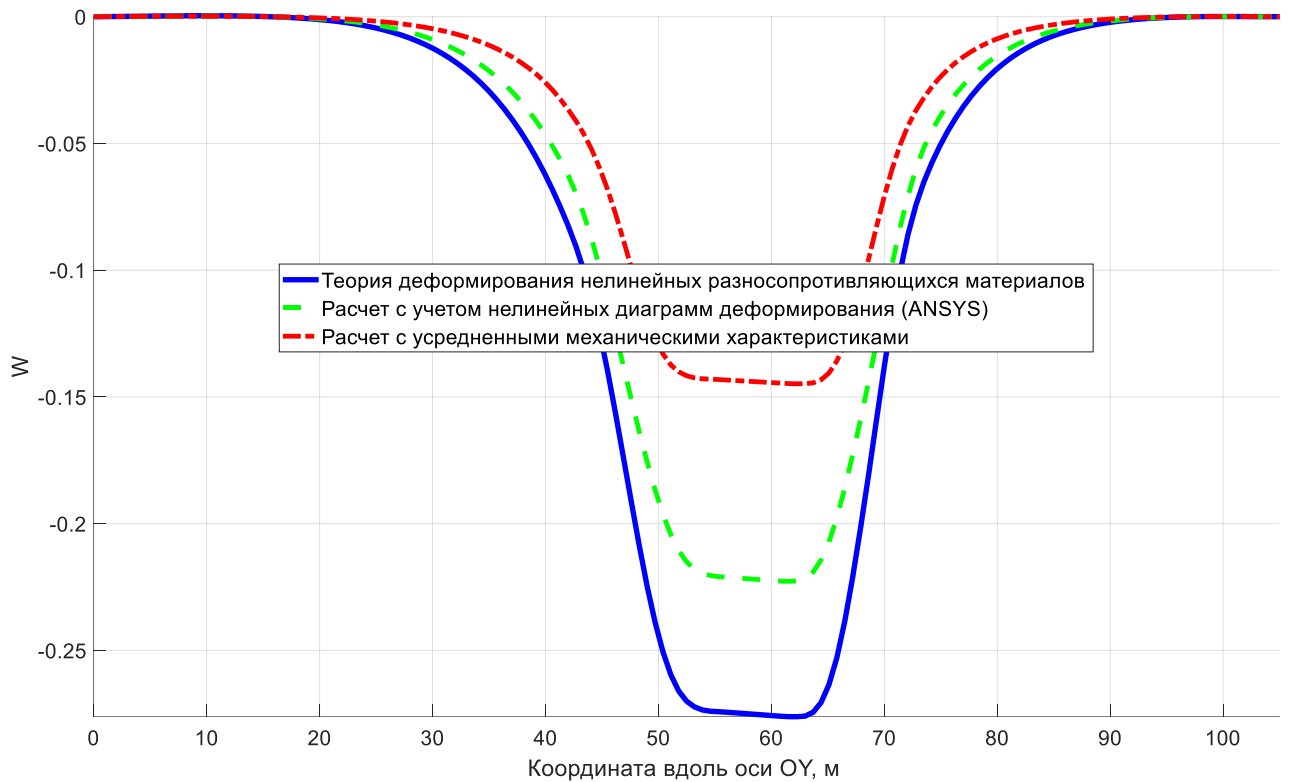


Рисунок 4.62 – Осадка деформируемого основания $W(q)$, м по оси OY (см. рисунок 4.29)

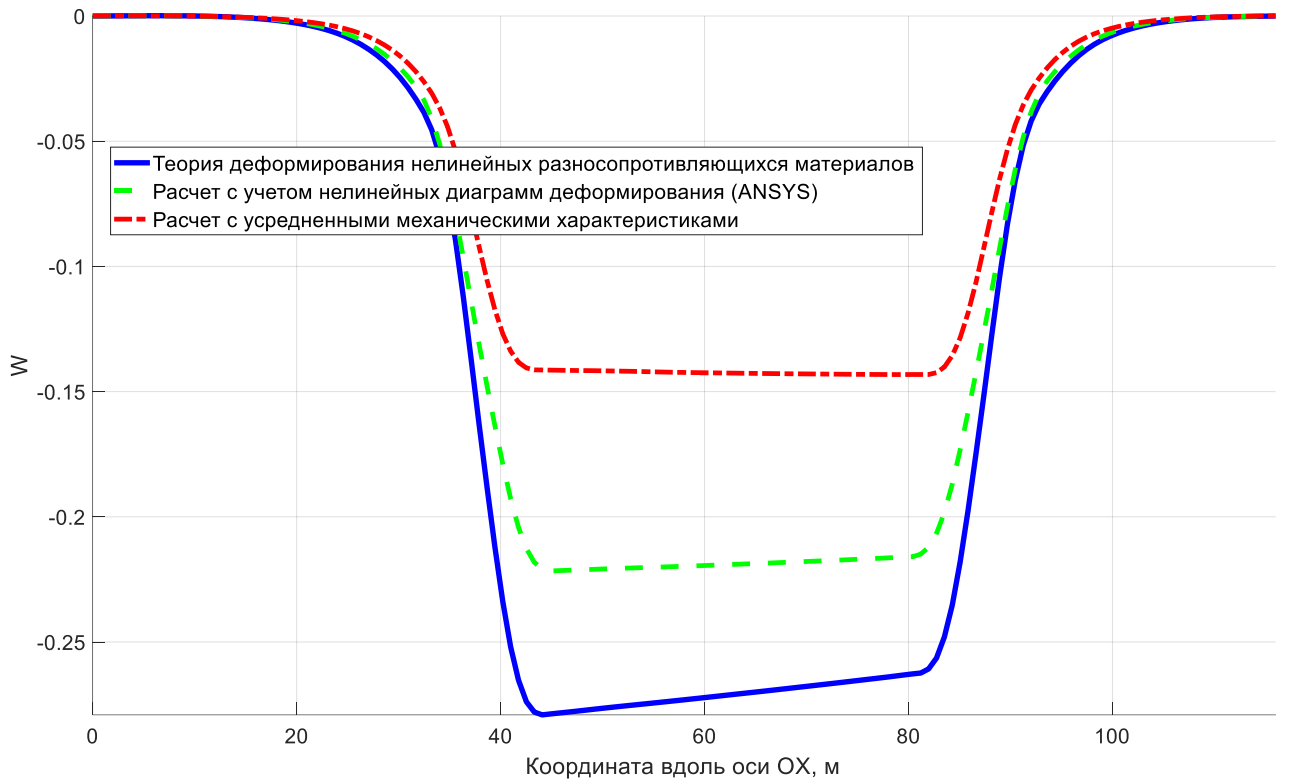


Рисунок 4.63 – Осадка деформируемого основания $W(q)$, м по оси OX (см. рисунок 4.29)

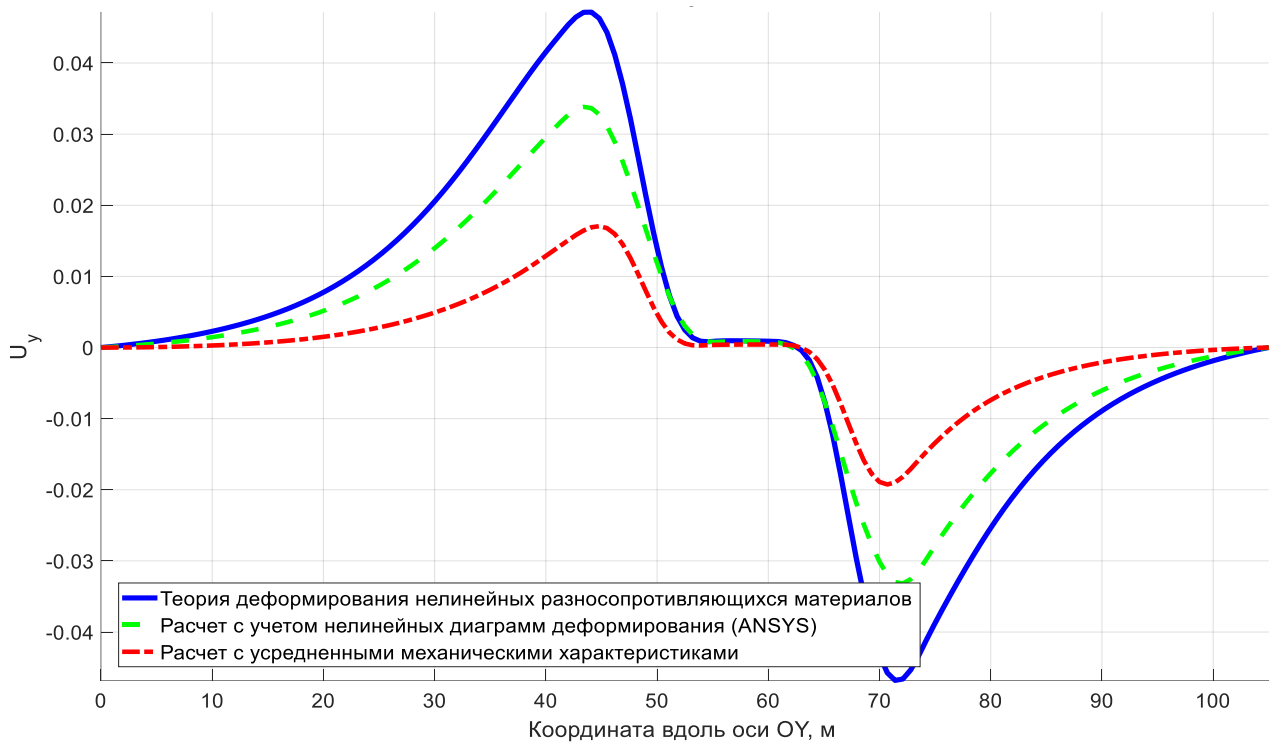


Рисунок 4.64 – Горизонтальные перемещения на поверхности деформируемого основания $U_y(q)$, м по оси OY (см. рисунок 4.29)

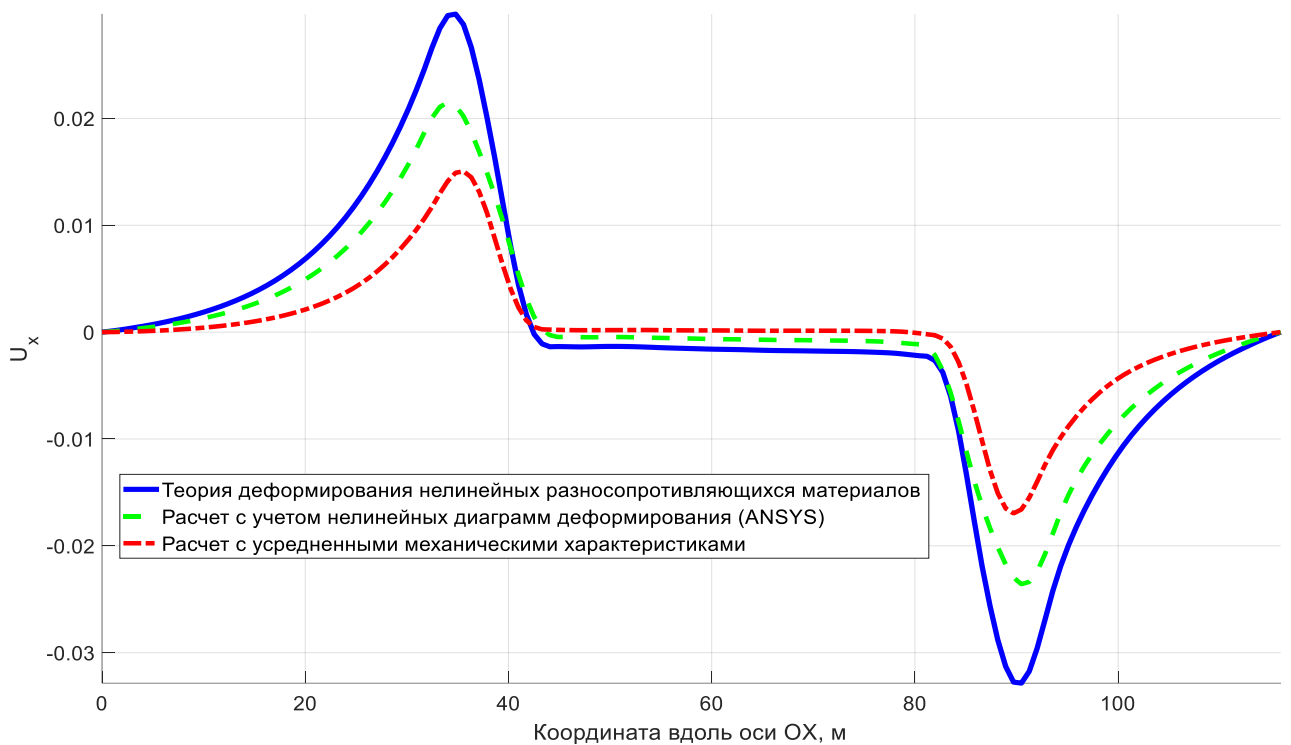


Рисунок 4.65 – Горизонтальные перемещения на поверхности деформируемого основания $U_x(q)$, м по оси Ox (см. рисунок 4.60)

Анализ представленных результатов показывает, что разница в осадке (и горизонтальных перемещениях) с учётом разносопротивляемости достигает:

- 78% (и 170%) по отношению к расчёту с усредненными характеристиками;
- 35% (и 96%) по отношению к расчёту в среде ПО ANSYS (нелинейные диаграммы деформирования интегрированы в базу данных числовыми массивами).

4.5.2 Расчёт многоэтажного здания на многослойном деформируемом основании

Для демонстрации методики применения и эффективности математической модели, разработанной в диссертации (Н15) [174], была решена задача об определении НДС здания на многослойном деформируемом основании.

Слои основания представлены слоями грунтов (сверху-вниз):

- известняк, толщина 4 м;
- песчаник П-026, толщина 6 м;
- кварцевый диорит Д-2, толщина 5 м;
- талькохлорид-1, толщина 17,2 м.

Здание состоит из 25 этажей, имеющих одинаковую планировку, представленную на рисунке 4.35.

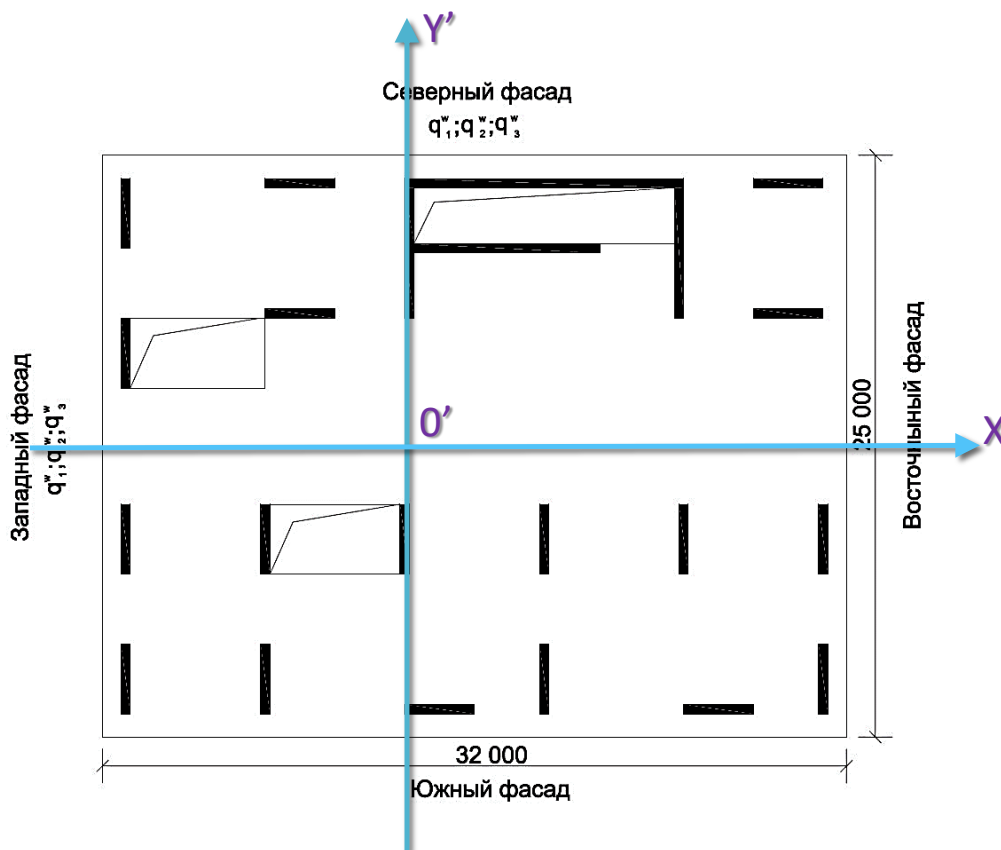


Рисунок 4.66 – План типового этажа

3D модель внешнего вида здания и его основания показана на рисунке 4.67.

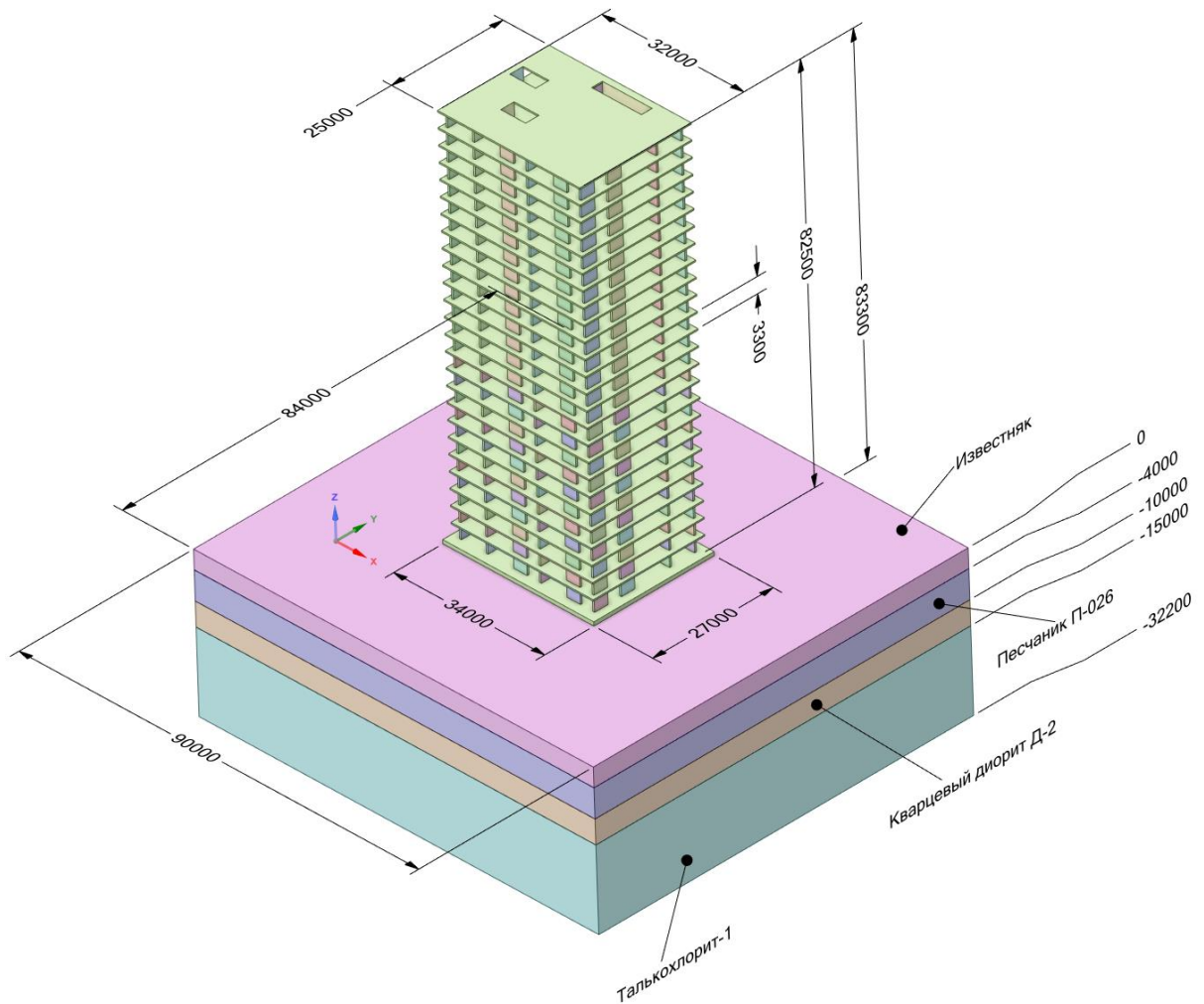


Рисунок 4.67 – Аксонометрия рассчитываемого здания

Расчётное моделирование выполнялось со следующими допущениями:

- 1) модель здания представлена только горизонтальными и вертикальными несущими элементами монолитного железобетонного остова, включая межэтажные перекрытия и пилоны;
- 2) толщина всех межэтажных перекрытий принята равной 220 мм; толщина фундаментной плиты составляет 600 мм;
- 3) толщина всех пилонов по высоте здания принимается равной 300 мм;
- 4) все узлы сопряжения элементов несущего остова приняты жёсткими;
- 5) деформирование горизонтальных и вертикальных элементов несущего остова происходит с учётом процессов разрушения;
- 6) упругое основание моделируется на основе определяющих соотношений для анизотропных разнородных материалов.

В качестве основного материала здания используется бетон с пределом прочности на сжатие $R_c = 28,4$ МПа.

Армирование фундаментной плиты выполнено стержнями А400 диаметром 16 мм, образующими сетку расположению симметрично в сечении плиты (защитный слой 50 мм, предел текучести $\sigma_p = 400$ МПа). Армирование плит перекрытия принято стержнями А400 диаметром 14 мм в виде сетки, расположенной симметрично в сечении плиты (защитный слой 35 мм, предел текучести $\sigma_p = 400$ МПа). Армирование пилонов использует стержни А400 диаметром 12 мм в виде двух сеток, симметрично расположенных в сечении пилон (защитный слой 35 мм, предел текучести $\sigma_p = 400$ МПа).

Арматура представлена упругопластической моделью из стали с модулем упругости $E_b = 2,06 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$.

Учитываемые нагрузки представлены таблицей 4.6.

Таблица 4.6 – Нагрузки

Нагрузка	Шаг нагрузки		Максимальная величина нагрузки	
	Па	кН/м	Па	кН/м
Единицы измерения:	Па	кН/м	Па	кН/м
На покрытие – q_{rf}	50	-	5000	-
На этаж – q_{fl}	40	-	4000	-
ЮГ Ветровая 1 – q_1^w	0,712	0,230	712	2,30
ЮГ Ветровая 2 – q_2^w	0,635	0,210	635	2,10
ЮГ Ветровая 3 – q_3^w	0,495	0,163	495	1,63
ЗАПАД Ветровая – q_1^w	0,712	0,230	712	2,30
ЗАПАД Ветровая 2 – q_2^w	0,609	0,201	609	2,01
ЗАПАД Ветровая 3 – q_3^w	0,530	0,175	530	1,75

Рисунки 4.68, 4.69 детализируют представление о нагрузках на южный и западный фасады здания, использованные в расчётной модели.

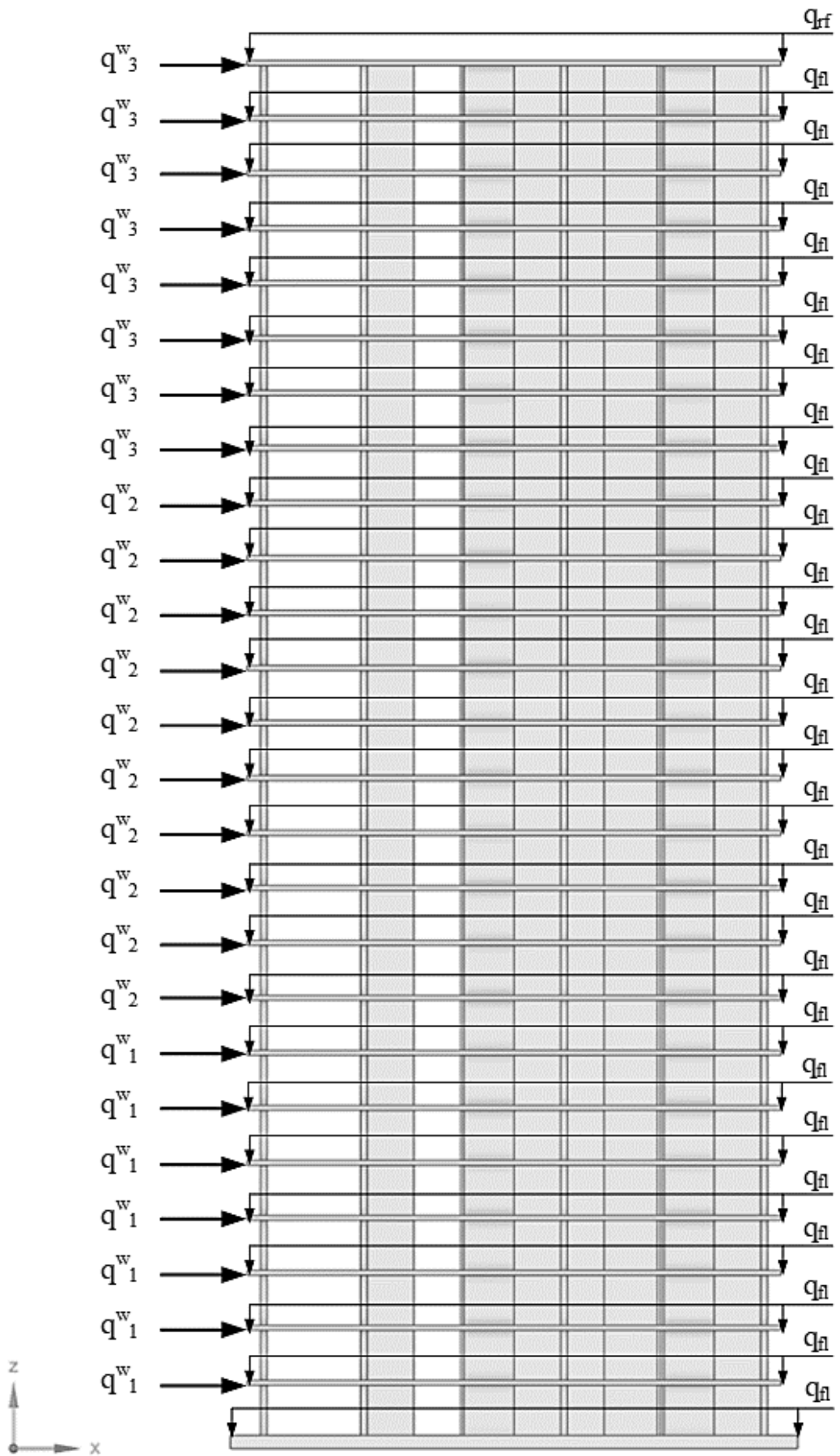


Рисунок 4.68 – Южный фасад расчётной схемы (см. таблицу 4.6)

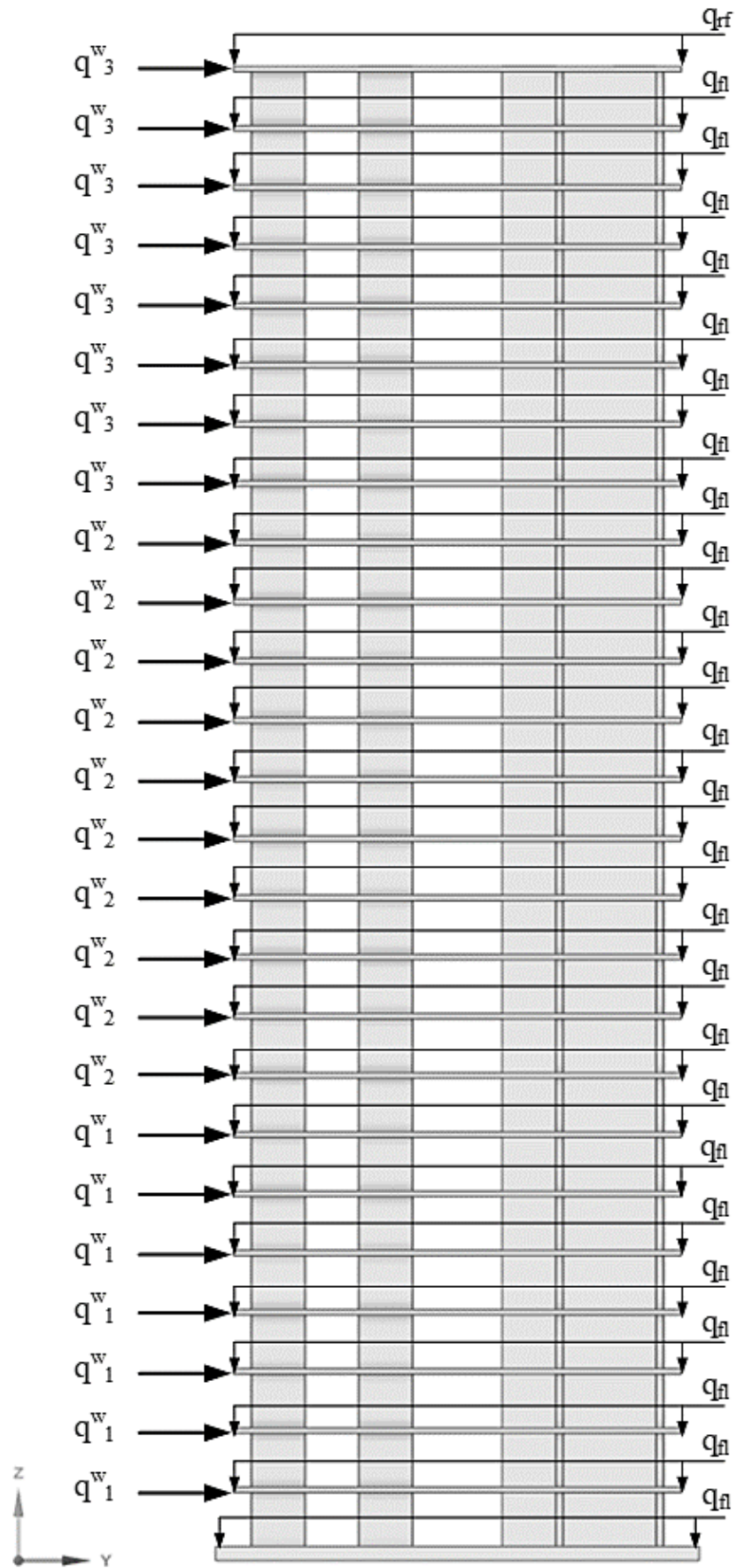


Рисунок 4.69 – Западный фасад расчётной схемы (см. таблицу 4.6)

На рисунке 4.70 показаны пилоны А, В, С, D, рассматриваемые для этажа № 25. На рисунке 4.71 указаны точки контроля прогибов для плит перекрытия этажей № 18 и № 25 и фундаментной плиты (точки 1, 2, 3 и 4).

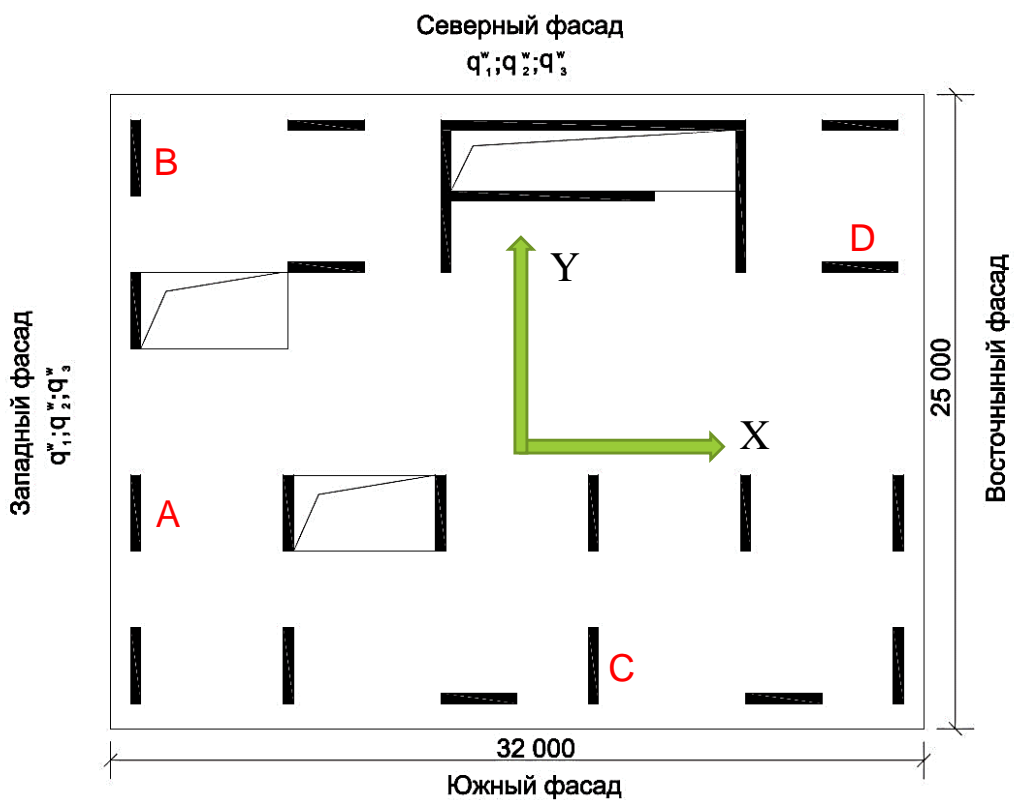


Рисунок 4.70 – Выбранные пилоны 25-ого этажа

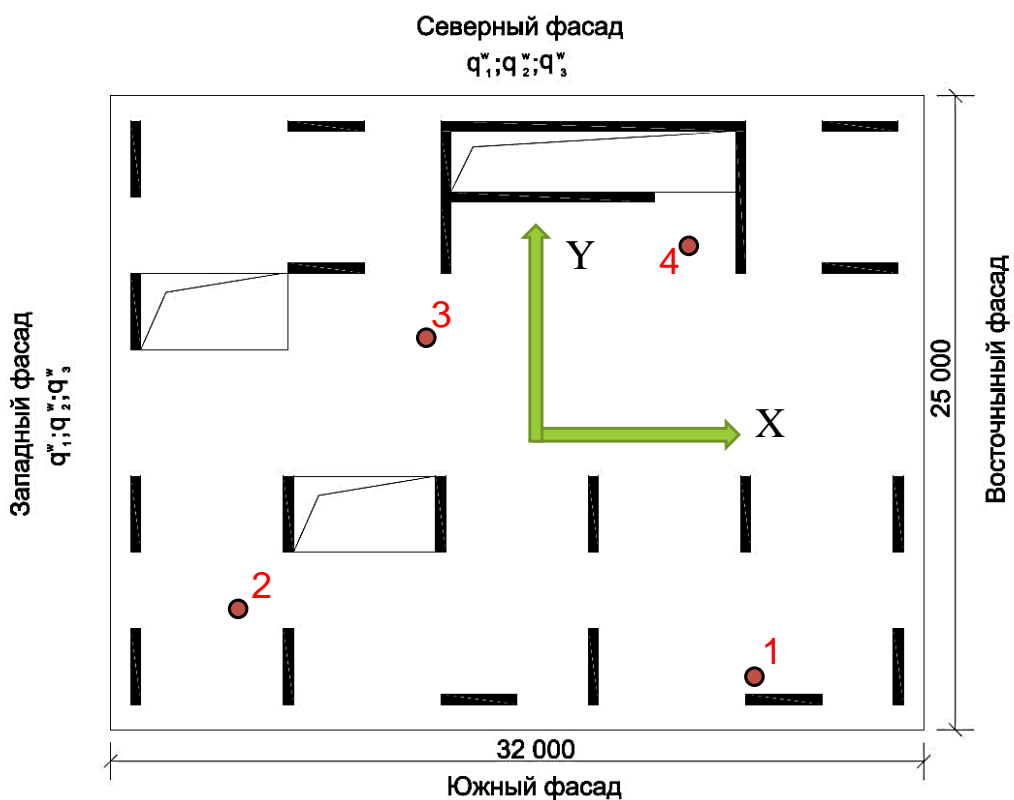


Рисунок 4.71 – Характерные точки плит перекрытия 25-ого и 18-ого этажей

Расчёт выполняется в трёх вариантах, как и для предыдущей задачи:

- с учётом явления разносопротивляемости для всех материалов (железобетон здания и многослойное деформируемое основание) – модель № 1;
- с учётом нелинейных диаграмм деформирования с привлечением вычислительной среды ПО ANSYS (нелинейные диаграммы деформирования интегрированы в базу данных числовым массивом) – модель № 2;
- с усреднёнными механическими характеристиками, когда отсутствуют эффекты, связанные с зависимостью свойств материала от компонентного состава тензора напряжений – модель № 3.

На рисунках 4.72, 4.73 показано распределение вертикальных перемещений (в данном случае осадок) на поверхности многослойного деформируемого основания (грунтового основания), при максимальной нагрузке (см. таблицу 4.6). Величины осадок, рассчитанные с помощью предлагаемой модели, отличаются от полученных с помощью модели № 2 на 11% (среднее значение) и на 16% от результатов, полученных при использовании модели № 3.

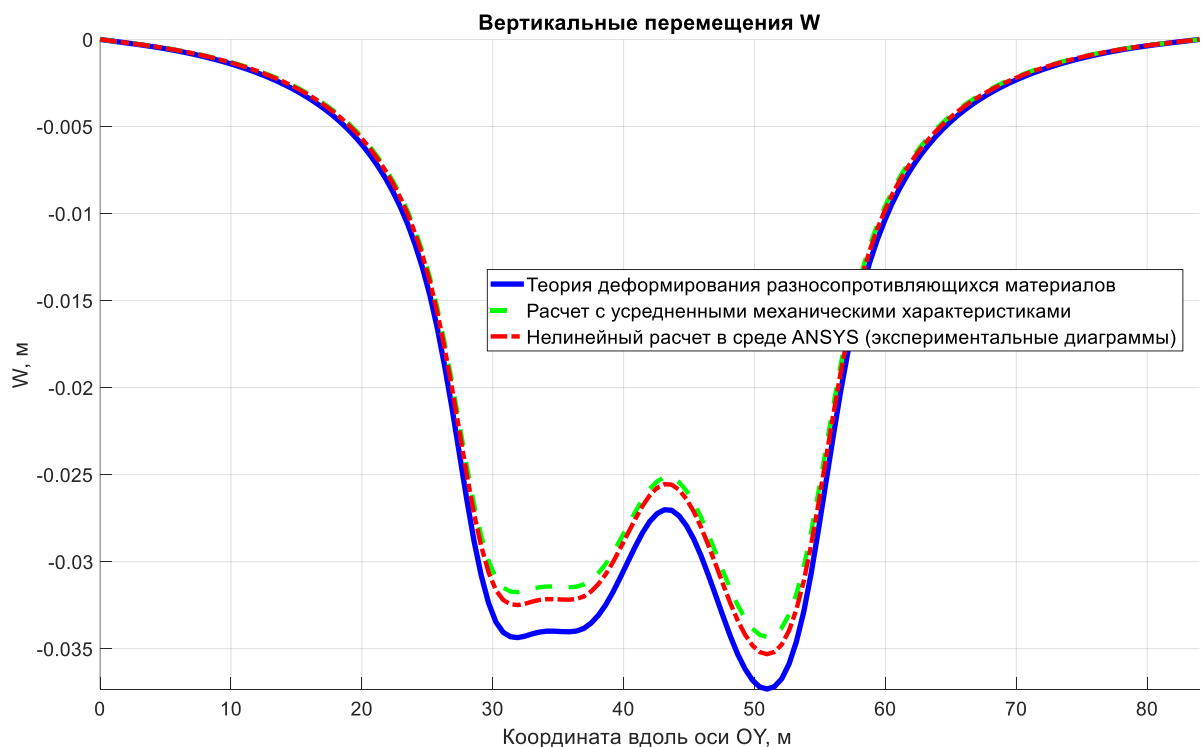


Рисунок 4.72 – Вертикальные перемещения (осадки) на поверхности деформируемого основания по линии O'Y' (рисунок 4.66)

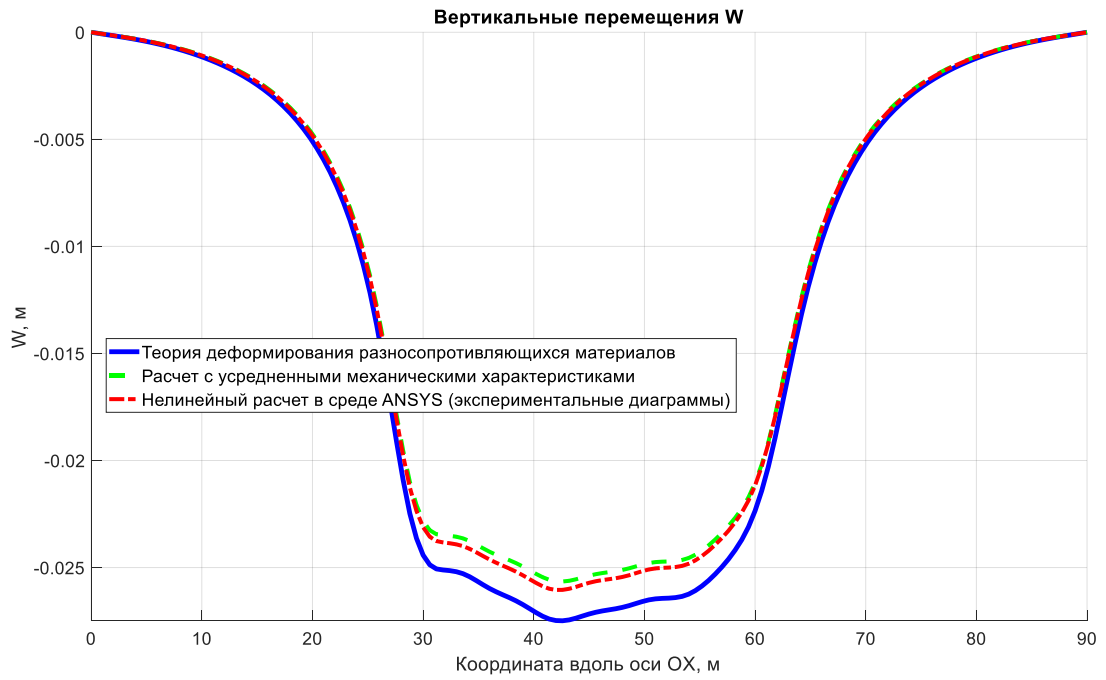


Рисунок 4.73 – Вертикальные перемещения (осадки) на поверхности деформируемого основания по линии O'X (рисунок 4.66)

На рисунках 4.74, 4.75 показано распределение вертикальных перемещений (прогибов) в срединной поверхности фундаментной плиты, при максимальной нагрузке (см. таблицу 4.6). Величины прогибов, рассчитанные с помощью предлагаемой в диссертации модели, отличаются от полученных с помощью модели № 2 на 5% (среднее значение) и на 8% от результатов, полученных при использовании модели № 3.

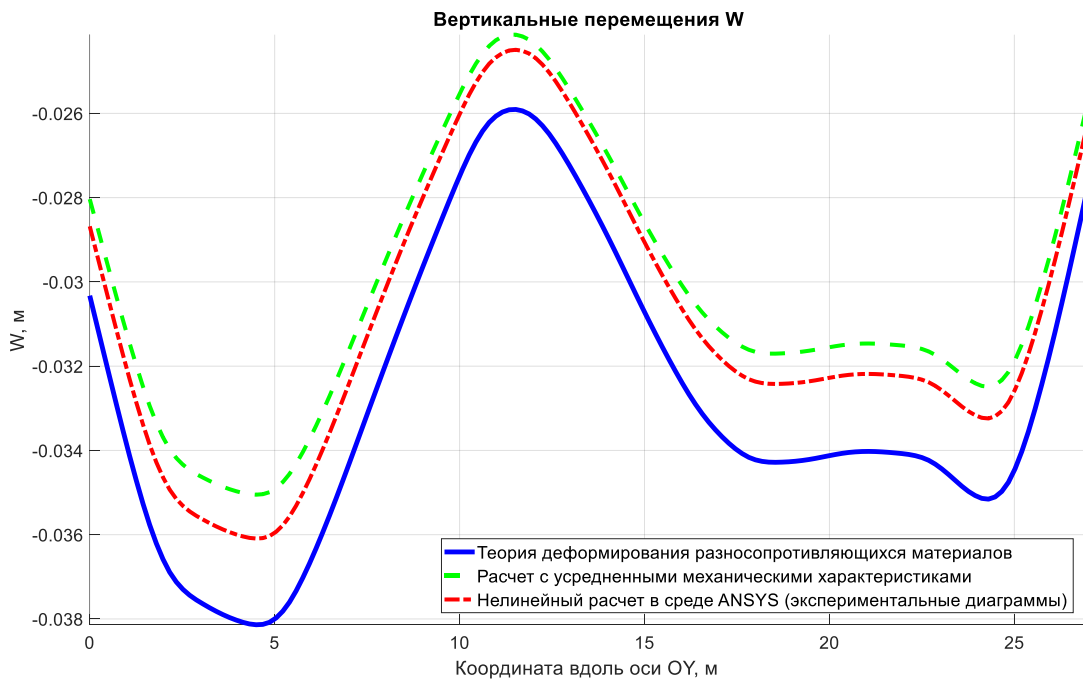


Рисунок 4.74 – Вертикальные перемещения (осадки), фундаментная плита, по линии O'Y' (рисунок 4.66)

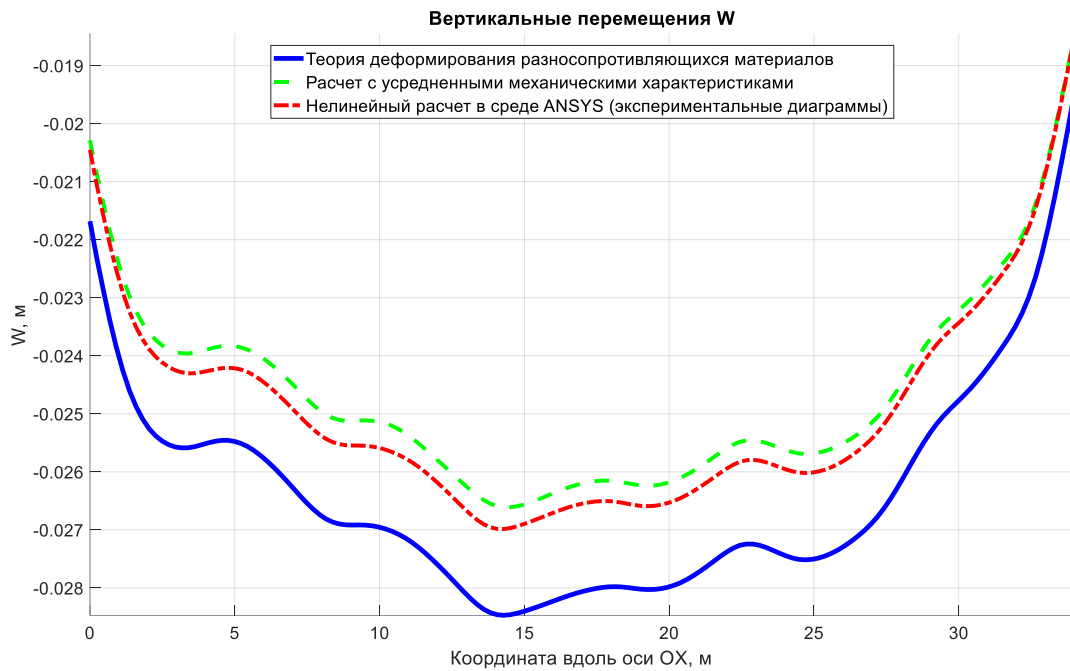


Рисунок 4.75 – Вертикальные перемещения (прогибы), фундаментальная плита, по линии O'X (рисунок 4.66)

На рисунках 4.76, 4.77 показано распределение вертикальных перемещений (прогибов) в срединной поверхности плиты перекрытия 18 этажа, при максимальной нагрузке (см. таблицу 4.6). Величины прогибов, рассчитанные с помощью предлагаемой в диссертации модели, отличаются от полученных с помощью модели № 2 на 10% (среднее значение) и на 19% от результатов, полученных при использовании модели № 3.

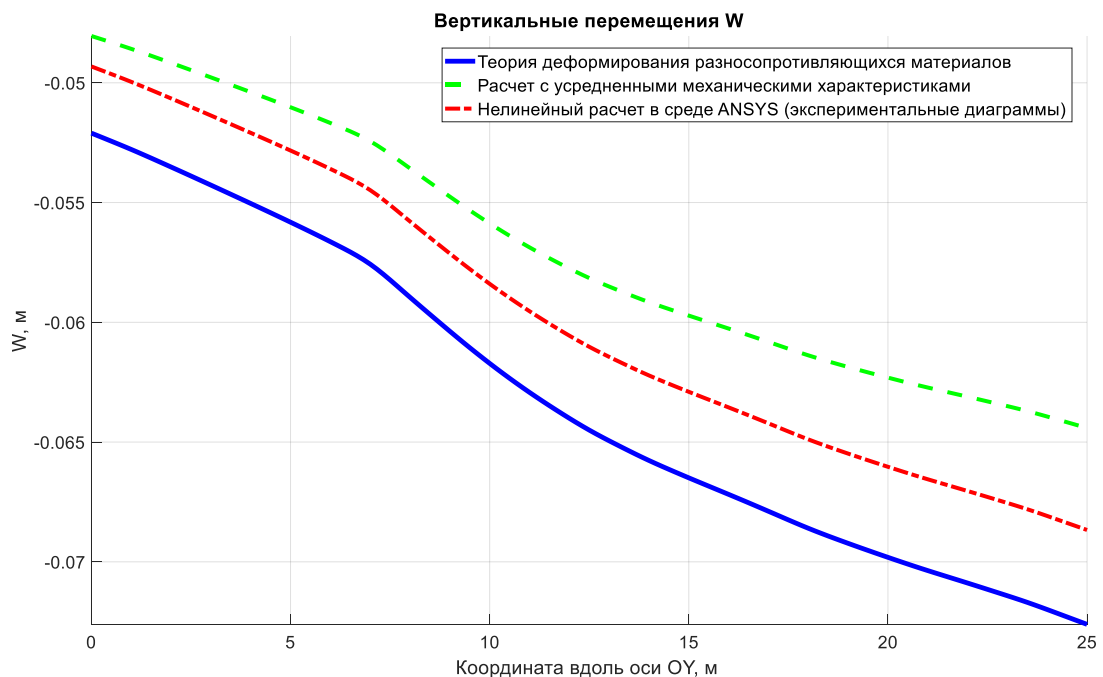


Рисунок 4.76 – Вертикальные перемещения (прогибы), плита перекрытия 18 этажа, по линии O'Y' (рисунок 4.66)

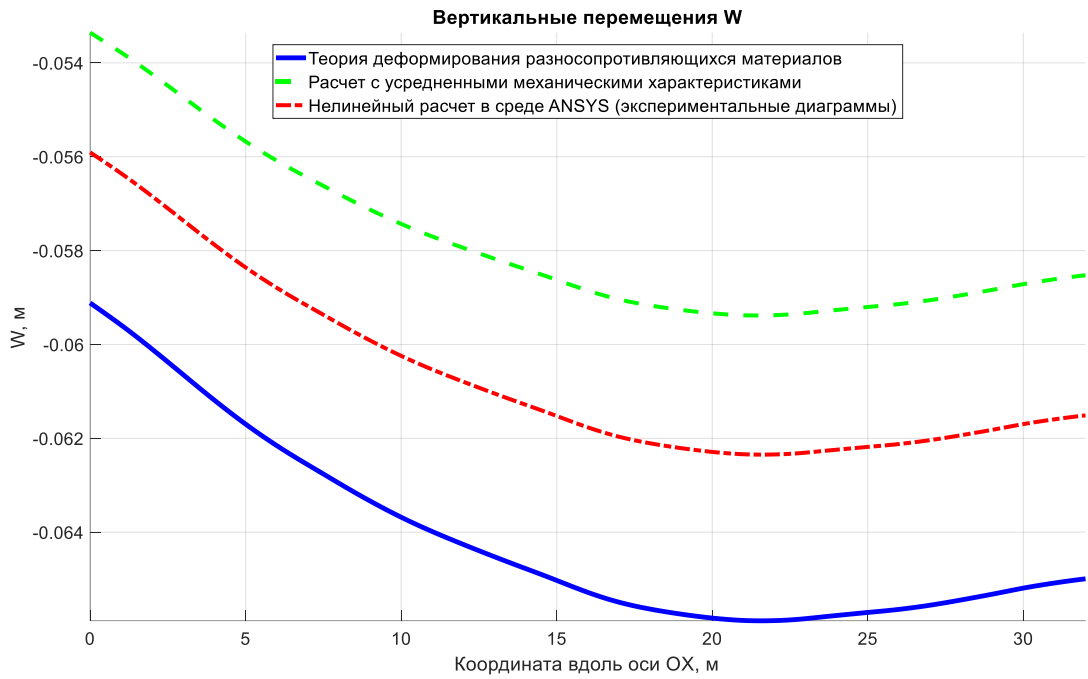


Рисунок 4.77 – Вертикальные перемещения (прогибы),
плита перекрытия 18 этажа, по линии O'X (рисунок 4.66)

На рисунках 4.78, 4.79 показано распределение вертикальных перемещений (прогибов) в срединной поверхности плиты перекрытия 25 этажа, при максимальной нагрузке (см. таблицу 4.6). Величины прогибов, рассчитанные с помощью предлагаемой в диссертации модели, отличаются от полученных с помощью модели № 2 на 12% (среднее значение) и на 22% от результатов, полученных при использовании модели № 3.

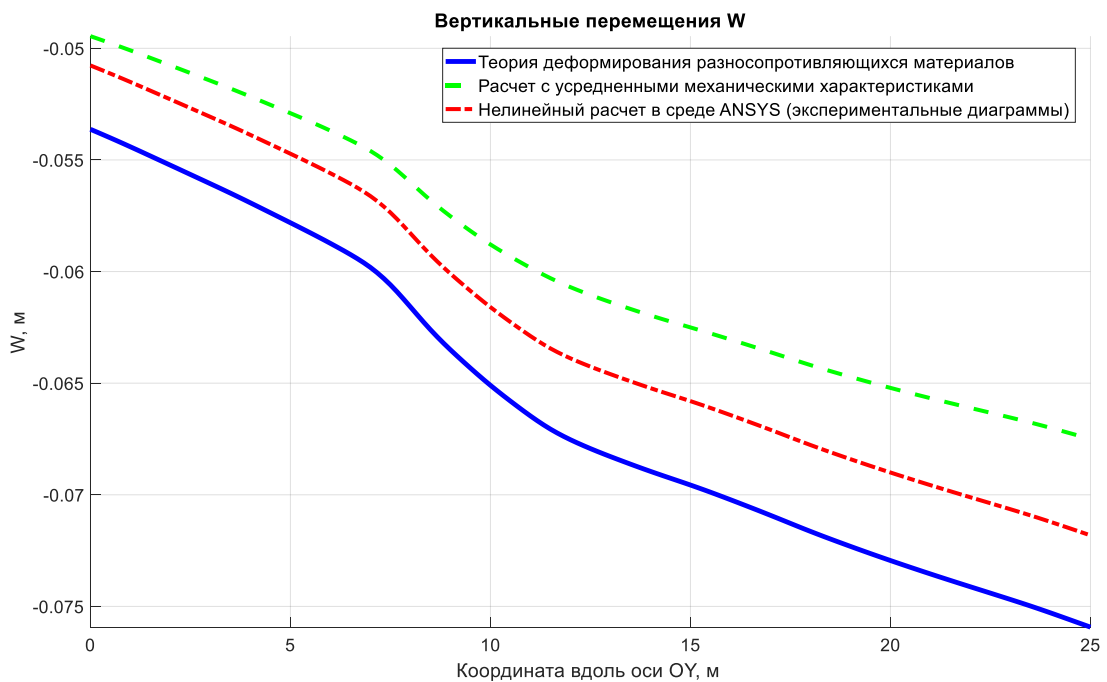


Рисунок 4.78 – Вертикальные перемещения (прогибы),
плита перекрытия 25 этажа, по линии O'Y' (рисунок 4.66)

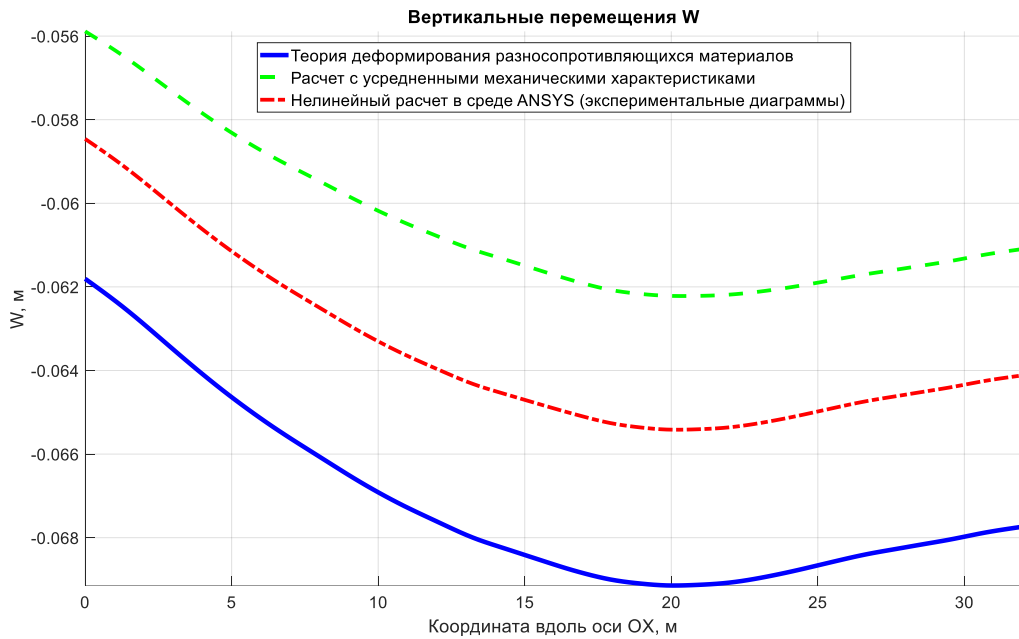


Рисунок 4.79 – Вертикальные перемещения (прогибы),
плита перекрытия 25 этажа, по линии O'X (рисунок 4.66)

На рисунках 4.80, 4.81 показано распределение горизонтальных перемещений в срединной поверхности плиты перекрытия 25 этажа, при максимальной нагрузке (см. таблицу 4.6). Величины перемещений, рассчитанные с помощью предлагаемой в диссертации модели, отличаются от полученных с помощью модели № 2 на 9% (среднее значение) и на 28% от результатов, полученных при использовании модели № 3.

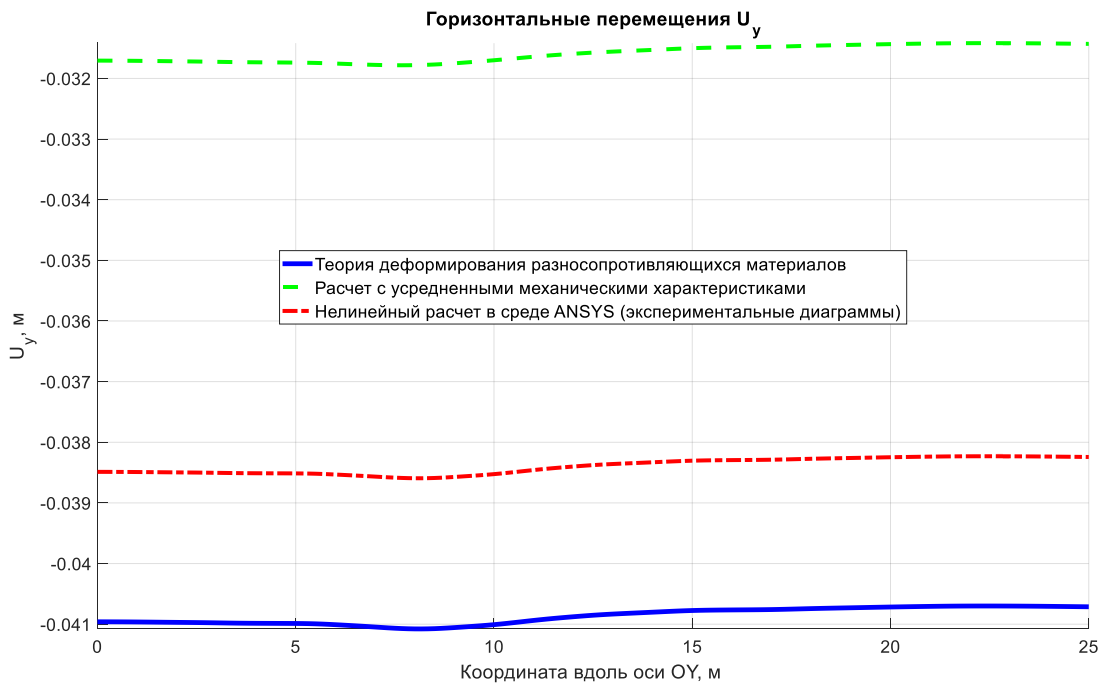


Рисунок 4.80 – Горизонтальные смещения точек плиты перекрытия 25 этажа,
по линии O'Y' (рисунок 4.66)

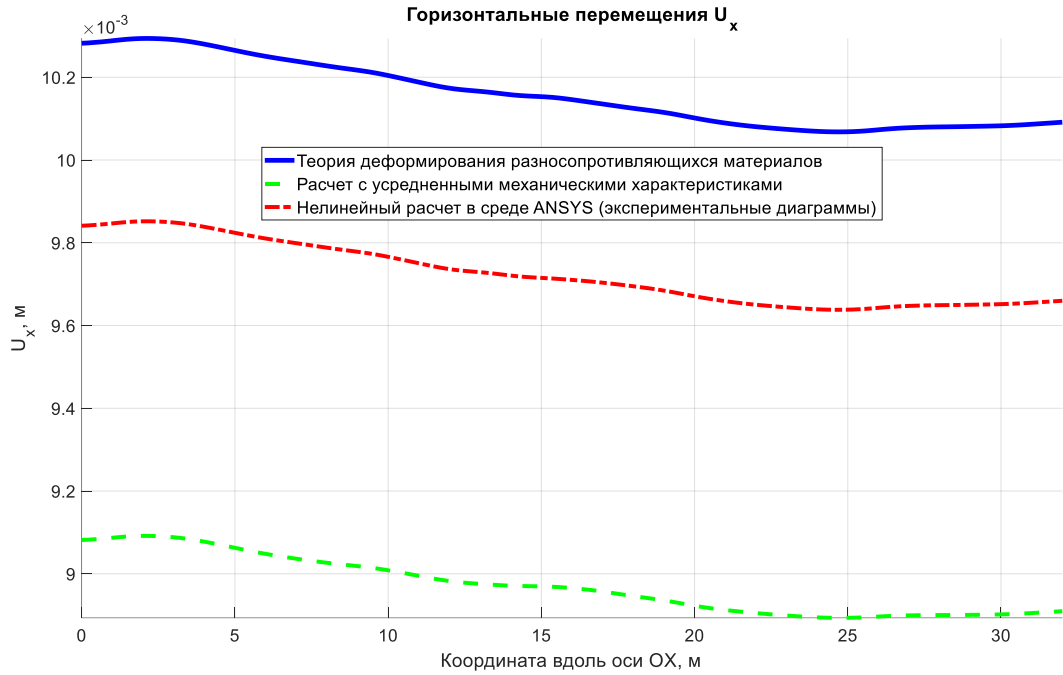


Рисунок 4.81 – Горизонтальные смещения точек плиты перекрытия 25 этажа, по линии O’X (рисунок 4.66)

На рисунках 4.82-4.84 приведена зависимость горизонтального перемещения в направлении X для пилонов А, В, С (см. рисунок 4.70, 25-ый этаж) от величины нагрузки (в долях). Разница по перемещениям между предлагаемой автором моделью и нелинейным расчетом в системе ANSYS достигает 5-7% при максимальной нагрузке и до 14-18% с расчетом без учета эффектов разнородности.

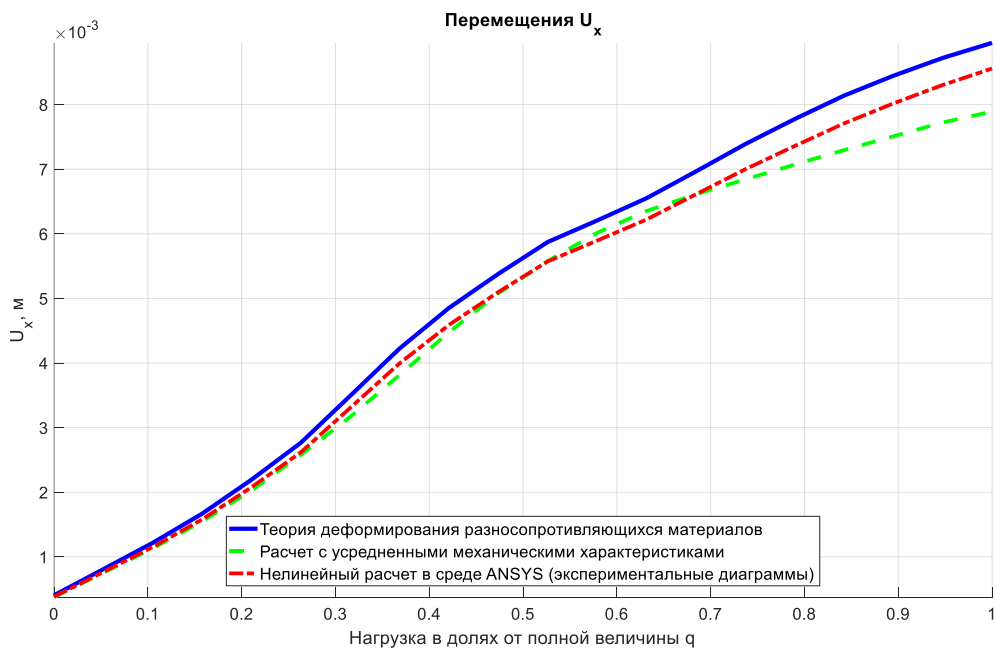


Рисунок 4.82 – Горизонтальные смещения точки в центре пилона А 25 этажа от нагрузки в долях, в направлении X (рисунок 4.70)

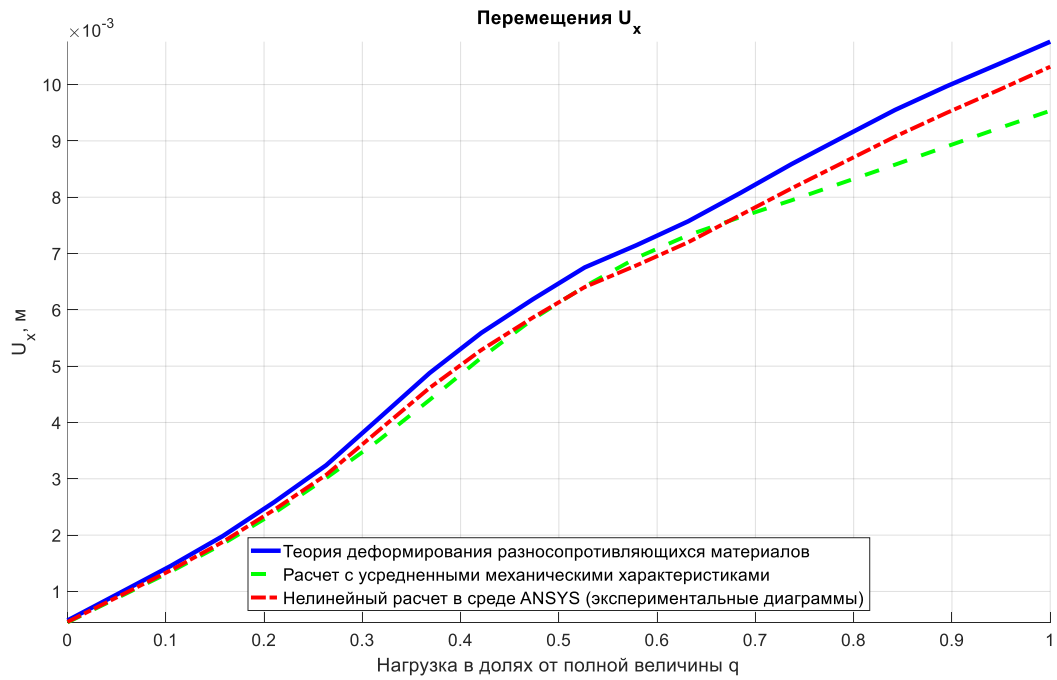


Рисунок 4.83 – Горизонтальные смещения точки в центре пилона В 25 этажа от нагрузки в долях, в направлении X (рисунок 4.70)

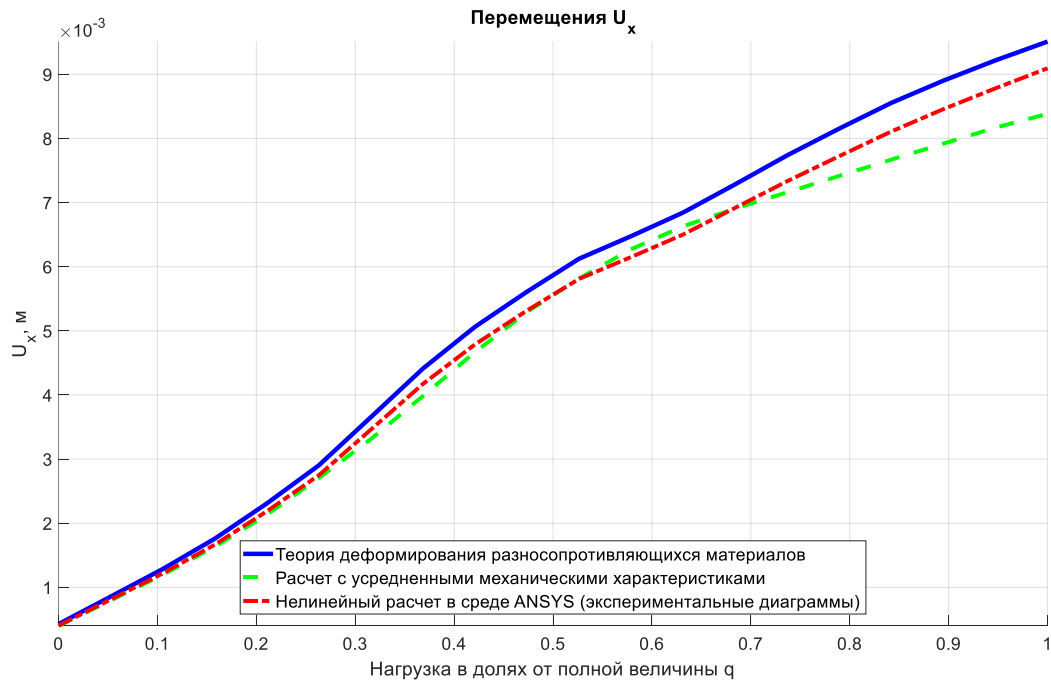


Рисунок 4.84 – Горизонтальные смещения точки в центре пилона С 25 этажа от нагрузки в долях, в направлении X (рисунок 4.70)

На рисунке 4.85 приведена зависимость горизонтального перемещения в направлении Y для пилона D (см. рисунок 4.70, 25-ый этаж) от величины нагрузки (в долях). Разница по перемещениям между предлагаемой автором моделью и

нелинейным расчетом в системе ANSYS достигает 9% при максимальной нагрузке и до 26% с расчетом без учета эффектов разнсопротивляемости.

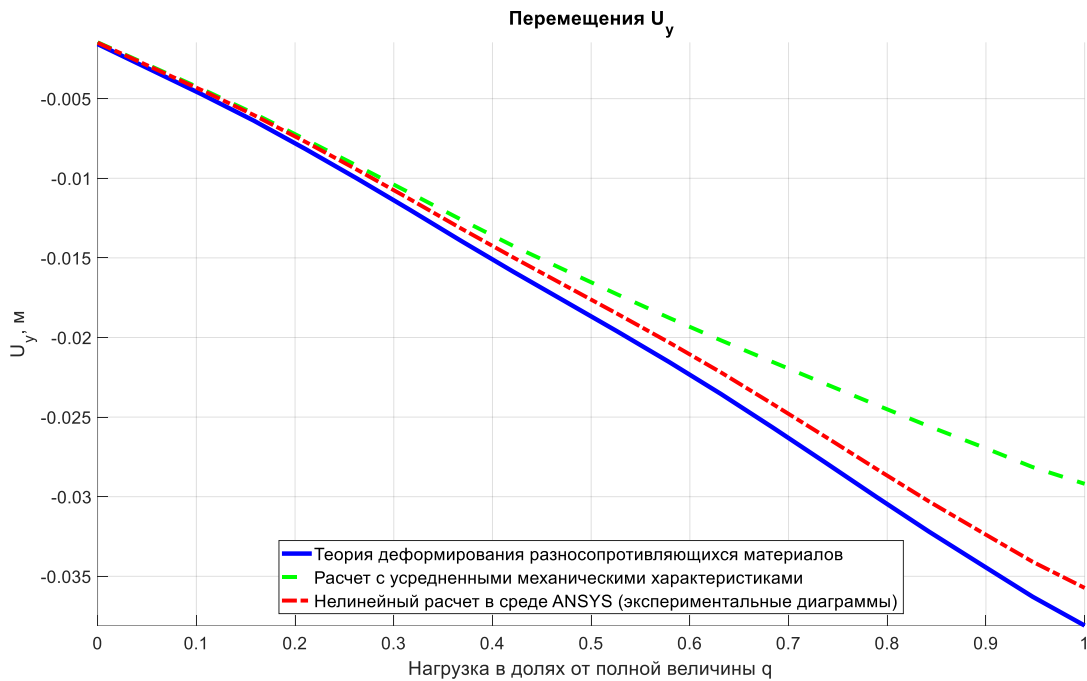


Рисунок 4.85 – Горизонтальные смещения точки в центре пилона D 25 этажа от нагрузки в долях, в направлении Y (рисунок 4.70)

На рисунках 4.86, 4.87 показаны зависимости максимального вертикального перемещения в точках P1, P2 (см. рисунок 4.71, для плиты перекрытия 25-го этажа) от величины нагрузки (в долях).

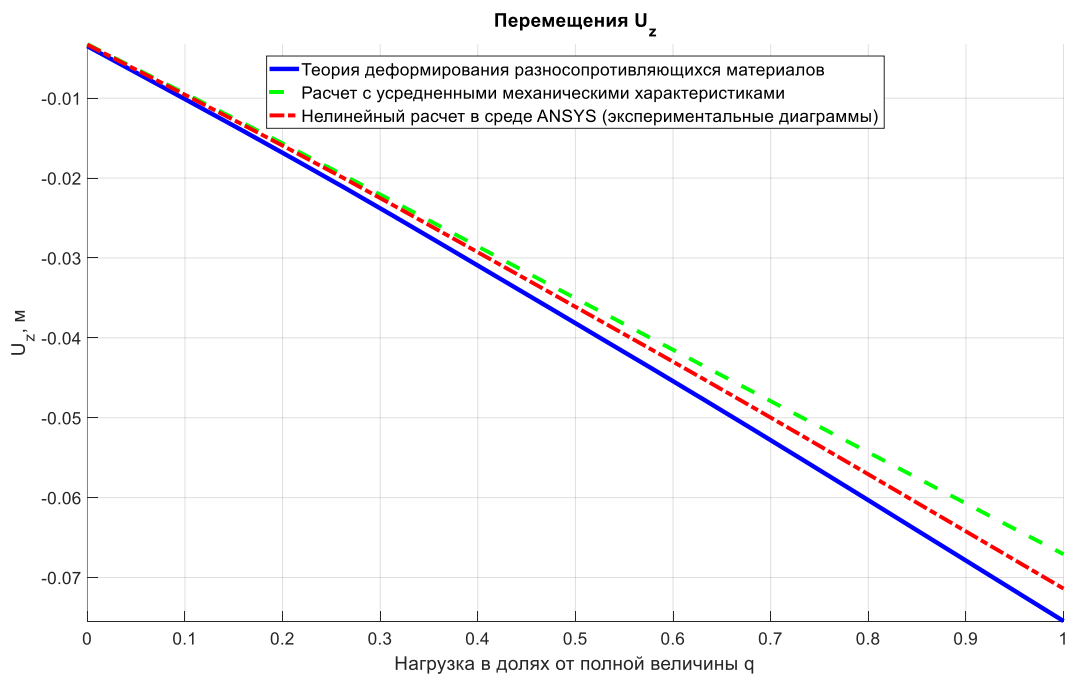


Рисунок 4.86 – Прогиб w (U_z) в точке P1 плиты перекрытия 25-ого этажа от нагрузки в долях (рисунок 4.71)

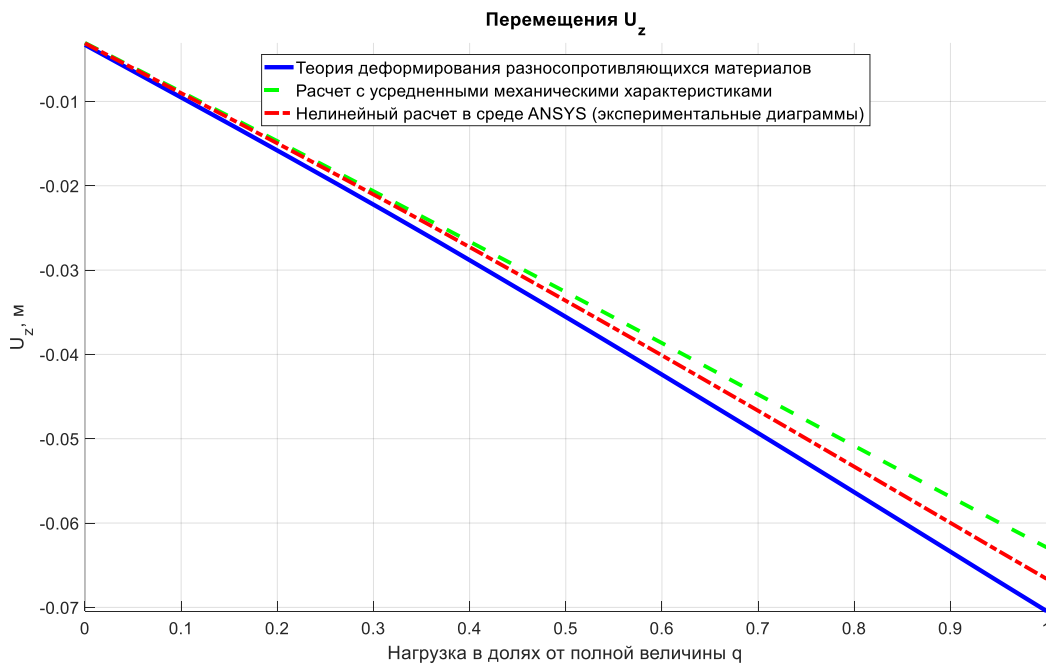


Рисунок 4.87 – Прогиб w (U_z) в точке P2 плиты перекрытия 25-ого этажа от нагрузки в долях (рисунок 4.71)

На рисунках 4.88, 4.89 показаны зависимости максимального вертикального перемещения в точках P3, P4 (см. рисунок 4.71, для плиты перекрытия 18-го этажа) от величины нагрузки (в долях). Разница по вычисленным вертикальным перемещениям (прогибам) между предлагаемой автором моделью и нелинейным расчетом в системе ANSYS достигает 6-9% при максимальной нагрузке и до 8-12% с расчетом без учета эффектов разнородности.

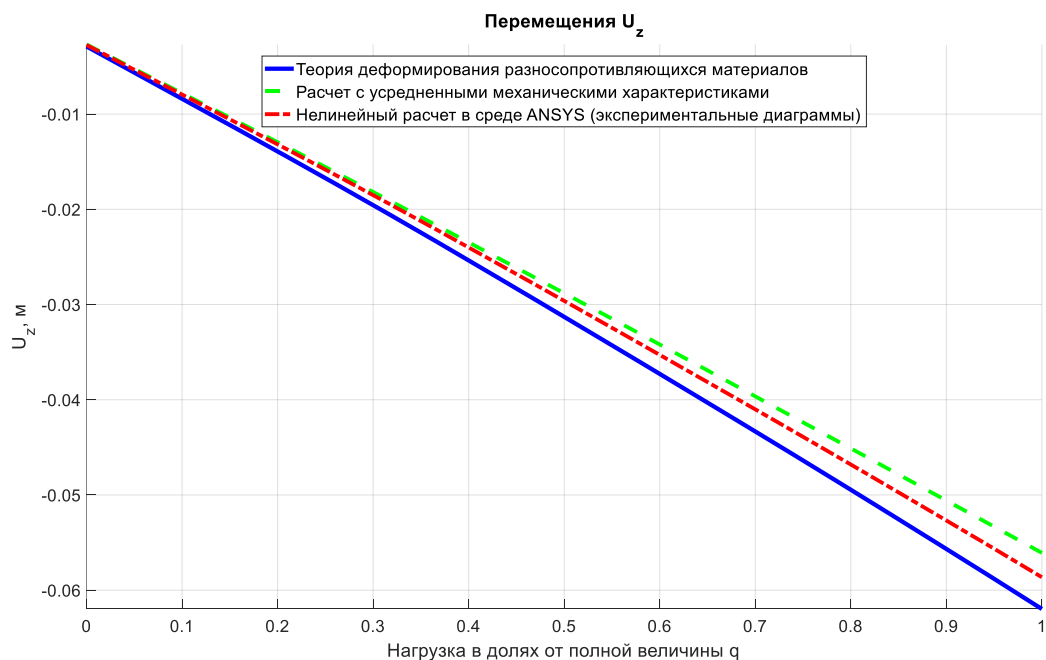


Рисунок 4.88 – Прогиб w (U_z) в точке P3 плиты перекрытия 18-ого этажа от нагрузки в долях (рисунок 4.71)

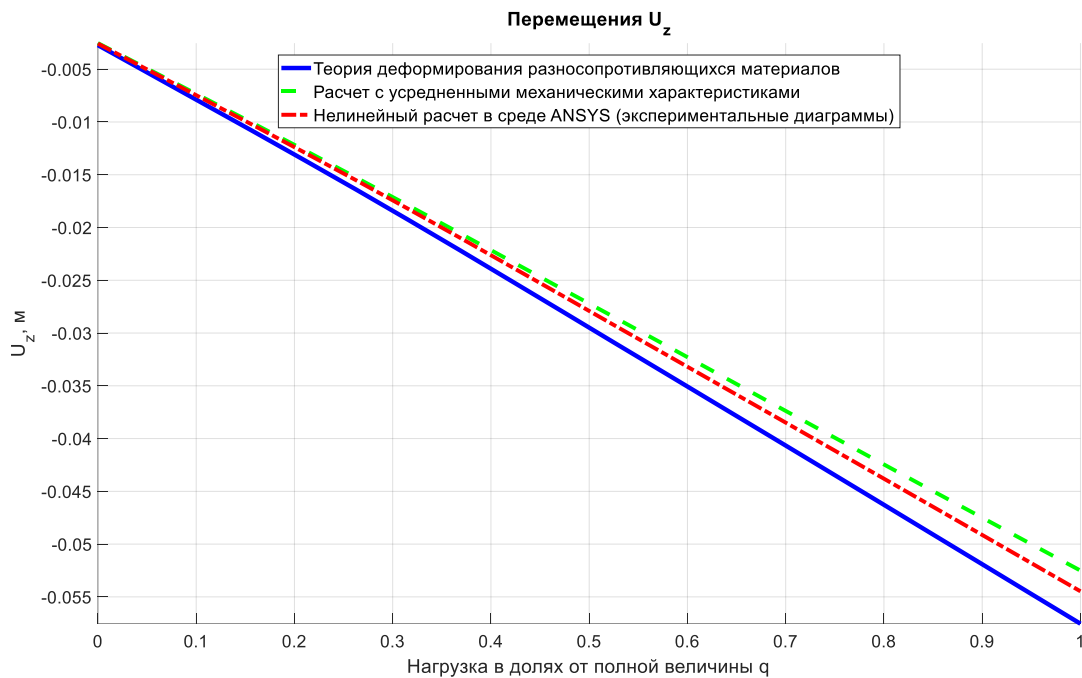


Рисунок 4.89 – Прогиб w (U_z) в точке Р4 плиты перекрытия 18-ого этажа от нагрузки в долях (рисунок 4.71)

Анализ массива полученных данных по расчёту НДС системы «здание-основание» позволяет оценить использованную для расчётного моделирования теоретическую основу, предлагаемую в диссертационной работе.

Например, проведённый численный эксперимент по решению задачи об определении НДС здания позволяет утверждать, что использованная расчётная модель обладает рядом преимуществ перед существующими, которые реализованы в популярных САЕ системах. Предложенная модель учитывает разнородность материала, образование трещин, пластические деформации в арматуре. Разработанный конечный элемент имеет форму, удобную для его использования в оригинальном программном обеспечении расчётного моделирования. При этом нет затруднений в определении НДС конструкций, в составе которых имеются упругие несущие элементы и элементы с нелинейными свойствами, перечисленными выше.

Неучёт зависимости физико-механических свойств материалов (в том числе грунтов многослойного деформируемого основания) от вида и количественных характеристик напряжённого состояния, а также эффектов, связанных с повреждаемостью в форме трещинообразования в железобетонных конструкциях, приводит к

значительным погрешностям при вычислении значений характеристик НДС строительных конструкций.

Получение достоверных результатов расчётного моделирования с учётом влияния «усложнённых» свойств материалов является важным фактором профилактики развития аварийных состояний отдельных несущих элементов и конструкции в целом.

4.6 Выводы по главе 4

1. Определены компоненты матрицы жёсткости модифицированного конечного элемента, имеющего треугольную форму со сторонами без промежуточных узлов. Конечный элемент имеет пять степеней свободы в узле и классифицируется как гибридный. Алгоритм его построения использовал теорию деформирования начально-изотропных материалов, свойства которых зависят от компонентного состава тензора напряжений. Матрица необходима для описания механического поведения конструкций здания, с учётом повреждаемости в форме трещинообразования, пластических деформаций в арматуре, нагельного эффекта. Приведены все необходимые уравнения МКЭ, которые могут потребоваться при решении расчётных задач.

2. С применением разработанного программного обеспечения решён ряд задач по определению характеристик НДС:

– трубчатых железобетонных элементов при чистом кручении (использовались данные экспериментов, выполненных в НИИЖБ Э.Г. Елагиным). Проведено сравнение с экспериментальными данными и теорией Н.И. Карпенко, получено хорошее совпадение результатов;

– цилиндрической оболочки, выполненной из макрооднородного разносопротивляющегося материала. В качестве конкретного материала был использован графит марки АРВ. Результаты расчёта показали, что при учёте разносопротивляемости удаётся получить уточнение результатов в сравнении с «классической теорией» оболочек. Разница составила до 33% для перемещений и углов поворота. Осреднённое значения разницы по напряжениям достигало 50%;

– жёстко защемлённых вдоль образующих и шарнирно опёртых вдоль образующих цилиндрических бетонных оболочек. Анализ результатов их расчёта показал, что учёт усложнённых свойств важен при проведении статических расчётов. В частности, для перемещений различия составили до 70% по сравнению с расчётами без учёта усложнённых свойств бетона.

– оболочки положительной гауссовой кривизны прямоугольной в плане, опёртой на фермы по контуру. Показано, что учёт трещинообразования, пластических деформаций арматуры, а также разносопротивляемости бетона имеет значимое влияние для расчёта НДС соответствующих конструкций.

3. Определены элементы матрицы жёсткости модификации объёмного конечного элемента с формой тетраэдра, узлы которого наделены тремя степенями свободы. Конечный элемент относится к классу изопараметрических. Использование универсальных определяющих соотношений для изотропных материалов позволило учесть наличие эффектов, определяемых зависимостью их свойств от элементного состава тензора напряжений. Приведены все необходимые уравнения МКЭ, которые потребовались для решения прикладных задач диссертационного исследования. Определены константы потенциала W_I для некоторых типов грунтов.

4. На базе метода «переменных параметров упругости» разработан и апробирован алгоритм для определения характеристик НДС системы «здание-основание» из материалов с «усложнёнными» свойствами. Этот алгоритм стал основой для разработки программного комплекса, призванного упростить и автоматизировать процесс определения НДС. Результаты расчётного моделирования распределения характеристик НДС по несущим элементам системы «здание + основание» позволяет обоснованно утверждать, что данная модель обладает рядом преимуществ перед существующими, реализованными в популярных САЕ системах. Модель позволяет учесть зависимость физико-механических свойств материала от НДС, повреждаемость в форме трещинообразования, пластические деформации в арматуре. Разработанный для расчётного моделирования конечный элемент получен в форме, удобной для его использования в программном обеспечении расчётного моделирования. Это продемонстрировано в данной работе на примере решённых

разнообразных задач. Новый конечный элемент не вносит каких-либо осложнений при его применении для расчёта НДС комбинированных систем, включающим несущие элементы из материалов с линейными свойствами.

5. Произведена качественная и количественная оценка результатов расчёта с помощью конечно-элементной модели, состоящей из плоских треугольных и трёхмерных, в форме тетраэдра, конечных элементов. Анализ полученных результатов позволил установить необходимость учёта разнотелости материала на всех стадиях работы конструкции, в том числе – при совместной работе с упругим основанием. Показано, что учёт особых, неклассических эффектов работы материалов, в том числе для железобетона, позволяет получить уточнение по значениям различных характеристик НДС на величину в среднем до 21%. Это значение зависит от использованных значений характеристик материала по сравнению с характеристиками, назначаемыми в рамках упрощённых теорий работы основания и моделирования свойств бетона.

5 РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ О ВОЗДЕЙСТВИИ АКТИВНЫХ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ СРЕД

5.1 Применение МКЭ к связанным задачам термоупругости для значимо нелинейных разносопротивляющихся материалов

5.1.1 Описание основных уравнений необходимых для решения задачи связанной термоупругости

Система уравнений, построенная в рамках МКЭ [64], для решения практических задач связанной термоупругости в механике при малых изменениях температуры на каждом шаге расчёта $\theta/T_0 \ll 1$ и нагрузках, которые можно полагать статическими, могут описываться следующей формы уравнением [266]:

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [C^{uu}] & [C^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{T}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [K^{uu}] \\ [0] & [K^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix}, \quad (5.1)$$

здесь $[K]$ – матрица жёсткости КЭ в локальной системе координат (ЛСК), для КЭ в форме тетраэдра без промежуточных узлов, только при механическом нагружении; $[K^{uu}]$ – термоупругая составляющая для уравнения МКЭ; $[K^t]$ – матрица характеризующая процессы теплопроводности в материале; $[C^t]$ – матрица температурного затухания; $[C^{uu}]$ – матрица термоупругого затухания; $\{u\}$ – вектор-столбец узловых перемещений; $\{T\}$ – вектор-столбец для температур в узлах дискретизации сетки КЭ; $\{\dot{u}\}$ – вектор-столбец скоростей изменения, производных от $\{u\}$; $\{\dot{T}\}$ – вектор скоростей изменения (производных от) $\{T\}$. При проведении аппроксимации производных по времени применим разностную схему, описанную в работе [156]; также, здесь – $\{F\}$ вектор сопряжённых переменных, механических нагрузок в узлах; соответственно, $\{Q\}$ – вектор температурных нагрузок в узлах сетки.

Производные по времени для перемещений и температур представим с помощью известной разностной схемы первого порядка [38]. Основное уравнение МКЭ (5.1) элементарно преобразуется к следующему виду:

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [C^{uu}] & [C^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{u - u_{i-1}}{\Delta t} \\ \frac{T - T_{i-1}}{\Delta t} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ [0] & [K^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix}, \quad (5.2)$$

где Δt – выбранный шаг по времени, в идеале постоянный, дискретизации величин по времени для вычисления производных, u_{i-1} , T_{i-1} – значения перемещений и температур в узлах на предыдущем разностном шаге.

Соответственно, для каждого отдельного временного шага по времени можно записать следующее уравнение в матричной форме, аналогично [156]:

$$\begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ \left[\frac{1}{\Delta t} C^{uu} \right] & \left[K^t + \frac{1}{\Delta t} C^t \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ Q + \frac{1}{\Delta t} [C^{uu}] \{u_{i-1}\} + [C^t] \frac{\{T_{i-1}\}}{\Delta t} \end{Bmatrix}. \quad (5.3)$$

5.2 Вычисление отдельных составляющих для основного уравнения МКЭ

Процедура построения матрицы жёсткости объёмного изопараметрического КЭ в форме тетраэдра при механическом нагружении была ранее проведена в разделе 4.4.

5.2.1 Термоупругая компонента для матрицы жёсткости

Матрица, отвечающая за термоупругую часть для матрицы жёсткости, может быть получена в соответствии выражением [164]:

$$[K^{ut}] = - \iiint_{vol} [B]^T \{\beta\} ([C]^T) dx \cdot dy \cdot dz, \quad (5.4)$$

причём $\{\beta\} = [D]\{\chi\}$ и $\{\chi\} = \{\chi_{11} \quad \chi_{22} \quad \chi_{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$ – вектор-столбец коэффициентов линейного температурного расширения по отдельным осям.

Коэффициенты линейного температурного расширения примем зависящими от значений фактически наблюдаемых характеристик напряжённого состояния [218]:

$$\chi_{ij} = \frac{b_{i1} \xi \sigma_{ij}}{3\sigma} + \frac{1}{3} b_{i2} \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.5)$$

При отсутствии загрузки из выражения (5.5) эффективно получаем

$\chi_{11} = \chi_{11} = \chi_{11} = \chi = \frac{1}{3}b_{t2}$. Откуда получаем матричное выражение для вектора $\{\beta\}$:

$$\{\beta\} = [D]\{\chi\} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1113} \\ & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2213} \\ & & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3313} \\ & & & D_{1212} & D_{1223} & D_{1213} \\ & \text{sim} & & & D_{2323} & D_{2313} \\ & & & & & D_{1313} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1113} \\ & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2213} \\ & & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3313} \\ & & & D_{1212} & D_{1223} & D_{1213} \\ & \text{sim} & & & D_{2323} & D_{2313} \\ & & & & & D_{1313} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{b_{t1}\xi\sigma_{11}}{3\sigma} + \frac{1}{3}b_{t2} \\ \frac{b_{t1}\xi\sigma_{22}}{3\sigma} + \frac{1}{3}b_{t2} \\ \frac{b_{t1}\xi\sigma_{33}}{3\sigma} + \frac{1}{3}b_{t2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{Bmatrix}.$$

Из формулы выше получаем расшифровку для компонент вектора $\{\beta\}$:

$$\beta_1 = \frac{b_{t1}\xi}{3\sigma}(D_{1111}\sigma_{11} + D_{1122}\sigma_{22} + D_{1133}\sigma_{33}) + \frac{1}{3}b_{t2}(D_{1111} + D_{1122} + D_{1133});$$

$$\beta_2 = \frac{b_{t1}\xi}{3\sigma}(D_{1122}\sigma_{11} + D_{2222}\sigma_{22} + D_{2233}\sigma_{33}) + \frac{1}{3}b_{t2}(D_{1122} + D_{2222} + D_{2233});$$

$$\beta_3 = \frac{b_{t1}\xi}{3\sigma}(D_{1133}\sigma_{11} + D_{2233}\sigma_{22} + D_{3333}\sigma_{33}) + \frac{1}{3}b_{t2}(D_{1133} + D_{2233} + D_{3333});$$

$$\beta_4 = \frac{b_{t1}\xi}{3\sigma}(D_{1112}\sigma_{11} + D_{2212}\sigma_{22} + D_{3312}\sigma_{33}) + \frac{1}{3}b_{t2}(D_{1112} + D_{2212} + D_{3312});$$

$$\beta_5 = \frac{b_{t1}\xi}{3\sigma}(D_{1123}\sigma_{11} + D_{2223}\sigma_{22} + D_{3323}\sigma_{33}) + \frac{1}{3}b_{t2}(D_{1123} + D_{2223} + D_{3323});$$

$$\beta_6 = \frac{b_{t1}\xi}{3\sigma}(D_{1113}\sigma_{11} + D_{2213}\sigma_{22} + D_{3313}\sigma_{33}) + \frac{1}{3}b_{t2}(D_{1113} + D_{2213} + D_{3313}).$$

Далее, очевидным образом, получим элементы матрицы $[K^{ut}]$, используя

приведённые выше выражения:

$$[K^{ut}] = -\iiint_{vol} [B]^T \{\beta\} ([C]^T) dx \cdot dy \cdot dz =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \iiint_{vol} \frac{1}{6V_i} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} \frac{V_{m234}}{V_i} dx \cdot dy \cdot dz = \\
 &= - \frac{1}{6V_i} \begin{pmatrix} b_k \beta_1 + c_k \beta_4 + d_k \beta_6 \\ c_k \beta_2 + b_k \beta_4 + d_k \beta_5 \\ d_k \beta_3 + c_k \beta_5 + b_k \beta_6 \end{pmatrix} \iiint_{vol} \frac{V_{m234}}{V_i} dx \cdot dy \cdot dz = \\
 &= - \frac{1}{6V_i} \begin{pmatrix} b_k \beta_1 + c_k \beta_4 + d_k \beta_6 \\ c_k \beta_2 + b_k \beta_4 + d_k \beta_5 \\ d_k \beta_3 + c_k \beta_5 + b_k \beta_6 \end{pmatrix} \iiint_{vol} \frac{h}{H} d(H-h) d \left(S_1 \frac{H-h}{H} \right) = \\
 &= - \frac{1}{6V_i} \begin{pmatrix} b_k \beta_1 + c_k \beta_4 + d_k \beta_6 \\ c_k \beta_2 + b_k \beta_4 + d_k \beta_5 \\ d_k \beta_3 + c_k \beta_5 + b_k \beta_6 \end{pmatrix} \frac{S_1}{H^2} \frac{H^3}{6} = - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} b_k \beta_1 + c_k \beta_4 + d_k \beta_6 \\ c_k \beta_2 + b_k \beta_4 + d_k \beta_5 \\ d_k \beta_3 + c_k \beta_5 + b_k \beta_6 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

5.2.2. Элемент матрицы теплопроводности

Матрица теплопроводности [266] вычисляется так:

$$[K^t] = \iiint_{vol} [B_T]^T [D_T] [B_T] dx \cdot dy \cdot dz \quad (5.6)$$

где $[B]_T = \{J\}\{C\}\{C\}^T \{T\}$; $\{J\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T$ – дифференциальный оператор; λ

– коэффициент теплопроводности материала для записи $[D_T] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$;

матрица окончательно $[B]_T$, после преобразований, запишется:

$$\begin{aligned}
 [B]_T = \{J\}\{C\}\{C\}^T \{T\} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{6V_i} \begin{pmatrix} a_k + b_k x + \\ + c_k y + d_k z \end{pmatrix} \right\} \left\{ \frac{1}{6V_i} (a_k + b_k x + c_k y + d_k z) \right\} \times \\
 &\times \{T_k\} = \frac{1}{6V_i} \begin{pmatrix} b_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{6V_i} (a_k + b_k x + c_k y + d_k z) \right\} \{T_k\} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6V_i} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6V_i} b_k (a_k + b_k x + c_k y + d_k z) \\ \frac{1}{6V_i} c_k (a_k + b_k x + c_k y + d_k z) \\ \frac{1}{6V_i} d_k (a_k + b_k x + c_k y + d_k z) \end{array} \right\} \{T_k\} = \frac{1}{6V_i} \left\{ \begin{array}{l} b_k \frac{V_m}{V_i} \\ c_k \frac{V_m}{V_i} \\ d_k \frac{V_m}{V_i} \end{array} \right\} \{T_k\} = \frac{V_m}{6V_i^2} \left\{ \begin{array}{l} b_k \\ c_k \\ d_k \end{array} \right\} \{T_k\} = \frac{T_k \cdot V_m}{6V_i^2} \left\{ \begin{array}{l} b_k \\ c_k \\ d_k \end{array} \right\}.$$

Расчёт элементов матрицы $[K^t]$:

$$\begin{aligned} [K^t] &= \iiint_{vol} [B_T]^T [D_T] [B_T] dV = \iiint_{vol} \frac{T_j \cdot V_m}{6V_i^2} \{b_j \quad c_j \quad d_j\} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \frac{T_k \cdot V_m}{6V_i^2} \left\{ \begin{array}{l} b_k \\ c_k \\ d_k \end{array} \right\} dV = \\ &= \iiint_{vol} \frac{T_j \cdot V_m}{6V_i^2} \{b_j \lambda_{11} \quad c_j \lambda_{22} \quad d_j \lambda_{33}\} \frac{T_k \cdot V_m}{6V_i^2} \left\{ \begin{array}{l} b_k \\ c_k \\ d_k \end{array} \right\} dV = \\ &= \iiint_{vol} \frac{T_j \cdot V_m}{6V_i^2} \{b_j b_k \lambda_{11} + c_j c_k \lambda_{22} + d_j d_k \lambda_{33}\} \frac{T_k \cdot V_m}{6V_i^2} dV = \\ &= \frac{T_j T_k}{36V_i^2} \{b_j b_k \lambda_{11} + c_j c_k \lambda_{22} + d_j d_k \lambda_{33}\} \iiint_{vol} \frac{V_m^2}{V_i^2} dV = \\ &= \frac{T_j T_k}{36V_i^2} \{b_j b_k \lambda_{11} + c_j c_k \lambda_{22} + d_j d_k \lambda_{33}\} \iiint_{vol} \frac{h^2}{H^2} d(H-h) d\left(S_1 \frac{H-h}{H}\right) = \\ &= \frac{T_j T_k}{36V_i^2} \{b_j b_k \lambda_{11} + c_j c_k \lambda_{22} + d_j d_k \lambda_{33}\} \iint_h \frac{h^2}{H^2} \frac{S_1}{H} dh dh = \\ &= \frac{T_j T_k}{36V_i^2} \{b_j b_k \lambda_{11} + c_j c_k \lambda_{22} + d_j d_k \lambda_{33}\} \left(S_1 \frac{h^4}{12H^3}\right) \Big|_0^H = \frac{T_j T_k}{36V_i^2} \left\{ \begin{array}{l} b_j b_k \lambda_{11} + c_j c_k \lambda_{22} \\ + d_j d_k \lambda_{33} \end{array} \right\} \left(S_1 \frac{H^4}{12H^3}\right) = \\ &= \frac{T_j T_k}{36V_i^2} \{b_j b_k \lambda_{11} + c_j c_k \lambda_{22} + d_j d_k \lambda_{33}\} \frac{S_1 H}{12} = \frac{T_j T_k}{36V_i^2} \{b_j b_k \lambda_{11} + c_j c_k \lambda_{22} + d_j d_k \lambda_{33}\} \frac{V_i}{4} = \\ &= \frac{T_j T_k}{144V_i} \{b_j b_k \lambda_{11} + c_j c_k \lambda_{22} + d_j d_k \lambda_{33}\}. \end{aligned}$$

5.2.3. Расчёт матриц термоупругого и температурного затухания

Матрица термоупругого затухания может быть исчислена из выражения

$$[C^{tu}] = -T_0 [K^{ut}]^T = -\frac{T_0}{12} \left(\begin{array}{l} b_k \beta_1 + c_k \beta_4 + d_k \beta_6 \\ c_k \beta_2 + b_k \beta_4 + d_k \beta_5 \\ d_k \beta_3 + c_k \beta_5 + b_k \beta_6 \end{array} \right)^T, \quad (5.7)$$

где T_0 – начальная температура.

Матрицу температурного затухания определим по [266]:

$$\begin{aligned} [C^t] &= \rho \iiint_{vol} C_\sigma \{C\} \{C\}^T dx \cdot dy \cdot dz = \rho \iiint_{vol} C_\sigma \left\{ \frac{1}{6V_i} (a_k + b_k x + c_k y + d_k z) \right\}^2 dx \cdot dy \cdot dz = \\ &= \rho C_\sigma \iiint_{vol} \frac{V_m^2}{V_i^2} dx \cdot dy \cdot dz = \frac{V_i}{4} \rho C_\sigma, \end{aligned} \quad (5.8)$$

здесь ρ – плотность материала; C_σ – значение теплоёмкости материала при постоянном напряжении.

5.3. Матрица жёсткости объёмного КЭ

Итого, учитывая все вышеприведённое, запишем основное уравнение МКЭ в следующей форме:

$$[K]_i \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q^{fic}\} \end{Bmatrix}, \quad (5.9)$$

где $[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} & [K]_{i1}^{(4)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} & [K]_{i2}^{(4)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} & [K]_{i3}^{(4)} \\ [K]_{i4}^{(1)} & [K]_{i4}^{(2)} & [K]_{i4}^{(3)} & [K]_{i4}^{(4)} \end{bmatrix}$ – полная матрица жёсткости объёмного

КЭ для решения задач термоупругости; $\{F\}$ – вектор узловых нагрузок, только механических; $\{Q^{fic}\} = Q - \frac{T_0}{12 \cdot \Delta t} \begin{pmatrix} b_k \beta_1 + c_k \beta_4 + d_k \beta_6 \\ c_k \beta_2 + b_k \beta_4 + d_k \beta_5 \\ d_k \beta_3 + c_k \beta_5 + b_k \beta_6 \end{pmatrix}^T \{u^{(x-1)}\} + \frac{V_i}{4} \rho C_\sigma \frac{T^{(x-1)}}{\Delta t}$ – вектор

узловых «фиктивных» температурных нагрузок.

Общий блок матрицы жёсткости можно записать следующим образом:

$$[K]_{ij}^k = \begin{bmatrix} K_{11}^k & K_{12}^k & K_{13}^k & K_{14}^k \\ K_{21}^k & K_{22}^k & K_{23}^k & K_{24}^k \\ K_{31}^k & K_{32}^k & K_{33}^k & K_{34}^k \\ K_{41}^k & K_{42}^k & K_{43}^k & K_{44}^k \end{bmatrix}.$$

Состав типового блока матрицы $[K]_i$ запишется так [220, 224]:

$$\begin{aligned}
 K_{11}^k &= (b_j \cdot D_{1111} + c_j \cdot D_{1112} + d_j \cdot D_{1113}) \cdot b_k + \\
 &+ (b_j \cdot D_{1112} + c_j \cdot D_{1212} + d_j \cdot D_{1213}) \cdot c_k + (b_j \cdot D_{1113} + c_j \cdot D_{1213} + d_j \cdot D_{1313}) \cdot d_k; \\
 K_{12}^k &= (b_j \cdot D_{1122} + c_j \cdot D_{2212} + d_j \cdot D_{2213}) \cdot c_k + \\
 &+ (b_j \cdot D_{1112} + c_j \cdot D_{1212} + d_j \cdot D_{1213}) \cdot b_k + (b_j \cdot D_{1123} + c_j \cdot D_{1223} + d_j \cdot D_{2313}) \cdot d_k; \\
 K_{13}^k &= (b_j \cdot D_{1133} + c_j \cdot D_{3312} + d_j \cdot D_{3313}) \cdot d_k + \\
 &+ (b_j \cdot D_{1123} + c_j \cdot D_{1223} + d_j \cdot D_{2313}) \cdot c_k + (b_j \cdot D_{1113} + c_j \cdot D_{1213} + d_j \cdot D_{1313}) \cdot b_k;
 \end{aligned}$$

$$K_{14}^k = -\frac{1}{12}(b_k \beta_1 + c_k \beta_4 + d_k \beta_6);$$

$$\begin{aligned}
 K_{21}^k &= (c_j \cdot D_{1122} + b_j \cdot D_{1112} + d_j \cdot D_{1123}) \cdot b_k + \\
 &+ (c_j \cdot D_{2212} + b_j \cdot D_{1212} + d_j \cdot D_{1223}) \cdot c_k + (c_j \cdot D_{2213} + b_j \cdot D_{1213} + d_j \cdot D_{2313}) \cdot d_k; \\
 K_{22}^k &= (c_j \cdot D_{2222} + b_j \cdot D_{2212} + d_j \cdot D_{2223}) \cdot c_k + \\
 &+ (c_j \cdot D_{2212} + b_j \cdot D_{1212} + d_j \cdot D_{1223}) \cdot b_k + (c_j \cdot D_{2223} + b_j \cdot D_{1223} + d_j \cdot D_{2323}) \cdot d_k; \\
 K_{23}^k &= (c_j \cdot D_{2233} + b_j \cdot D_{3312} + d_j \cdot D_{3323}) \cdot d_k + \\
 &+ (c_j \cdot D_{2223} + b_j \cdot D_{1223} + d_j \cdot D_{2323}) \cdot c_k + (c_j \cdot D_{2213} + b_j \cdot D_{1213} + d_j \cdot D_{2313}) \cdot b_k;
 \end{aligned}$$

$$K_{24}^k = -\frac{1}{12}(c_k \beta_2 + b_k \beta_4 + d_k \beta_5);$$

$$\begin{aligned}
 K_{31}^k &= (d_j \cdot D_{1133} + c_j \cdot D_{1123} + b_j \cdot D_{1113}) \cdot b_k + \\
 &+ (d_j \cdot D_{3312} + c_j \cdot D_{1223} + b_j \cdot D_{1213}) \cdot c_k + (d_j \cdot D_{3313} + c_j \cdot D_{2313} + b_j \cdot D_{1313}) \cdot d_k; \\
 K_{32}^k &= (d_j \cdot D_{2233} + c_j \cdot D_{2223} + b_j \cdot D_{2213}) \cdot c_k + \\
 &+ (d_j \cdot D_{3312} + c_j \cdot D_{1223} + b_j \cdot D_{1213}) \cdot b_k + (d_j \cdot D_{3323} + c_j \cdot D_{2323} + b_j \cdot D_{2313}) \cdot d_k; \\
 K_{33}^k &= (d_j \cdot D_{3333} + c_j \cdot D_{3323} + b_j \cdot D_{3313}) \cdot d_k + \\
 &+ (d_j \cdot D_{3323} + c_j \cdot D_{2323} + b_j \cdot D_{2313}) \cdot c_k + (d_j \cdot D_{3313} + c_j \cdot D_{2313} + b_j \cdot D_{1313}) \cdot b_k;
 \end{aligned}$$

$$K_{34}^k = -\frac{1}{12}(d_k \beta_3 + c_k \beta_5 + b_k \beta_6); \quad K_{41}^k = -\frac{T_0}{12 \cdot \Delta t}(b_k \beta_1 + c_k \beta_4 + d_k \beta_6);$$

$$K_{42}^k = -\frac{T_0}{12 \cdot \Delta t}(c_k \beta_2 + b_k \beta_4 + d_k \beta_5); \quad K_{43}^k = -\frac{T_0}{12 \cdot \Delta t}(d_k \beta_3 + c_k \beta_5 + b_k \beta_6);$$

$$K_{44}^k = \frac{T_j T_k}{144 V_i} \{b_j b_k \lambda_{11} + c_j c_k \lambda_{22} + d_j d_k \lambda_{33}\} + \frac{V_i}{4 \cdot \Delta t} \rho C_\sigma.$$

5.4 Расчёт НДС оболочек, выполненных из значимо нелинейных начально-изотропных материалов с учётом температуры

5.4.1 Нелинейность решаемых прикладных задач

Нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями совместно с зависимостью механических свойств материалов значений от компонентного состава тензора напряжений, в определенный момент загрузки, обуславливают значимую нелинейность задач, рассматриваемых в настоящем диссертационном исследовании. Кроме того, исследуя условно тонкие пологие оболочки, с допустимыми вертикальными перемещениями, которые, в теории, можно было бы отнести к малым (до 1/10 толщины, воспринимающей нагрузку) был обнаружен эффект, который в САЕ-системах реализации расчётного моделирования получил название «P-delta», а соответствующий тип нелинейности получил название «геометрический». Эффект проявляется в том, что усилия, возникающие в узлах опирания, функционально связаны с поперечным прогибом срединной поверхности оболочки. Чтобы корректно учесть эту связь, требуется учитывать изменение НДС оболочки, прикладывая нагрузки дискретными значениями, причём каждый раз к схеме, деформированной накопленной в предыдущих шагах нагрузкой [60]. Именно такой алгоритм численной реализации учёта геометрической нелинейности может быть реализован и в том случае, когда нелинейность является двухфакторной [145]. В данном случае вторым фактором является нагружение температурой с учётом изменения физико-механических свойств материала, которые имеют влияние на параметры распределения температуры.

Особенностью реализации МКЭ в условиях двухфакторной нелинейности является переформулировка разрешающей системы уравнений метода для изменившейся топологии сетки КЭ (учёт деформируемости схемы) на каждом шаге изменения компонентов нагрузки [164], причём как для силовой, так и для температурной [64]. Важно также иметь в виду проблему допустимой погрешности, которая решается также итерациями, но уже внутри отдельного шага и без учёта изменения геометрии расчётной схемы.

Формализация описанного выше целевого алгоритма проводится введением следующих переменных и параметров:

- $\{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix}$ представляют вектор узлового перемещения и температуры

узла дискретизации расчётной схемы, которые являются целью вычислений;

- $t + \Delta t$ – текущее время и его приращение, связанное с изменениями нагрузки; появление шага по времени означает учёт дискретности перемещений узлов, в том числе, при отсутствии учёта сил инерции;

- $\{\bar{q}^{t+\Delta t}\} = \{\bar{q}^t\} + \{\Delta\bar{q}\}$ – соотношение, устанавливающее связь между начальным и изменённым значениями параметра для каждого шага по времени (или по любому другому параметру);

- $\{\Delta\bar{q}\}$ – вектор приращений искомым значений определяемых переменных;

- $\left[\bar{K}(\{\bar{q}^t\}) \right]$ – матрица жёсткости с компонентами, вычисленными в момент времени t ;

- $\left\{ \Delta\bar{P}(\{\bar{q}^t\}) \right\}$ – вектор узловых нагрузок в текущий момент времени.

Используя введённые переменные и параметры, преобразуем уравнение (5.8) к форме, учитывающей рекомендации [221] относительно пошаговости описания возникновения конечного состояния расчётной схемы:

$$\left[\bar{K}(\{\bar{q}^t\}) \right] \{\Delta\bar{q}\} - \left\{ \Delta\bar{P}(\{\bar{q}^t\}) \right\} = 0, \quad (5.10)$$

5.4.2 Применяемые математические модели

Учёт нелинейности материала в форме зависимости его физических и механических свойств от НДС, может быть реализована двумя различными способами: по деформируемой (иногда считается расчётом с учётом больших перемещений [156, 221]) и в предположении отсутствия влияния поперечных прогибов на значения горизонтальных реакций в опорных узлах. Поскольку речь идёт о решении одной и той же задачи, появляется возможность верификации обязательности применения пошагового двухфакторного вычислительного процесса. Более того, если

проводить получение числовых массивов значений характеристик НДС для каждого из факторов нелинейности и вовсе без их учёта, будет получена возможность оценки влияния каждого из факторов отдельно [129].

Таблица 5.1 – Результаты перерасчёта постоянных потенциала

Идентификатор	Разносопротивляемость (квазилинейная)		Упругость (линейная)		
	Графит АРВ	Бетон $R^- = 28,4$	Графит АРВ	Бетон $R^- = 28,4$	Арматура
E^+ , МПа	3750	14130	4940	15620	206000
E^- , МПа	6130	17110	4940	15620	206000
ν^+	0,2	0,144	0,275	0,174	0,3
ν^-	0,35	0,204	0,275	0,174	0,3
n	1	1	1	1	1
A_e , МПа ⁻¹	$1,567 \cdot 10^{-4}$	$6,374 \cdot 10^{-5}$	$1,366 \cdot 10^{-4}$	$6,261 \cdot 10^{-5}$	$2,913 \cdot 10^{-6}$
B_e , МПа ⁻¹	$4,052 \cdot 10^{-4}$	$1,135 \cdot 10^{-4}$	$3,871 \cdot 10^{-4}$	$1,127 \cdot 10^{-4}$	$9,466 \cdot 10^{-6}$
C_e , МПа ⁻¹	$8,894 \cdot 10^{-5}$	$1,444 \cdot 10^{-5}$	0	0	0
D_e , МПа ⁻¹	$1,345 \cdot 10^{-4}$	$1,601 \cdot 10^{-5}$	0	0	0
E_e , МПа ⁻¹	$2,940 \cdot 10^{-5}$	$2,714 \cdot 10^{-6}$	0	0	0
A_p , МПа ^{(1-2n)/n}	0	0	0	0	0
B_p , МПа ^{(1-2n)/n}	0	0	0	0	0
C_p , МПа ^{(1-2n)/n}	0	0	0	0	0
D_p , МПа ^{(1-2n)/n}	0	0	0	0	0
E_p , МПа ^{(1-2n)/n}	0	0	0	0	0
b_{t1} , 1/K	$-1,732 \cdot 10^{-6}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$
b_{t2} , 1/K	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$

Таблица 5.1 содержит значения постоянных термодинамического потенциала Гиббса, которые индивидуализируют конкретный материал. Эти константы нужны для возможности выполнения контрольных расчётов при наличии двухфакторной нелинейности с применением теории, воплощённой в систему разрешающих уравнений [218]. Соответствующая модель для обсуждаемого круга задач зарекомендовала себя в качестве адекватной, чему способствовало её достаточно широкое применение. И, таким образом, может служить источником контрольных результатов.

С целью формирования полностью одинаковых условий решения контрольных задач использовался также расчёт по деформированной схеме. Таким образом, оформилась задача верификации, которая включает пять постановок:

- учёт нелинейности по фактору разнсопротивляемости в условиях обновления топологии КЭ-сетки (М1);

- отказ от прямого учёта нелинейности по фактору разнсопротивляемости по методике [218], но с применением обновления координат узлов сетки КЭ-сетки (М2) на каждом шаге расчёта по нагрузке [221];

- отказ от учёта деформируемости расчётной схемы, но с сохранением нелинейности по фактору разнсопротивляемости (М3);

- учёт осреднённых значений параметров свойств материала для компенсации отказа от нелинейной разнсопротивляемости, но с применением инкрементального метода получения итоговых значений характеристик НДС в условиях обновления топологии узлов КЭ-сетки (М4);

- учёт нелинейности по фактору разнсопротивляемости в условиях отсутствия температурного воздействия, но с реализацией обновления топологии узлов КЭ-сетки (М5).

В качестве дополнительного источника контрольных данных постановка М1 упрощалась за счёт отказа от учёта связности задачи термоупругости с целью выяснения уровня зависимости нормальных напряжений от наличия связанности.

По итогам верификационного расчётного моделирования требовалось оценить:

- уровень зависимости результатов расчётного моделирования от компонентного состава тензора напряжений (по данным постановок М1 и М4);

- уровень влияния формы термодинамического потенциала из работы [119] (по данным постановок М1 и М2);

- уровень влияния обновления топологии узлов КЭ-сетки (по данным постановок М1 и М3).

5.4.3 Граничные и начальные условия задач

Граничные условия задаются в узлах КЭ-сетки, являющихся опорными. Назначаемые в такие узлы связи должны обеспечить стандартно используемые сочетания, которые принято считать жёстким, шарнирным или свободным опиранием.

Обозначения рисунка 5.1 разъясняют обозначения объектов, которые принимают участие в постановке задачи назначения граничных условия:

На рисунке 5.1 выделена одна из этих граней и на ней продемонстрирована линия пересечения со срединной поверхностью, а также линия пересечения опорной грани и нижней поверхности оболочки.

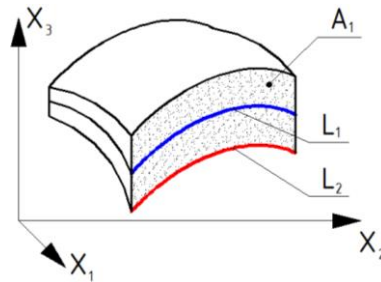


Рисунок 5.1 – Объекты, участвующие в назначении граничных условий:

A_1 – опорная грань оболочки; L_1 – линия, представляющая срединную поверхность на опорной грани A_1 ; L_2 – опорное ребро оболочки, принадлежащее опорной грани

Ниже представлено выражение формализации опирания, связи которого запрещают все, без исключения, поступательные степени свободы узлов опорной грани:

$$u_1(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in A_1; u_2(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in A_1; u_3(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in A_1,$$

здесь \bar{x} – координатный вектор, t – время.

Свободное опирания на трёхмерной модели для нижнего опорного ребра запрещает только вертикальные смещения $u_3(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in L_2$ (рисунок 5.2).

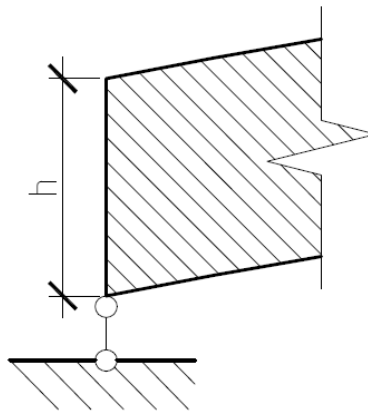


Рисунок 5.2 – Схема свободного опирания оболочки

Шарнирное опирание запрещает все поступательные перемещения узлах, расположенных только на срединной линии, принадлежащей опорной грани. Заметим, что в данном случае обсуждается опирание трёхмерной модели оболочки. Поэтому указанный способ реализации шарнирного опирания является

приближённым. Но вносимая этим погрешность в числовые данные расчёта оказывается незначимой. Формализация такого описания имеет форму:

$$u_1(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in L_1; u_2(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in L_1; u_3(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in L_1.$$

Схема варианта эмуляции шарнирного опирания подобного опирания представлена на рисунке 5.3.

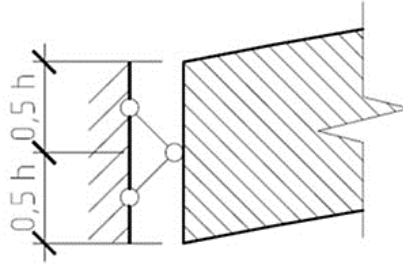


Рисунок 5.3 – Схема шарнирного опирания в оболочке

Если при таком приближении шарнирного опирания обнаруживаются представленные значимыми экстремумами значений краевые эффекты характеристик НДС в опорной зоне, то можно воспользоваться рекомендациями [73, 156, 164]. Они предлагают для всех узлов опорной грани использовать односторонние связи сжатия.

Поскольку температурное воздействие учитывается как изменение некоторого начального значения температуры T_{oc} (например, нормативного), нужно его также задавать для получения однозначности решения. В работе [263] обращается внимание на необходимость задания используемого закона распространения тепла внутрь материала через поверхность несущего элемента:

$$-\lambda \frac{\partial \theta(\bar{x}, t)}{\partial \bar{n}} = \mu_T [T(\bar{x}, t) - T_{oc}], \bar{x} \in A, t > 0,$$

где в выражении закона конвекции использованы следующие обозначения: коэффициент теплопроводности λ ; коэффициенты теплоотдачи μ_T ; нормаль к наружной поверхности несущего элемента \bar{n} , которая характеризует направление теплообмена в точке поверхности с координатами вектора.

Среди начальных условий, задаваемых в связанной термоупругости, фигурирует описание распределения температур и, если имеется, начальное распределение значений характеристик НДС. Важно подчеркнуть, что среди этого массива начальных условий должны быть данные о распределении скоростей тепла и механических параметров:

$$u_i(\bar{x}, t_0) = f_i(\bar{x}); u_{i,t}(\bar{x}, t_0) = g_i(\bar{x}); T(\bar{x}, t_0) = h_i(\bar{x}),$$

здесь используются обозначения:

- начальный момент времени t_0 ; функция распределения перемещений при t_0 определяется только расположением точки на поверхности ($f_i(\bar{x})$) и нулевым начальным НДС ($f_i(\bar{x}) = 0$); функция распределения начальных скоростей по объёму расчётной схемы при t_0 задаётся нулевыми значениями $g_i(\bar{x})$; функция распределения начальных температур $h_i(\bar{x})$.

Решение задач по термомеханическому деформированию несущих элементов типа оболочек выполняется при начальных условиях распределения, которые характеризуются неоднородностью, представленной в форме:

$$\begin{cases} h_i(\bar{x}) = T_0 + \theta_g; \bar{x} \in A_g; \\ h_i(\bar{x}) = T_0 + \theta_n; \bar{x} \in A_n; \\ h_i(\bar{x}) = T_0; \bar{x} \notin A_g \text{ и } \bar{x} \notin A_n. \end{cases}$$

Формализация распределения температуры по поверхности в момент времени t_0 представлена условиями:

$$\begin{cases} \theta(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in A_n, t > 0; \\ \theta(\bar{x}, t) = 0, \bar{x} \in A_g, t > 0, \end{cases}$$

где T_0 – температура в начальный момент времени; изменение начальной температуры на поверхностях: θ_g (верхней – A_g) и θ_n (нижней – A_n).

Будем полагать, что теплообмен через поверхности несущего элемента не меняет температуры поверхности, но вызывает процесс, итоги которого, опять же предположительно, будут установлены на основании линейной зависимости.

5.4.4 Детализация вычислительного алгоритма решения задач

Вычисление массива значений НДС конкретной задачи начинается с задания числовых значений параметров схемной модели и, в первую очередь, топологии несущего элемента и схемы его опирания. Выполнение этого этапа предполагает наличие соответствующей расчётной схемы, которая включает сведения типа содержащихся на рисунках 5.1–5.3

На следующем этапе выполняется построение КЭ-сетки, которое определяет топологию её узлов. Этот этап удобно выполнять средствами среды ПО ANSYS, присутствует возможность вывода списка элементов с номерами отдельных узлов и векторами их координат в ГСК (глобальной системе координат).

Следующий этап создания схемной модели имеет конечной целью использовать созданную топологию узлов дискретизации для их объединения в объёмные конечные элементы, имеющие форму тетраэдров. Этап выполняется в два приёма:

- объединение узлов в объёмы с формой параллелепипедов;
- разделение параллелепипеда на шесть тетраэдров.

Назначение граничных и начальных условий для множества узлов, представленных компонентами векторов своего местоположения, представляет собой не совсем тривиальную задачу. Поэтому для её решения потребовалась разработка специализированной на соответствующих операциях программы в среде математического пакета MATLAB.

Реализация собственного вычислительного процесса получения числовой модели НДС объекта расчётного моделирования требует реализации дискретизации полных значений нагрузки в форме задания числа шагов нагружения (N_q). Такой же параметр должен быть определён для периода времени, который будет приниматься во внимание.

Контроль выполнения инкрементальных процедур ведётся счётчиком целых чисел, который считает число шагов нагружения, которые с целью оптимизации уравниваются с числом шагов по времени. Поиск узловых перемещений, которые определяют топологию узлов дискретизации для следующего шага, использует метод, предложенных для подобных вычислительных задач И.А. Биргером [29] (метод упругих решений). Важно отметить, что эта вычислительная процедура является итерационной, и, следовательно, определяет точность решения на текущем шаге. Допустимая погрешность входит в число подмножества параметров метода и должна задаваться пользователем.

Процесс вычислений начинается с вычисления компонентов матриц жёсткости отдельных КЭ и их объединения (ансамбля), представляющего несущий элемент. Матрица ансамбля позволяет определить узловые перемещения, которые в качестве неизвестных представлены в разрешающей системе линейных алгебраических уравнений МКЭ. Но начало решения контролируется знаком определителя матрицы

жёсткости, который должен быть существенно положительным, что гарантирует устойчивость. И с нулевых значений характеристик напряжённого состояния, включая нормированные. Узловые перемещения являются источником данных для вычисления приращения деформаций, вызванных нагрузкой на текущем шаге. Наконец, по формулам Коши формируются компоненты тензора деформаций, которые являются малыми из-за малости перемещений, вызванных малым же приращением нагрузки. Деформации корректируются малыми приращениями температуры.

Отличие второго и последующих шагов нагружения от описанного только в том, что на самом первом шаге в пределах первой итерации использовались напряжения начального состояния (нулевые), а во всех последующих за начальные напряжения принимаются результирующие, полученные на предыдущем шаге в качестве его итоговых и отличных от нуля.

Сложнее дело обстоит со второй итерацией. Дело в том, что шаг может быть завершён, если есть подтверждение сходимости процесса, которое контролируется по результатам использования в качестве начальных приращений, полученных как результат предыдущей итерации с повторением описанных выше операций цикла нового определения приращений напряжений. Процесс итераций будет прекращён, когда два последовательно вычисленных итерациями массива приращений напряжений перестанут отличаться на заранее заданную величину – допустимую погрешность вычисления значений характеристик НДС в узлах КЭ. Типичной величиной допустимой погрешности является $\varepsilon_1 = 0,1\%$, где в качестве критерия выступает величина абсолютного значения максимума напряжения узлового напряжения.

Достижения требуемой точности на каждом шаге позволяет перейти к вычислению параметров новой топологии узлов МКЭ – формированию новой формы расчётной схемы (деформированной), которая становится начальной для следующего шага по нагружению.

Однако процесс получения численного решения задачи всё ещё не завершён, так как нет доказательства отсутствия зависимости значений поученного массива данных НДС от уровня дискретизации среды несущего элемента в виде массива узлов.

Это значит, что в нелинейных задачах расчётного моделирования исследование этого вида сходимости, иногда называемого «практическая сходимость»,

является обязательным. Критерием практической сходимости выступает тот же параметр, но со значением $\varepsilon_2 = 0,01\%$.

Описанные выше шаги алгоритма численной процедуры отражены в блоках схемы рисунка 5.4. Этот алгоритм положен в основу разработанного программного обеспечения, использованного для решения представленных ниже задач.

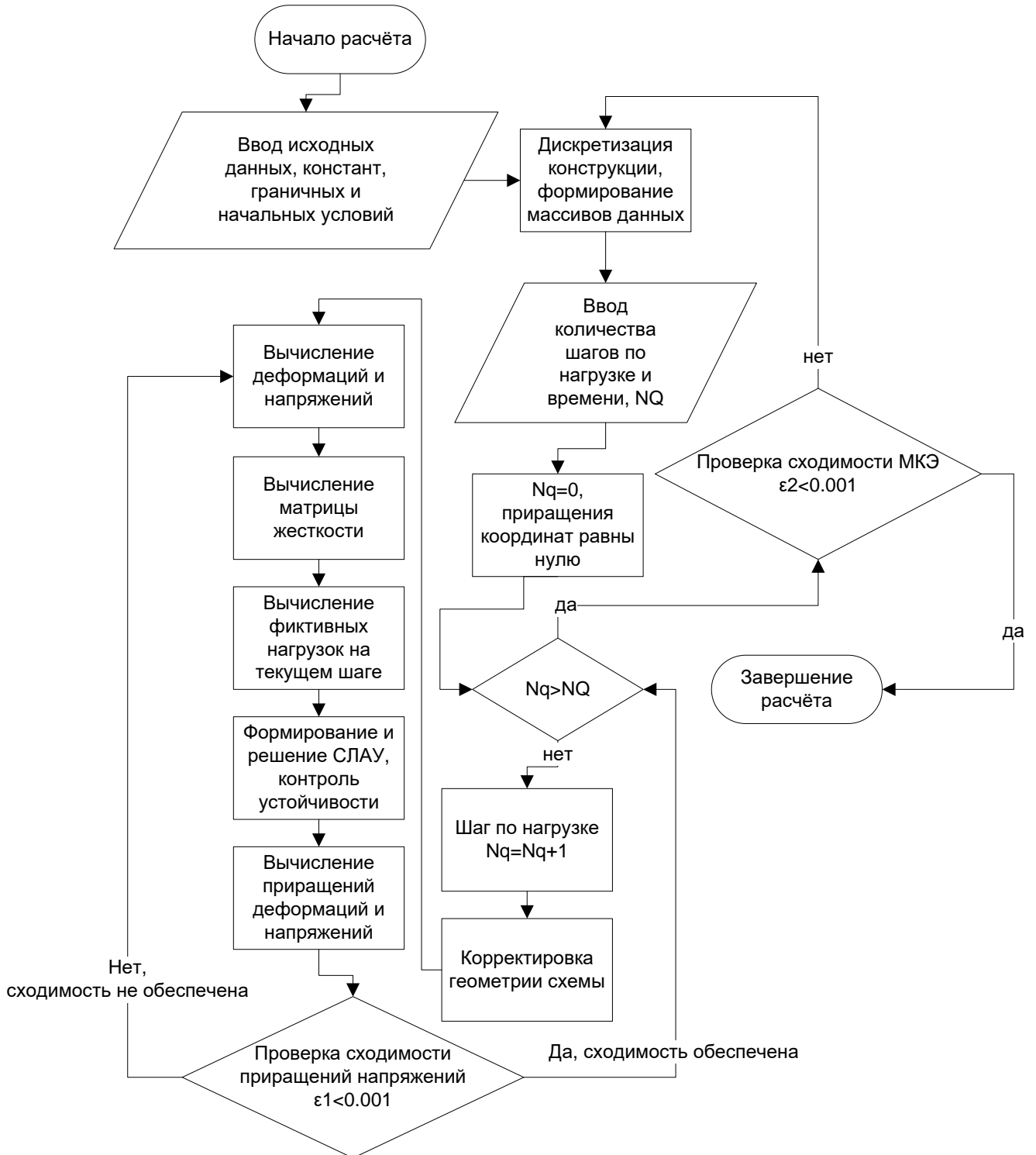


Рисунок 5.4 – Алгоритм программы решения термомеханических задач

5.4.5 Оболочка № 1

Рассматривается задача об оболочке положительной гауссовой кривизны. В перечень задаваемых параметров оболочки входят:

- габаритные размеры и форма плана: 1×1 м, квадратная;
- стрела подъёма составляет 0,1 м, кривизна нижней поверхности $100/255 \text{ м}^{-1}$;
- толщина составляет $1/25$ габаритного размера;
- опирание: жёсткое по контуру;
- материал оболочки – графит АРВ;
- смещение температуры на поверхностях: снизу $+20^\circ\text{C}$, сверху -30°C .

Дополнительные данные к задаче представлены на рисунках 5.5–5.7.

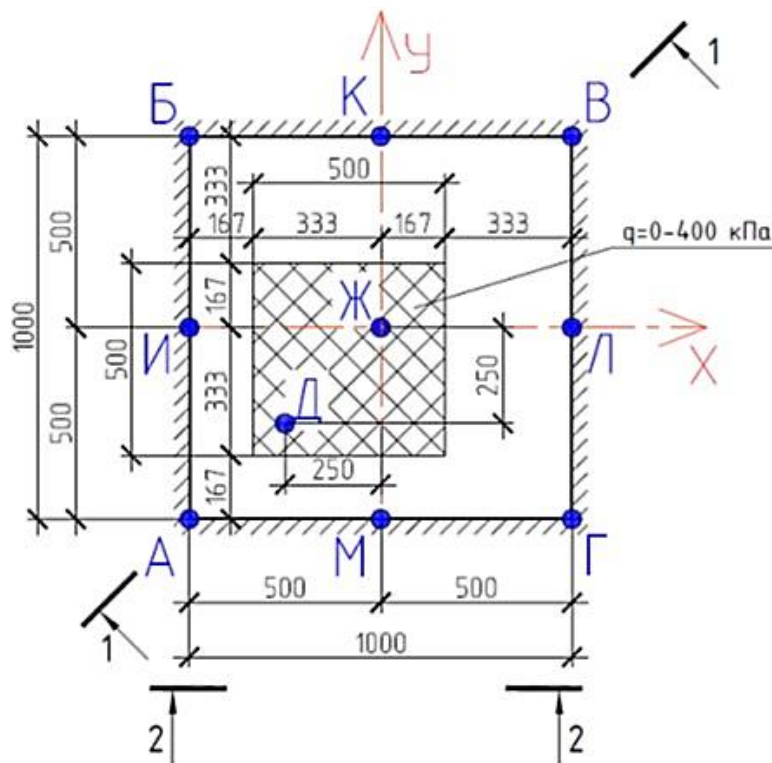


Рисунок 5.5 – Детали топологии оболочки № 1

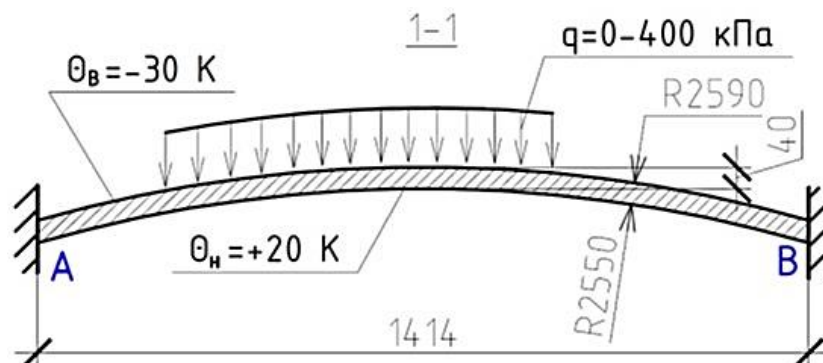


Рисунок 5.6 – Диагональное сечение оболочки № 1

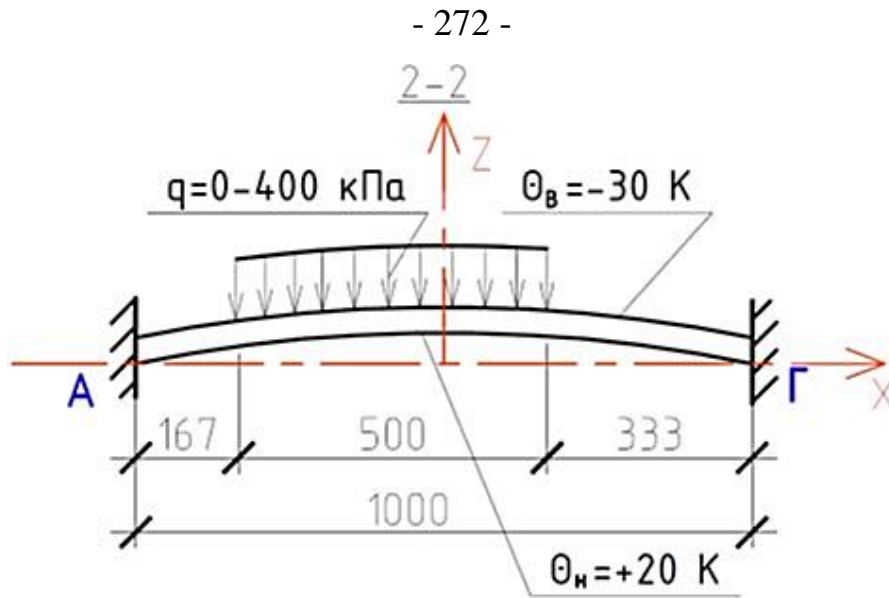


Рисунок 5.7 – Поперечное сечение оболочки № 1

Из содержания рисунков 5.5–5.7 следует наличие произвольно расположенного участка распределённой по верхней поверхности нагрузки постоянной интенсивности.

Параметры материала оболочки № 1 представлены значениями параметров:

- кортеж механических характеристик $\{E^-; E^+; \nu^-; \nu^+; \alpha_{t1}^-; \alpha_{t1}^+; C_\sigma; \rho; \lambda; T_0; \chi; \text{const}\}_{\text{co}}$ значениями: $E^- = 6130 \text{ МПа}$, $E^+ = 3750 \text{ МПа}$, $\nu^- = 0,35$ $\nu^+ = 0,2$,

$\alpha_{t1}^- = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_{t1}^+ = 4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $C_\sigma = 500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}$, $\rho = 1700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ $\lambda = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{K}}$,

$T_0 = 293 \text{ K}$, $\chi = 5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, материальные константы для графита АРВ представлены в таблице 5.1;

- продолжительность процесса T -нагружения составляет 50 сек. (по данным вычислительных экспериментов);

- параметры вычислительного процессе:

- число шагов по нагрузке 50 (шаг по времени 1 сёк);
- число КЭ 4680 и 9216 ($\frac{26,80 - 26,78}{26,8} \cdot 100\% = 0,075\% < 0,1\%$. – оценка

практической сходимости);

В перечне данных к постановке задачи использованы обозначения»

- «-/+» индексы НДС (сжатие/растяжение);

- E модули упругости;

- коэффициенты Пуассона ν ;

- коэффициенты линейного температурного расширения α ;
- теплоёмкость (при постоянном напряжении) C_s ;
- массовая плотность материала ρ ;
- коэффициент теплопроводности λ ;
- начальная температура T_0 ;
- начальный коэффициент линейного температурного расширения χ ;
- постоянные потенциала таблицы 5.1.

На рисунке (5.28) представлен график практической оценки сходимости МКЭ по величине наибольших нормальных напряжений. Из данных рисунка 5.8 следует, что практическая сходимость вычислительного процесса вычислений была обеспечена.

Принимая число КЭ 4608 в качестве оптимального и окончательного, вычисляем значения всех других характеристик НДС рассчитываемой оболочки.

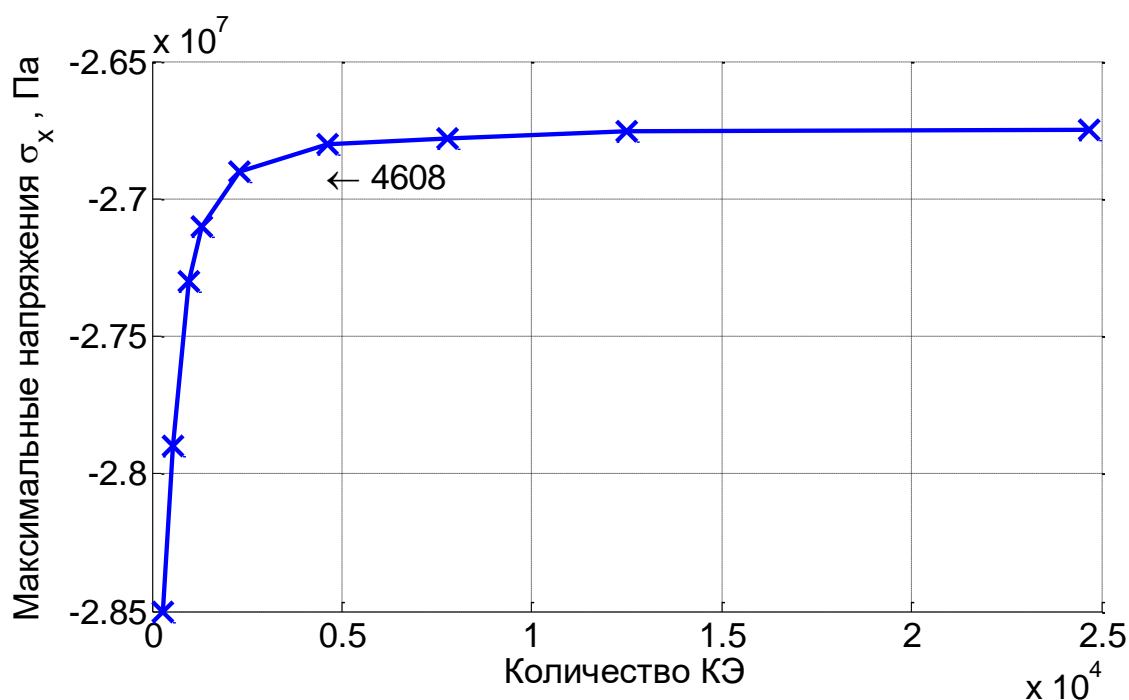


Рисунок 5.8 – Контроль практической сходимости МКЭ оболочки № 1

Примерная схема разбиения оболочки на 4608 КЭ в форме тетраэдра показана на рисунке 5.9.



Рисунок 5.9 – Схема разбиения на КЭ оболочки № 1

Сравнительный анализ результатов расчётного моделирования вариантов постановки задачи для оболочки № 1. Опорные точки А, И, М определяют начала локальных систем координат (ЛСК) и направления осей с аргументами:

- начало координат в точке И, ось аргументов Ox ГСК (см. рисунок 5.5);
- начало координат в точке М, ось аргументов Oy ГСК (см. рисунок 5.5);
- начало координат в точке А, ось аргументов направлена по диагонали плана оболочки № 1 на рисунке 5.5.

оболочки № 1 на рисунке 5.5.

Изменение напряжений и температуры вдоль толщины оболочки № 1 оформляется в ЛСК, точка начала координат которой принадлежит нижней поверхности оболочки (рисунок 5.10).

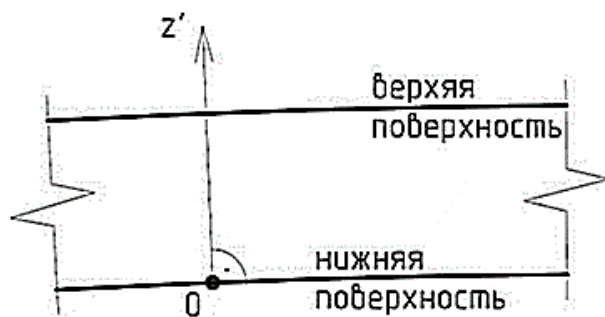


Рисунок 5.10 – ЛСК оболочки № 1 для функций с аргументов вдоль её толщины

Распределения значений характеристик НДС и температуры в точках поверхностей оболочки № 1 представлены рисунками 5.11–5.13.

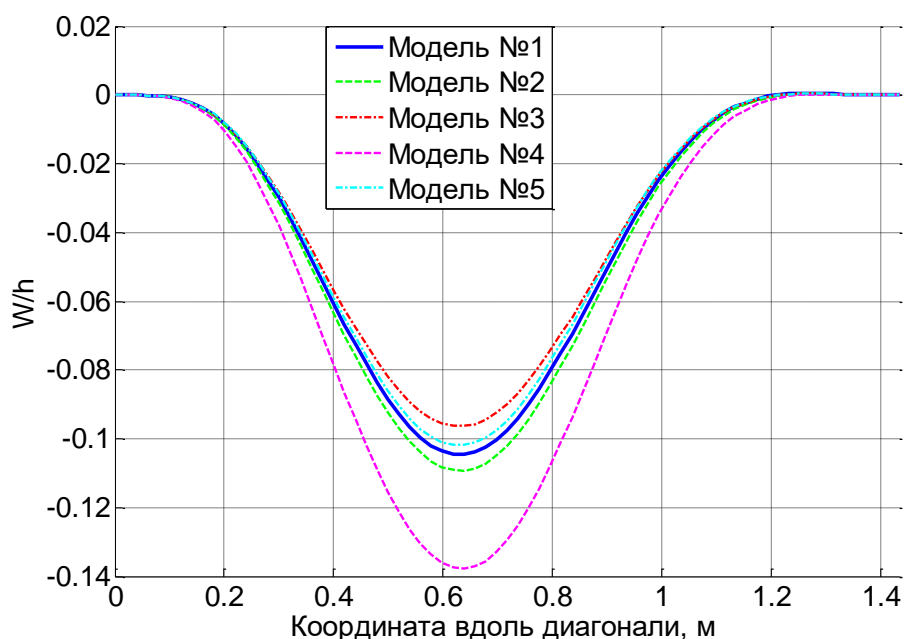


Рисунок 5.11 – Вертикальные перемещения в срединной поверхности оболочки № 1: ось аргументов – диагональ А-В, нагрузка $q = 400$ кПа (см. рисунок 5.5)

Учёт зависимости физико-механических характеристик от компонентного состава тензора напряжений оценивается относительной величиной до 24%, а от учёта пересчёта расположения узлов (расчёт по деформируемой схеме) сетки КЭ – до 8%. Вывод: нелинейная разносопротивляемость в масштабе прогибов отличается от квазилинейной не более, чем на 5%.

На рисунках 5.12–5.13 демонстрируются графики нормальных напряжений на поверхностях оболочки № 1, обусловленные нагрузкой $q = 400$ кПа.

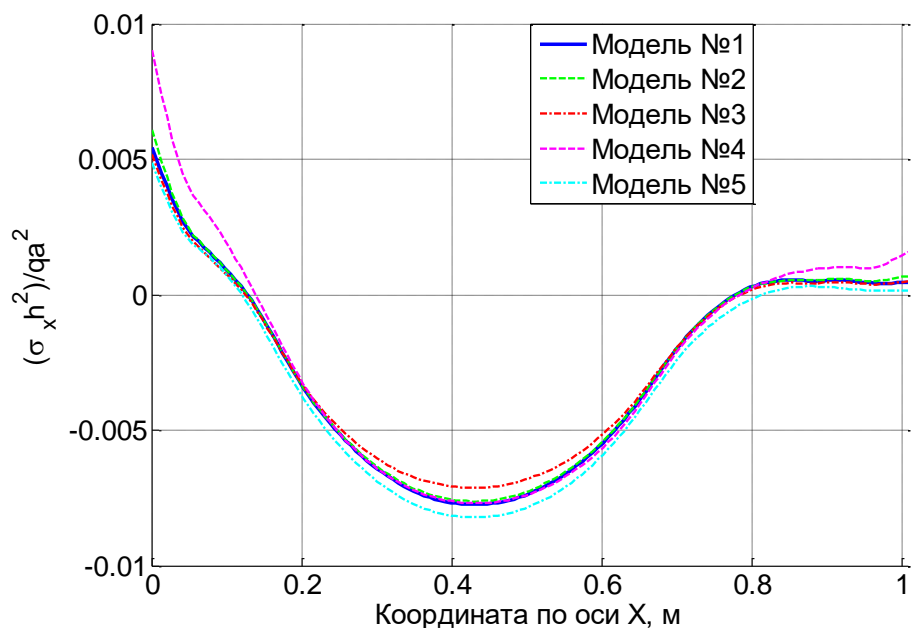


Рисунок 5.12 – Нормальные напряжения на верхней поверхности оболочки № 1: по оси И-Л

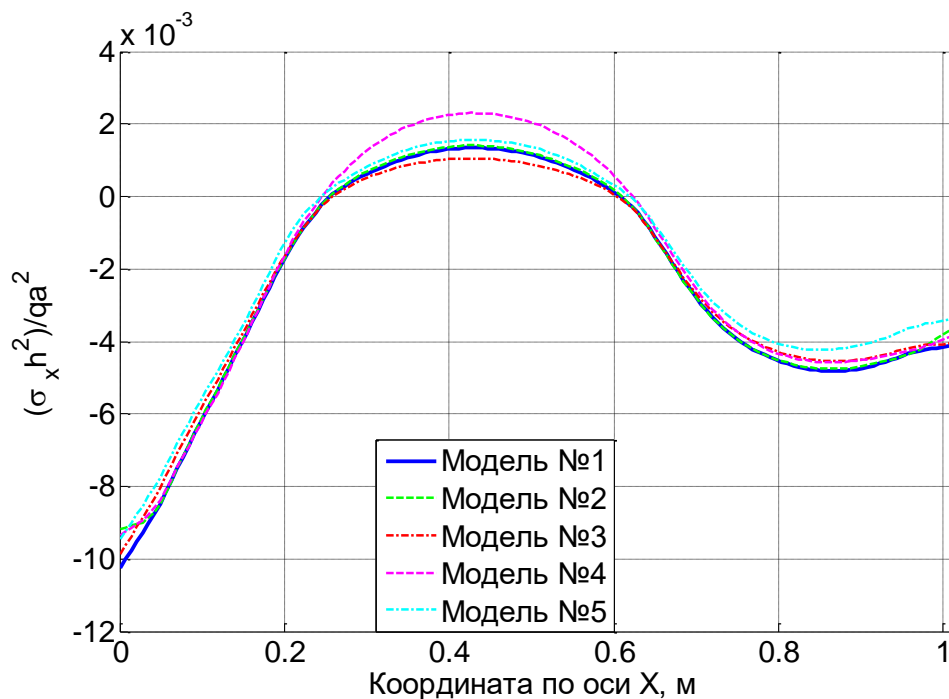


Рисунок 5.13 – Нормальные напряжения на нижней поверхности оболочки №1: по оси И-Л

Учёт фактора разносопротивляемости изменяет нормальные напряжения на поверхностях оболочки №1 на величины: до 40%, если поверхность верхняя, до 42% – если нижняя.

Прямой учёт фактора нелинейности разномодульности показывает отличие от косвенного подхода в форме квазилинейности величиной до 12%.

Максимальные значения расхождения вносит пошаговая коррекция пространственной топологии узлов дискретизации: на нижней поверхности – до 24%. Температурные напряжения также существенно зависят от учёта пошагового изменения положения узлов – до 16% для оболочки №1.

Рисунки 5.14–5.16 иллюстрируют ситуации, которые создают факторы нелинейности для распределения значений характеристик НДС и температурных напряжений по толщине оболочки №1.

С целью получения данных о влиянии компонентного состава тензора напряжений на эффекты, связанные только с теплопроводностью и термомеханической связанностью, силовая нагрузка из постановки задач была убрана. Полученные распределения при $t = 1$ с визуализируются на рисунке 5.14.

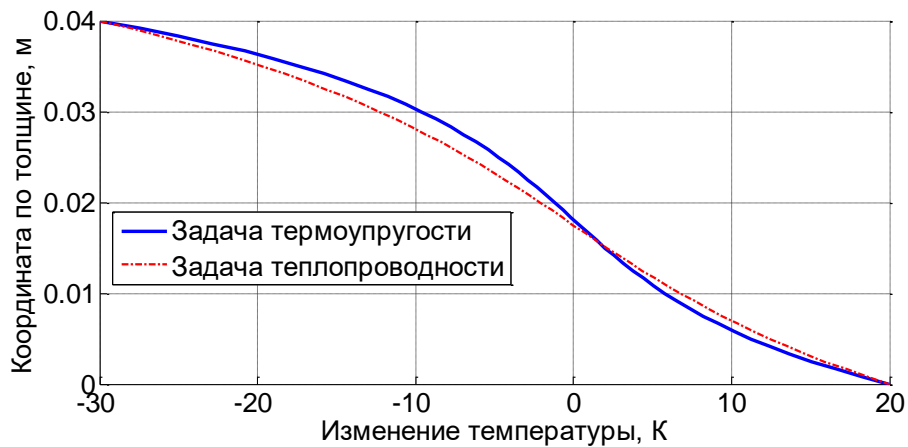


Рисунок 5.14 – График температур оболочки № 1 по толщине (точке Ж)

Различие в эффектах влияния по типам задач достаточно выражены. Также наглядно представлено влияние компонентного состава тензора напряжений на скорости процессов теплопроводности.

Рисунок 5.15 визуализирует функцию изменения температуры при параметрическом влиянии факторов нелинейной и квазилинейной разнсопротивляемости, в сравнении с линейной термоупругостью.

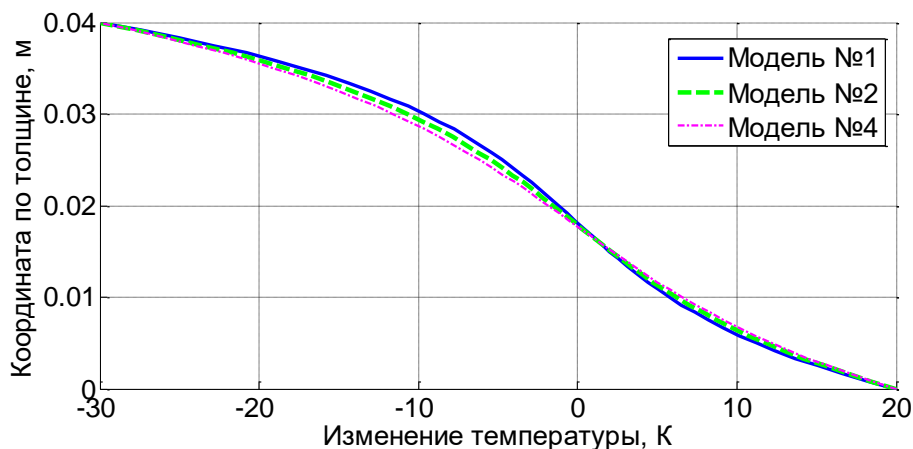


Рисунок 5.15 – Функция изменения температуры по толщине оболочки № 1 для различных факторов нелинейности в точке Ж ($t = 1$ с, $q = 400$ кПа)

Расхождение решений оказались незначимыми, все графики близки между собой и линейным распределением.

График распределения нормальных напряжений по толщине оболочки представлен на рисунке 5.16. Распределение носит явно нелинейный характер. В зонах изменения знака напряжений наблюдается значительное изменение кривизны графиков, что характерно для рассматриваемых условий.

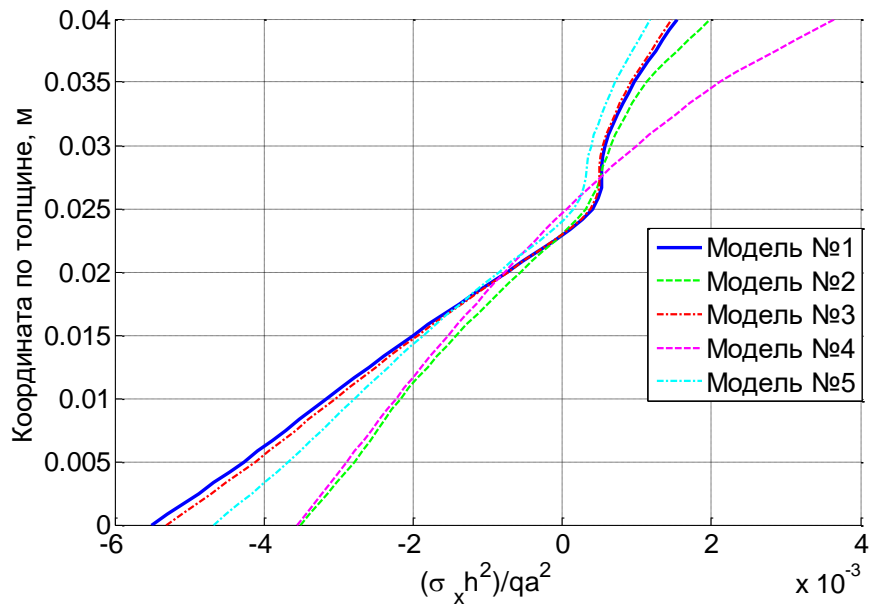


Рисунок 5.16 – Распределение напряжений σ_x по толщине оболочки № 1 в точке А ($q = 400$ кПа)

Проанализировав набор полученных результатов, можно сделать справедливый вывод, что рассмотренная модель нелинейной разнсопротивляемости для связанных задач термоупругости, полученная в рамках МКЭ позволяет значительно уточнить НДС жёстко опёртой квадратной в плане оболочки положительной гауссовой кривизны.

5.4.6 Свободно опёртая сферическая оболочка

Рассмотрим некоторую пологую сферическую оболочку радиусом $R = 6,5$ м, радиусом в плане $r = 1$ м со стрелой подъёма $H = 0,08$ м и толщиной $h = 0,06$ м. Оболочка свободно опёрта по контуру.

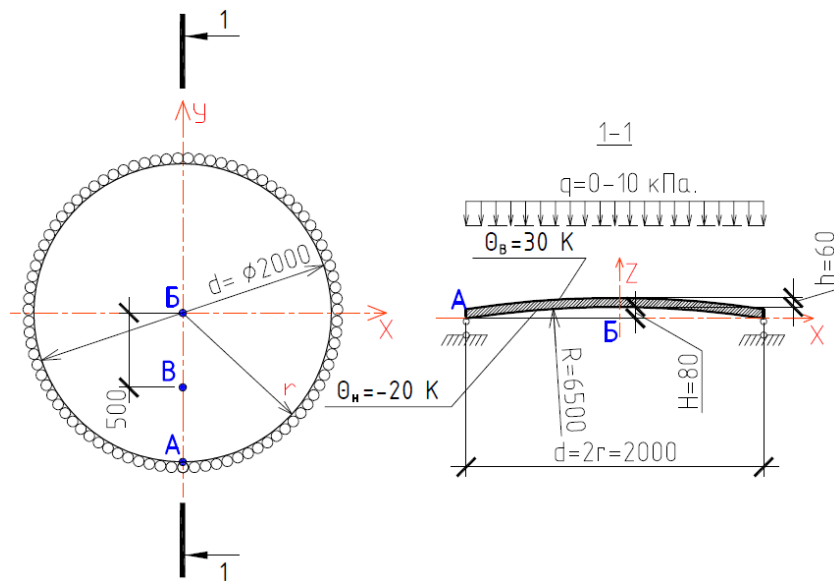


Рисунок 5.17 – Свободно опёртая сферическая оболочка

В качестве основного конструкционного материала использовался графит АРВ со следующими значениями характеристик: модуль упругости при растяжении $E^+ = 3750 \text{ МПа}$, модуль упругости при сжатии $E^- = 6130 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона при растяжении $\nu^+ = 0,2$, коэффициент Пуассона при сжатии $\nu^- = 0,35$, коэффициент линейного температурного расширения при одноосном растяжении $\alpha_{t1}^+ = 4 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, коэффициент линейного температурного расширения при одноосном сжатии $\alpha_{t1}^- = 6 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, теплоёмкость при постоянном напряжении $C_\sigma = 500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, плотность $\rho = 1700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, начальная температура $T_0 = 293 \text{ К}$, начальный коэффициент линейного температурного расширения принят $\chi = 5 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$.

К оболочке прикладывалась нагрузка в виде равномерно распределённого давления интенсивностью в диапазоне 0–10 кПа и изменения температуры на её поверхностях были приняты следующие: на нижней понижалась на 20 К, на верхней – повышалась на 30 К. Основные параметры оболочки приведены на рисунке 5.17. Константы определяющих соотношений представлены в таблице 5.1.

Время, соответствующее окончанию процесса теплопроводности и установлению линейного распределения температур по толщине оболочки, равно 50 с. Время нагружения, и максимальная внешняя нагрузка делились на 50 шагов.

Вычислительный эксперимент показал, что при разбиении оболочки на 1944 тетраэдра наибольшие нормальные сжимающие напряжения составляют 3,08 МПа, при разбиении на 3888 тетраэдров – 3,079 МПа. Расхождение между решениями составляет: $\frac{3,080 - 3,079}{3,080} \cdot 100\% = 0,03\% < 0,1\%$. График анализа практической сходимости МКЭ по величине наибольших нормальных напряжений для свободно опертой сферической оболочки представлен на рисунке 5.18.

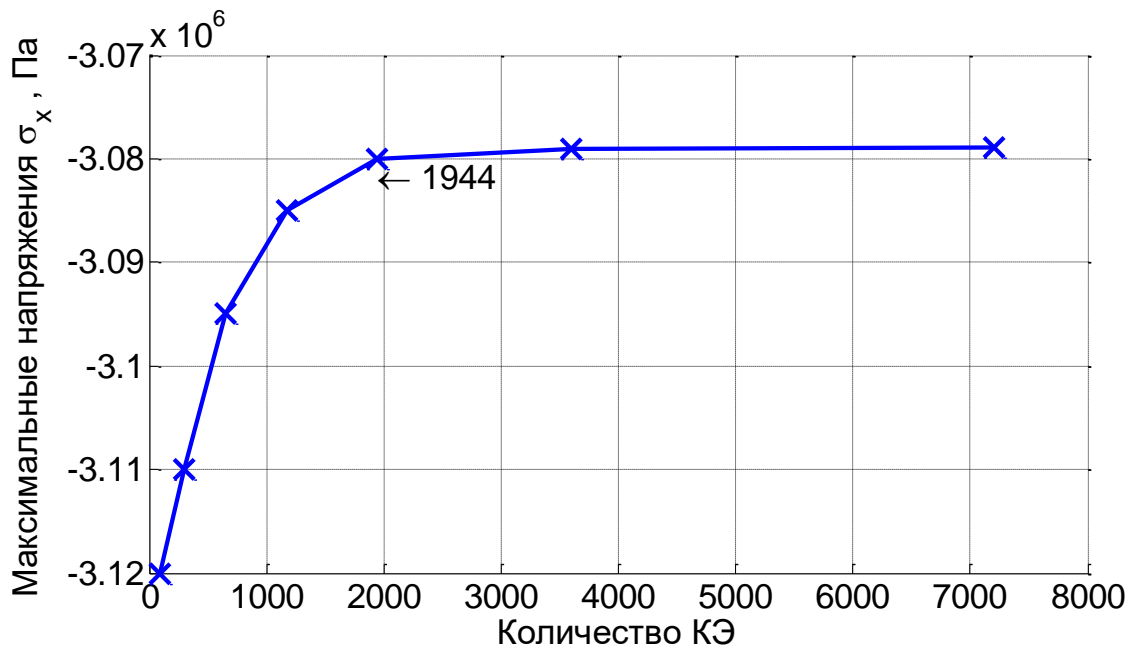


Рисунок 5.18 – График сходимости МКЭ для свободно опертой оболочки

Как следует из данных, приведённых на рисунке 5.18, практическая сходимость процесса решения обеспечена. Число разбиений на КЭ, обеспечивающее допустимую погрешность для свободно опертой оболочки, составило 1944 тетраэдра. Четверть рассматриваемой оболочки с таким разбиением приведена на рисунке 5.19.

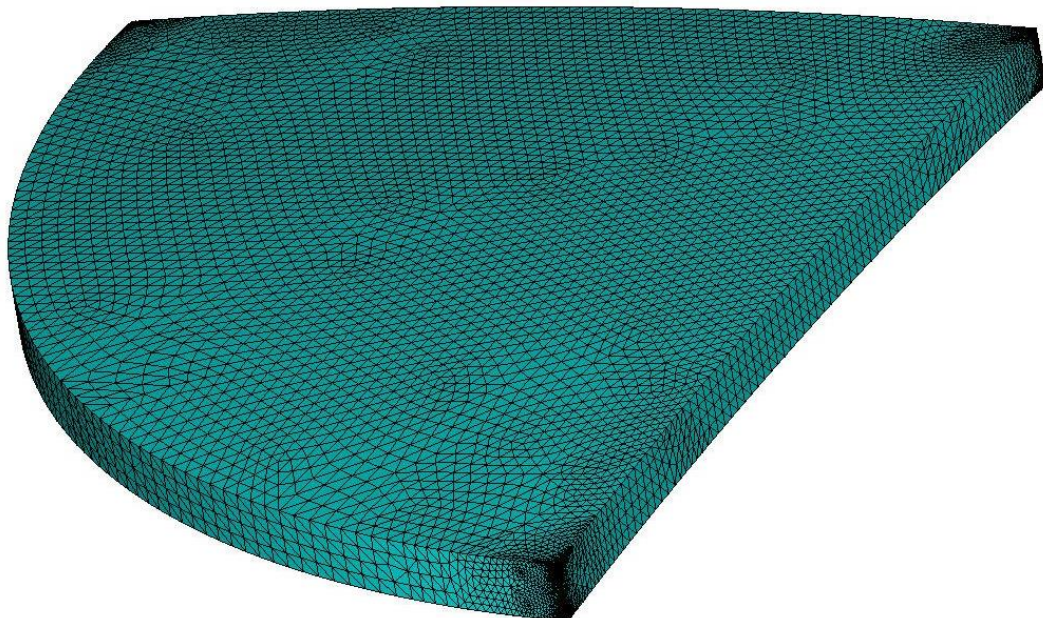


Рисунок 5.19 – КЭ-модель оболочки

Основные результаты и их анализ. Распределения нормальных напряжений на верхней и нижней поверхностях оболочки показаны на рисунках 5.20, 5.21.

Расхождение между результатами расчёта по используемым нелинейным соотношениям и квазилинейным соотношениям А.А. Трещёва и Н.М. Матченко [119] и [218] незначительно и не превосходит 6%.

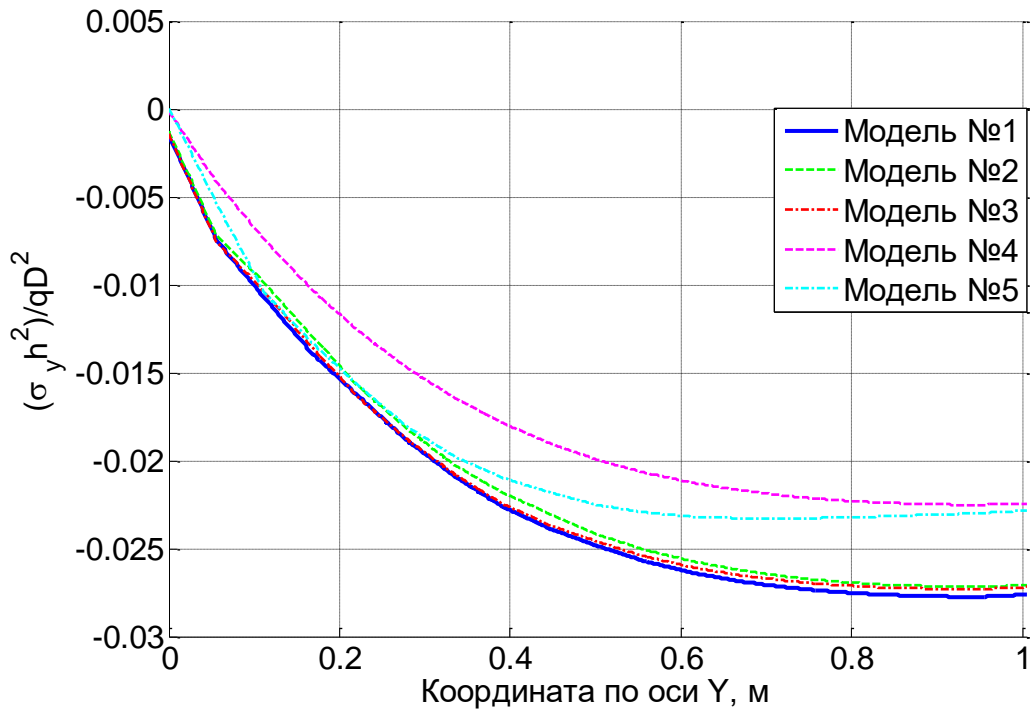


Рисунок 5.20 – Распределение напряжений σ_y на верхней поверхности свободно опёртой оболочки вдоль линии А-Б ($q = 10$ кПа)

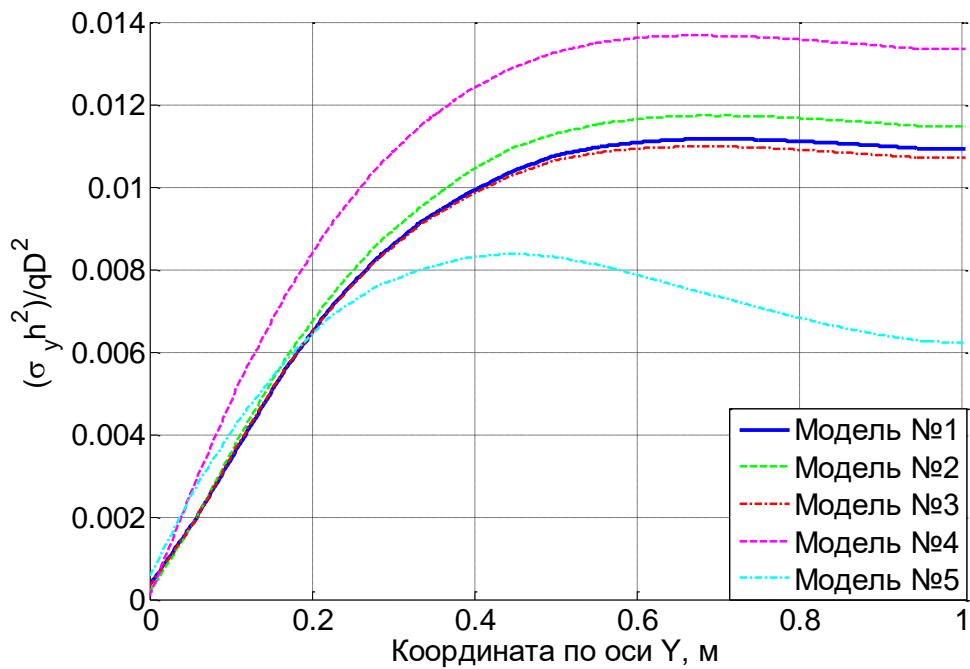


Рисунок 5.21 – Распределение напряжений σ_y на нижней поверхности свободно опёртой оболочки вдоль линии А-Б ($q = 10$ кПа)

Учёт деформируемости схемы сказывается незначительно – результаты находятся в пределах 2%. Учёт зависимости свойств материала от компонентного состава тензора напряжений для величин максимальных нормальных напряжений вносит поправку от 17 до 25%. Распределение температуры по толщине оболочки для термомеханической задачи и задачи теплопроводности в моменты времени $t = 1$ с представлены на рисунке 5.22.

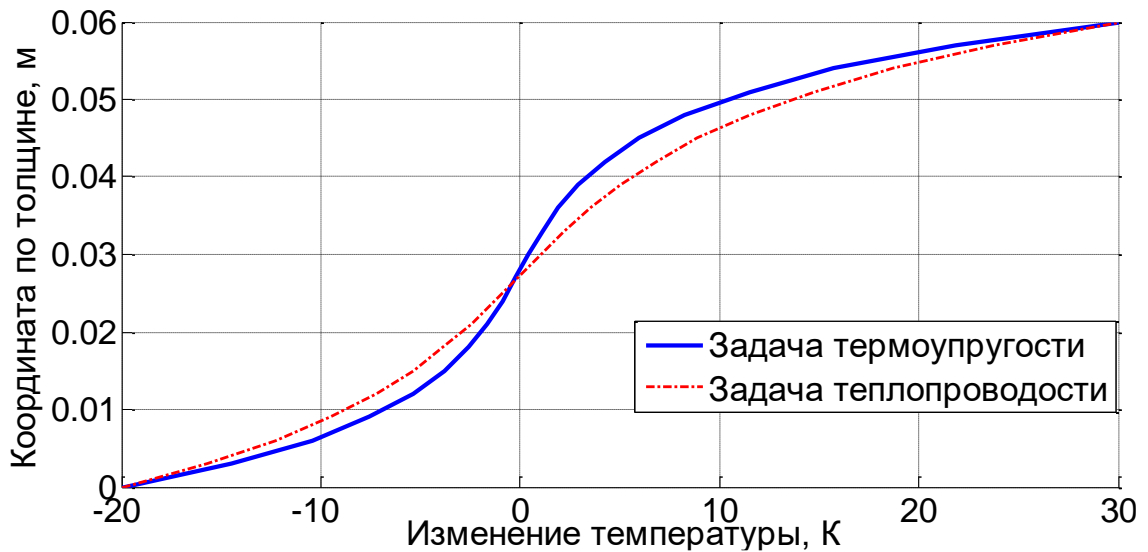


Рисунок 5.22 – Распределение температур по толщине свободно опёртой оболочки в точке В ($t = 1$ с, $q = 400$ кПа и $q = 0$ кПа)

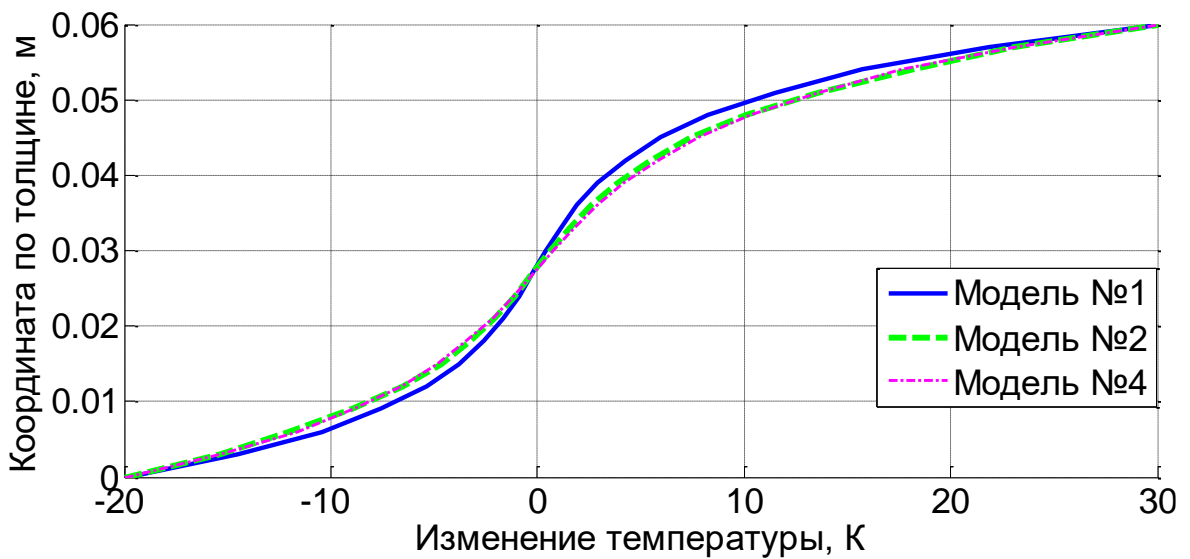


Рисунок 5.23 – Распределение температур по толщине свободно опёртой оболочки в точке В ($t = 1$ с, $q = 400$ кПа)

Характерный график распределения нормальных напряжений по толщине оболочки представлен на рисунках 5.24. Для графиков вдоль оси ОУ начало координат принималось в точке А. Графики изменения напряжений и температур по толщине оболочки строятся в системе координат, как показано на рисунке 5.10.

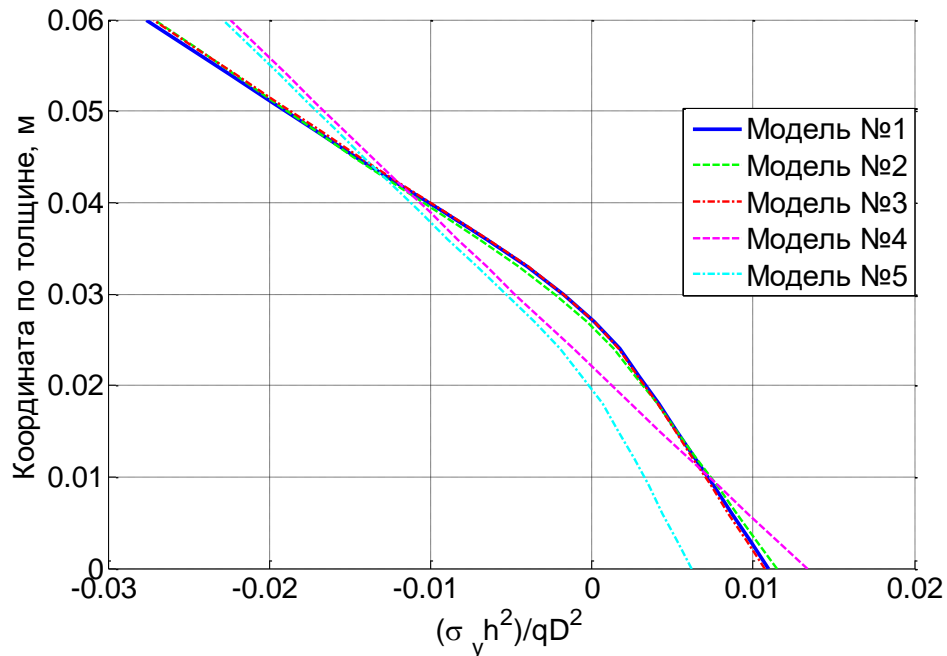


Рисунок 5.24 – Распределение напряжений σ_y по толщине свободно опёртой оболочки в точке Б ($q = 10$ кПа)

Распределение на рисунке 5.24 имеет ярко выраженный нелинейный характер. В целом, эффекты зависимости механических характеристик от вида напряжённого состояния, нелинейности и деформируемости схемы практически не влияют на прогиб при свободном опирании. Разница значений не превосходит 3%. Температурное нагружение значительно влияет на величину прогиба – за счёт увеличения средней температуры оболочки прогиб уменьшается на 52%. Доля температурных напряжений для свободно опёртой оболочки достигает до 43%.

На основании анализа НДС свободно опёртой сферической оболочки можно сделать вывод, что рассмотренная модель нелинейной разнсопротивляемости позволяет значительно уточнить решение задачи в классической постановке. При низких уровнях напряжений различия между нелинейной разнсопротивляемостью и квазилинейной разнсопротивляемостью А.А. Трещёва, Н.М. Матченко [119] не превосходят 5%. Влияние эффекта связанности полей напряжений и температур достигает 16%, однако он проявляется лишь в первые секунды приложения температурной нагрузки.

5.4.7 Жёстко опёртая сферическая оболочка

Аналогично рассмотренным выше, рассматривается жёстко опёртая пологая сферическая оболочка с радиусом кривизны $R = 6,5 \text{ м}$, радиусом в плане $r = 1 \text{ м}$ со стрелой подъёма $H = 0,08 \text{ м}$ и толщиной $h = 0,06 \text{ м}$. Оболочка нагружена равномерно распределённым давлением интенсивностью от 0 до 80 кПа, а также температурной нагрузкой на её поверхностях: на нижней – понижением на 20 К, на верхней – повышением на 30 К.

В качестве материала применяется графит АРВ с характеристиками: модуль упругости при растяжении $E^+ = 3750 \text{ МПа}$, модуль упругости при сжатии $E^- = 6130 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона при растяжении $\nu^+ = 0,2$, коэффициент Пуассона при сжатии $\nu^- = 0,35$, коэффициент линейного температурного расширения при одноосном растяжении $\alpha_{t1}^+ = 4 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, коэффициент линейного температурного расширения при одноосном сжатии $\alpha_{t1}^- = 6 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, теплоёмкость при постоянном напряжении $C_\sigma = 500 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, плотность $\rho = 1700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, начальный коэффициент линейного температурного расширения при отсутствии напряжений $\chi = 5 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, начальная температура $T_0 = 293 \text{ К}$. Константы определяющих соотношений представлены в таблице 5.1.

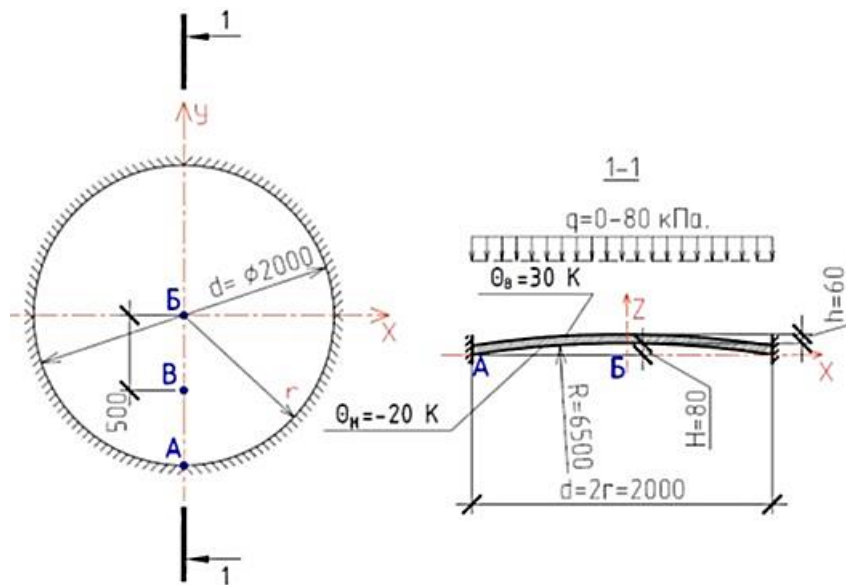


Рисунок 5.25 – Жёстко опёртая сферическая оболочка

Время реализации процесса теплопроводности для создания устоявшегося линейного распределения температур по толщине оболочки равно 50 с. Время нагружения и максимальная внешняя нагрузка распределены между 50 шагами.

На рисунке 5.25 показаны значения основных параметров задачи. При разбиении оболочки на 1944 тетраэдра наибольшие нормальные сжимающие напряжения составляют 5,7792 МПа, при разбиении на 3888 тетраэдров – 5,7790 МПа. Расхождение между решениями составляет:

$$\frac{5,7792 - 5,7790}{5,7792} \cdot 100\% = 0,003\% < 0,1\%.$$

Таким образом, сходимость обеспечивается разбиением оболочки на 1944 тетраэдра. График практической оценки сходимости МКЭ по величине наибольших напряжений для жёстко опёртой сферической оболочки представлен на рисунке 5.26.

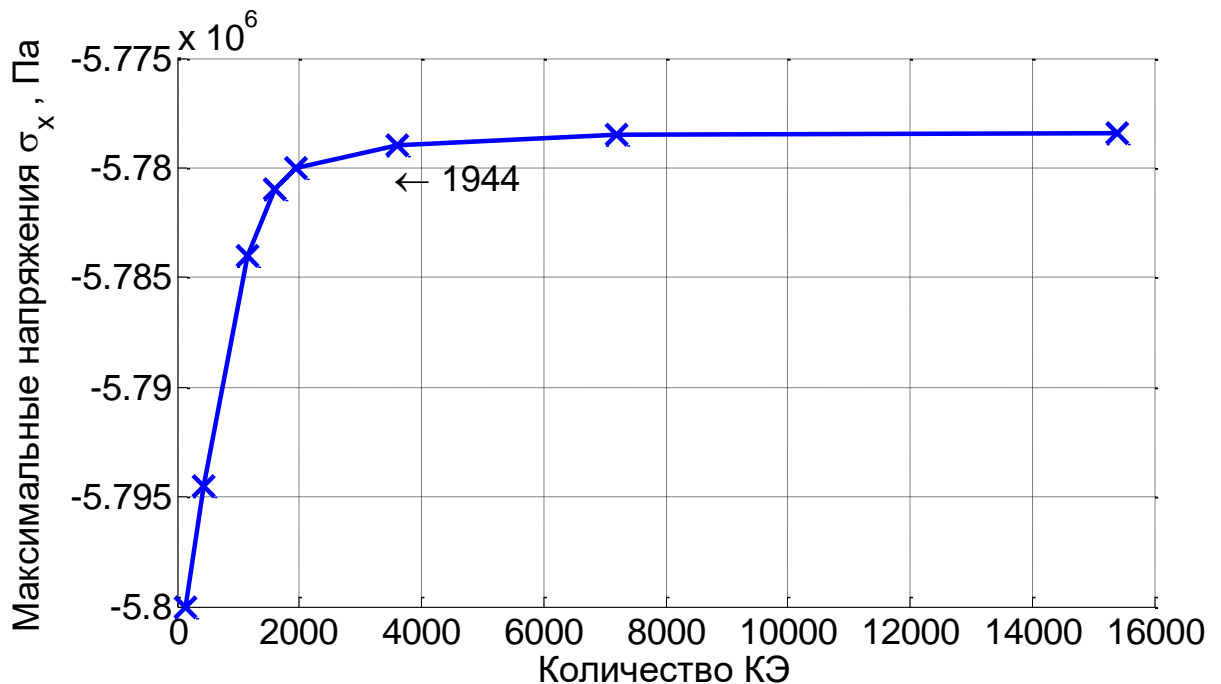


Рисунок 5.26 – График сходимости МКЭ для жёстко опёртой оболочки

Основные результаты и их анализ. Для графиков вдоль оси ОУ начало координат принималось в точке А рисунка 5.25. Графики изменения напряжений и температур по толщине оболочки строим в системе координат, показанной на рисунке 5.10. На рисунке 5.27 визуализирован график распределения прогибов срединной поверхности жёстко опёртой сферической оболочки.

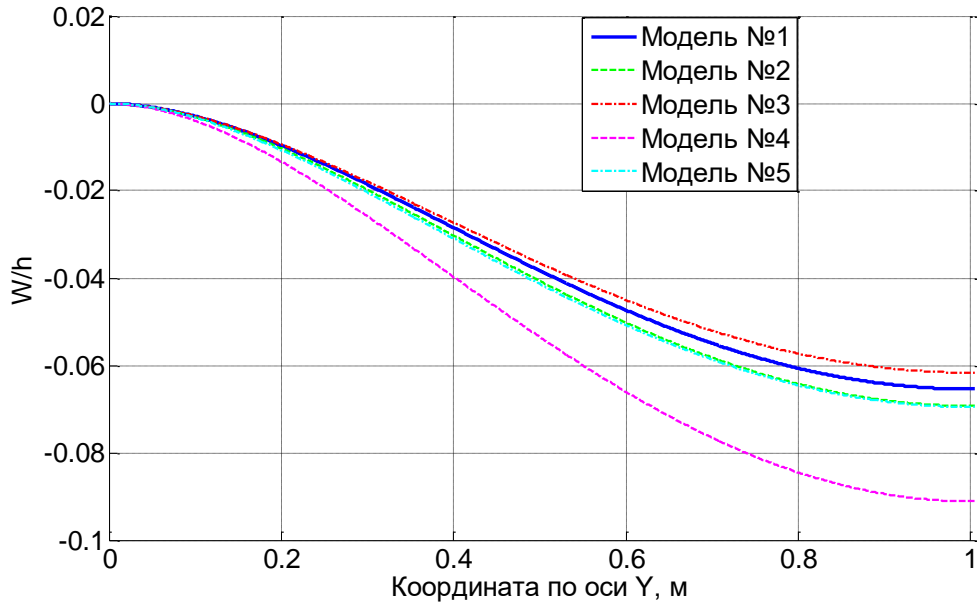


Рисунок 5.27 – Распределение прогибов срединной поверхности жёстко опёртой оболочки вдоль линии А-Б ($q = 80$ кПа)

Поправка к величинам прогибов за счёт нелинейности диаграмм деформирования и пересчёта координат узлов достигает 6%. Эффект разнсопротивляемости более выражен, он достигает 28%. Деформируемость схемы проявляется незначительно – в пределах 2%. Уточнение расчёта по классической теории термоупругости за счёт нелинейной разнсопротивляемости составляет 33% по величине максимальных горизонтальных перемещений.

Распределение нормальных напряжений на поверхностях жёстко опёртой оболочки показаны на рисунках 5.28–5.29.

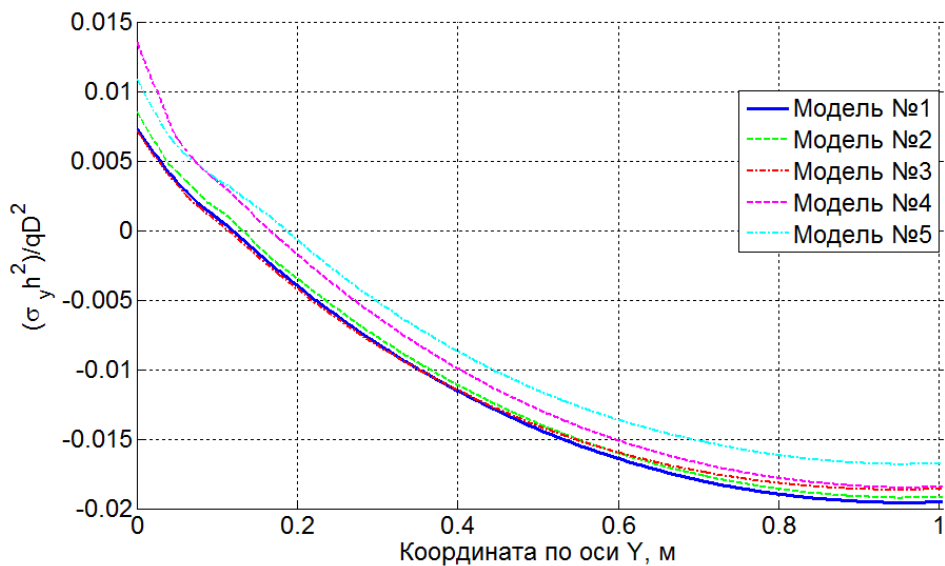


Рисунок 5.28 – Распределение напряжений σ_y на верхней поверхности жёстко опёртой оболочки вдоль линии А-Б ($q = 80$ кПа)

Влияние разнсопротивляемости составляет 46% на верхней поверхности и 40% на нижней поверхности, при этом расхождение между нелинейной и квазилинейной разнсопротивляемостью достигает 16% на верхней и 26% на нижней поверхностях.

Проведение расчёта по деформируемой схеме для жёстко опёртой сферической оболочки также значимо влияет на величины нормальных напряжений. Например, для напряжений вдоль оси Y на нижней поверхности уточнение достигает 18%.

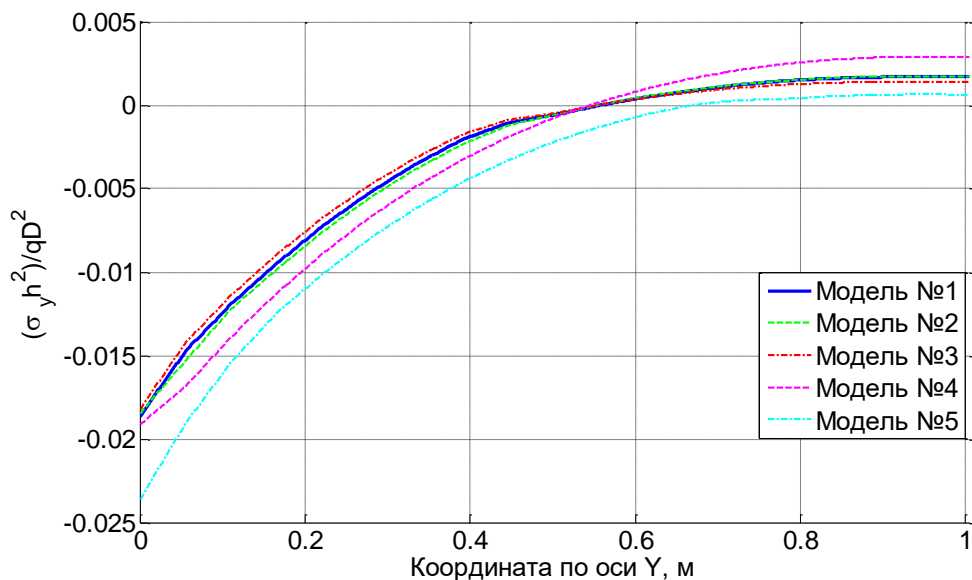


Рисунок 5.29 – Распределение напряжений σ_y на нижней поверхности жёстко опёртой оболочки вдоль линии А-Б ($q = 80$ кПа)

Распределение температур по толщине оболочки для термомеханической задачи и задачи теплопроводности в момент времени $t = 1$ с представлен на рисунке 5.30.

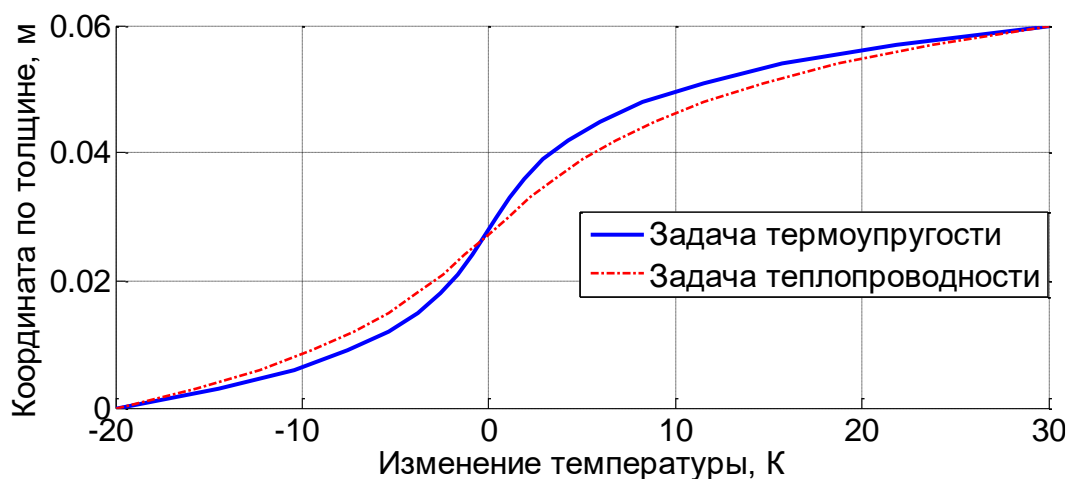


Рисунок 5.30 – Распределение температур по толщине жёстко опёртой оболочки в т. В ($t = 1$ с, $q = 80$ кПа и $q = 0$ кПа)

Оценка влияния зависимости от вида напряженного состояния, квазилинейной разнсопротивляемости [119] и линейной термоупругости на процесс теплопроводности представлены на рисунках 5.31.

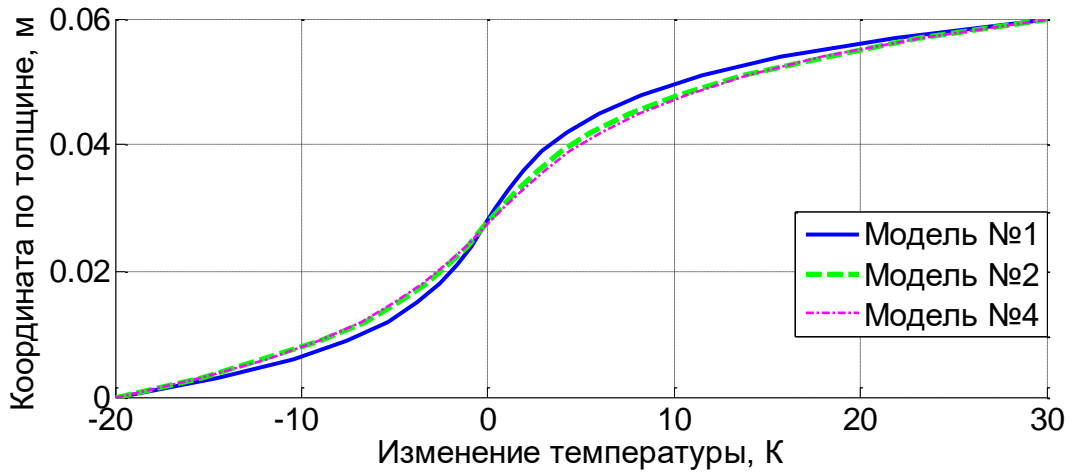


Рисунок 5.31 – Распределение температур по толщине жёстко опёртой оболочки в т. В ($t = 1$ с, $q = 80$ кПа)

Графики подтверждают влияние напряжённого состояния на процесс распределения температур.

Рисунок 5.32 наглядно иллюстрирует распределение нормальных напряжений по толщине жёстко опёртой сферической оболочки.

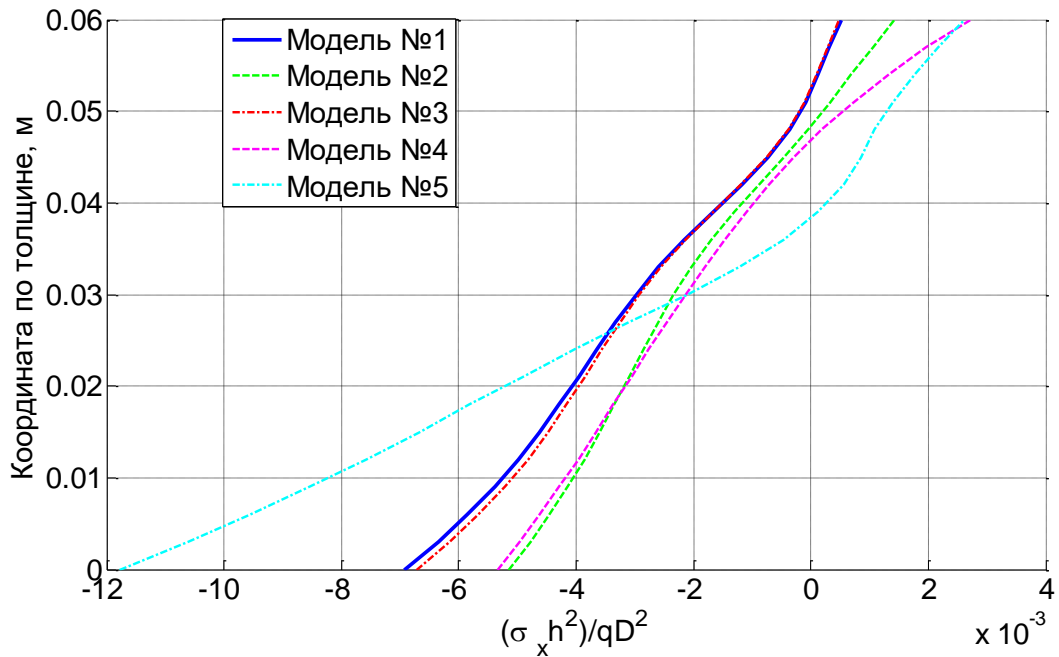


Рисунок 5.32 – Распределение напряжений по толщине жёстко опёртой оболочки в точке А ($q = 80$ кПа)

Проанализировав результаты численных экспериментов, смело можно утверждать, что эффекты связанности, нелинейной разносопротивляемости вместе с расчётом по деформируемой схеме, если их учитывать в расчётной модели, вносят весьма серьёзные коррективы в вычисленные значения НДС исследованных оболочек.

5.5 Расчёт НДС армированных плит из нелинейных материалов с учётом воздействия химически активной среды

Проверка эффективности предложенной математической модели в главе 4, продолжилась решением прикладных задач по определению НДС в конструкциях, подверженных воздействию химически активной эксплуатационной среды. В качестве несущих элементов в таких случаях используют армированные слоистые плиты из значимо нелинейных материалов, проявляющих свойство разносопротивляемости и воспринимающих механическую нагрузку вместе с негативным воздействием среды. В данном случае материалом плит был принят железобетон, поскольку плиты на этой основе прошли тщательную экспериментальную проверку в известных в научной литературе опытах G. Bach и O. Graf [268], и несколько позже W. Gehler и H. Amos [287]. Результаты этих экспериментов использованы в известной монографии Н.И. Карпенко [83, 84], где подробно анализируются. Здесь необходимо заметить, что плиты из указанных выше опытов были модифицированы, путём добавления в сжатую зону защитного слоя из специального эпоксидного тяжёлого полимербетона, который будет противостоять агрессивному воздействию внешней среды хлоридсодержащей среды.

5.5.1 Функция деградации материала слоя, контактирующего с химически активной средой

Применённый в диссертации, для прикладных расчётов, защитный слой выполнен из специального эпоксидного бетона, для которого проведён убедительный набор практических экспериментов, позволивший достаточно эффективно определить уровень влияния внешней химической среды на изменение его физико-механических свойств. Эти опыты подробно рассмотрены в работе П.В. Селяева [165], а теоретическое описание и анализ данных экспериментов проведён в исследованиях В.В. Петрова, П.В. Селяева, О.В. Пениной [148–150].

Глубину слоя, поражённого химически активной средой, можно описать, используя теорию малых упругопластических деформаций предложенную А.А. Ильюшиным [148, 149]. В итоге, предложено глубину проникновения агрессивной среды определять в виде нелинейной функции или иначе закона [150]:

$$\delta(t) = \alpha\sqrt{t}, \quad (5.11)$$

где t – время воздействия среды, α – эмпирически определяемый коэффициент, зависящий от конкретной пары материала и среды. С учётом процесса деградации механических свойств материала, выражения для секущего модуля E_c и касательного E_k примут вид [148, 165], представленный формулами (5.12).

$$E_c = E_c^0 F(B(z)); E_k = E_k^0 F(B(z)), \quad (5.12)$$

здесь z – координата по нормальной оси к срединной плоскости в направлении развития толщины плиты; функция $B(z)$ – имеет смысл величины концентрации активной среды в точке; $F(B)$ – принятая функция деградации, отражающая изменение модуля деформаций при изменении физико-механических свойств конструкционного материала. В данных обозначениях функция деградации принимает вид:

$$\omega_{pb} = F(B(z)) = \exp(-\lambda B(z)), \quad (5.13)$$

где $-\lambda = \frac{F'(B)}{F(B)}$ – относительная скорость изменения секущего и касательного модулей, $F'(B)$ – скорость деградации.

5.5.2 Фиктивные слои, контактирующие с хлоридсодержащей средой

Моделирование выполняется, используя приёмы, эффективно используемые в известных работах В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, П.В. Селяева с соавторами [148–150, 165]. В указанных работах тщательно детализированы изменения к теории малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина в целях повышения качества исследований влияния химических сред на работу материалов.

В матричном виде связь деформаций и напряжений выражается формулой

$$\{e^s\} = [A^s] \{\sigma^s\}, \quad (5.14)$$

где

$$\{e^s\} = \begin{Bmatrix} e_{11}^s \\ e_{22}^s \\ \gamma_{12}^s \\ \gamma_{13}^s \\ \gamma_{23}^s \end{Bmatrix}; [A^s] = \begin{bmatrix} A_{11}^s & A_{12}^s & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22}^s & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66}^s & 0 & 0 \\ Sim & & & A_{44}^s & 0 \\ & & & & A_{55}^s \end{bmatrix}; \{\sigma^s\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^s \\ \sigma_{22}^s \\ \tau_{12}^s \\ \tau_{13}^s \\ \tau_{23}^s \end{Bmatrix}.$$

Компоненты матрицы $[A^s]$ вычисляются по соотношениям, отражающим представление о модели описания коррозионной повреждённости:

$$A_{11}^s = A_{22}^s = 1 / (E_c \omega_{pb}); A_{12}^s = -\nu_b / (E_c \omega_{pb}); E_c = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}; \quad (5.15)$$

$$A_{44}^s = A_{66}^s = A_{55}^s = 2(1 + \nu_b) / (E_c \omega_{pb});$$

здесь приняты следующие обозначения: σ_i – интенсивность напряжений, ε_i – интенсивность деформаций. Модуль деформации полимербетона определяется величиной $E_c \omega_{pb}$, где ω_{pb} – функция, характеризующая степень коррозионной повреждаемости (5.13), $0 < \omega_{pb} \leq 1$; E_c – переменный секущий модуль (5.15).

Матрицу жёсткости для каждого такого фиктивного слоя определим как [225]:

$$[B^s] = [A^s]^{-1}. \quad (5.16)$$

5.5.3 Задание граничных условий для набора прикладных задач

НДС армированных слоистых плит из нелинейного материала планируется рассмотреть в вариантах расчётного моделирования. Для этого предлагается два условия опирания: в угловых точках (для плиты № 711) и шарнирное по линии контура (остальные – № 825, № 844, № 863) [211, 226, 268, 287].

Если углы плит, при наличии свободного опирания по контуру, в принципе не закреплять, то они будут приподниматься. Создание соответствующего эффекта в предлагаемой КЭ-модели достигается тем, что ни на одно из пяти доступных степеней свободы [174, 176] узла КЭ сетки дискретизации не накладывается никаких ограничений. Такой способ освобождения степеней свободы требует наличия предварительной сетки разбиения плана плиты на КЭ, чтобы выделить угловой узел.

Другие узлы опорного контура имеют нулевые значения вертикальных и угловых перемещений. Последние получают нулевые значения в соответствии с условиями:

- узлы по сторонам, параллельным оси ОХ $w_i = 0, \psi_{1i} = 0$;
- узлы по сторонам, параллельным оси ОУ $w_i = 0, \psi_{2i} = 0$.

Если плита опирается угловыми узлами, то для них следует принять $w_i = 0$.

5.5.4 Алгоритм расчёта НДС

Для определения характеристик НДС армированных слоистых плит можно сформировать соответствующий алгоритм, поделённый на этапы:

- формирование задания на расчёт конкретного элемента конструкции;
- вычисление элементов матрицы связи узлов для КЭ;
- задание граничных условий через выбранную глобальную нумерацию степеней свободы;
- задание действующих активных нагрузок;
- вычисление локальных матриц жёсткости КЭ;
- определение результирующего вектора узловых перемещений для глобальной матрицы жёсткости.

Разделение общего алгоритма на этапы позволяет прерывать ход решения в любой необходимый момент и эффективно выполнять оценку сходимости вычислительного процесса, по результатам анализа которого можно его корректировать, возобновляя с прерванной операции при необходимости.

Учитывая наличие фактора «усложнённых» свойств [62, 175, 176, 197, 220, 230, 234], вычисления следует проводить методом пошаговых нагружений, а для ускорения сходимости – использовать метод переменных параметров упругости. Кроме этого: дополнительную сложность может вызывать физическая нелинейность (порождённая разнсопротивляемостью материалов) и вычислительная (метода пошаговых нагружений). Формирование задания на расчёт включает в себя задание следующих пунктов:

- вычисление необходимых геометрических параметров;
- разбиение отдельных КЭ на фиктивные слои элементов по некоторой принятой заранее системе;

- предела прочности материала несущих фиктивных слоёв;
- модуля упругости арматуры и исходных осей X_1 и X_2 ;
- предела текучести для материала арматуры армированных слоёв;
- предельно допустимой погрешности вычисления прогибов или напряжений, в зависимости от принятой системы оценки сходимости вычислительного процесса.

Вычисление матрицы связи узлов сетки глобального ансамбля КЭ с локальной нумерацией узлов, принятой для отдельных КЭ, включает в себя следующие этапы:

- автоматизированное разбиение плиты на треугольные КЭ по некоторой рациональной системе и построение глобального ансамбля КЭ [156, 174, 176];
- проведение глобальной и локальной нумерации КЭ и их узлов;
- установление взаимно-однозначного соответствия локальной нумерации узлов с глобальным аналогом, для корректного определения места каждого элемента.

Задание нагрузки формирует вектор узловых сил для выбранной области ансамбля КЭ в глобальной системе координат (ГСК), которая в случае действия сосредоточенной силы представлена одним узлом. Вычисление элементов матриц жёсткости КЭ в исходном состоянии выполняется исключительно для неармированных слоёв и для неповреждённых армированных слоёв.

Элементы начальной матрицы податливости материала плиты определяется из выражения (4.32) при нулевых компонентах тензора напряжений. Вычисление матрицы жёсткости КЭ в ЛСК, в случае применения КЭ из главы 4, выполняется в следующей последовательностью действий:

- численным интегрированием жёсткостей по толщине КЭ определяются компоненты матрицы $[D]$ функций жёсткости, зависящих от напряжений;
- вычисляются компоненты матрицы податливости $[E]$;
- вычисляются компоненты матрицы $[H]$;
- вычисляются компоненты матрицы-произведения $[H]^{-1}[T]$;
- вычислить компоненты матрицы жёсткости КЭ $[K]$ в соответствии с выражениями (4.18).

Если расчёт матрицы жёсткости КЭ проводится не впервые, то вычисление вектора сил $\{M\}$, при нулевых координатах по осям локальным осям X_1 и X_2 , выполняется в следующей последовательности:

- вычисление матрицы-произведения $[H]^{-1}[T]$;
- вычисление компонентов вектора $\{\beta\}$;
- вычисление компонентов вектора $\{M\}$.

Далее вычисляется вектор $\{\varepsilon\}$ обобщённых деформаций и компоненты тензоров деформаций и напряжений для всех фиктивных слоёв плиты. Для армированных слоёв вычисляются напряжения в бетоне и арматуре.

Выполняется тест на появление трещин в фиктивных слоях, ранее их не имевших. В слоях с трещинами контролируется возникновение вторичных трещин, пересекающих первичные. Для каждого фиктивного слоя внутри КЭ проводится явная идентификация его типа, при необходимости проводится корректировка. После корректировки проводится новое вычисление компонентов матрицы упругости, вычисляется матрица жёсткости рассматриваемого КЭ в ЛСК. Этот результат включается в глобальную матрицу жёсткости, полученную для ГСК.

Следующее действие – это применение метода факторизации (LDL^T) для вычисления вектора узловых перемещений всего ансамбля КЭ, решения линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Процесс нахождения решения СЛАУ, полученной при помощи МКЭ, в пределах одного шага нагружения или одной итерации по методу переменных параметров упругости [29, 174], прекращается, если все параметры НДС в глобальной системе координат и вспомогательные переменные изменяются не более, чем на 0,01% (стандартная величина принятая в современных САПР [105]). После такого прерывания в базе данных обеспечения вычислительного процесса появляется перечень значений следующих вычисленных параметров:

- вектор узловых перемещений ансамбля конечных элементов в ГСК;
- деформации в центре конечного элемента (начало ЛСК внутри КЭ);
- напряжения в центре КЭ – точка (0;0) для ЛСК;

- угол χ_1 между направлением нормали к существующей трещине и осью X_1 исходной системы координат;
- величина значения функции повреждаемости ω ;
- ψ_s – параметр введенный В.И. Мурашевым [174, 180];
- ω_{pb} – функция, характеризующая степень поврежденности (потери несущей способности) от контакта с агрессивной средой;
- вид и тип появившихся трещин по условным слоям (см. главу 4);
- $\{M\}$ – вектор обобщённых сил в центре ЛСК КЭ.

5.5.5 Плита № 1 (плита № 711)

В примере проводится расчётное моделирование плиты из железобетона с защитным слоем из эпоксидного полимербетона с учётом факторов нелинейности, отмеченных ранее. Значения некоторых характеристик для данной плиты приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2 – Параметры модели плиты № 711 (1) [16, 268, 287]

№ п/п	Геометрические размеры, м	Предел текучести для арматурной стали, МПа	Расчётные коэффициенты армирования		Число заданных для точности расчёта фиктивных слоёв по толщине	Толщина слоя, взаимодействующего со средой, мм
			μ_{11}	μ_{22}		
711	3×1,5×0,189	320	0,0134	0,0094	38	40

Модуль упругости для арматурной стали принят стандартно и равен $E_s=200000$ МПа. В задаче применён слой из эпоксидного бетона, защищающих бетонную (железобетонную) часть от диффузии ионов хлора и, соответственно процессов коррозии, который имеет начальный нормативный модуль упругости $E_s=32000$ МПа [229].

Активная среда, взаимодействующая с защитным слоем, представляет из себя 20% раствор NaCl с заявленной плотностью $\rho=1,219$ г/см³. Используются константы потенциала W_I для бетона с прочностью на сжатие 28,4 МПа (см. главу 2). Нагрузка принята как равномерное давление – диапазон изменения 0–50 кПа.

Значения других параметров плиты показаны на рисунках 5.33, 5.34.

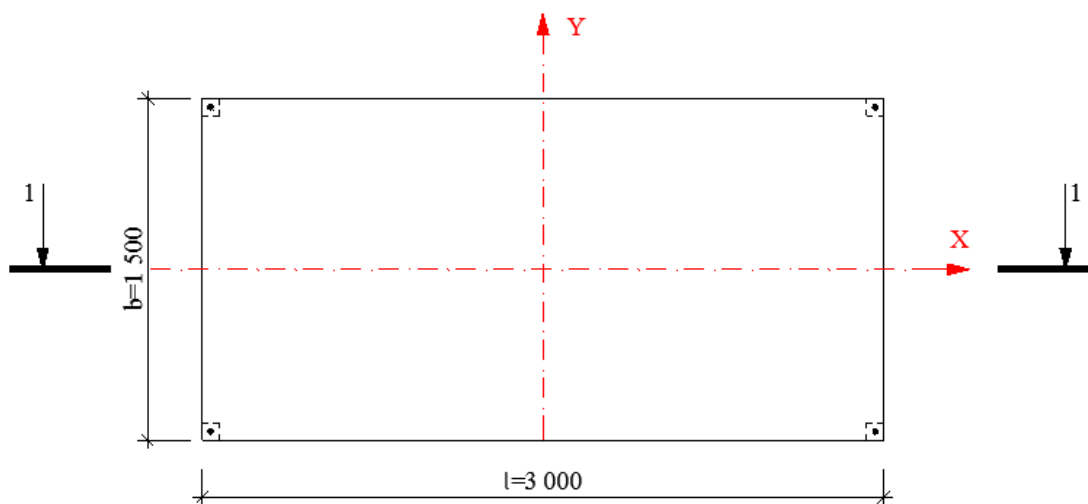


Рисунок 5.33 – Плита № 1 (711)

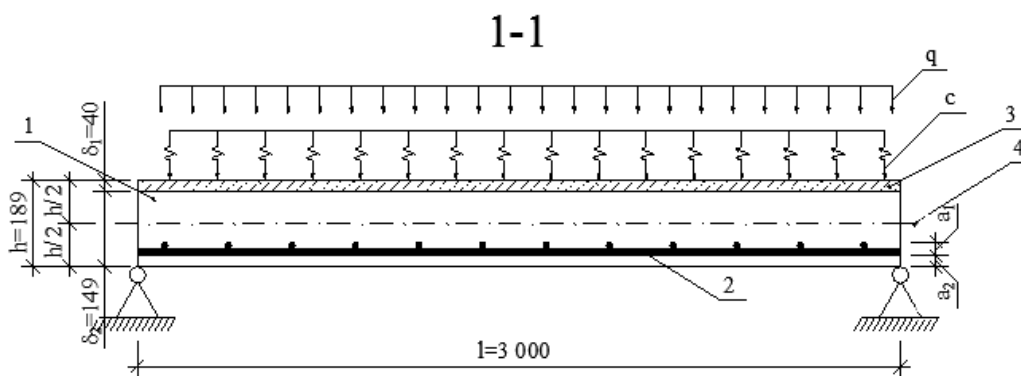


Рисунок 5.34 – Показано сечение 1-1 для плиты № 1 (711)

На рисунке 5.34 применены следующие условные обозначения:

1 – железобетонный слой плиты;

2 – армирование плиты;

3 – полимербетонный слой;

4 – срединная поверхность;

q – равномерно распределённая нагрузка;

c – химически активная среда;

δ_1 – толщина полимербетонного слоя;

δ_2 – толщина железобетонного слоя;

h – полная толщина плиты;

a_1 – толщина армированного слоя;

a_2 – толщина защитного слоя бетона для арматурной сетки.

Срединная поверхность плиты разбита правильной, по форме (способствует устойчивости получаемых результатов), сеткой треугольных КЭ со степенью дискретизации 12×12 узловых точек (оптимальный выбор для данной задачи, основанный на анализе результатов сходимости предложенной КЭ-модели [226, 229]), представленной схематично (рисунок 5.35).

Дополнительные материалы по результатам вычислений НДС армированной слоистой плиты № 1 представлены в приложении № 1. На рисунках П1.1–П1.20 приведены распределения горизонтальных и вертикальных перемещений в срединной поверхности по различным осям симметрии прямоугольной в плане плиты; нормальные напряжения; распределение напряжений по толщине данной плиты; механические моменты, определенные для вперед заданной длительности воздействия хлоридсодержащей среды в течении 12, 18, 24, 30-и месяцев.

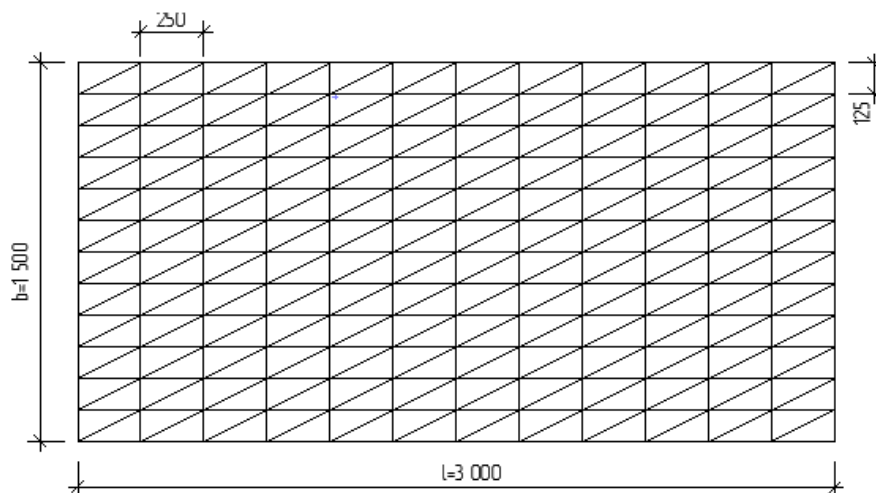


Рисунок 5.35 – КЭ-сетка для плиты № 1 (711) (размеры в мм)

Данные на рисунках демонстрируют сравнение вычисленных характеристик НДС воздействия химически активной эксплуатационной среды и без неё. Из этих данных, очевидно, следует, что относительный рост прогибов в плите до начала активного накопления повреждаемости достигает 17%, а после начала процессов активного трещинообразования и увеличения длительности контакта с агрессивной средой – увеличивается до 35%.

Увеличение значений максимальных напряжений в материале плиты составляет до 20% при сроке влияния среды менее 12 месяцев. С увеличением срока нахождения в химически активной среде до 24 месяцев и далее по времени рост

напряжений составляет до 51%, а значения механических моментов, воспринимаемых плитой, уменьшаются на величину 23–27%.

На рисунке 5.36 приведены графики зависимости вертикальных прогибов с момента начала и периода взаимодействия с химически активной эксплуатационной среды, из чего следует, что, по мере роста концентрации активной среды в материале защитного слоя из полимербетона, происходит значительно увеличение скорости процессов трещинообразования и существенный рост величины максимального прогиба. При одной и той же нагрузке и периоде 30 месяцев, разница прогибов при расчёте без среды и вместе с ней составляет до 15%.

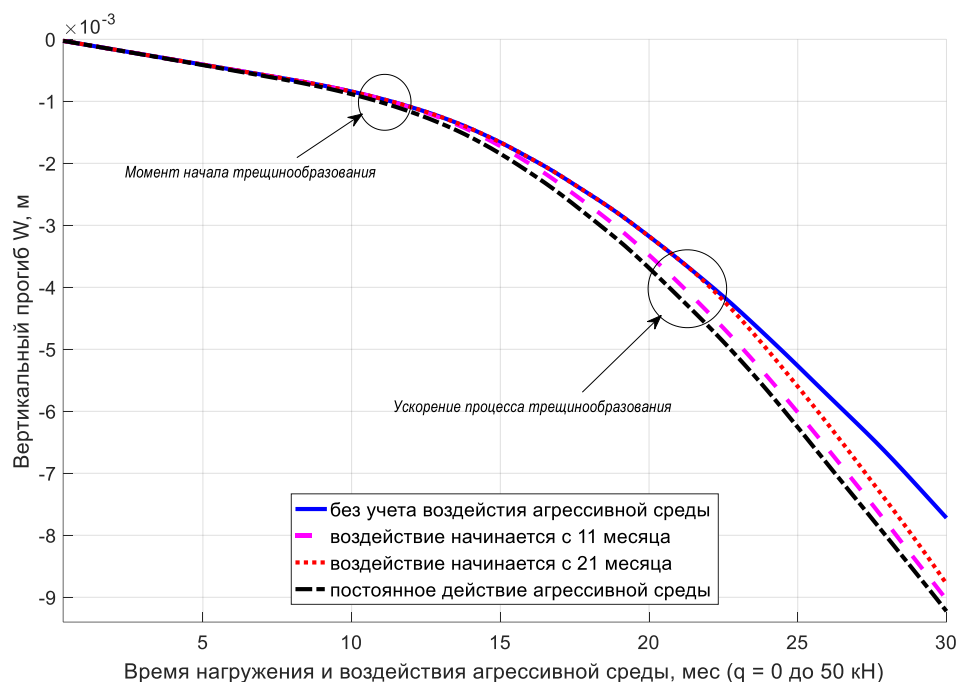


Рисунок 5.36 – Показана зависимость величин вертикальных перемещений от момента начала и длительности последующего действия химически активной внешней среды

На рисунках П1.21–П1.22 схематично показано возрастание степени повреждения плиты по толщине при активном взаимодействии с активной хлоридсодержащей средой.

5.5.6 Плита № 2 (плита № 825)

Рассчитывается железобетонная плита с защитным полимербетонным слоем. Поставлена задача проверить возможности расчётного моделирования разработанной механико-математической модели с учётом слоистости армированной

плиты, которая выполнена из разносопротивляющегося материала и находится в контакте с химически активной средой, будучи подверженной повреждаемости в форме трещинообразования.

Форма и размеры плиты показаны на рисунках 5.37–5.39.

Срединная поверхность плиты разбита правильной, по форме (что способствует устойчивости получаемых результатов), сеткой треугольных КЭ со степенью дискретизации 12×12 узловых точек (оптимальный выбор для данной задачи, основанный на анализе результатов сходимости предложенной КЭ-модели [226, 229]), представленной схематично (рисунок 5.39).

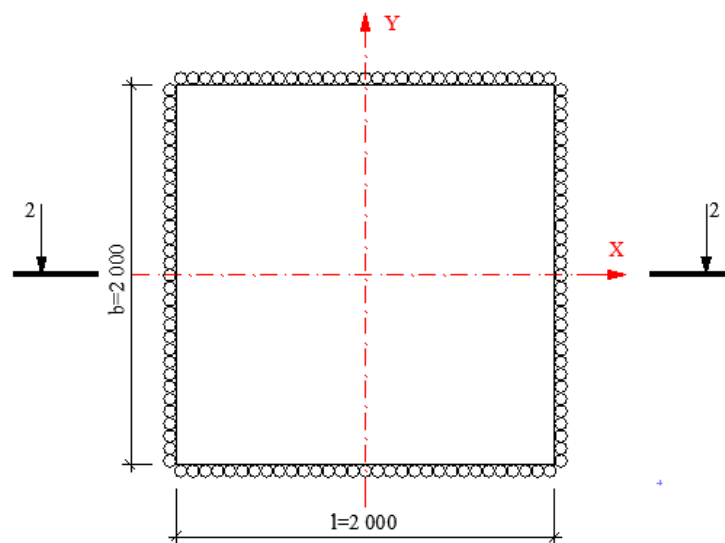


Рисунок 5.37 – Плита № 2 (825)

2-2

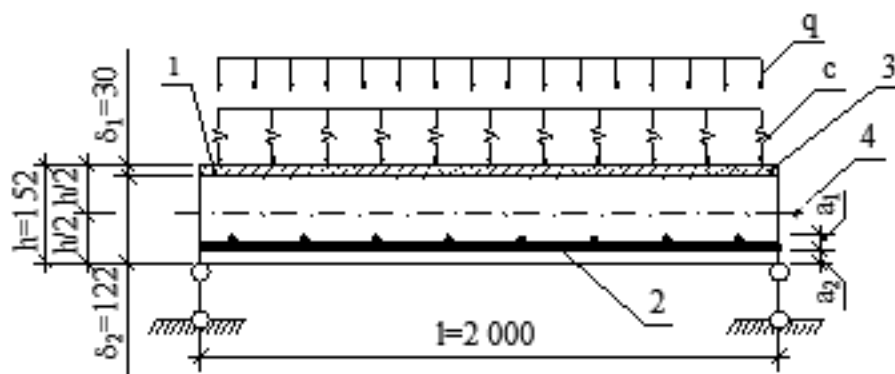


Рисунок 5.38 – Показано сечение 2-2 для плиты № 2 (825):

- 1 – железобетонные слои; 2 – армированные слои;
- 3 – защитный слой эпоксидного полимербетона; 4 – срединная поверхность;
- q – нагрузка в форме давления [16]

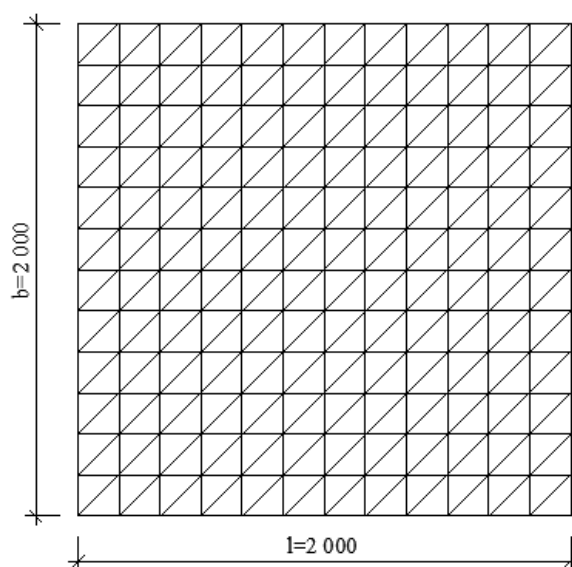


Рисунок 5.39 – КЭ-сетка для плиты № 2 (825) (размеры в мм)

Некоторые важные для расчётного моделирования параметры плиты № 2 (825) приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3 – Параметры расчёта для плиты № 825 (2) [16, 268, 287]

№ п/п	Геометрические размеры, м	Предел текучести для арматурной стали, МПа	Расчётные коэффициенты армирования		Число заданных для точности расчёта фиктивных слоёв по толщине	Толщина слоя, взаимодействующего со средой, мм
			μ_{11}	μ_{22}		
825	2×2×0,152	480	0,0125	0,0125	42	30

Модуль упругости для арматурной стали принят по справочной литературе и установлен стандартно величиной $E_s=200000$ МПа. В задаче применён слой из эпоксидного бетона, защищающих бетонную (железобетонную) часть от диффузии ионов хлора и, соответственно процессов коррозии, который имеет начальный нормативный модуль упругости $E_s=32000$ МПа [226].

Активная среда, взаимодействующая с защитным слоем, представляет из себя 20% раствор NaCl с заявленной плотностью $\rho=1,219$ г/см³. Используются константы потенциала W_I для бетона с прочностью 28,4 МПа на сжатие (см. главу 2). Нагрузка равномерно принята как равномерно распределённая (давление) – рассматривались величины 0–150 кПа.

Наиболее ценные результаты численного моделирования армированной слоистой плиты № 2 (825) приведены в приложении № 2.

Здесь, рисунки П2.1–П2.10, иллюстрируют характер распределения горизонтальных и вертикальных перемещений в срединной поверхности при максимальной величине нагрузки по различным осям симметрии плиты; значения нормальных напряжений; распределение напряжений по толщине в центре пластины; механические моменты, определенные для периода взаимодействия с хлоридсодержащей средой – до 12, 18, 24, 30 месяцев соответственно.

Данные графики позволяют объективно сравнить вычисленные характеристики НДС при учёте воздействия хлоридной эксплуатационной среды и без него. Полученные данные позволяют точно определить, что увеличение прогибов в плите до начала процессов повреждаемости составляет до 22%, а после начала активного трещинообразования и увеличения периода взаимодействия с активной эксплуатационной средой – достигает величины в 31%; при этом увеличение максимальных значений напряжений в материале плиты составляет до 41% при сроке влияния среды менее 12 месяцев, а с увеличением периода воздействия среды до 24 месяцев и далее, рост напряжений составил до 50%.

Рисунок 5.40 наглядно демонстрирует степень изменения вертикальных перемещений (прогибов) по времени при меняющихся значениях периода воздействия с химически активной среды.

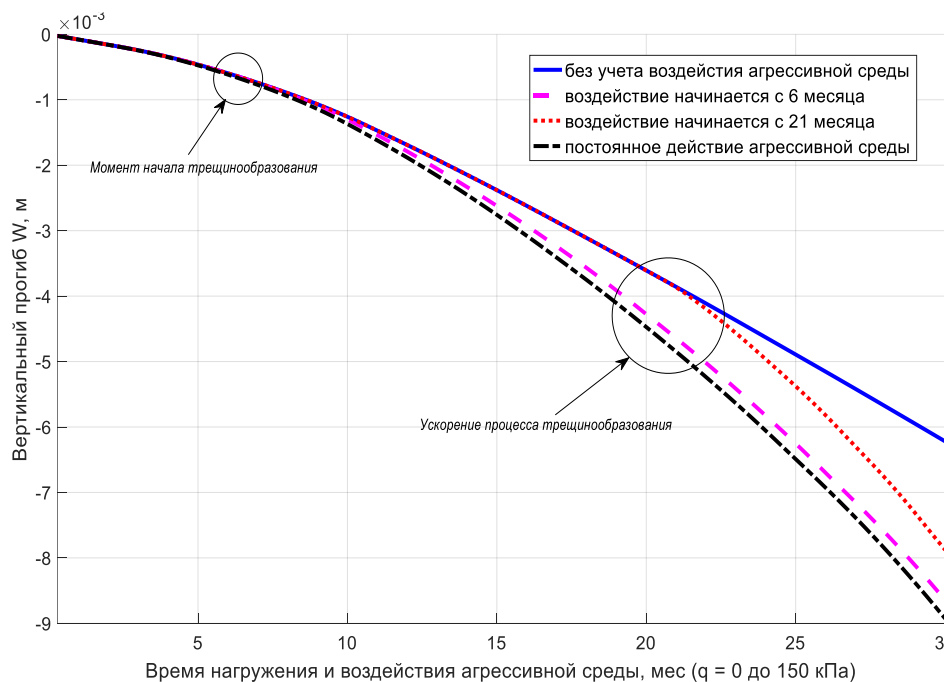


Рисунок 5.40 – Показана зависимость величин вертикальных перемещений от момента начала и длительности последующего действия химически активной внешней среды

Здесь можно увидеть, что при росте концентрации химически активной (в данном случае – хлоридсодержащей среды) в материале защитного слоя происходит заметный рост скорости процессов накопления повреждаемости, что приводит к значительному увеличению величины максимального вертикального перемещения в плите. При равной нагрузке и сроке взаимодействия в 30 месяцев с агрессивной средой разница по вертикальным перемещениям составила до 32% по сравнению с вариантом расчёта без учёта кинетики агрессивной среды.

На рисунках П2.11–П2.12 схематично показано возрастание степени поврежденности плиты по толщине при активном взаимодействии с активной хлоридсодержащей средой.

5.5.7 Плита № 3 (плита № 844)

Рассчитывается железобетонная плита с защитным слоем из эпоксидного полимербетона. Как и в примерах с плитами № 1 и № 2, стоит задача проверить возможности расчётного моделирования разработанной механико-математической модели с учётом слоистости армированных плит, которые выполнены из разносопротивляющегося материала, и находятся в контакте с химически активной средой, к тому же подвержены повреждаемости в форме трещинообразования.

Форма, размеры и структура слоёв плиты показаны на рисунках 5.41, 5.42.

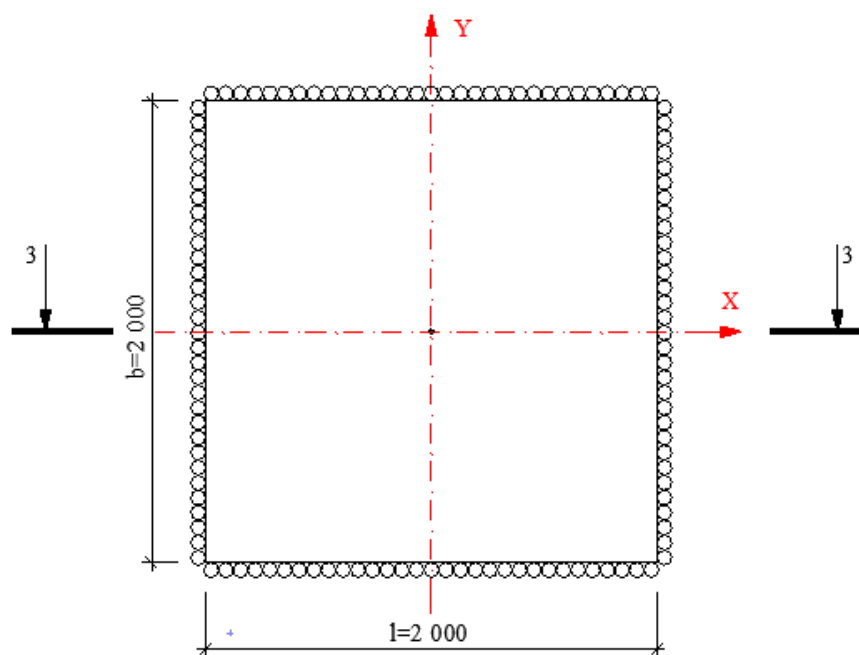


Рисунок 5.41 – Плита № 3 (844)

3-3

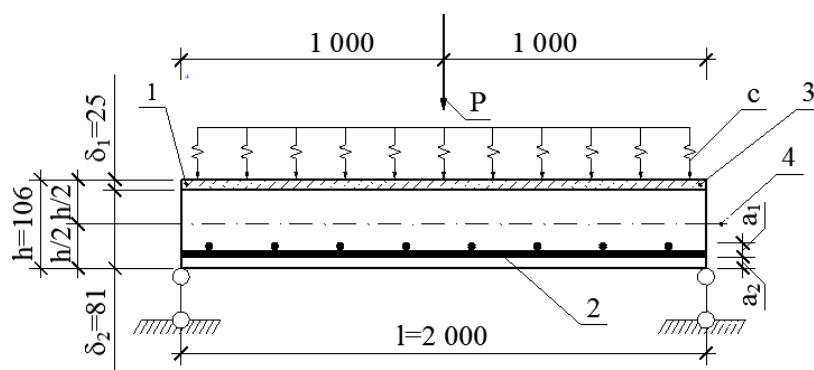


Рисунок 5.42 – Показано сечение 3-3 для плиты № 3: где 1 – железобетонные слои; 2 – армированные слои; 3 – слой эпоксидного полимербетона; 4 – срединная поверхность; q – нагрузка в форме давления [16]

Срединная поверхность плиты разбита правильной, по форме (способствует устойчивости получаемых результатов), сеткой треугольных КЭ со степенью дискретизации 16×16 узловых точек (оптимальный выбор для данной задачи, основанный на анализе результатов сходимости предложенной КЭ-модели [226, 229]), представленной схематично (рисунок 5.43).

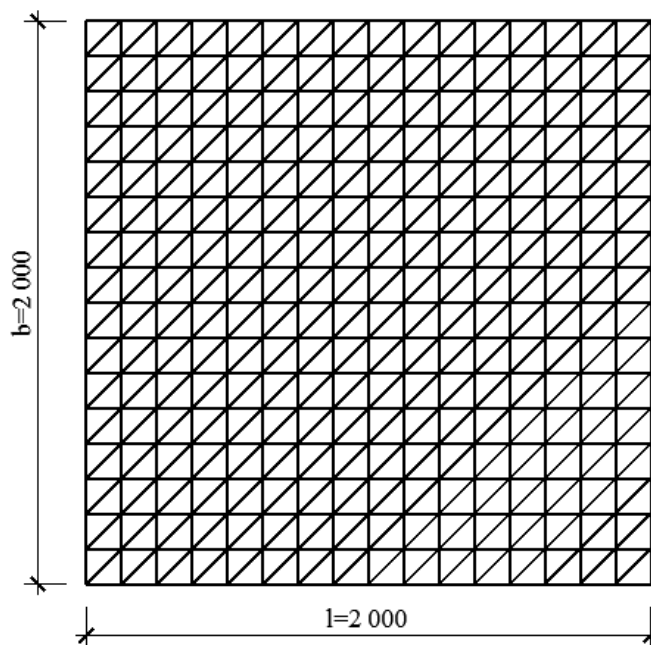


Рисунок 5.43 – КЭ-сетка для плиты № 3 (844) (размеры в мм)

В таблице 5.4 сгруппированы некоторые важные значения параметров плиты № 3, которые определяют её несущую способность и степень защищённости от воздействия химически активной внешней среды.

Таблица 5.4. Параметры расчётной модели плиты № 844 (3) [16, 268, 287]

№ п/п	Геометрические размеры, м	Предел текучести для арматурной стали, МПа	Расчётные коэффициенты армирования		Число заданных для точности расчёта фиктивных слоёв по толщине	Толщина слоя, взаимодействующего со средой, мм
			μ_{11}	μ_{22}		
844	2×2×0,106	480	0,0145	0,0168	36	20

Модуль упругости для арматурной стали принят по справочной литературе и установлен стандартно величиной $E_s=200000$ МПа. В задаче применён слой из эпоксидного бетона, защищающих бетонную (железобетонную) часть от диффузии ионов хлора и, соответственно процессов коррозии, который имеет начальный нормативный модуль упругости $E_s=32000$ МПа, как и в задачах выше.

Активная среда, взаимодействующая с защитным слоем, представляет из себя 20% раствор NaCl с заявленной плотностью $\rho=1,219$ г/см³. Используются константы потенциала W_I для бетона с прочностью 28,4 МПа на сжатие (см. главу 2). Нагрузка сосредоточенная, приложенная в центре плиты, вертикальная сила – диапазон изменения 0–80 кН.

Избранные результаты расчёта армированной слоистой плиты № 3 приводятся в приложении № 3. Рисунки П3.1–П3.10 показывают наиболее существенные, для оценки, графики зависимостей вертикальных и горизонтальных перемещений в срединной поверхности при максимальной величине механического нагружения (здесь – сосредоточенная сила); величины нормальных напряжений и их потенциальное распределение по толще плиты; значения моментов, определенные для периода взаимодействия, с химически активной средой – в пределе до 12, 18, 24, 30 месяцев, соответственно.

На указанных графиках приведены сравнительные данные, позволяющие провести анализ уровня влияния воздействия химически активной эксплуатационной среды. Для этого используется вариантное представления эффекта присутствия такой среды по времени.

Из приведённых в приложении результатов следует, что величина максимального прогиба, от прогрессирующей повреждаемости по толще плиты, с

одновременным увеличением периода активного взаимодействия с хлоридной средой (NaCl) до срока в 30 месяцев, может достигать величины в 40%.

Рост максимальных величин напряжений в материале плиты составит до 20% при периоде взаимодействия со средой в 12 месяцев, и существенно будет расти по мере длительности контакта с агрессивной средой в 24 месяца и более (рост максимальных величин напряжений достигает 38% и более).

Нижеприведённые данные с рисунка 5.44 свидетельствуют, что имеются основания полагать, что по мере возрастания уровня концентрации ионов хлора в защитном слое из эпоксидного полимербетона, происходит значительное и прогрессирующее во времени, ускорение процесса повреждаемости и более активный рост максимальных прогибов в исследуемой плите № 3 (844).

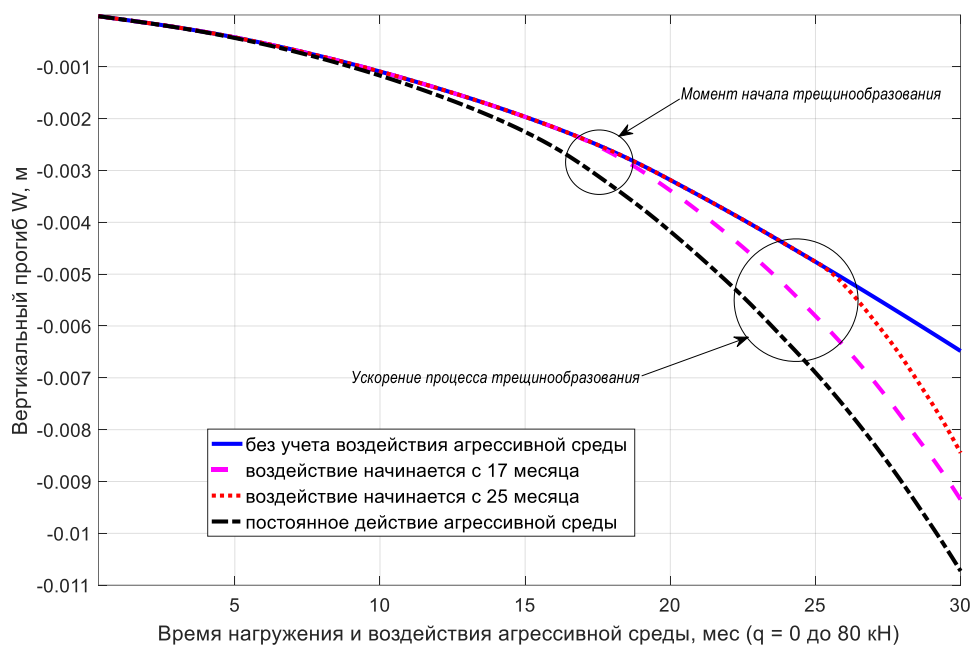


Рисунок 5.44 – Показана зависимость величин вертикальных перемещений от момента начала и длительности последующего действия химически активной внешней среды

Данные полученных результатов объективно свидетельствуют, о том, что по мере возрастания концентрации активной хлоридсодержащей среды в материале защитного слоя, происходит существенное для плиты возрастание скорости процессов накопления повреждаемости и, вследствие, происходит активное увеличение значений для максимальных вертикальных перемещений.

При одинаковой нагрузке и сроках взаимодействия с хлоридсодержащей средой до 30 месяцев разница в расчётных величинах прогибов при учёте среды и без присутствия химически активной среды составляет до 42%.

На рисунках ПЗ.11–ПЗ.12 схематично показано возрастание степени поврежденности плиты по толщине при активном взаимодействии с активной хлоридсодержащей средой.

5.5.8 Плита № 4 (плита № 863)

Расчёту подлежит плоская железобетонная плита с защитным слоем из эпоксидного полимербетона [227].

Как и в примерах с предыдущими плитами будем диагностировать способность разработанной механико-математической модели учитывать при расчётном моделировании эффекты, которые делают механико-математическую модель значимо нелинейной, но способствуют получению более точного прогноза значений её НДС при использовании слоистости армированных плит, которые выполнены из разносопротивляющегося материала, подверженного повреждаемости в форме трещинообразования, в условиях воздействия химически активной эксплуатационной среды.

Конфигурация и геометрические размеры плиты в плане (вид сверху и сечение) демонстрируются на рисунках 5.45, 5.46.

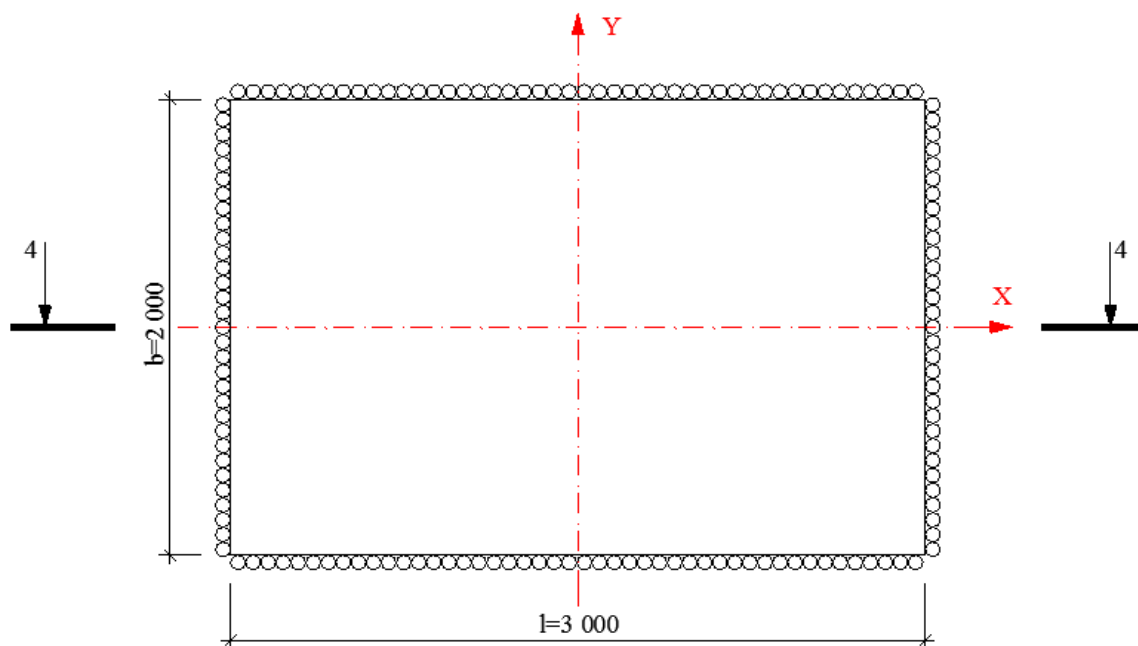


Рисунок 5.45 – Плита № 4 (плита № 863)

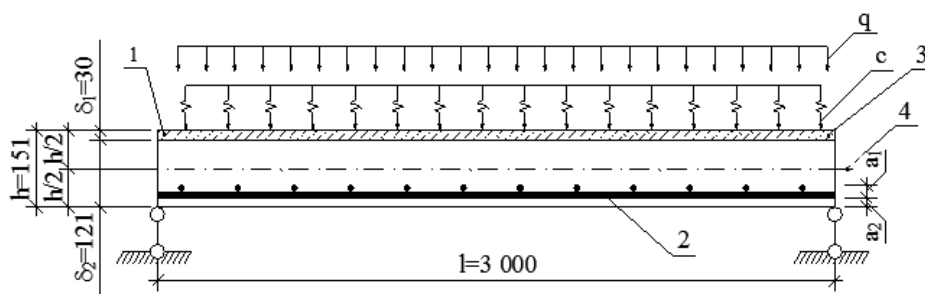


Рисунок 5.46 – Сечение 4-4 для плиты № 4: где 1 – железобетонные слои; 2 – армированные слои; 3 – слой эпоксидного полимербетона; 4 – срединная поверхность; q – нагрузка в форме давления

Срединная поверхность плиты разбита правильной, по форме, сеткой треугольных КЭ со степенью дискретизации 14×14 узловых точек (оптимальный выбор, основанный на анализе результатов сходимости предложенной КЭ-модели [226, 227, 229]), представленной схематично на рисунке 5.47.

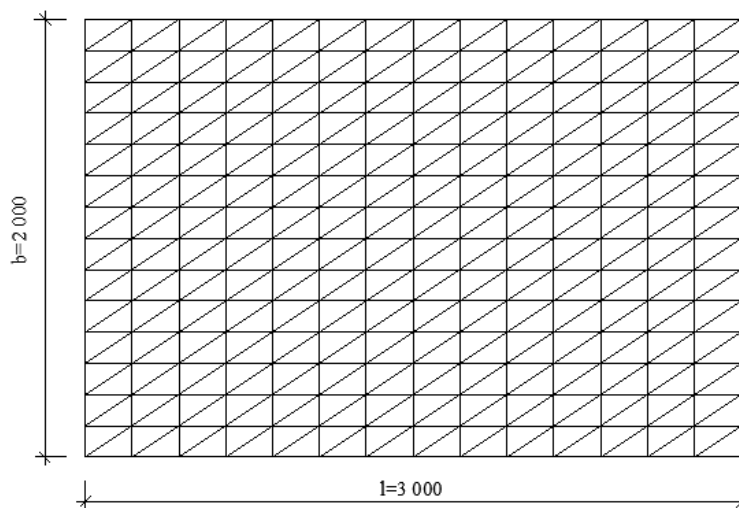


Рисунок 5.47 – КЭ-сетка для плиты № 4 (863) (размеры в мм)

Отдельные необходимые параметры, которые используются при расчётном моделировании плиты № 4 (863), приведены в таблице 5.5.

Таблица 5.5. Параметры расчётной модели плиты № 863 (4) [16, 268, 287]

№ п/п	Геометрические размеры, м	Предел текучести для арматурной стали, МПа	Расчётные коэффициенты армирования		Число заданных для точности расчёта фиктивных слоёв по толщине	Толщина слоя, взаимодействующего со средой, мм
			μ_{11}	μ_{22}		
863	$2 \times 2 \times 0,151$	428	0,0117	0,0117	34	30

Модуль упругости арматурной стали принят в соответствии с нормативными данными стандартно и равен $E_s=200000$ МПа. В задаче использован эпоксидный полимербетонный слой, защищающих бетонную (железобетонную) часть от диффузии ионов хлора и, соответственно процессов коррозии, который имеет начальный нормативный модуль упругости $E_s=32000$ МПа. Активная среда, взаимодействующая с защитным слоем, представляет из себя 20% раствор NaCl с заявленной плотностью $\rho=1,219$ г/см³. Используются константы потенциала W_I для бетона с прочностью 28,4 МПа на сжатие (см. главу 2). Нагрузка принята распределённая, в форме давления – 0–100 кПа.

На рисунке 5.48 приведён график зависимости максимальных вертикальных прогибов в плите от времени загрузки, в том числе, с учётом взаимодействия с химически активной (хлорид натрия) средой.

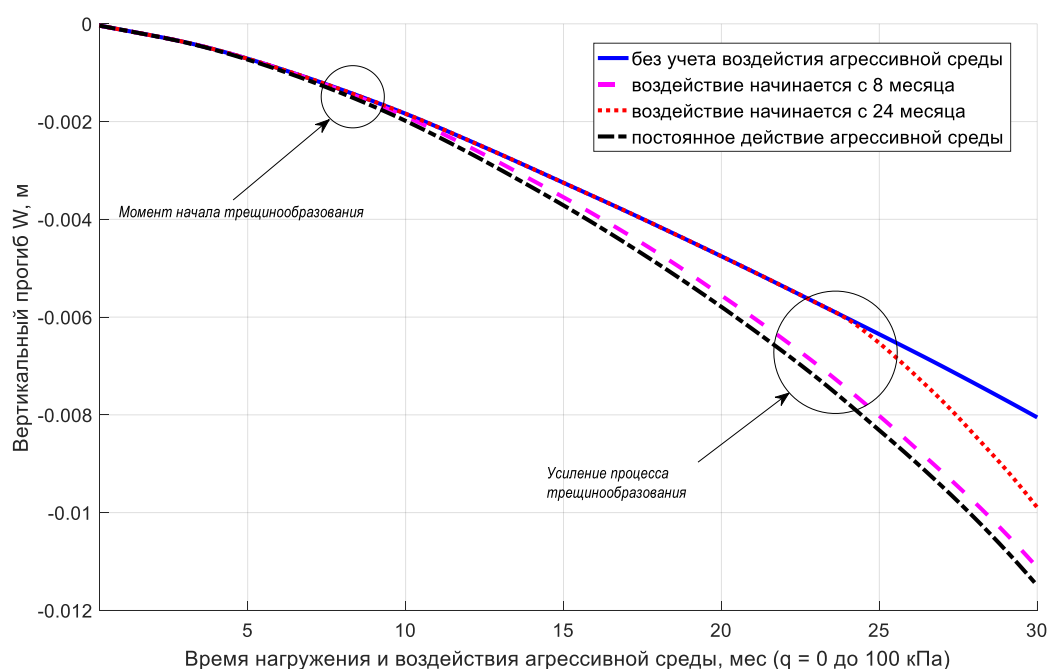


Рисунок 5.48 – Прогрессирующее возрастание величин вертикальных прогибов от времени нагружения и периода действия химически активной (хлорид натрия) эксплуатационной среды

Данные рисунка 5.48 свидетельствуют, что имеются основания, чтобы утверждать, что по мере возрастания концентрации ионов хлора в защитном слое из эпоксидного полимербетона, происходит значительное и прогрессирующее во времени, ускорение процесса повреждаемости и рост значений максимального

прогиба в исследуемой плите. При равной нагрузке и схожем периоде присутствия химически активной среды, на основе хлорида натрия, за 30 месяцев, разница в значении максимального прогиба, в присутствии среды и при её полном отсутствии, может достигать величины до 27%.

Некоторые наиболее значимые результаты расчёта армированной слоистой плиты № 4 (863) представлены в приложении № 4.

Рисунки П4.1–П4.20 показывают наиболее существенные, для оценки, графики зависимостей вертикальных и горизонтальных перемещений в срединной поверхности при максимальной величине механического нагружения; величины нормальных напряжений и их потенциальное распределение по толще плиты; значения механических моментов, вычисленных для периода взаимодействия с химически активной средой (NaCl) – период действия 12, 18, 24, 30 месяцев. Сравнение данных графиков, объективно доказывает, что учёт таких факторов, как воздействие среды на защитный слой и др., приводит к значительному ускоренному росту вертикальных перемещений (т.е. прогибов) в плите, до образования трещин – до максимум 18%, а после, принимая во внимание длительность воздействия с хлоридной средой, рост величин прогибов может достигнуть 27%. Возрастание максимальных напряжений в материале плиты составляет до 24% (период влияния среды менее 12 месяцев) и до 43% (при периоде взаимодействия с активной средой в 30 месяцев и более).

Рисунки П4.21–П4.22 подтверждают возрастание степени поврежденности плиты по толщине при активном взаимодействии с хлоридсодержащей средой для защитного слоя.

5.6 Выводы по главе 5

1. Формулируется модификация одного из вариантов пошагово-итерационного процесса расчёта элементов строительных конструкций в форме оболочек различной геометрической конфигурации (формы) с учётом обновления координат узлов (деформированная схема расчёта) конечных элементов на каждом отдельном этапе нагружения, взаимовлиянии полей температуры и напряжений, в рамках решения связанной задачи, зависимости температурных характеристик материала от НДС и значимых эффектов связанных с разнсопротивляемостью, а также для определения НДС армированных слоистых плит с учётом воздействия химически

активной хлоридсодержащей среды и повреждаемости в форме образования трещин.

2. Проведён ряд вычислительных экспериментов по расчёту НДС оболочечных конструкций различной конфигурации из физически нелинейных материалов, чьи механические свойства проявляют зависимость от компонент тензора напряжений, в условиях совместного нагружения механической и температурной нагрузкой.

3. Основные результаты по определению величин НДС, следующие:

- объективно показано значительное влияние связанности полей напряжений и температур, что достигает 16% применительно к величинам нормальных напряжений, особенно заметное на этапе приложения температурной нагрузки;

- показано весьма важное влияние эффектов, связанных с зависимостью механических свойств материала от напряжений, по сравнению с расчётами, проведёнными по классическим моделям термоупругости, разница в расчётных величинах достигает:

- 27% по максимальным вертикальным перемещениям;
- 34% по максимальным горизонтальным перемещениям;
- 47% по максимальным значениям нормальных и 17% по значениям касательных напряжений;

- акцентированное влияние на результаты расчётов оказало явное применение нелинейных определяющих соотношений А.А. Трещёва, Н.М. Матченко [118, 119, 331] в сравнении с их квазилинейным аналогом, что характеризуется величиной в пределах 26% относительно некоторых параметров или характеристик НДС;

- расчёт характеристик НДС по деформированной схеме вносит следующие поправки в результаты:

- до 8% по прогибам;
- до 3% по горизонтальным перемещениям;
- до 26% по нормальным напряжениям;
- почти не оказывает никакого влияния на касательные напряжения.

4. Решён комплекс прикладных задач (в том числе проверочных) по определению параметров напряженно-деформированного состояния слоистых

армированных плит с учётом проявлений разносопротивляемости, воздействия химически активной хлоридсодержащей среды и повреждаемости.

5. Получены новые значимые оценки результатов численных экспериментов по учёту влияния агрессивности хлоридсодержащей эксплуатационной среды, которые, очевидно, заключаются в следующем:

- наблюдается заметное увеличение величин вертикальных перемещений в плитах, на этапе до начала образования трещин, (процессов повреждаемости в плите) – наблюдается увеличение до 16%, а после старта процессов повреждаемости и прогрессирующего увеличения периода воздействия химически активной хлоридной среды – величины прогибов могут возрастать до 36% в экстремальных точках;

- происходит прогрессирующее возрастание максимальных величин напряжений в материале плит:

- до 20% при сроке взаимодействия с активной средой до 12 месяцев;
- до 49% при сроке от 24 месяцев взаимодействия с активной средой;

- величины воспринимаемых плитой моментов уменьшаются на 25–29%;

- проявляется ускорение процесса трещинообразования и количества трещин по толщине плиты по мере распространения повреждения защитного слоя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведённого в первом разделе диссертации анализа известных экспериментальных данных показано, что характер упругопластического деформирования многих конструкционных материалов не соответствует гипотезе «единой кривой» и деформирование их может происходить по дилатационному принципу. Такие материалы можно отнести к материалам с «усложнёнными» свойствами, физико-механические характеристики которых проявляют значимую зависимость от вида и количественных значений параметров текущего напряжённого состояния в точке среды материала. На основе обзора результатов экспериментов и существующих определяющих соотношений для разносопротивляющихся и дилатирующих материалов показано, что эти два специфические свойства их механической природы во многом взаимосвязаны и зачастую выступают в качестве внешних проявлений сложной структуры. Показано также, что большинство известных определяющих соотношений для материалов с усложнёнными свойствами не учитывают важных особенностей их деформирования, что вносит определённые модельные ограничения на характеристики материалов или приводит к значительным погрешностям получаемых аппроксимаций экспериментальных данных. Решение прикладных задач строительной механики с учётом нелинейной механики материалов требует применения достаточно универсальных и надёжных определяющих соотношений, а также усовершенствования известных методов решения этих задач.

Полученные в диссертационной работе результаты указывают на то, что предложенный в диссертационной работе подход на базе определяющих соотношений для нелинейно деформируемых материалов с неклассическими свойствами и специально ориентированные на их использование численные методы решения практически важных задач определения НДС пространственных конструкций, в том числе комбинированных, могут служить удовлетворительной основой для исследования деформирования сложных элементов конструкций, выполненных из подобных материалов.

Итоги результатов диссертационного исследования могут быть представлены следующими выводами:

1. На основе предложенных определяющих соотношений проанализированы данные экспериментов для достаточно широкого круга нелинейных разносопротивляющихся материалов. Показано, что используемая форма потенциальных соотношений обладает достаточной точностью аппроксимации механического поведения этих материалов и позволяет, в целом, более эффективно вычислять характеристики НДС конструкций из материалов указанного класса.

2. На основе подхода, связанного с нормированными пространствами напряжений и определяющими соотношениями для начально-изотропных материалов, обладающих свойствами разносопротивляемости, получены аппроксимации для механического поведения ряда грунтов, в том числе скальных пород, что позволило исследовать деформирование упругих оснований и сформировать единую универсальную модель исследования прочности зданий и сооружений на деформируемом основании в условиях их совместной работы, как того требует «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» от 30.12.2009 № 384-ФЗ.

3. Выполнен обзорный анализ теоретических и экспериментальных работ по влиянию химически активных эксплуатационных сред на изменение физико-механических свойств материалов, в том числе, на НДС конструкций из материалов со свойствами, зависящими от компонентного состава тензора напряжений.

4. Рассмотрены известные теоретические подходы и экспериментальные исследования по определению НДС несущих элементов строительных конструкций в условиях температурного воздействия. Проанализированы аспекты развития теоретических моделей термоупругости, описывающих процессы теплопроводности в условиях деформирования, ограниченность скоростей распространения термоупругих волн, влияние температуры на механические свойства материалов несущих элементов, варианты постановок задач. Установлено, существует проблема точности представления НДС термоупругого деформирования значимо нелинейных изотропных материалов.

5. Построен плоский треугольный гибридный многослойный конечный элемент, обеспечивающий решение задач об исследовании элементов пространственных конструкций, выполненных из материалов с усложнёнными свойствами, для

которых допустимо представление в виде ансамбля плоских элементов, в том числе с учётом разрушения и воздействия химически активной среды.

6. Построена теоретическая модель для решения задач связанной термоупругости. Для этого была использована модификация нелинейного термодинамического потенциала Гиббса в нормированном пространстве напряжений. Эта модель легла в основу вывода уравнений объёмного конечного элемента (тетраэдра) новой модификации, который позволил определить значения характеристик НДС некоторых прикладных задач с помощью разработанного на его основе программного обеспечения. Алгоритм решения задач включает учёт влияния компонентного состава тензора напряжений на термомеханические свойства применяемых материалов.

7. Для решения задач определения НДС многослойного грунтового основания построен новый объёмный конечный элемент изопараметрического типа с 12 поступательными степенями свободы в узлах и матрицей жёсткости, параметры которой могут отображать механические свойства слоёв основания.

8. Проведённые исследования позволили отыскать принципиально новое решение для проблемы деформирования разносопротивляющихся материалов, а главное, методологии внедрения современных модификаций МКЭ в инженерную практику. Разработана математическая модель и программный комплекс, ориентированные на решение задач по исследованию НДС элементов макрооднородных и армированных конструкций, выполненных из материалов, чьи механические свойства зависят от вида напряжённого состояния, с учётом разрушения и пластических деформаций в арматуре, в том числе, совместно с многослойным деформированным основанием, с учётом температурного воздействия и влияния химически активной среды.

9. Решена задача об определении НДС трубчатых элементов при чистом кручении. Сравнение с экспериментальными данными и теорией Н.И. Карпенко свидетельствует об адекватности разработанной механико-математической модели, правильности работы разработанного алгоритма и его реализации на ЭВМ, а также возможности использования этой модели для решения задач об определении НДС железобетонных оболочек.

10. Проведён расчёт двух разомкнутых цилиндрических оболочек, жёстко заземлённой вдоль образующих, и опёртой шарнирно, а также задача определения характеристик НДС для оболочки положительной гауссовой кривизны, опёртой на типовые фермы. Анализ результатов решения этих задач подтвердил, что учёт усложняющих поведение материала свойств даёт значительный эффект при проведении статических расчётов. В частности, различия в перемещениях составили до 70% по сравнению с расчётами без учёта усложнённых свойств бетона; разница по напряжениям составила до 50%.

11. Выполнен расчётный анализ воздействия химически активной среды на несущие элементы типа армированная «многослойная плита», защищённая полимербетоном. Постановка задачи включает учёт деградации защитных слоёв, разнесопротивляемость бетона и наличие повреждаемости (трещинообразования). Полученные результаты расчётного моделирования показали, что указанные факторы нелинейности оказывают значимое влияние на НДС элемента: за счёт развития повреждений и увеличения периода агрессивного воздействия прогибы возросли с 17% до 35%; максимальные напряжения увеличили значения с 20% (за 12 месяцев) до 48% (за 24 месяца) при снижении сопротивляемости плит по изгибающему моменту на 25–28%; деградация защитного слоя ускорила процесс развития повреждённости.

12. Решены новые постановки задач связанной термоупругости для материалов, свойства которых зависят от компонентного состава тензора напряжений. Объектами расчётного моделирования стали оболочки круглая и прямоугольная в плане. Обе имеют положительную кривизну Гаусса.

Анализ значений НДС решённых задач показал: нелинейность определяющих соотношений вносит изменения до 26% (при прочих равных); связности напряжений и температур вносит изменения: в значения нормальных напряжений – до 12%; нелинейная разнесопротивляемость изменяет: прогибы не более, чем на 28%, горизонтальные перемещения – до 33%, нормальные напряжения – до 46%, касательные напряжения – до 15%; расчёт по деформируемой схеме изменяет прогибы – до 8%, горизонтальные перемещения – до 3%, нормальные напряжения – до 26%, касательные – до 10%.

13. Выполнены количественная и качественная оценки результатов расчётного моделирования с помощью конечно-элементной модели, состоящей из плоских треугольных и трёхмерных (в форме тетраэдра) конечных элементов, высотного здания как призматической оболочки. Анализ полученных результатов позволил установить необходимость учёта разнородности материала на всех стадиях работы конструкции, в том числе, при совместной работе с деформируемым основанием. Показано, что учёт особых, неклассических эффектов, работы материалов, в том числе в железобетоне, позволяет получить уточнения значений различных характеристик НДС до 25–30%, что зависит от их значений, получаемых в рамках упрощённых подходов к работе основания и бетона в составе несущих элементов.

14. Построены разрешающие уравнения для определения НДС тонких пластинок в условиях плоского напряжённого состояния при условиях: материал – начально-изотропной разнородный, повреждённость – трещины сдвига и нормального разрыва. Показано, что разница по напряжениям при учёте разнородности и без её учёта может достигать 45% и более.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авхимков, А.П. О плоской задаче разномодульной теории упругости / А.П. Авхимков // Доклады / 9-й науч.-техн. конф. инж. фак-та Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. – М., 1974. – С. 39–43.
2. Айнбиндер, С.Б. Влияние гидростатического давления на механические свойства полимерных материалов / С.Б. Айнбиндер, М.Г. Лака, И.Ю. Майорс // Механика полимеров. – 1965. – № 1. – С. 65 – 75.
3. Ажогин, Ф.Ф. Защита металлов / Ф.Ф. Ажогин, Ю.К. Павлов, 1966. – т. – № 2. – С. 145–148.
4. Акимов, Г.В. Теория и методы исследования коррозии металлов / Г.В. Акимов. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1945. – 361 с.
5. Алиев, М.М. Новый подход к разработке полиномиальных критериев прочности для изотропных полимеров и горных пород / М.М. Алиев, Н.Г. Каримова, С.В. Шафиева // Изв. вузов «Нефть и газ». – 2009. – № 3. – С.77–82.
6. Альтенбах, Х. Новый критерий статической прочности изотропных полимеров / Х. Альтенбах, К. Туштев // Механика композитных материалов. – 2001. – Т. 37. – № 5/6. – С. 732–739.
7. Амбарцумян, С.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию / С.А. Амбарцумян, А.А. Хачатрян // Инж. журн. МТТ. – 1966. – № 2. – С. 44–53.
8. Амбарцумян, С.А. Разномодульная теория упругости / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
9. Амбарцумян, С.А. Теория симметрично нагруженных, слабомоментных оболочек вращения, изготовленных из разномодульных материалов / С.А. Амбарцумян // Инж. журн. МТТ. – 1967. – № 6. – С. 33–46.
10. Арканья, З.В. К построению определяющих уравнений теории упругости изотропных сред / З.В. Арканья, Н.М. Матченко, А.А. Трещёв // Механика сплошных сред. – Тбилиси: ГПИ, 1984. – № 9. – С. 88–90.

11. Артёмов, А.Н. Определяющие соотношения для нелинейных разносопротивляющихся материалов / А.Н. Артёмов, Л.А. Зиборов, Н.М. Матченко // Проблемы прочности. – 1989. – № 4. – С. 39–42.

12. Артёмов, А.Н. Поперечный изгиб железобетонных плит с учётом трещин / А.Н. Артёмов, А.А. Трещёв // Изв. вузов. Строительство. – 1994. – № 9 – 10. – С. 7–12.

13. Астанков, К.Ю. Анализ возможности применения российских норм проектирования сталетрубобетонных конструкций в малом мостостроении / К.Ю. Астанков, А.С. Пермикин, И.Г. Овчинников // Транспорт. Транспортные сооружения. Экология. 2022. – № 2. С. 53–63.

14. Байков, В.Н. Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей / В.Н. Байков, С.В. Горбатов, З.А. Дмитриев // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1977. – № 6. – С. 15–18.

15. Баландин, П.П. К вопросу о гипотезах прочности / П.П. Баландин // Вестник инженеров и техников. – 1937. – № 1. – С. 37 – 41.

16. Башкатов, А.В. Моделирование напряжённо-деформированного состояния конструкций из железобетона и полимербетона с учётом влияния агрессивной среды / А.В. Башкатов, В.Г. Теличко, А.А. Трещёв // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22). – С. 80–88.

17. Безухов, Н.И. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач / Н.И. Безухов, О.В. Лужин. – М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.

18. Белл, Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твёрдых тел. – Часть 1: Малые деформации / Дж.Ф. Белл. – М.: Наука, 1984. – 600 с.

19. Белостоцкий, А.М. О методах расчёта напряжённо-деформированного состояния и на устойчивость к прогрессирующему обрушению пространственных плитнооболочечных железобетонных конструкций с учётом физической нелинейности, трещинообразования и приобретаемой анизотропии / А.М. Белостоцкий, Н.И. Карпенко, П.А. Акимов [и др.] // Международный журнал по расчёту гражданских и строительных конструкций, 2018. – Т. 14. – № 2. – С. 30–47.

20. Белостоцкий, А.М. О современных методах редуцирования вычислительной размерности задач расчёта конструкций, зданий и сооружений в рамках метода конечных элементов / А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Д.С. Дмитриев // Международный журнал по расчёту гражданских и строительных конструкций, 2017. – Т. 13. – № 3. – С. 19–33.

21. Белостоцкий, А.М. Расчётное исследование параметров механической безопасности высотного (404 метра) жилого комплекса "One tower" в деловом центре «МОСКВА-СИТИ» / А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Д.С. Дмитриев [и др.] // Academia. Архитектура и строительство, 2019. – № 3. – С. 122–129.

22. Белостоцкий, А.М. Расчётное обоснование механической безопасности конгресс-холла в Челябинске / А.М. Белостоцкий, П.А. Акимов, Д.С. Дмитриев [и др.] // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2019. – Т. 15. – № 4. – С. 251–260.

23. Березин, А.В. Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твёрдых тел / А.В. Березин. – М.: Наука, 1990. – 135 с.

24. Березин, А.В. Деформируемость и разрушение изотропных графитовых материалов / А.В. Березин, В.И. Строков, В.Н. Барабанов // Конструкционные материалы на основе углерода. – М.: Metallurgia, 1976. – Вып. 11. – С. 102–110.

25. Березин, А.В. О законах деформирования разномодульных дилатирующих сред / А.В. Березин // Проблемы машиностроения и автоматизации. Международный журнал. – 2007. – № 2. – С. 70–72.

26. Березин, А.В. Трещины в разносопротивляющихся дилатирующих материалах / А.В. Березин // Упругость и неупругость. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та. – 2011. – С. 304–307.

27. Березин, А.В. Трещины поперечного и продольного сдвига в разномодульных дилатирующих средах / А.В. Березин, П.Л. Пономарев // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 2002. – № 3. – С. 127–135.

28. Бертяев, В.Д. Вариант построения теории упругости разносопротивляющихся тел / В.Д. Бертяев, Л.А. Толоконников // Механика и прикладная математика. – Тула: Приокс. кн. изд-во, 1989. – С. 4–7.

29. Биргер, И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач / И.А. Биргер. – М.: Оборонгиз, 1956. – 151 с.
30. Бондаренко, В.М. Инженерные методы нелинейной теории железобетона / В.М. Бондаренко, С.В. Бондаренко. – М.: Стройиздат, 1982. – 287 с.
31. Бондаренко, В.М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона / В.М. Бондаренко. – Харьков: ХГУ, 1968. – 324 с.
32. Бригадиров, Г.В. Вариант построения основных соотношений разномодульной теории упругости / Г.В. Бригадиров, Н.М. Матченко // Изв. АН СССР. МТТ. – 1971. – № 5. – С. 109–111.
33. Бригадиров, Г.В. К изгибу пластин из разномодульных материалов / Г.В. Бригадиров, В.М. Логунов, Л.А. Толоконников // Технология машиностроения. – Тула: Изд-во ТулПИ, 1969. – Вып. 14. – С. 78–83.
34. Бровка, Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошных сред. Развитие математического аппарата и основ общей теории / Г.Л. Бровка. – М.: Наука, 2017. – 432 с.
35. Быков, Д.Л. О некоторых соотношениях между инвариантами напряжений и деформаций в физически нелинейных средах / Д.Л. Быков // Упругость и неупругость. – М.: МГУ, 1971. – Вып. 2. – С. 114–128.
36. Вазов, В. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных / В. Вазов, Дж. Форсайт. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 487 с.
37. Вайнберг, Д.В. Расчёт пластин / Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. – Киев: Будивельник, 1970. – 435 с.
38. Варвак, П.М. Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций / П.М. Варвак, Л.П. Варвак. – М.: Стройиздат, 1977. – 160 с.
39. Варламов, А.А. Модели поведения бетона. Общая теория деградации / А.А. Варламов, В.И. Римшин. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 436 с.
40. Варламов, А.А. О проектировании диаграммы поведения бетона / А.А. Варламов // Бетон и железобетон. – 2016. – № 1. – С. 6–8.
41. Вялов, С.С. Вопросы теории деформируемости связанных грунтов / С.С. Вялов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1966. – № 3. – С. 1–4.

42. Вялов, С.С. Реологические основы механики грунтов / С.С. Вялов. – М.: Высшая школа, 1978. – 447 с.
43. Гаврилов, Д.А. Зависимости между напряжениями и деформациями для квазилинейного разномодульного тела / Д.А. Гаврилов // Проблемы прочности. – 1979. – № 9. – С. 10–12.
44. Гаврилов, Д.А. Определяющие уравнения для нелинейных тел, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию / Д.А. Гаврилов // Докл. АН УССР. – Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1980. – № 3. – С. 37–41.
45. Галимов, К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек / К.З. Галимов. – Казань: КГУ, 1975. – 325 с.
46. Гвоздев, А.А. Некоторые вопросы расчёта прочности и деформаций железобетонных элементов при работе арматуры в пластической стадии / А.А. Гвоздев, Н.М. Мулин, Ю.П. Гуца // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1968. – № 6. – С. 3–12.
47. Гвоздев, А.А. Некоторые механические свойства бетона, существенно важные для строительной механики железобетонных конструкций / А.А. Гвоздев // Труды НИИЖБ. – 1959. – Вып. 4. – С. 5–17.
48. Гвоздев, А.А. Работа железобетона с трещинами при плоском напряжённом состоянии / А.А. Гвоздев, Н.И. Карпенко // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1965. – № 2. – С. 20–23.
49. Гвоздев, А.А. Силы зацепления в наклонных трещинах / А.А. Гвоздев, А.С. Залесов, И.А. Титов // Бетон и железобетон. – 1975. – № 7. – С. 44–46.
50. Гениев, Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.
51. Глаголева, М.О. Свойства изотропных упругих материалов / М.О. Глаголева, А.А. Маркин, А.А. Трещёв // Изв. ТулГУ. Сер.: Математика, механика, информатика. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 1998. – Вып. 2. Механика. – Т.4. – С. 15–19.
52. Гликман, Л. А. Изменение упругих свойств железоуглеродистых сплавов при водородном воздействии / Л.А. Гликман, В.И. Дерябина, А.М. Карташов // Физ.-хим. механика материалов. – 1978. – №3. – С. 110–112.

53. Гольденблат, И.И. Критерии прочности конструкционных материалов / И.И. Гольденблат, В.А. Копнов. – М.: Машиностроение, 1968. – 192 с.
54. Гольденвейзер, А.Л. О приближенных методах расчёта тонких упругих оболочек и пластин / А.Л. Гольденвейзер // Изв. АН. МТТ. – 1997. – № 3. – с. 134–149.
55. Гордеев, Ю.С. Методика определения параметров кривых деформирования нелинейных разномодульных материалов / Ю.С. Гордеев, И.Г. Овчинников, А.Ф. Макеев / СПИ. – Саратов, 1983. – 61 с. – Деп. в ВИНТИ 29.12.83, № 447-84.
56. Гордеев, Ю.С. Об аппроксимации диаграмм деформирования нелинейных разномодульных композитных материалов / Ю.С. Гордеев, И.Г. Овчинников // СПИ. – Саратов, 1982. – 15 с. – Деп. в ВИНТИ 04.08.82, № 4279-82.
57. Городецкий, А.С. Расчёт железобетонных балок-стенок с учётом образования трещин методом конечных элементов / А.С. Городецкий, В.С. Здоренко // Строительные конструкции. – Вып. 27. – Киев: Будивельник, 1975. – С. 72–78.
58. Гусев, Б.В. Математические модели процессов коррозии бетона / Б.В. Гусев, А.С. Файсулович, В.Ф. Степанова. – М.: Информ.-издат. центр «ТИМР», 1996. – 104 с.
59. Григоренко, Я.М. Решение задач теории оболочек на ЭВМ / Я.М. Григоренко, А.П. Мокоед. – Киев: Вища школа, 1979. – 279 с.
60. Грин, А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Дж. Адкинс. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
61. Гуревич, А.Л. О способах расчёта железобетонных плит на ЭВМ с учётом процесса трещинообразования / А.Л. Гуревич, Н.И. Карпенко, Л.И. Ярин // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1972. – № 1. – С. 24–29.
62. Делягин, М.Ю. Система разрешающих уравнений МКЭ для связанной термоупругости материалов с усложнёнными свойствами / М.Ю. Делягин, В.Г. Теличко, Д.С. Астахов // Опыт прошлого – взгляд в будущее. Международная научно-практическая конференция молодых учёных и студентов. Материалы конференции. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – С. 88–90.
63. Делягин, М.Ю. Конечно-элементная модель связанной термоупругости изотропных разносопротивляющихся существенно нелинейных материалов /

М.Ю. Делягин, А.А. Трещёв // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твёрдого тела (Чебоксары, 16-21 июня 2014 г.): в 2 частях. / под ред. Н.Ф. Морозова, Б.Г. Миронова, А.В. Манжирова. – Ч.1.– Чебоксары: Изд-во ЧГПУ, 2014. – С. 148–150.

64. Делягин, М.Ю. Применение МКЭ для решения связанных задач термоупругости нелинейных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния / М.Ю. Делягин, В.Г. Теличко, А.А. Трещёв // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2014. – № 11-1. – С. 317–326.

65. Егорова, Е.С. Модели грунтов, реализованные в программных комплексах SCAD Office и Plaxis 3D / Е.С. Егорова, А.В. Иоскевич, В.В. Иоскевич [и др.] // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2016 №3 (42). С. 31–60.

66. Елсуфьев, С.А. Исследование деформирования фторопласта-4 при линейном и плоском напряжённом состояниях / С.А. Елсуфьев // Механика полимеров. – 1968. – № 4. – С. 742–746.

67. Ельчанинов, П.Н. К расчёту цилиндров из нелинейного разномодульного материала методом переменных параметров упругости / П.Н. Ельчанинов, М.И. Климов // Прочность, устойчивость и колебания строит. конструкций. – Л.: Изд-во ЛИСИ, 1987. – С. 65–69.

68. Ельчанинов, П.Н. О решении некоторых задач строительной механики с учётом нелинейной разномодульности материала / П.Н. Ельчанинов, М.И. Климов, А.И. Альбакасов // 2-я Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости: тез. докл. – Фрунзе: ИЛИМ, 1985. – С. 45–46.

69. Еремичев, А.Н. Определяющие уравнения материала, деформирование которого зависит от вида напряжённого состояния / А.Н. Еремичев // МВТУ им. Н.Э. Баумана. – М., 1984. – 20 с. – Деп. в ВИНТИ 21.01.84, № 2356-84.

70. Железобетонные конструкции. Основы теории, расчёта и конструирования // Под ред. Т.М. Петсольда, В.В. Тура. – Брест: БГТУ, 2003. – 380 с.

71. Зайцев, Ю.В. Механика разрушения для строителей / Ю.В. Зайцев – М.: Высш. школа, 1991. – 288 с.

72. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

73. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред / О. Зенкевич, И. Чанг. – М.: Недра, 1974. – 238 с.

74. Ишлинский, А.Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, – 2011. – 702 с.

75. Золочевский, А.А. К теории пластичности материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию / А.А. Золочевский // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. – № 6. – С. 13–16.

76. Золочевский, А.А. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / А.А. Золочевский // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. – № 12. – С. 7–9.

77. Карпунин, В.Г. Исследование изгиба и устойчивости пластин и оболочек с учётом сплошной коррозии. Дис. на соиск. учён. степ. канд. техн. наук, Свердловск, 1977. – 203 с.

78. Карпенко, Г.В. Про фізико-хімічну механіку металів/ Г.В. Карпенко. – Киев: «Наукова думка», 1973. – 176 с.

79. Карпенко, Н.И. Анализ и совершенствование криволинейных диаграмм деформирования бетона для расчёта железобетонных конструкций по деформационной схеме / Н.И. Карпенко, Б.С. Соколов, О.В. Радайкин // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – № 1. – С. 25–30.

80. Карпенко, Н.И. Исследование работы железобетонных плит на ЭВМ с учётом образования трещин / Н.И. Карпенко, Л.И. Ярин // Исследование конструкций зданий и сооружений для сельского строительства. – М.: Стройиздат, 1974. – Вып. 2-1. – С. 130–149.

81. Карпенко, Н.И. К расчёту железобетонных пластин и оболочек с учётом трещин / Н.И. Карпенко // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1971. – № 1. – С. 7–12.

82. Карпенко, Н.И. Модель деформирования железобетона в приращениях и расчёт балок-стенок и изгибаемых плит с трещинами / Н.И. Карпенко, С.Н. Карпенко, А.Н. Петров [и др.]. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2013. – 156 с.
83. Карпенко, Н.И. Общие модели механики железобетона / Н.И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
84. Карпенко, Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами / Н.И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
85. Ковалёв, Д.Г. Исследование упругопластического деформирования разносопротивляющихся материалов / Д.Г. Ковалёв, А.А. Трещёв // Изв. высших учеб. заведений. Строительство. – 1999. – № 8. – С. 29–33.
86. Ковалёв, Д.Г. Исследования упругопластических состояний тяжёлых бетонов / Д.Г. Ковалёв, А.А. Трещёв // Материалы конф. учёных и специалистов в области бетона и железобетона. – М.: НИИЖБ. – 1998. – С. 106–110.
87. Ковалёв, Д.Г. Модель деформирования железобетонной оболочки с учётом повреждений типа радиальных трещин / Д.Г. Ковалёв, А.А. Трещёв // Труды XVIII международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов». – С-Пб: Дом учёных РАН. – 2000. – С. 56–57.
88. Ковалёв, Д.Г. Описание НДС материалов, чувствительных к виду напряжённого состояния / Д.Г. Ковалёв, А.А. Трещёв // Тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. «Механика машиностроения». – Набережные Челны: КамПИ. – 1997. – С. 42–43.
89. Козачевский, А.И. Модификация деформационной теории пластичности бетона и плоское напряжённое состояние железобетона с трещинами / А.И. Козачевский // Строит. механика и расчёт сооружений. – 1983. – № 4. – С. 12–16.
90. Колчунов, В.И. Метод физических моделей сопротивления железобетона / В.И. Колчунов, И.А. Яковенко, Н.В. Ключева // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – № 12. – С. 51–55.
91. Кришан, А.Л. Определение деформационных характеристик тяжёлого бетона / А.Л. Кришан, М.А. Астафьева, М.Ю. Наркевич [и др.] // Естественные и технические науки. – 2014. – № 9–10 (77). – С. 367–369.

92. Кудашов, В.И. Расчёт пространственных железобетонных конструкций с учётом физической нелинейности и трещинообразования / В.И. Кудашов, В.П. Устинов // Строит. механика и расчёт сооружений. – 1981. – № 4. – С. 6–10.
93. Кузнецов, В.П. Результаты испытаний трубчатых образцов серого чугуна на растяжение и сжатие / В.П. Кузнецов, В.А. Стеценко // Технология машиностроения. – Тула: Изд-во ТулПИ, 1970. – Вып. 20. – С. 43–45.
94. Кузнецов, С.А. Потенциальные уравнения состояния нелинейно-упругого изотропного материала / С.А. Кузнецов, Н.М. Матченко // ТулПИ. – Тула, 1989. – 14 с. – Деп. в ВИНТИ 20.11.89, № 7050-B89.
95. Куликов, Г.М. Управление формой слоистых композитных пластин с пьезоэлектрическими накладками при тепловом нагружении на основе метода отсчётных поверхностей / Г.М. Куликов, Плотникова С.В. // Изв. РАН. Механика твёрдого тела, 2021. – № 5. – С. 45–63.
96. Куликов, Г.М. Решение трёхмерных задач термоупругости для слоистых оболочек из функциональных материалов / Г.М. Куликов, С.В. Плотникова // Вестн. Тамбовского гос. технич. ун-та, 2015. – Т. 21. – № 1. – С. 185–190.
97. Лихтман, В.И. Физико-химическая механика металлов / В.И. Лихтман, Е.Д. Щукин, П.А. Ребиндер. – М., 1962. – 304 с.
98. Ломакин, Е.В. Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряжённого состояния / Е.В. Ломакин // Механика композитных материалов. – 1988. – № 1. – С. 3–9.
99. Ломакин, Е.В. Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряжённого состояния / Е.В. Ломакин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1980. – № 4. – С. 92–99.
100. Ломакин, Е.В. О единственности решения задач теории упругости для изотропного разномодульного тела / Е.В. Ломакин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1979. – № 2. – С. 42–45.
101. Ломакин, Е.В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред / Е.В. Ломакин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1991. – № 6. – С. 66–75.

102. Ломакин, Е.В. Определяющие соотношения механики разномодульных тел / Е.В. Ломакин. – М., 1980. – 64 с. (Препринт ин-та пробл. механики АН СССР. – № 159).

103. Ломакин, Е.В. Разномодульность композитных материалов // Механика композитных материалов / Е.В. Ломакин. – 1981. – № 1. – С. 23–29.

104. Ломакин, Е.В. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела / Е.В. Ломакин, Ю.Н. Работнов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 6. – С. 29–34.

105. Лукин, А.В. Конечно-элементное моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций / А.В. Лукин, В.С. Модестов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-механические науки. – 2014. – №3 (201). – С. 35–46.

106. Макеев, А.Ф. Исследование влияния разнсопротивляемости нелинейно-упругого материала на напряжённо-деформированное состояние цилиндрической оболочки / А.Ф. Макеев, И.Г. Овчинников // Пробл. прочности. – 1982. – № 6. – С. 55–60.

107. Макеев, А.Ф. Об изгибе прямоугольных пластинок из разнсопротивляющегося деформированию и разрушению при растяжении и сжатии нелинейно-упругого материала / А.Ф. Макеев, И.Г. Овчинников, В.В. Петров // СПИ. – Саратов, 1982. – 20 с. – Деп. в ВИНТИ 16.03.82, № 1280-82.

108. Малинин, Н.Н. Влияние шарового тензора напряжений на ползучесть металлов / Н.Н. Малинин, Г.М. Хажинский // Механика деформируемых тел и конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – С. 280–285.

109. Малинин Н.Н. Теория пластичности материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию / Н.Н. Малинин, О.А. Батанова // Изв. вузов. Машиностроение. – 1979. – № 12. – С. 9–14.

110. Маньковский, В.А. Некоторые закономерности деформирования и разрушения хрупких материалов как разнопрочных разномодульных сред / В.А. Маньковский, В.Т. Сапунов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2002. – Т. 68. – № 12. – С. 47–52.

111. Маркин, А.А. К обоснованию теории оболочек / А.А. Маркин // Работы по механике деформируемых сред. – Тула: Изд-во ТулПИ. – 1974. – С. 121–129.

112. Матченко, Н.М. К описанию свойств разнсопротивляемости изотропных материалов / Н.М. Матченко, А.А. Трещёв // Прикладные задачи механики сплошных сред. – Воронеж: Изд-во ВГУ. – 1999. – С. 176–183.

113. Матченко, Н.М. К плоской задаче разномодульной теории упругости / Н.М. Матченко, А.А. Трещёв, М.В. Аруцев / ТулПИ. – Тула, 1984. – 10 с. – Деп. в ВИНТИ 07.06.84, № 3755-84.

114. Матченко, Н.М. О нелинейных соотношениях разномодульной теории упругости / Н.М. Матченко, Л.А. Толоконников // Сборник работ по теории упругости. – Тула: Изд-во ТулПИ, 1968. – С. 69–72.

115. Матченко, Н.М. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах / Н.М. Матченко, Л.А. Толоконников // Инж. журн. МТТ. – 1968. – № 6. – С. 108–110.

116. Матченко, Н.М. Определяющие соотношения изотропных разнсопротивляющихся сред: Квазилинейные соотношения. Ч. 1. / Н.М. Матченко, Л.А. Толоконников, А.А. Трещёв // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – № 1. – С. 73–78.

117. Матченко, Н.М. Определяющие соотношения изотропных разнсопротивляющихся сред. Ч. 2. Нелинейные соотношения / Н.М. Матченко, Л.А. Толоконников, А.А. Трещёв // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – № 4. – С. 87–95.

118. Матченко, Н.М. Теория деформирования разнсопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения / Н.М. Матченко, А.А. Трещёв. – М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2000. – 149 с.

119. Матченко, Н.М. Теория деформирования разнсопротивляющихся материалов. Прикладные задачи теории упругости / Н.М. Матченко, А.А. Трещёв. – М.; Тула: РААСН; Изд-во ТулГУ, 2004. – 211 с.

120. Миролюбов, И.Н. К вопросу об обобщении теории прочности октаэдрических касательных напряжений на хрупкие материалы / И.Н. Миролюбов // Труды ЛТИ. – 1953. – Вып. 25. – С. 42 – 52.

121. Мкртчян, Р.Е. Закон упругости для слоистого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия / Р.Е. Мкртчян // Механика полимеров. – 1978. – № 2. – С. 199–203.

122. Мкртчян, Р.Е. Об одной модели материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия / Р.Е. Мкртчян // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1970. – Т. 23. – № 5. – С. 37–47.

123. Молчанов, И.Н. Численные методы решения некоторых задач теории упругости / И.Н. Молчанов. – Киев: Наукова думка, 1979. – 315 с.

124. Мулин, Н.М. Арматура и условия её работы в конструкциях / Н.М. Мулин, Ю.П. Гуца // Бетон и железобетон. – 1971. – № 5. – С. 7–10.

125. Мулин, Н.М. Деформирование железобетонных элементов при работе стержневой арматуры в упругопластической стадии / Н.М. Мулин, Ю.П. Гуца // Бетон и железобетон. – 1970. – № 3. – С. 24–26.

126. Мурашкин, Г.В. Моделирование диаграмм деформирования бетона и схем напряжённо-деформированного состояния / Г.В. Мурашкин, В.Г. Мурашкин // Известия вузов. Строительство. – 1997. – № 10. – С. 4–6.

127. Мясников, В.П. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды / В.П. Мясников, А.И. Олейников // Докл. АН СССР. – 1992. – Т. 322. – № 1. – С. 57–60.

128. Моисеев, Ю.В. Химическая стойкость полимеров в агрессивных средах / Ю.В. Моисеев, Г.Е. Заиков. – М.: Химия, 1979. – 288 с.

129. Нелепов, А.Р. Методология обследований, оценки состояния, надёжности и реконструкция зданий / А.Р. Нелепов. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2002. – 810 с.

130. Новожилов, В.В. Теория упругости / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.

131. Образцов, И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев, Х.С. Хазанов – М.: Высшая школа, 1985. – 329 с.

132. Овчинников, И.Г. Математическое моделирование процесса взаимодействия элементов конструкций с агрессивными средами / И.Г. Овчинников,

В.В. Петров // Деформирование материалов и элементов конструкций в агрессивных средах. – Саратов: Изд-во СПИ, 1983. – С. 3–11.

133. Овчинников, И.Г. О методологии построения моделей конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами / И.Г. Овчинников // Долговечность материалов и элементов конструкций в агрессивных и высокотемпературных средах. – Саратов: Изд-во СПИ., 1988. – С. 17–21.

134. Овчинников, И.Г. Повышение нагрузочной способности трубобетонной балки / И.Г. Овчинников, Д.Н. Парышев, А.В. Ильтяков [и др.] // Транспорт. Транспортные сооружения. Экология, 2019. – № 4. – С. 58–66.

135. Овчинников, И.Г. Прочность и долговечность железобетонных элементов конструкций в условиях сульфатной агрессии / И.Г. Овчинников, Р.Р. Инамов, Р.Б. Гарибов. – Саратов: СГТУ, 2001. – 164 с.

136. Овчинников, И.Г. Расчёт элементов конструкций с наведённой неоднородностью при различных схемах воздействия хлоридсодержащих сред / И.Г. Овчинников, Н.С. Дядькин. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2003. – 220 с.

137. Овчинников, И.И. Вероятностное моделирование железобетонной сваи при совместном действии нагрузки и хлоридсодержащей среды / И.И. Овчинников, Т. Чэнь, И.Г. Овчинников // Региональная архитектура и строительство, 2016. – № 4 (29). – С. 55–61.

138. Пастернак, П. Л. Основы нового расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П.Л. Пастернак – Москва: Госстройиздат, 1954. – 56 с.

139. Панфёров, В.М. О нелинейной теории упругости огнеупорных материалов / В.М. Панфёров // Избранные вопросы современной механики. – М.: Наука, 1982. – Ч. 2. – С. 96–106.

140. Панфёров, В.М. Теория упругости и деформационная теория пластичности для тел с различными свойствами на сжатие, растяжение и кручение / В.М. Панфёров // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 180. – № 1. – С. 41–44.

141. Панфилов, Д.А. Обзор существующих диаграмм деформирования бетона при сжатии в отечественных и зарубежных нормативных документах / Д.А. Пан-

филов, А.А. Пищулев, К.И. Гималетдинов // Промышленное и гражданское строительство. – 2014. – № 3. – С. 80–83.

142. Пахомов, Б.М. Модель деформирования изотропных разносопротивляющихся материалов / Б.М. Пахомов // Изв. вузов. Машиностроение. – 1987. – № 9. – С. 3–6.

143. Петров, В.В. Деформирование элементов конструкций из нелинейно разномодульного неоднородного материала / В.В. Петров, И.Г. Овчинников, В.К. Иноземцев. – Саратов: Изд-во СГУ, 1989. – 160 с.

144. Петров, В.В. Изгиб прямоугольных пластин из нелинейно-упругого разносопротивляющегося растяжению и сжатию материала / В.В. Петров, А.Ф. Макеев, И.Г. Овчинников // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1980. – № 8. – С. 42–47.

145. Петров, В.В. Методы расчёта конструкций из нелинейно-деформируемого материала / В.В. Петров, И.В. Кривошеин. – М: АСВ, 2009. – 208 с.

146. Петров, А.А. Моделирование напряжённо-деформированного состояния тонких пластин из разносопротивляющихся материалов в условиях термомеханического нагружения / А.А. Петров, В.Г. Теличко, А.А. Трещёв // Изв. вузов. Строительство. – 2009. – № 1 (601). – С. 25–30.

147. Петров, А.А. Поперечный изгиб тонких прямоугольных пластин из разносопротивляющихся материалов в условиях термомеханического нагружения / А.А. Петров, В.Г. Теличко, А.А. Трещёв // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2009. – № 1 (6). – С. 172–178.

148. Петров, В.В. Долговечность плит из нелинейно – деформируемого материала с учётом воздействия агрессивной эксплуатационной среды / В.В. Петров, О.В. Пенина // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2007. – С. 31–40.

149. Петров, В.В. Расчёт плит из нелинейно-деформируемого материала с произвольной диаграммой деформирования с учётом воздействия агрессивной среды / В.В. Петров, О.В. Пенина, П.В. Селяев // Academia. Архитектура и строительство. – 2008. – № 3. – С. 87–92.

150. Петров, В.В. Уравнения изгиба нелинейно-упругих пластинок средней толщины с учётом деградации свойств материала во времени / В.В. Петров, И.В. Кривошеин, О.В. Пенина // Проблемы прочности элементов и конструкций под действием нагрузок и рабочих сред. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2005. – С.22–30.

151. Пикуль, В.В. Общая техническая теория тонких упругих пластин и пологих оболочек / В.В. Пикуль. – М.: Наука, 1977. – 152 с.

152. Пикуль, В.В. Физически корректные модели материала упругих оболочек / В.В. Пикуль // Изв. АН. МТТ. 1995. – № 2. – с. 103–108.

153. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряжённом состоянии / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев. – Киев: Наукова думка, 1976. – 416 с.

154. Пономарёв, Б.В. Изгиб прямоугольных пластин из нелинейно-упругих материалов, неодинаково работающих на растяжение и сжатие / Б.В. Пономарёв // ПМ. – 1968. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 20–27.

155. Пономарёв, Б.В. Средний изгиб прямоугольных пластин из материалов, не следующих закону Гука / Б.В. Пономарёв // Сб. тр. МИСИ. – М. – 1967. – № 54. – С. 75–82.

156. Постнов, В.А. Метод конечных элементов в расчёте судовых конструкций / В.А. Постнов, Н.Я. Хархурим. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.

157. Попеско, А.И. Работоспособность железобетонных конструкций, подверженных коррозии / А.И. Попеско // СПб.: СПб. гос. архит.-строит. ун-т, 1996. – 182 с.

158. Розенфельд, И.Л. Ускоренные методы коррозионных испытаний металлов (теория и практика) / И.Л. Розенфельд, К.А. Жигалова. – М.: Металлургия, 1966. – 349 с.

159. Розовский, М.И. О деформации вязкоупругих тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию / М.И. Розовский // Изв. АН СССР. МТТ. – 1975. – № 3. – С. 99–103.

160. Романов, В.В. Исследование зависимости модуля упругости шлако-камнелитого материала от вида нагружения / В.В. Романов // Физ.-хим. исслед. по технологии стекла и ситалов. – М.: Наука, 1984. – С. 78–81.

161. Саркисян, М.С. К теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию / М.С. Саркисян // Изв. АН СССР. МТТ. – 1971. – № 5. – С. 99–108.

162. Свекло, В.А. Соотношения нелинейной теории упругости для сред, чувствительных к виду напряжённого состояния / В.А. Свекло, О.А. Чернышов // Тез. докл. 2-й Всесоюз. конф. по нелинейной теории упругости. – Фрунзе: ИЛИМ – 1985. – С. 30–31.

163. Соколова, М.Ю. Термомеханическая модель нелинейного анизотропного материала / М.Ю. Соколова, Ю.В. Астапов // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 3. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. – С. 102–109.

164. Секулович, М. Метод конечных элементов / М. Секулович. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.

165. Селяев, П.В. Диаграммы деформирования композиционных материалов при воздействии жидких агрессивных сред / П.В. Селяев // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред. – Саратов, СГТУ, 2006. – С. 46–52.

166. Сопротивление деформированию и разрушению изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряжённого состояния / А.В. Березин [и др.] // Проблемы прочности. – 1979. – № 2. – С. 60–65.

167. СП 22.13330.2016. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83*. – М.: ОАО «НИЦ «Строительство» (НИИОСП им. Н.М. Герсевича), 2016. – 193 с.

168. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. – М.: ЦИТП, 2012. – 155 с.

169. Ставрогин, А. Н., Протосеня, А. Г. Механика деформирования и разрушения горных пород / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. – М.: Недра, 1992, – 224 с.

170. Ставрогин А.Н. Пластичность горных пород / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. – М.: Недра, 1979. – 301 с.

171. Тамуров, Н.Г. Закон упругости для изотропного материала с различными характеристиками при растяжении и сжатии / Н.Г. Тамуров, Г.В. Туровцев // Динамика и прочность тяжёлых машин. – Днепропетровск: ДГУ, 1983. – С. 76–80.

172. Тамуров, Н.Г. Основные уравнения теории разномодульных оболочек / Н.Г. Тамуров, Г.В. Туровцев // Прочность и надёжность техн. устройств. – Киев: Наукова думка, 1981. – С. 68–75.

173. Тамуров, Н.Г. Термоупругие напряжения в разномодульном цилиндре / Н.Г. Тамуров, Г.В. Туровцев // Прочность и надёжность элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1982. – С. 140–145.

174. Теличко, В.Г. Теория деформирования пространственных железобетонных конструкций: монография / В.Г. Теличко, А.А. Трещёв. – М.; Тула: Изд-во РААСН: Изд-во ТулГУ, 2019 – 386 с. – ISBN 978-5-7679-4337-1.

175. Теличко, В.Г. Гибридный конечный элемент для моделирования пространственных машиностроительных конструкций с усложнёнными свойствами / В.Г. Теличко, А.А. Трещёв // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2004. – № 1. – С. 61–65.

176. Теличко, В.Г. Гибридный конечный элемент для расчёта плит и оболочек с усложнёнными свойствами / В.Г. Теличко, А.А. Трещёв // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2003. – № 5 (533). – С. 17–23.

177. Теличко, В.Г. Исследование прочности при двухосном сжатии бетона класса В-25 / В.Г. Теличко, Л.А. Зиборов // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2009. – № 1-2. – С. 89–94.

178. Теличко, В.Г. К расчёту оснований методом конечных элементов / В.Г. Теличко, П.Ю. Ходорович // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2014. – № 11-1. – С. 341–346.

179. Теличко, В.Г. Математическая модель расчёта многоэтажных зданий из монолитного железобетона / В.Г. Теличко, Н.В. Золотов // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2017. – № 2 (322). – С. 18–25.

180. Теличко, В.Г. Определение напряжённно-деформированного состояния трубчатых железобетонных оболочек при чистом кручении методом конечных элементов / В.Г. Теличко, А.А. Трещёв // Изв. вузов. Строительство. – 2008. – № 6 (594). – С. 11–19.

181. Теличко, В.Г. Определение напряжённно-деформированного состояния трубчатых железобетонных оболочек при чистом кручении методом конечных элементов / В.Г. Теличко, Трещёв А.А. Изв. вузов. Строительство. – 2008. – № 6 (594). – С. 11–19.

182. Теличко, В.Г. Прочность многоэтажного здания из монолитного железобетона с учётом разносопротивляемости и повреждаемости материала / В.Г. Теличко, Н.В. Золотов // Строительство и реконструкция. – 2018. – № 6 (80). – С. 22–31.

183. Теличко, В.Г. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2021661108. Программа расчёта НДС конструкций, состоящих из стержневых и оболочечных элементов с учётом разносопротивляемости основного материала, армирования и разрушения FE_BEAM&SHELL / В.Г. Теличко, В.О. Кузнецова; правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (RU). Заявка № 2021619761 от 21.06.2021; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 06.07.2021.

184. Теличко, В.Г. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2022617259. Расчёт напряжённно-деформированного состояния осесимметричной сферической оболочки с учётом кинетики наводороживания (FD_SPHERE) / В.Г. Теличко, В.О. Кузнецова; правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (RU). Заявка № 2022616634 от 12.04.2022; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 19.04.2022.

185. Теличко, В.Г. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2022617551. Расчёт напряжённно-деформированного состояния цилиндрической оболочки вращения с учётом кинетики наводороживания (FD_CYLINDER) / В.Г. Теличко, В.О. Кузнецова; правообладатель: федеральное государственное

бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (RU). Заявка № 2022616501 от 12.04.2022; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 22.04.2022.

186. Теличко, В.Г. Трещина нормального отрыва при плоском напряжённом состоянии тонкой полубесконечной пластинки из композитного изотропного материала / В.Г. Теличко // Эксперт: теория и практика. – 2022. – № 3 (18). – С. 70–74.

187. Теличко, В.Г. Трещина сдвига при плоском напряжённом состоянии начально изотропной пластинки из композитного материала с учётом наведённой деформационной анизотропии / В.Г. Теличко // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 1 (32). – С. 29–38.

188. Тер-Мартirosян, А.З. Определение параметров модели Hardening Soil по результатам лабораторных испытаний / А.З. Тер-Мартirosян, А.Ю. Мирный, В.В. Сидоров [и др.] // Геотехника. Общероссийская конференция молодых учёных, научных сотрудников и специалистов: межвузовский тематический сборник трудов. СПб.: Изд-во СПбГАСУ, 2013. – С. 141–146.

189. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

190. Тимошенко, С.П. Сопротивление материалов / С.П. Тимошенко. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1946. – 456 с.

191. Толоконников, Л.А. Вариант разномодульной теории упругости / Л.А. Толоконников // Механика полимеров. – 1969. – № 2. – С. 363–365.

192. Толоконников, Л.А. Вариант соотношений разномодульной теории упругости / Л.А. Толоконников // Прочность и пластичность. – М.: Наука, 1971. – С. 102–104.

193. Толоконников, Л.А. К описанию свойств разносопротивляющихся конструкционных материалов / Л.А. Толоконников, А.А. Трещёв // Аннотации докл. 9-й Междунар. конф. по прочности и пластичности. – М.: Изд-во ИПМ РАН. – 1996. – С. 97–98.

194. Толоконников, Л.А. Механика деформируемого твёрдого тела / Л.А. Толоконников. – М.: Высшая школа, 1979. – 318 с.

195. Толоконников, Л.А. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости / Л.А. Толоконников // ПММ. – 1956. – Т. 20. – Вып. 3. – С. 431–439.

196. Травуш, В.И. Вопросы развития строительной науки / В.И. Травуш, Ю.С. Волков // Вестн. Волгоградского гос. арх. -стр. ун-та. Строительство и архитектура. – 2013. – Вып. 31 (50). – Ч. 1. Города России. Проблемы проектирования и реализации. – С. 186–191.

197. Трещёв, А.А. Вариант деформирования конструкционных материалов с усложнёнными свойствами / А.А. Трещёв // Теория, технология, оборудование и автоматизация обработки металлов давлением и резанием. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 1999. – Вып. 1. – С. 66–73.

198. Трещёв, А.А. Вариант теории течения разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещёв, П.В. Божанов // Сборн. матер. всеросс. научн. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики». – Тула: ТулГУ, 2000. – С. 71–72.

199. Трещёв, А.А. Исследование НДС многоэтажного здания из железобетона с учётом разносопротивляемости и трещинообразования / А.А. Трещёв, Н.В. Золотов, В.Г. Теличко // «Лопейтовские чтения-150». Современные методы расчёта железобетонных и каменных конструкций по предельным состояниям. – М.: МИСИ-МГСУ, 2018. – С. 475–481.

200. Трещёв, А.А. К изгибу армированных плит из нелинейного разносопротивляющегося материала / А.А. Трещёв, А.Н. Артемов / ТулПИИ. – Тула, 1992. – 7 с. – Деп. в ВИНТИ 09.06.92, № 1888-B92.

201. Трещёв, А.А. К расчёту гибких прямоугольных пластин, выполненных из дилатирующих материалов / А.А. Трещёв, А.Е. Жидков, П.А. Полтавец // Изв. ТулГУ. Строительные материалы, конструкции и сооружения. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2003. – Вып. 5. – С. 142–145.

202. Трещёв, А.А. К расчёту пластин из конструкционных графитов / А.А. Трещёв // Механика и прикладная математика. – Тула: Приокск. кн. изд-во, 1989. – С. 93–98.

203. Трещёв, А.А. К расчёту тонких пластин из материалов, обладающих структурной и деформационной анизотропией / А.А. Трещёв, З.В. Аркания / ТулПИ. – Тула. 1992. – 6 с. – Деп. в ВИНТИ 09.06.92, № 1889-В92.

204. Трещёв, А.А. Конечные прогибы пластин, выполненных из материалов, механические характеристики которых зависят от вида напряжённого состояния / А.А. Трещёв // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – Тула: ТулПИ, 1986. – 76–81.

205. Трещёв, А.А. О единственности решения задач теории упругости разносопротивляющихся сред / А.А. Трещёв, С.А. Воронова // ТулПИ. – Тула, 1987. – 11 с. – Деп. в ВИНТИ 23.03.87, № 2040-В87.

206. Трещёв, А.А. О некоторых задачах теории оболочек, изготовленных из разномодульного материала / А.А. Трещёв, Л.А. Шерешевский // Актуал. пробл. механики оболочек. – Казань: КАИ, 1983. – С. 211.

207. Трещёв, А.А. О соотношениях теории упругости для изотропного разномодульного тела / А.А. Трещёв, Н.М. Матченко // ТулПИ – Тула, 1982. – 4 с. – Деп. в ВИНТИ 27.04.82, № 2056-82.

208. Трещёв, А.А. О точности квазилинейной и нелинейной аппроксимации деформирования разносопротивляющихся сред / А.А. Трещёв // ТулПИ. – Тула, 1992. – 7 с. – Деп. в ВИНТИ 07.07.92, № 2181-В92.

209. Трещёв, А.А. Обобщение ассоциированного закона течения для изотропных материалов / А.А. Трещёв, П.В. Божанов // Механика деформированного твёрдого тела и обработка материалов давлением. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2000. – С. 79–82.

210. Трещёв, А.А. Определение напряжённо-деформированного состояния графитовых пластин / А.А. Трещёв // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – Тула: Изд-во ТулПИ, 1990. – С. 83–89.

211. Трещёв, А.А. Определение напряжённо-деформированного состояния комплексной железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды / А.А. Трещёв, А.В. Башкатов // Строительство и реконструкция. – Орел: ОГУ. – 2016. – № 6(68). – С. 3–12.

212. Трещёв, А.А. Поперечный изгиб прямоугольных пластин, выполненных из материалов, механические характеристики которых зависят от вида напряжённого состояния / А.А. Трещёв // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1988. – № 1. – С. 25–29.

213. Трещёв, А.А. Поперечный изгиб прямоугольных пластин, выполненных из материалов, механические характеристики которых зависят от вида напряжённого состояния / А.А. Трещёв // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1988. – № 1. – С. 25–29.

214. Трещёв, А.А. Расчёт пластин с учётом начальной и наведённой неоднородности / А.А. Трещёв // Дифференциал. уравнения и прикл. задачи. – Тула: Изд-во ТулГТУ, 1993. – С. 30–35.

215. Трещёв, А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной и наведённой зависимостью к виду напряжённого состояния. Определяющие соотношения / А.А. Трещёв. – М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2016. – 326 с.

216. Трещёв, А.А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряжённого состояния. Определяющие соотношения / А.А. Трещёв. – М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2008. – 264 с.

217. Трещёв, А.А. Уравнения пластического течения для материалов склонных к дилатации / А.А. Трещёв, П.В. Божанов // 2-я Междун. научн.- практ. конф. «Геотехнологии: проблемы и перспективы» – Москва – Тула: ТулГУ, 2001. – С. 124–125.

218. Трещёв, А.А. Анализ определяющих соотношений для нелинейных изотропных разносопротивляющихся материалов в задачах термоупругости / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко, Д.С. Чигинский // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2011. – № 2. – С. 547–555.

219. Трещёв, А.А. Изгиб прямоугольных пластин из ортотропного нелинейно-упругого разносопротивляющегося материала / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко, Д.А. Ромашин // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2012. – № 6 (245). – С. 26–30.

220. Трещёв, А.А. Конечно-элементная модель расчёта пространственных конструкций из материалов с усложнёнными свойствами / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко, А.Н. Царёв [и др.] // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2012. – № 10. – С. 106–114.

221. Трещёв, А.А. Моделирование напряжённно-деформированного состояния гибких слоистых пластин из анизотропных разносопротивляющихся материалов с учётом геометрической нелинейности / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко, Н.В. Васильев // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2011. – № 2. – С. 541–547.

222. Трещёв, А.А. Моделирование пространственных конструкций из разносопротивляющихся материалов 3D конечными элементами / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко, А.Н. Царёв // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4 (14). – С. 74–82.

223. Трещёв, А.А. Моделирование сферической оболочки из разносопротивляющегося графита 3d конечными элементами / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко, А.Н. Царёв [и др.] // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 3 (17). – С. 62–71.

224. Трещёв, А.А. Модель определения напряжённно-деформированного состояния толстых цилиндрических оболочек из разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещёв, А.Н. Царёв, В.Г. Теличко // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2012. – № 2 (241). – С. 32–37.

225. Трещёв, А.А. Новое о расчёте монолитного железобетонного остова многоэтажного здания / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко, Н.В. Золотов // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 2 (21). – С. 89–97.

226. Трещёв, А.А. Определение напряжённно-деформированного состояния армированных плит из нелинейного материала с учётом воздействия агрессивных сред / А.А. Трещёв, А.В. Башкатов, В.Г. Теличко // Междун. журн. по расчёту граждан. и строит. констр. – 2016. – Т.12. – № 4. С. 147–152.

227. Трещёв, А.А. Построение математической модели деформирования комплексной железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко, А.В. Башкатов // Вестник МГСУ, 2014. – № 3. – С. 126–132.

228. Трещёв, А.А. Расчёт напряжённно-деформированного состояния железобетонной оболочки положительной гауссовой кривизны / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (8). – С. 506–512.

229. Трещёв, А.А. Расчёт напряжённно-деформированного состояния композитных железобетонных плит с учётом воздействия агрессивной среды / А.А. Трещёв, А.В. Башкатов, В.Г. Теличко // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2017. – № 5 (325). – С. 36–41.

230. Трещёв, А.А. Расчёт цилиндрических оболочек покрытий транспортных сооружений из материалов с усложнёнными свойствами / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко, П.Ю. Ходорович // Транспортное строительство. – 2014. – № 9. – С. 24–26.

231. Трещёв, А.А. Связанная задача термомеханического изгиба тонких прямоугольных пластин из изотропных разнсопротивляющихся материалов / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко, Д.С. Чигинский // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2011. – № 2. – С. 494–502.

232. Трещёв, А.А. Термоупругий потенциал деформации для нелинейных материалов, находящихся в условиях термомеханического нагружения / А.А. Трещёв, В.Г. Теличко, Д.С. Чигинский [и др.] // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 4 (14). – С. 66–74.

233. Трещёв, А.А. Учёт анизотропии и разнсопротивляемости при определении параметров НДС многослойного полупространства / А.А. Трещёв, П.Ю. Ходорович, В.Г. Теличко // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 1 (327). – С. 4–12.

234. Туровцев, Г.В. О построении определяющих уравнений для изотропных упругих тел с усложнёнными свойствами / Г.В. Туровцев // Динамика сплошной среды. – Новосибирск: Изд-во ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1981. – Вып. 53. – С. 132–143.

235. Туровцев, Г.В. Пластическое деформирование сред, характеристики которых зависят от вида напряжённного состояния / Г.В. Туровцев // Тез. докл. 3-я Всесоюз. конф. «Механика неоднородных структур». – Львов, 1991. – С. 335.

236. Туровцев, Г.В. Слоистые оболочки из материалов, упругие свойства которых зависят от вида напряжённого состояния / Г.В. Туровцев // Динамика сплошной среды. – Новосибирск: Изд-во ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1983. – № 61. – С. 118–131.

237. Федорцев, А.П. Физико-химическая стойкость компози-тов в агрессивных средах / Федорцев А. П., Потапов Ю. Б. // Композиционные материалы и конструкции для сельскохозяйственного строительства. – Саранск, 1980. – С. 87–96.

238. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. – М.; Л.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 734 с.

239. Филиппов, А.И. К расчёту армированных конструкций с учётом нелинейного деформирования бетона / А.И. Филиппов, Г.С. Медведев // Металлические конструкции и испытание сооружений. – Л.: ЛИСИ. – 1982. – С. 48–60.

240. Фридман, А.М. Исследование разрушения углеграфитовых материалов в условиях сложного напряжённого состояния / А.М. Фридман, Ю.П. Ануфриев, В.Н. Барабанов // Проблемы прочности. – 1973. – № 1. – С. 52–55.

241. Фридман, А.М. Некоторые особенности методик исследования прочности свойств графитов при плоском напряжённом состоянии / А.М. Фридман [и др.] // Заводская лаборатория. – 1972. – № 9. – С. 1137–1140.

242. Хачатрян, А.А. Чистый изгиб прямоугольной пластинки, изготовленной из разномодульного материала / А.А. Хачатрян // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1972. – Т. 25. – № 1. – С. 15–27.

243. Цикерман, Л.Я. Прогноз опасности грунтовой коррозии для стальных сооружений / Л.Я. Цикерман, Я.Г. Штурман // Защита металлов, 1967, №2, С. 35–40.

244. Цвелодуб, И.Ю. К разномодульной теории упругости изотропных материалов / И.Ю. Цвелодуб // Динамика сплошной среды. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1977. – Вып. 32. – С. 123–131.

245. Цвелодуб, И.Ю. О формах связи между тензорами напряжений и скоростей деформаций ползучести в изотропных устойчивых средах / И.Ю. Цвелодуб // Проблемы прочности. – 1979. – № 9. – С. 27–30.

246. Цыбулько, А.Е. Критерии предельного состояния изотропных материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию / А.Е. Цыбулько, Е.А. Романенко, П.Н. Козлов // Вост.-Европ. журн. передов. технол. – 2007. – № 4/3 (28). – С. 48–50.

247. Цыбулько, А.Е. Критерии предельного состояния квазиоднородных и структурно-неоднородных материалов при растяжении-сжатии / А.Е. Цыбулько, Е.А. Романенко // Вестник машиностроения. – 2009. – № 11. – С. 31–32.

248. Цыбулько, А.Е. Оценка прочности материалов в хрупком и пластическом состоянии при сложном нагружении / А.Е. Цыбулько, Д.Е. Бахтин, Е.А. Романенко // Вост.-Европ. Журн. передов. технол. – 2008. – № 2/4 (32). – С. 47–49.

249. Цыбулько, А.Е. Характеристика вида напряжённого состояния конструкционных материалов / А.Е. Цыбулько, Е.А. Романенко, П.Н. Козлов // Вестн. машиностр. – 2008. – № 1. – С. 19–20.

250. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

251. Шалашилин, В.И. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация: В прикладной математике и механике / В.И. Шалашилин, Е.Б. Кузнецов. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 с.

252. Шамровский, А.Д. Термоупругие волны и скорость их распространения в динамической задаче взаимосвязанной термоупругости / А.Д. Шамровский, Г.В. Меркотан // Вост.-Европ. Журн. передов. технол. Прикладная механика. – Харьков: ЧП «Полиграфический центр», 2011. – № 5/7(53). – С. 36–41.

253. Шамшина, К.В. Влияние коррозионных продольных трещин на деформационные свойства и безопасность изгибаемых железобетонных конструкций объектов текстильной промышленности / К.В. Шамшина, В.Н. Мигунов, И.Г. Овчинников [и др.] // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2019. – № 2 (380). – С. 145–148.

254. Шапиро, Г.С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию / Г.С. Шапиро // Инж. журн. МГТ. – 1966. – № 2. – С. 123–125.

255. Шафиева, С.В. Критерии прочности и разрушения разнопрочных материалов с учётом влияния всестороннего давления / С.В. Шафиева, М.М. Алиев, Н.Г. Каримова // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2012. – № 3. – С. 64–71.

256. Шафиева, С.В. Новый подход к разработке полиномиальных критериев прочности для изотропных полимеров и горных пород / С.В. Шафиева, М.М. Алиев, Н.Г. Каримова, // Изв. вузов. Нефть и газ. – Тюмень: ТГНГУ, 2009. – № 3. – С. 77–82.

257. Шафиева, С.В. Обобщённый критерий прочности Мора для полимеров и горных пород / С.В. Шафиева, М.М. Алиев, Н.Г. Каримова // Матер. научн. сесс. учёных по итог. 2008 г. – Альметьевск: АГНИ, 2009. – С. 106–109.

258. Шафиева, С.В. Приведение критерия Альтенбаха – Туштева к полиномиальному виду / С.В. Шафиева, М.М. Алиев, // Матер. научн. сесс. учёных по итог. 2010 г. – Альметьевск: АГНИ, 2011. – С. 118–121.

259. Шафиева, С.В. Применение линейного и параболического критериев разрушения для оценки устойчивости открытых стволов скважин / С.В. Шафиева, М.М. Алиев, Н.Г. Каримова // Изв. вузов. Нефть и газ. – Тюмень: ТГНГУ, 2011. – № 2. – С. 9–16.

260. Шафиева, С.В. Экспериментальная проверка двухпараметрического полиномиального критерия прочности в плоском напряжённом состоянии / С.В. Шафиева, М.М. Алиев, Н.Г. Каримова // Уч. зап. АГНИ. – Т. XI. – Ч. 1. – Альметьевск: АГНИ, 2013. – С. 96–100.

261. Шемякин, Е.И. Механика горного массива / Е.И. Шемякин. – М.: Наука, 2006. – С. 5–17.

262. Шляхов, С.М. Анализ напряжённо-деформированного состояния пористой круглой керамической пластины в конструкционно-связанной задаче термоупругости / С.М. Шляхов, А.В. Можжилин // Вестн. СГТУ. – Саратов: Изд-во СГТУ. – 2013. – Т. 3. – № 1 (72). – С. 53–58.

263. Шляхов, С.М. Задача теплопроводности и термоупругости круглой пористой пластины в нестационарном режиме нагрева / С.М. Шляхов, А.В. Ефремов // Вестн. СГТУ. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2007. – № 4 (28). – Вып. 1. – С. 39–47.

264. Ягн, Ю.И. Новые методы расчётов на прочность / Ю.И. Ягн // Вестн. инж. и техн. – 1931. – № 6. – С. 63 – 69.

265. Ягн, Ю.И. Прочность и пластичность модифицированного чугуна при различных напряжённых состояниях / Ю.И. Ягн, В.В. Евстратов // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 113. – № 3. – С. 573–575.

266. ANSYS Help. ANSYS, Inc. <http://www.ansys.com/Support/Documentation>, 2013.

267. ABAQUS Analysis User's Manual, Vol. III – Materials. Dassault Systems, <http://www.3ds.com/support/documentation/users-guide>, 2013.

268. Bach, G. Versuche mit allseitig auf liegenden quadatischen und rechteckigen Eisenbetonplatten / G. Bach, O. Graf. – Berlin, 1915. – 250 s.

269. Bathe, K.J. Nonlinear analysis of concrete structures / K.J. Bathe, J. Walczak, A. Welch [et al.] // Computers & Structures. – 1989. – Vol. 32. – Pp. 563–590.

270. Bazant, Z.P. Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete / Z.P. Bazant, P.D. Bhat // Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. – 1976. – Vol. 102. – № EM4. – Pp. 701–722.

271. Belytschko, T. A Finite element method for crack growth without remeshing / T. Belytschko, N. Moes, J. Dolbow // International journal for numerical methods in engineering. – 1999. – № 46. – Pp. 131–150.

272. Bert, C.W. Bending of Thick Rectangular Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / C.W. Bert, J.N. Reddy, W.C. Chao // AIAA Journal. – 1981. – Vol. 19. – № 10. – Pp. 1342–1349.

273. Bert, C.W. Deflection of Thick Beams of Multimodular Materials / C.W. Bert, F. Gordaninejad // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1984. – Vol. 20. – Pp. 479–503.

274. Bert, C.W. Micromechanics of the different elastic behavior of filamentary composite in tension and compression / C.W. Bert // Mechanics of bimodulus materials. – New York: ASME. – 1979. – Pp. 17–28.

275. Bert, C.W. Models for Fibrous Composite with Different Properties in Tension and Compression / C.W. Bert // Transaction of the ASME. – 1977. – Vol. 99 H. – Ser. D. – № 4. – Pp. 344–349.

276. Biondini, F. Cellular Automata Approach of Durability Analysis of Concrete Structures in Aggressive Environments / F. Biondini, F. Bontempi, D.M. Frangopol, P.G. Malerba // Journal of Structural Engineering. ASCE. 2004. – Vol. 130. – № 11. – Pp. 1724–1737.

277. Biondini F. Reliability of material and geometrically non-linear reinforced and prestressed concrete structures / F. Biondini, , F. Bontempi, D.M. Frangopol [et al.] // Journal of Pure and Applied Algebra. 2004. – Vol. 82. – № 13. – Pp. 1021–1031.

278. Biot, M. Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics. // J. Appl. Phys., – 27 (1956) – Pp. 249–253.

279. Bohlooly, M. Three-dimensional stress analysis of plates using assumed natural strain method and sampling surfaces method applied to the four-node quadrilateral plate element / M. Bohlooly, S.V. Plotnikova, M.A. Kouchakzadeh, G.M Kulikov. // Advanced Materials and Technologies, 2019. – № 3 (15). –Pp. 41–49.

280. Cervenka, V. Inelastic analysis of reinforced concrete panels / V. Cervenka, K.H. Gerstle // International Association for Bridge and Structural Engineering. – 1971. – Vol. 31–11. – P. 31–45; – 1972. – Vol. 32–11. – Pp. 25–39.

281. Cook, R.D. Two hybrid elements for analysis of thick thin and sandwich plates / R.D. Cook // Int. J. num. Meth. Engng. – 1972. – Vol. 5. – Pp. 277–288.

282. Cook, R.D. Some quadrilateral "hybrid" finite elements / R.D. Cook, J.K. Al-Abdulla // AIAA Journal. – 1969. – Vol. 7. – N. 11. – Pp. 2184–2185.

283. Deswal, S. Two Temperature Magneto-Thermoelasticity with Initial Stress: State Space Formulation / S. Deswal, K.K. Kalkal // Journal of Thermodynamics [Electronic resource]. – New York: Hindawi Publishing Corporation, 2013.

284. Duhamel, J. M'emoire sur le Calcul des Actions Moleculaires Developpees parles Changements de Temperature dans les Corps Solides / J. Duhamel // Mem. par Div. Say. al'Acad. Roy. des Sci. de l'Inst. de France, (1838). – Pp. 440–498.

285. Duhamel, J. Some Memoire sur les Phenomenes Thermo-Mechanique / J. Duhamel // J. de L Ecole Polytech. – 15 (1837). – Pp. 1–15.

286. Dmitriev, A.N. Calibration and validation of the menetrey-willam constitutive model for concrete / A.N. Dmitriev, Iu.V. Novozhilov, D.S. Mikhaliuk, V.V. Lalin // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2020. – № 3 (88). – Pp. 8804.
287. Gehler, W. Versuche mit kreuzweise bewerhten Platten Heft 70 / W. Gehler, H. Amos. – Berlin, 1932.
288. Green, A.E. Elastic Solids with Different Moduli in Tension and Compression / A.E. Green, J.Z. Mkrtychian // Journal of Elasticity. – 1977. – Vol. 7. – № 4. – Pp. 369–368.
289. Han, D.J. Constitutive Modeling in Analysis of Concrete Structures / D.J. Han, W.F. Chen // Journal of Eng. Mech. – 1987. – Vol. 113. – N4. – Pp. 577–593.
290. Hart, P.E. The effect of pre-stressing on the thermal expansion and Young's modulus of graphite / P.E. Hart // Carbon. – 1972. – Vol. 10. – Pp. 233–236.
291. Jendele, L. On the solution of multi-point constraints – application to FE analysis of reinforced concrete structures / L. Jendele, J. Červenka // Computers & Structures. – 2009. – Vol. 87. – Pp. 970–980.
292. Jones, R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Orthotropic Materials / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – № 10. – Pp. 1436–1443.
293. Jones, R.M. Buckling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Orthotropic Moduli in Tension and Compression / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9. – № 5. – Pp. 917–923.
294. Jones, R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. – № 8. – Pp. 995–1001.
295. Jones, R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – № 1. – P. 16–25.
296. Jones, R.M., Further Characteristics of a Nonlinear Material Model for ATJ-S Graphite / R.M. Jones, D.A.R. Nelson // Journal Composite Materials. – 1975. – Vol. 9. – № 7. – Pp. 251–265.
297. Jones, R.M., Material for nonlinear Deformation / R.M. Jones, D.A.R. Nelson // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14. – № 6. – Pp. 709–716.

298. Jones, R.M., Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R.M. Jones, D.A.R. Nelson // *AIAA Journal*. – 1976. – Vol. 14 – № 10. – Pp. 1427–1435.
299. Kamiya, N. A circular cylindrical shell with different elastic moduli in tension and compression / N. Kamiya // *Bulletin of the ISME*. – 1975. – Vol. 18. – Pp. 1075–1081.
300. Kamiya, N. Bimodulus thermoelasticity considering temperature-dependent material properties / N. Kamiya // *Mechanics of bimodulus materials*. – New York: ASME. – 1979. – Pp. 29–37.
301. Kamiya, N. Large deflection of a different modulus circular plate / N. Kamiya // *Trans. ASME*. – 1975. – Vol. 97. – Ser. H. – Pp. 52–56.
302. Kamiya, N. Thermal stress in bimodulus thick cylinder / N. Kamiya // *Nuclear engineering and design*. – 1977. – Vol. 40. – № 2. – Pp. 383–391.
303. Kattan, P.I. *Damage Mechanics With Finite Elements Practical Applications With Computer Tools* / P.I. Kattan, G.Z. Voyiadjis. – Berlin: Springer Verlag, 2002. – 113 p.
304. Kulikov, G.M. Hybrid-mixed quadrilateral element for laminated plates composed of functionally graded materials / G.M. Kulikov, E. Carrera., S.V. Plotnikova // *Advanced Materials and Technologies*, 2017. – № 1. – Pp. 44–55.
305. Kupfer, H.B. *Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses* / H.B. Kupfer, H.K. Hilsdorf, H. Rusch // *ACI Journal*. – Vol. 66. – 1969. – № 8. – Pp. 656–666.
306. Kupfer, H.B. Das nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsiger Beanspruchung / H.B. Kupfer // *Beton und Stahlbetonbau*. – 1973. – № 11. – Pp. 269–274.
307. Liddiard, A.G., Whitakker B. A. *Journal of the Institute of Metals*, 1961. – Vol. 81. – N 11. – Pp. 423–428.
308. Maekawa, K. Multi-scale modeling of concrete performance integrated material and structural mechanics / K. Maekawa, T. Ishida // *Journal of Advanced concrete Technology*, 2003. – V.1. – № 2. – Pp. 91–126.
309. Nielsen, M.P. *Acta Politechnica Scandinavica. Civil Engineering and Building Construction Series No. 70. On the Strength of Reinforced Concrete Discus*. – Copenhagen, 1971. – Pp. 262–276.

310. Noor, A.K. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates / A.K. Noor, W.S. Burton // *Appl. Mech. Rev.* – 1989. – Vol. 42. – No. 1. – Pp. 1–13.
311. Pian, T.H.H. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution / T.H.H. Pian // *AIAA Journal.* – 1967. – Vol 5. – Pp. 1332–1336.
312. Reddy, J.N. A Penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates / J.N. Reddy // *Int. J. num. Meth. Engng.* – 1980. – Vol. 15. – Pp. 1187–1206.
313. Reddy, J.N. Nonlinear bending of bimodular-material plates / J.N. Reddy, W.C. Chao // *J. Solids a. Structures*, 1983. – Vol. 19. – N 3. – Pp. 229–237.
314. Reddy, J.N. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / J.N. Reddy, C.W. Bert // *ZAMM.* – 1982. – Vol. 62. – № 6. – Pp. 213–219.
315. Reddy, J.N. Thermal bending of thick rectangular plates of bimodulus composite materials / J.N. Reddy, C.W. Bert, Y.S. Hsu // *Journal Mech. eng. sci.* – 1980. – Vol. 22. – № 6. – Pp. 297–304.
316. Reissner, E. On the equation for finite symmetrical deflections of thin shells of revolution / E. Reissner // *Progress in Applied Mechanics. The Prager Anniversary Volume.* – 1963. – Pp. 171–178.
317. Reissner, E. Reflection on the theory of elastic plates / E. Reissner // *Appl. Mech. Rev.* – 1965. – Vol. 38. – № 11. – Pp. 1453–1464.
318. Stratfull, R.F. Corrosion Testing of Bridge Decks / R. F. Stratfull, W. J. Jovkovich, D. L. Spellman // *Transportation Research Record № 539. Transportation Research Board*, 1975. – P. 50–59.
319. Schwartz, R.T., Characteristics of Boron Fibers and Boron-Fiber-Reinforced Plastic Composites / R.T. Schwartz, H.S. Schwartz // *AIAA Journal.* – 1967. – Vol. 5. – № 2. – Pp. 119–126.
320. Shafigullin, L.N. Calculation of reinforced concrete shell of positive gaussian curvature, given different resistance of concrete and cracking / L.N. Shafigullin, A.A. Treshchev, V.G. Telichko, Erofeev V.T. // *Astra Salvensis.* – 2017. – V. 2017. – Pp. 77–91.
321. Tabaddor, F. Constitutive Equations for Bimodulus Elastic Materials / F. Tabaddor // *AIAA Journal.* – 1972. – Vol. 10. – № 4. – Pp. 516–518.

322. Tabaddor, F. Two-Dimensional Bi-Linear Orthotropic Elastic Materials / F. Tabaddor // *Journal of Composite Materials*. – 1969. – Vol. 3. – Oct. – Pp. 725–727.
323. Takeuti, Y. A new technique for coupled plane thermal stress problems / Y. Takeuti, Y. Tanigawa // *Journal of Strain analysis*. – 1982. – Vol. 17. – № 3. – Pp. 133–138.
324. Takeuti, Y. On a new method for axisymmetric coupled thermoelastic problems / Y. Takeuti, Y. Tanigawa // *Journal of Thermal stresses*. – 1981. – Vol. 4. – № 3–4. – Pp. 461–478.
325. Tasuji, M.E. Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading / M.E. Tasuji, F.O. Slate, A.H. Nilson // *ACI Journal*. – 1979. – № 7. – Pp. 806–812.
326. Tong, P. A variation principle and the convergence of a finite-element method based on assumed stress distribution / P. Tong, T.H.H. Pian // *Int. J. Solids Struct.* – 1969. – Pp. 463–472.
327. Treschev, A.A. Model deformation of the reinforced beams-walls from composite of a material in view of cracks / A.A. Treschev, A.V. Nedelin // *5 International congress on mathematical modelling*. – Dubna: Joint institute for nuclear research laboratory of information technologies council on mathematical modelling of ras. – Dubna: JINR. – 2002. – Vol. 1. – Pp. 233.
328. Treschev, A.A. Determination of strain-stress parameters of a multi-storey reinforced concrete building on an elastic foundation with allowance for different resistance of materials and cracking / A.A. Treschev, V.G. Telichko, N.V. Zolotov // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2019. – V. 15. – № 4. – Pp. 150–163.
329. Treschev, A.A. Determination of stress-strain state of reinforced slabs from non-linear material taking into account the influence of aggressive environment / A.A. Treschev, A.V. Bashkatov, V.G. Telichko [et al.] // *Scientific Review Engineering and Environmental Sciences*. – 2018. – V. 27. – № 4. – Pp. 488–503.
330. Treschev, A.A. The analysis of stress-strain state of multi storied building made of cast reinforced concrete with consideration of effects of different resistance and cracking / A.A. Treschev, V.G. Telichko, N.V. Zolotov [et al.] // *Revista Publicando*. – 2017. – V. 4. – № 13. Part 2. – Pp. 249–263.

331. Treschev, A.A. Constitutive relations for isotropic materials allowing quasi-linear approximation of the deformation law / A.A. Treschev, A.A. Bobrishev, L.N. Shafigullin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 481 (2019). – 2019. – Pp. 1–7.

332. Treschov, A.A. Modeling stress-strain state thick cylindrical shells made of materials with complicated properties / A.A. Treschov, V.G. Telichko, P.Y. Khodorovich // Materials Physics and Mechanics. – 2014. – V. 21. – № 1. – Pp. 38–50.

333. Zhuravlev, G.M. The development of a mathematical complex for modeling the progress of destruction of composite structures based on high-speed deformation models / G.M. Zhuravlev, V.G. Telichko, N.S. Kurien [et al.] // Chebyshevskii Sbornik. – 2020. – V. 21. – № 3. – Pp. 292–305.

334. Zienkiewicz, O.C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals: 7th Edition / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. – Butterworth-Heinemann, 2013. – 756 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Избранные результаты к решению задачи о расчете НДС плиты №711 (1),
с учётом воздействия химически активной хлоридсодержащей среды
на защитный слой из эпоксидного полимербетона

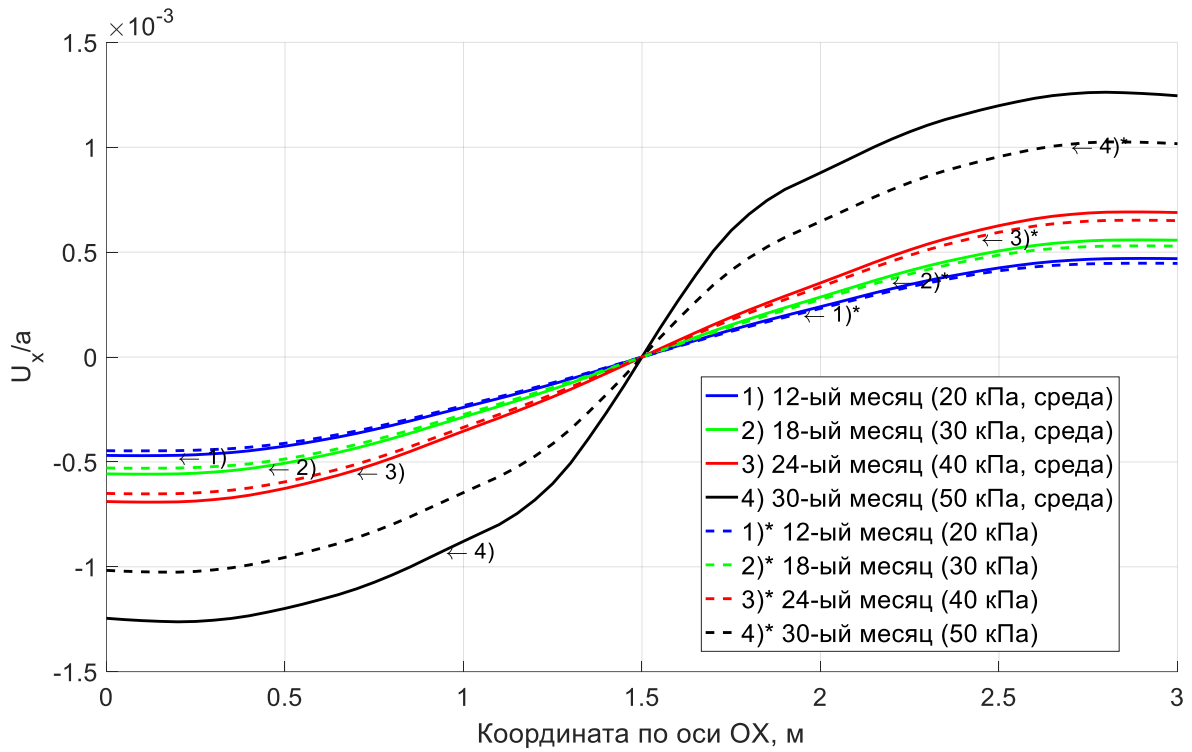


Рисунок П1.1 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль оси симметрии OX, в срединной поверхности)

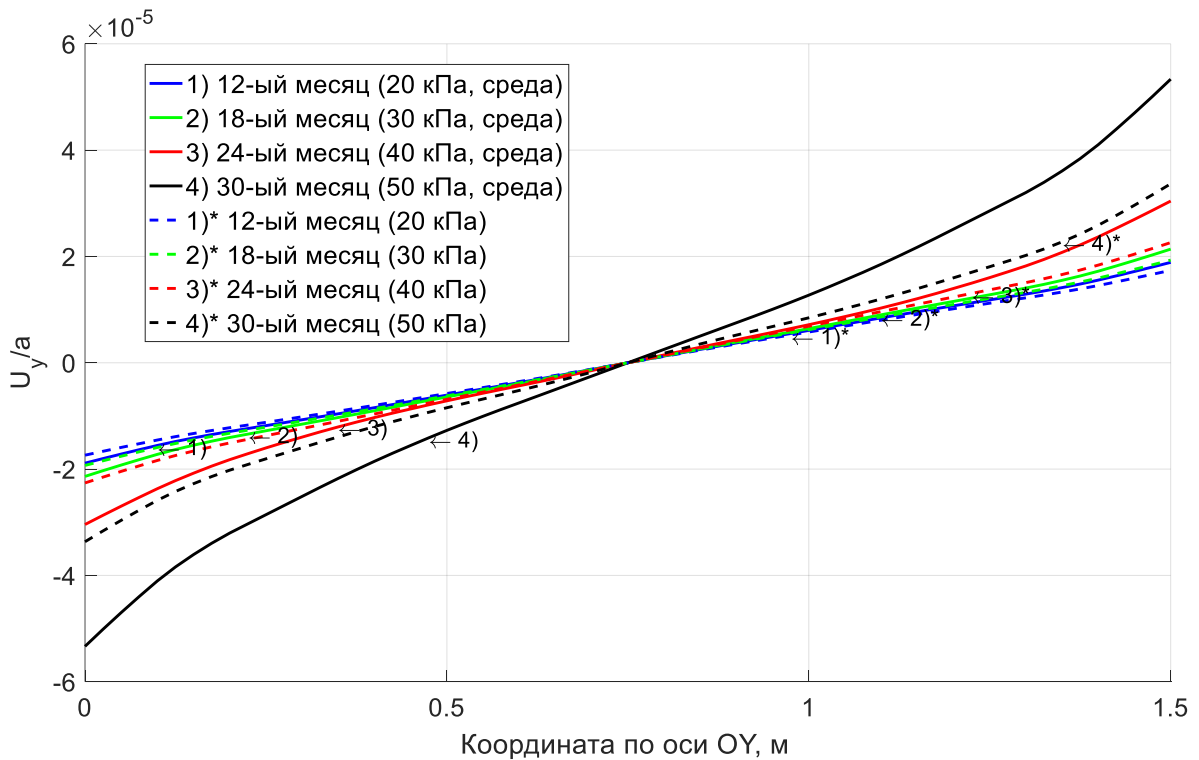


Рисунок П1.2 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль оси симметрии OY, в срединной поверхности)

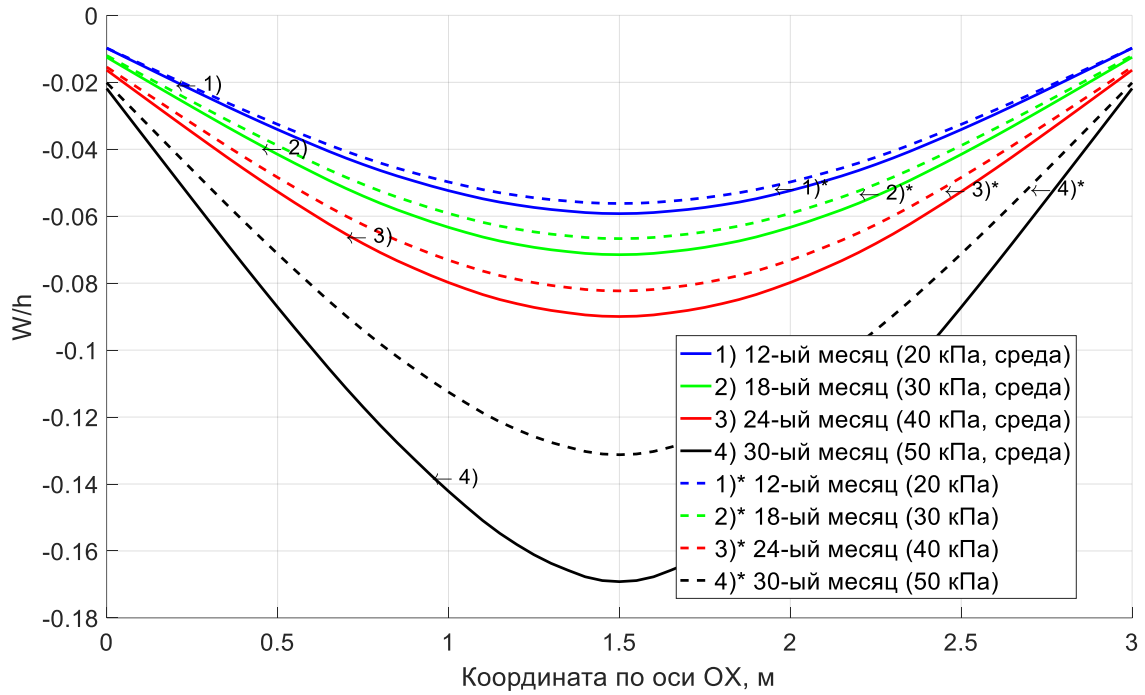


Рисунок П1.3 – Распределение значений вертикальных перемещений W/h (вдоль оси симметрии OX , в срединной поверхности)

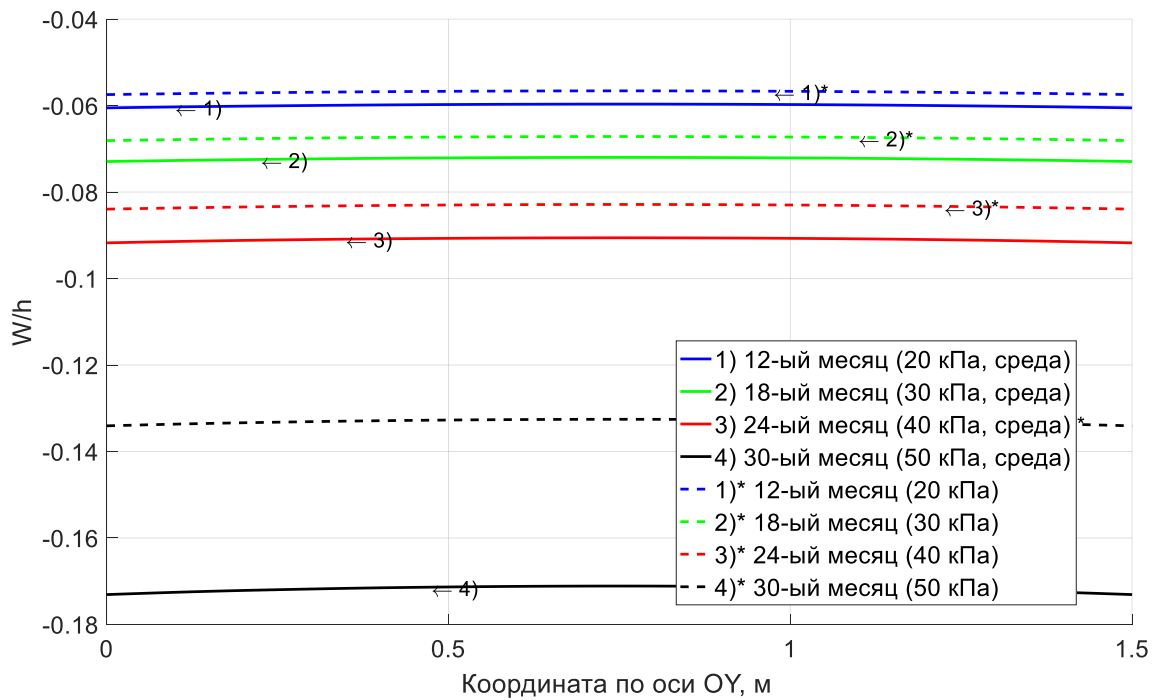


Рисунок П1.4 – Распределение значений вертикальных перемещений W/h (вдоль оси симметрии OY , в срединной поверхности)

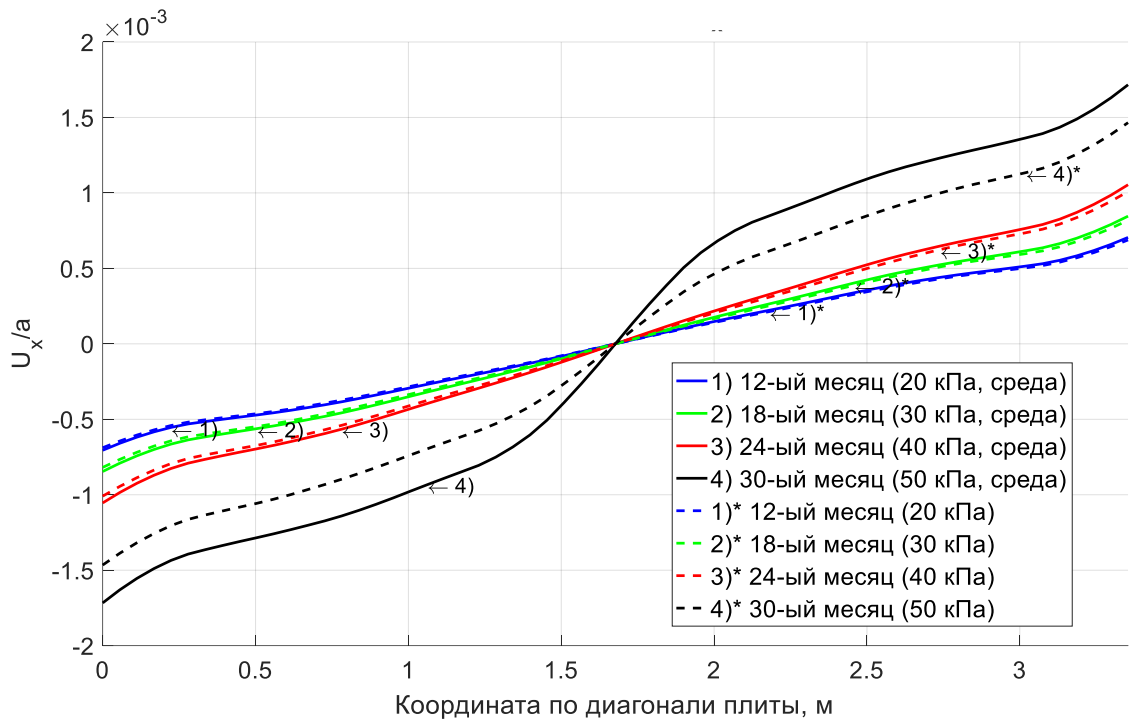


Рисунок П1.5 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль диагонали, в срединной поверхности)

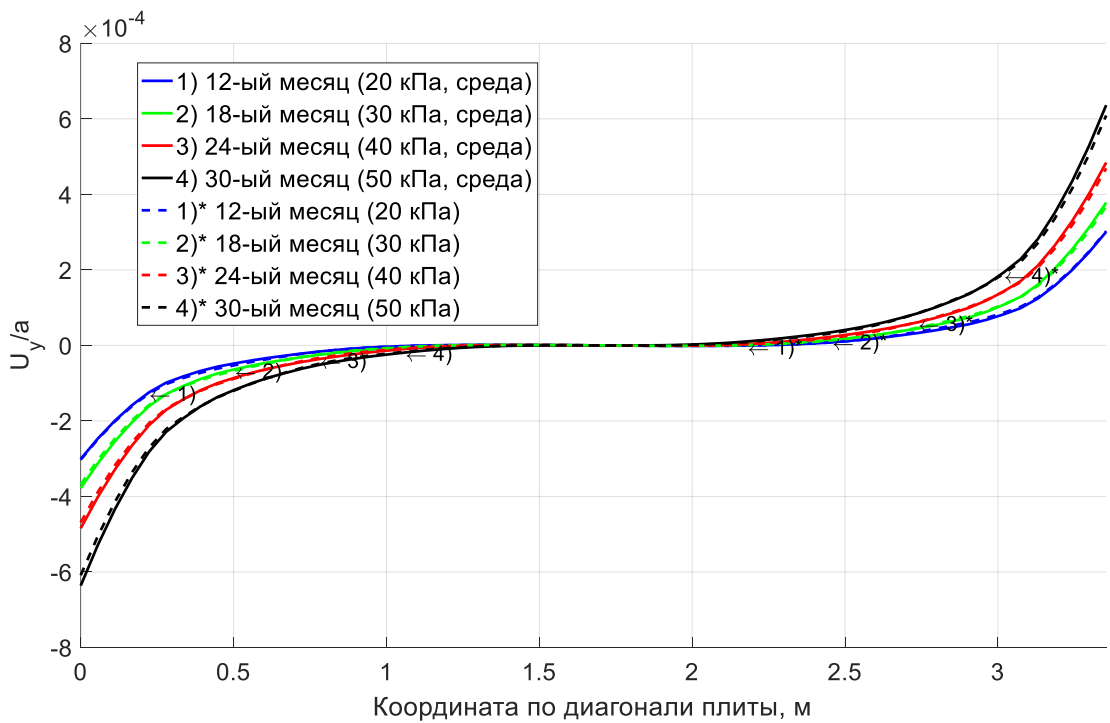


Рисунок П1.6 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль диагонали, в срединной поверхности)

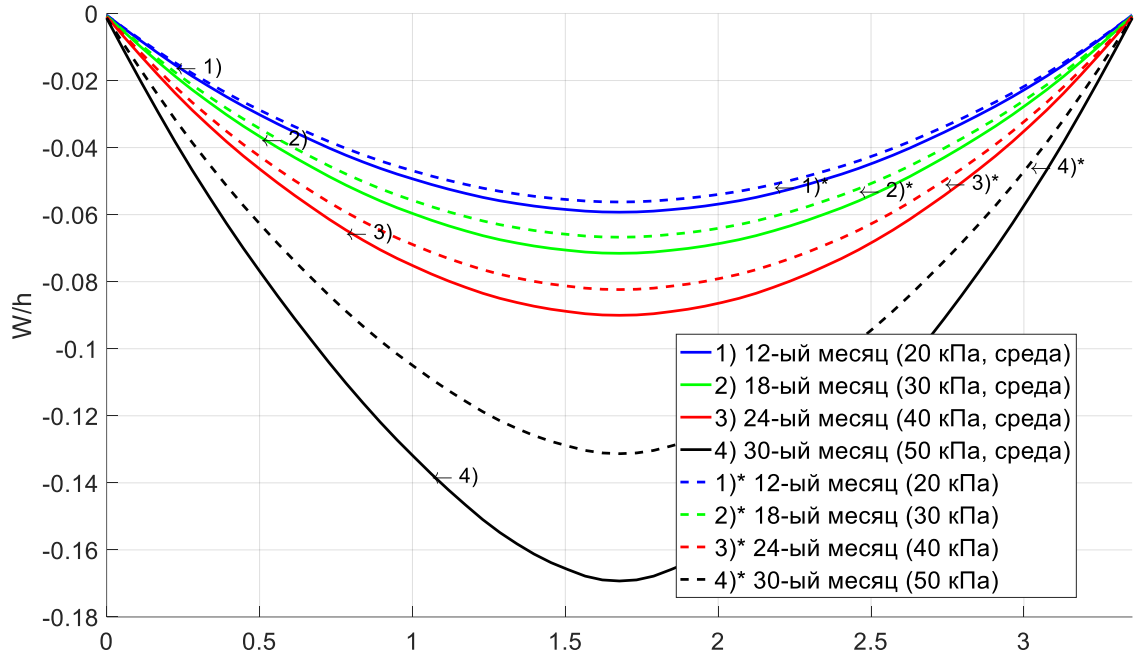


Рисунок П1.7 – Распределение значений вертикальных перемещений W/h (вдоль диагонали, в срединной поверхности)

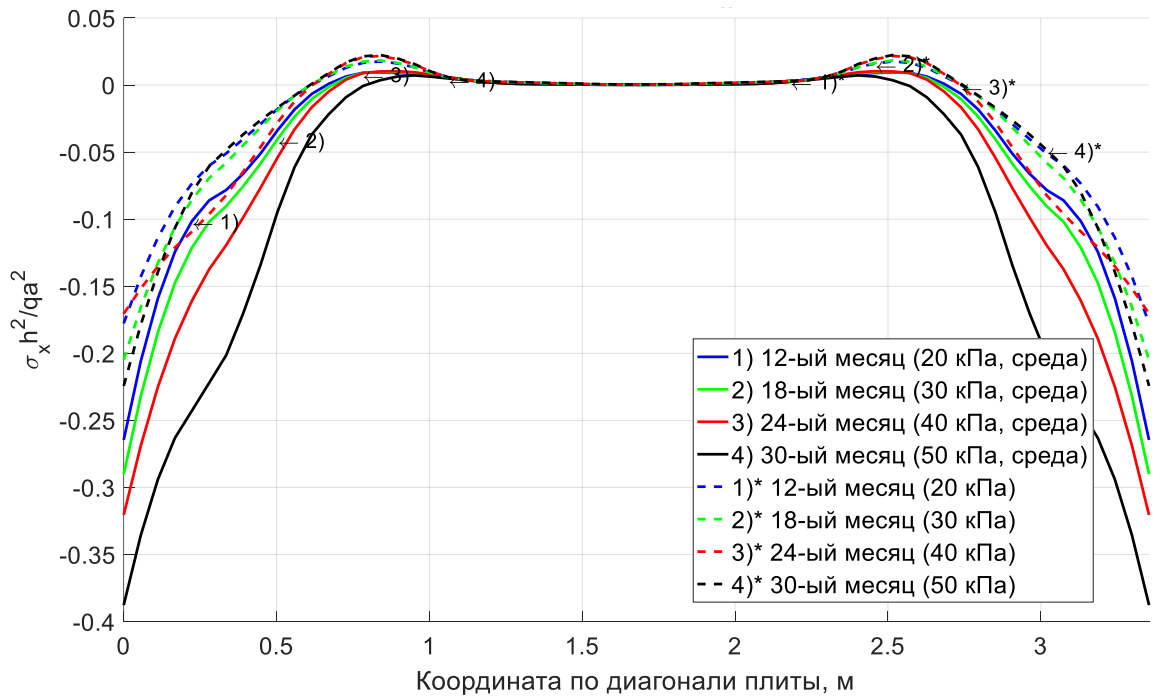


Рисунок П1.8 – Величина напряжений в бетоне (на нижней поверхности плиты, вдоль диагонали)

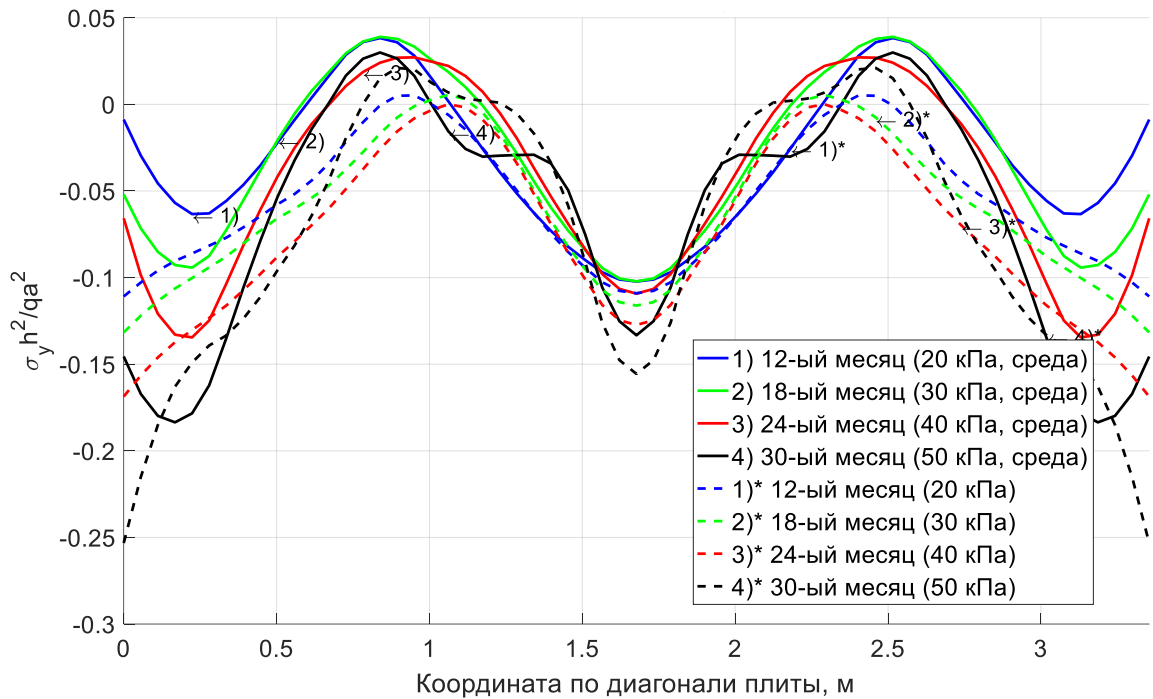


Рисунок П1.9 – Величина напряжений в бетоне
(на нижней поверхности плиты, вдоль диагонали)

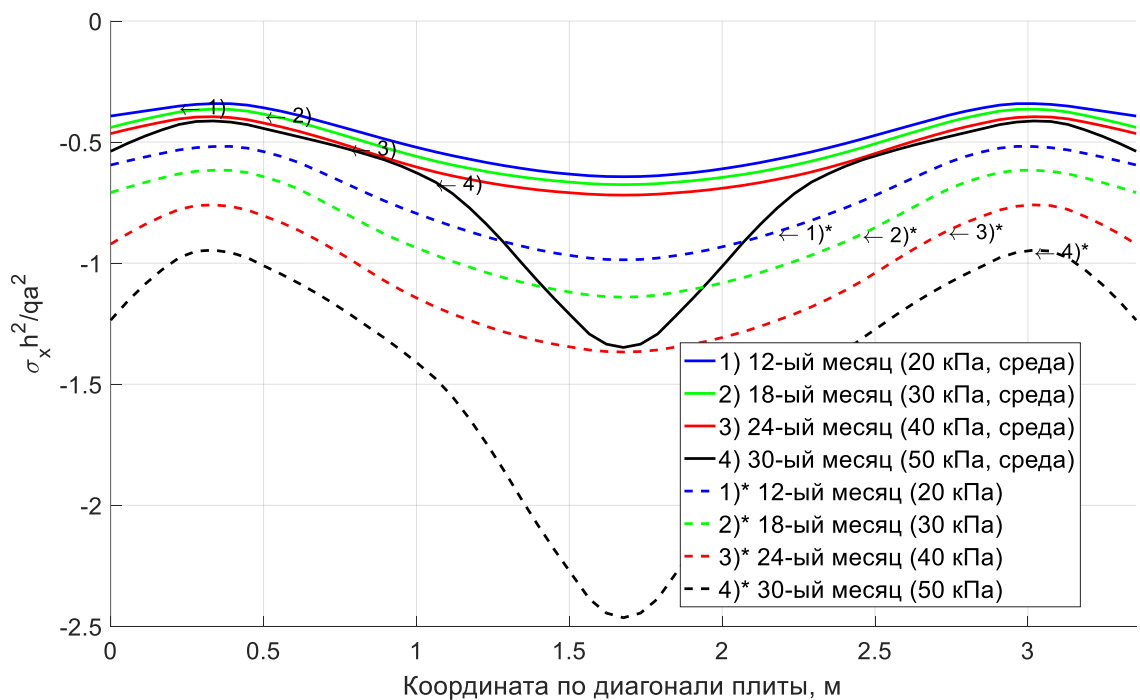


Рисунок П1.10 – Величина напряжений в бетоне
(на верхней поверхности плиты, вдоль диагонали)

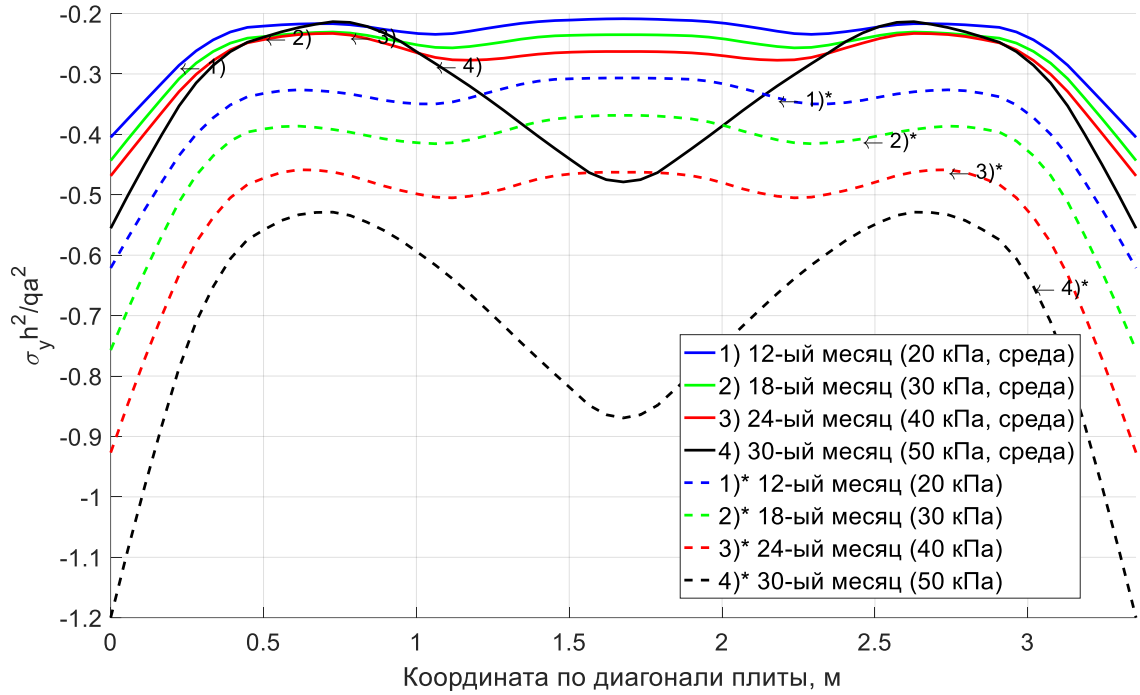


Рисунок П1.11 – Величина напряжений в бетоне (на верхней поверхности плиты, вдоль диагонали)

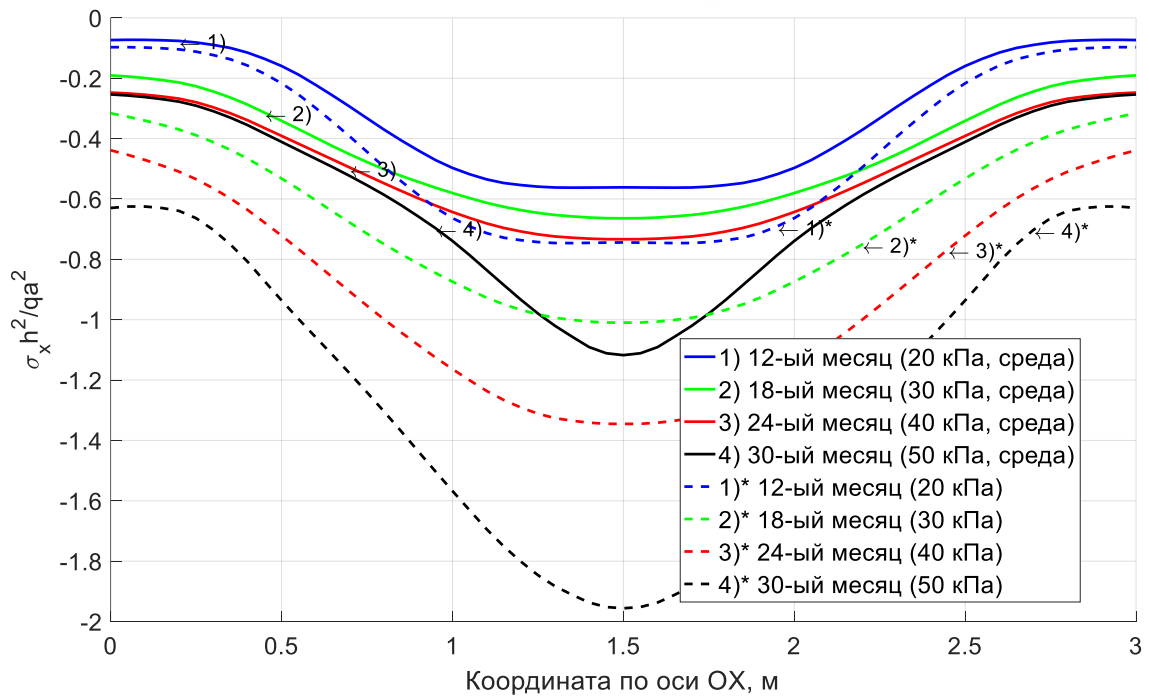


Рисунок П1.12 – Величина напряжений в бетоне (на верхней поверхности плиты, вдоль оси симметрии OX)

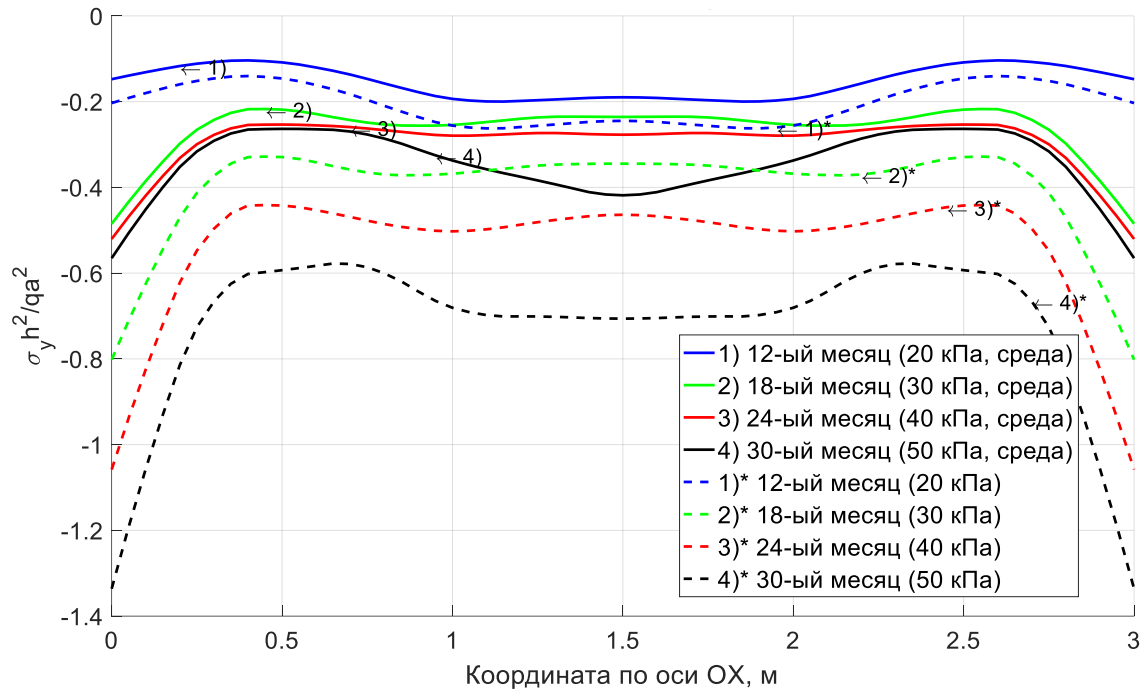


Рисунок П1.13 – Величина напряжений в бетоне
(на верхней поверхности плиты, вдоль оси симметрии OX)

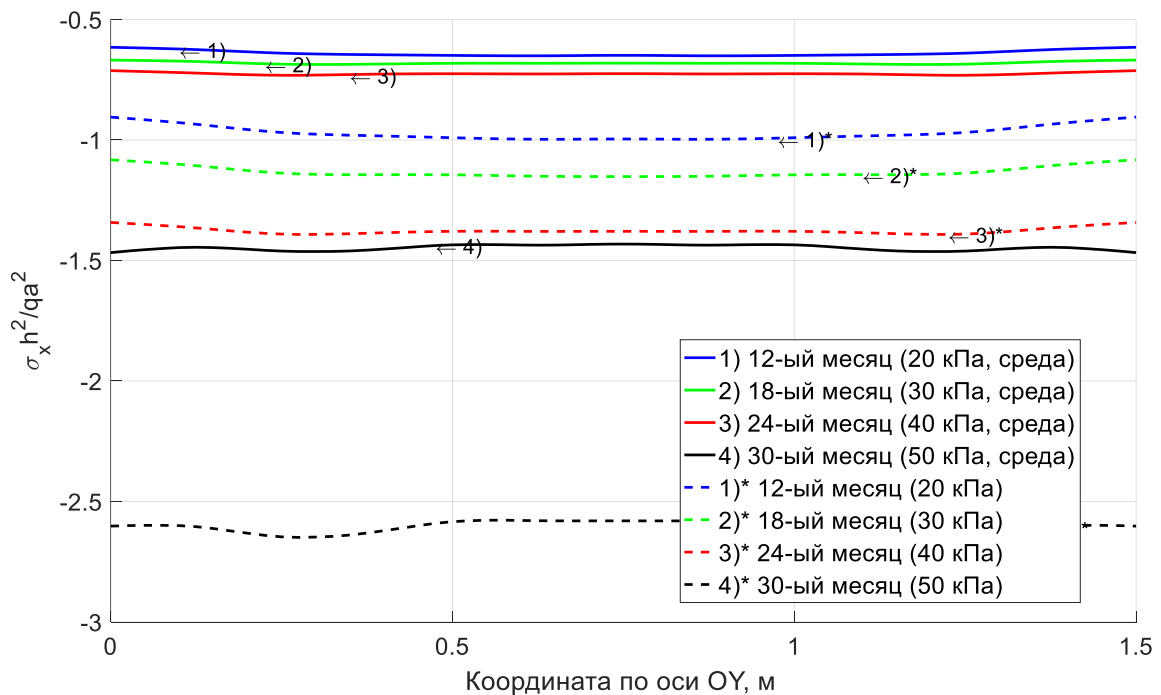


Рисунок П1.14 – Величина напряжений в бетоне
(на верхней поверхности плиты, вдоль оси симметрии OY)

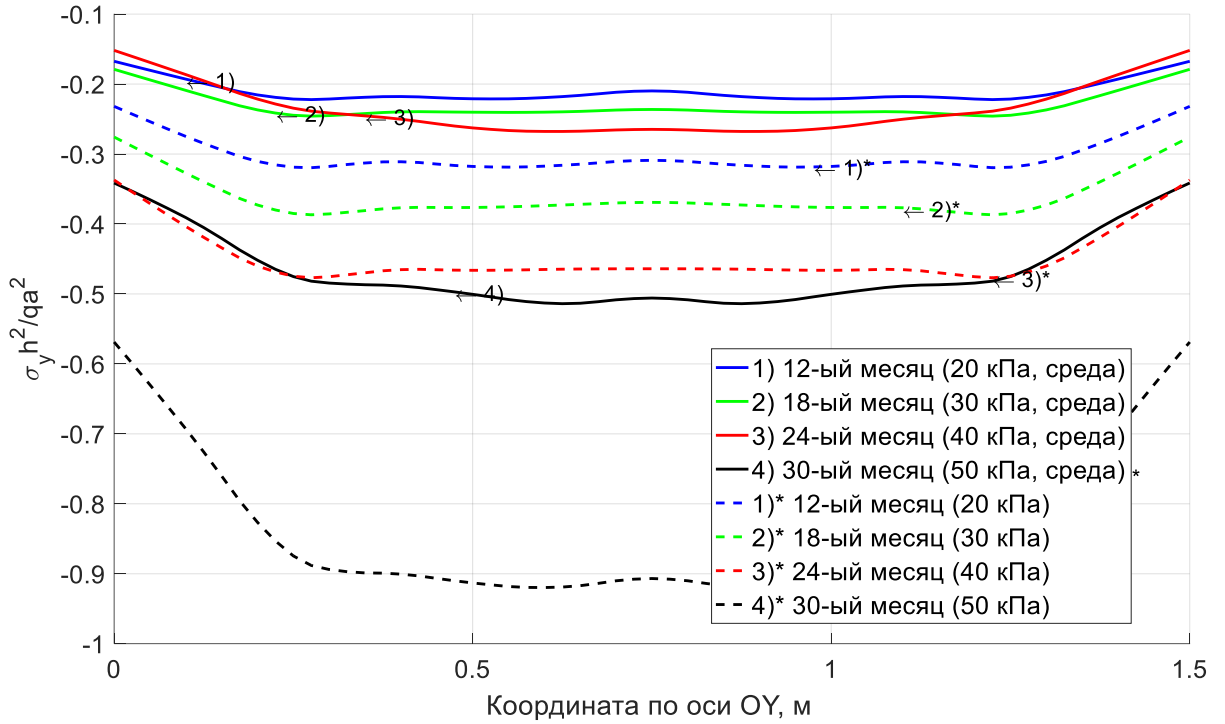


Рисунок П1.15 – Величина напряжений в бетоне
(на верхней поверхности плиты, вдоль оси симметрии OY)

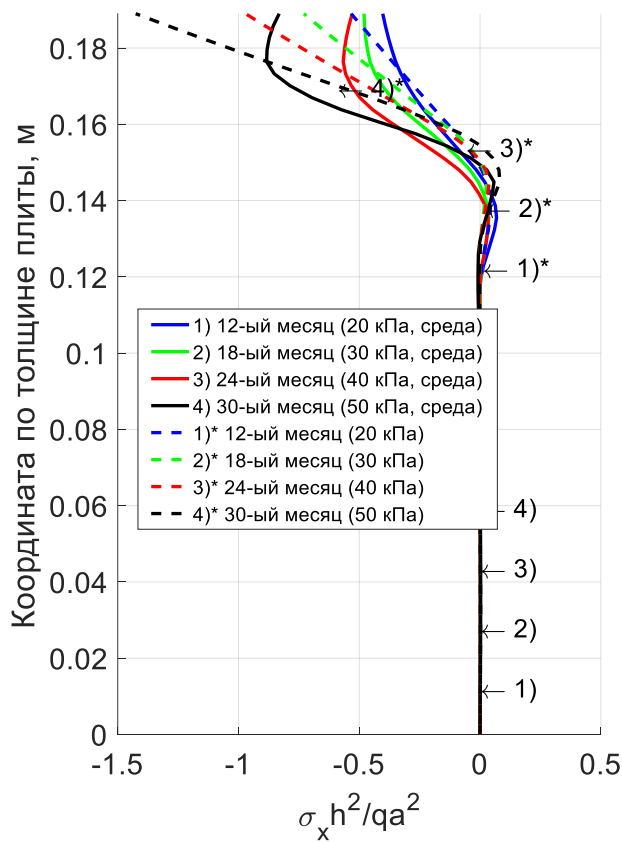


Рисунок П1.16 – Величина напряжений в бетоне
(распределение по толщине плиты, в центре геометрии)

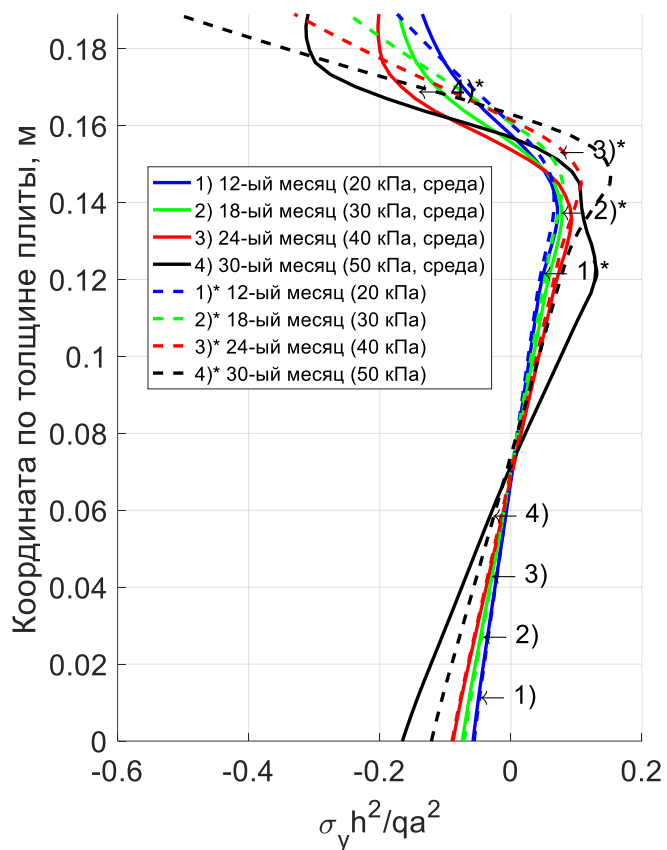


Рисунок П1.17 – Величина напряжений в бетоне
(распределение по толщине плиты, в центре геометрии)

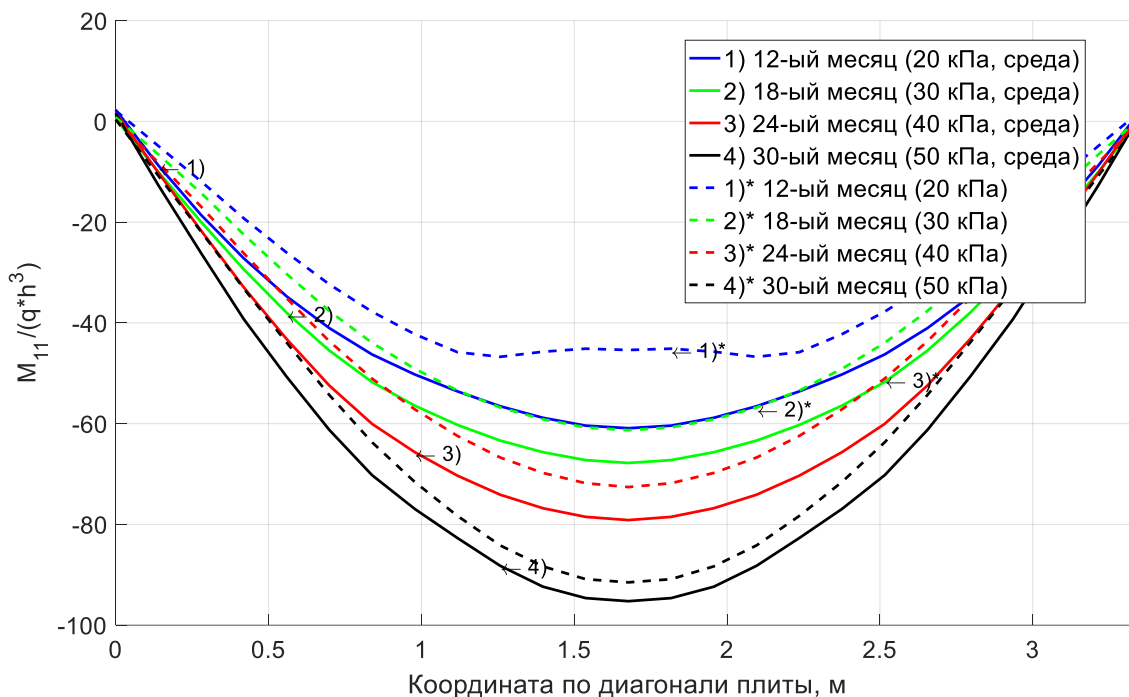


Рисунок П1.18 – Распределение значений усилий M_{11} вдоль диагонали плиты

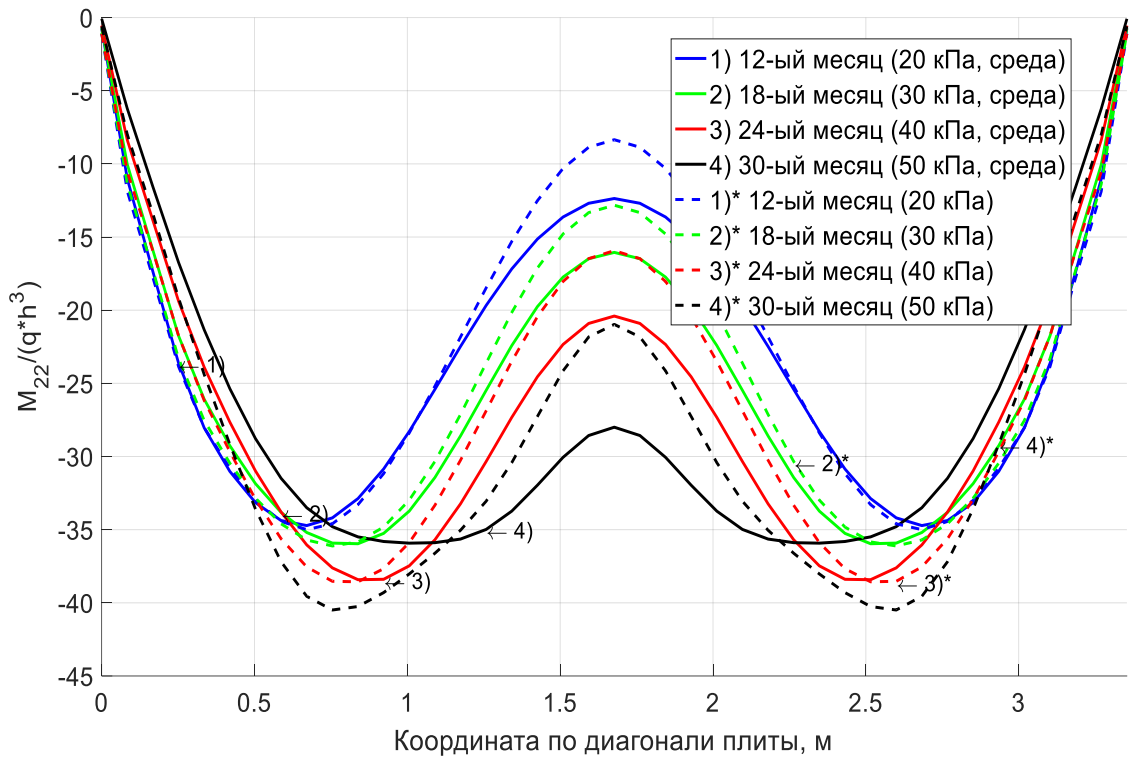


Рисунок П1.19 – Распределение значений усилий M_{22} вдоль диагонали плиты

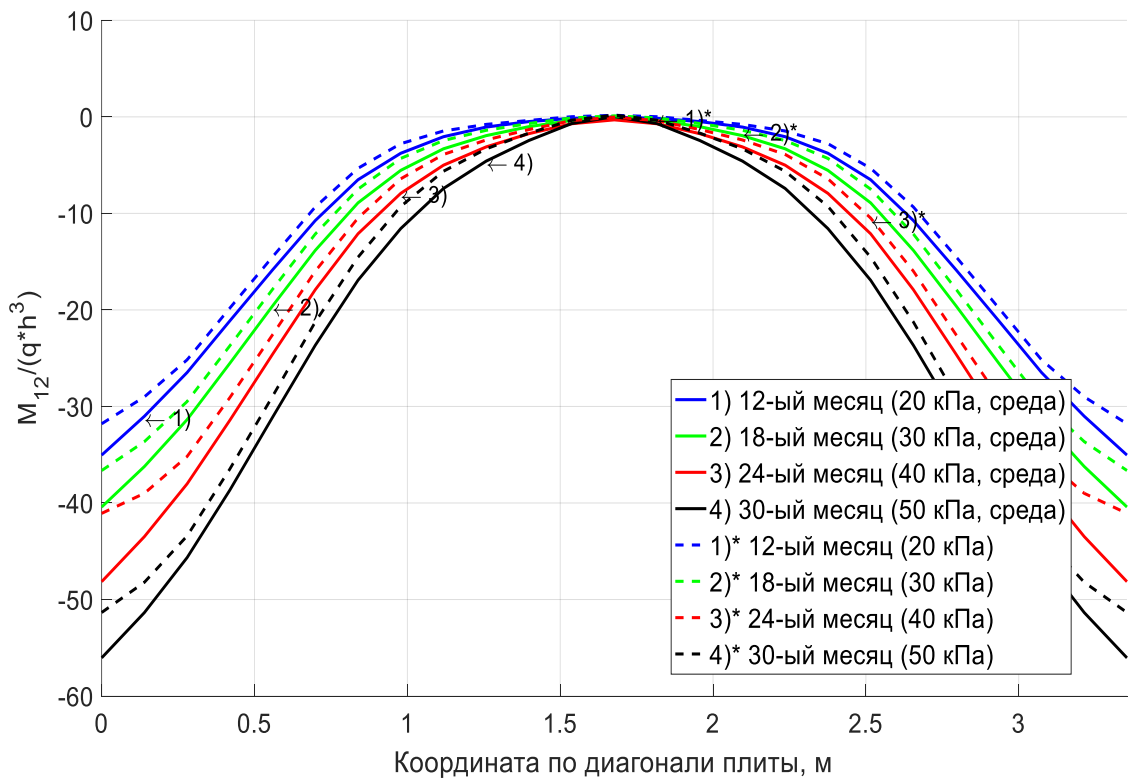


Рисунок П1.20 – Распределение значений усилий M_{12} вдоль диагонали плиты

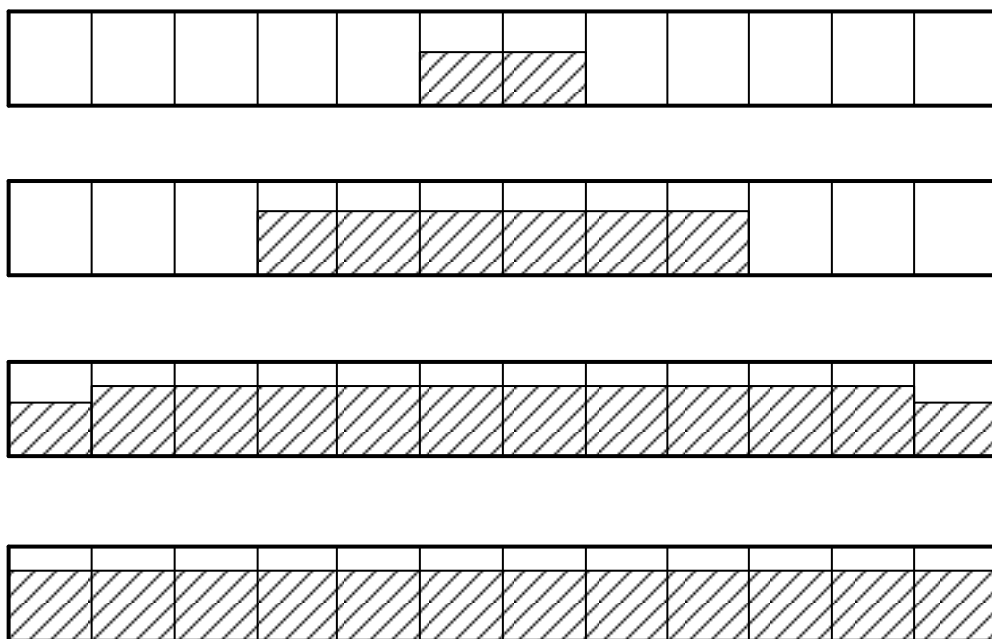


Рисунок П1.21 – Иллюстрация процесса развития повреждаемости в сечении плиты при величине нагрузки q 4/10, 6/10, 8/10, 1 от максимальной (в расчете)

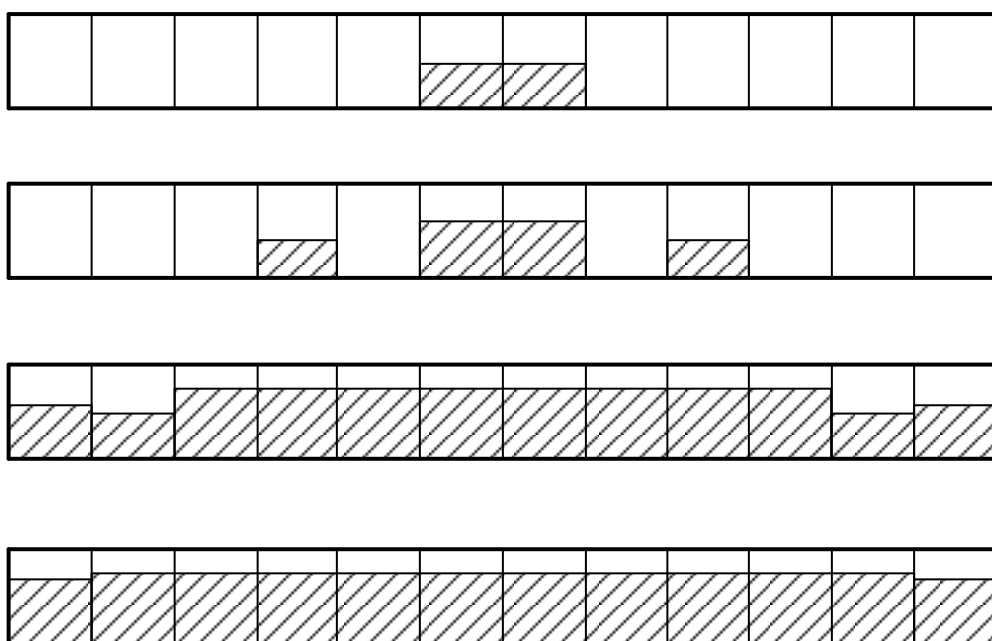


Рисунок П1.22 – Иллюстрация процесса развития повреждаемости в сечении плиты при величине нагрузки q 4/10, 6/10, 8/10, 1 от максимальной (в расчете)

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Избранные результаты к решению задачи о расчёте НДС плиты №825 (2),
с учётом воздействия химически активной хлоридсодержащей среды
на защитный слой из эпоксидного полимербетона

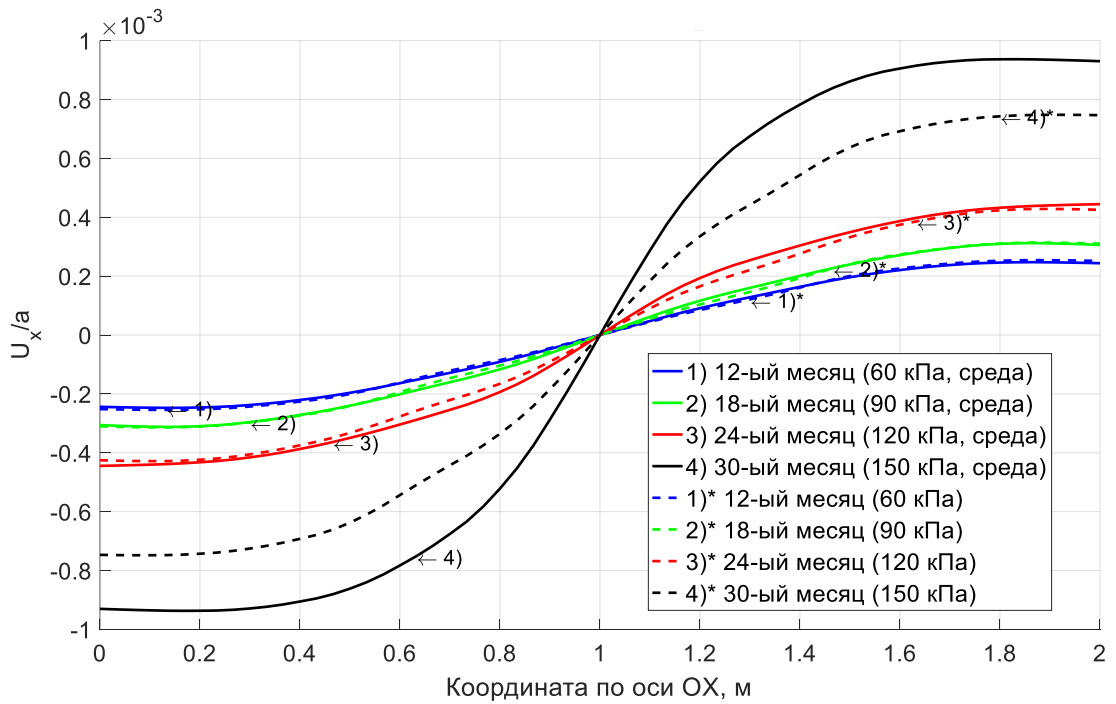


Рисунок П2.1 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль оси симметрии OX, в срединной поверхности)

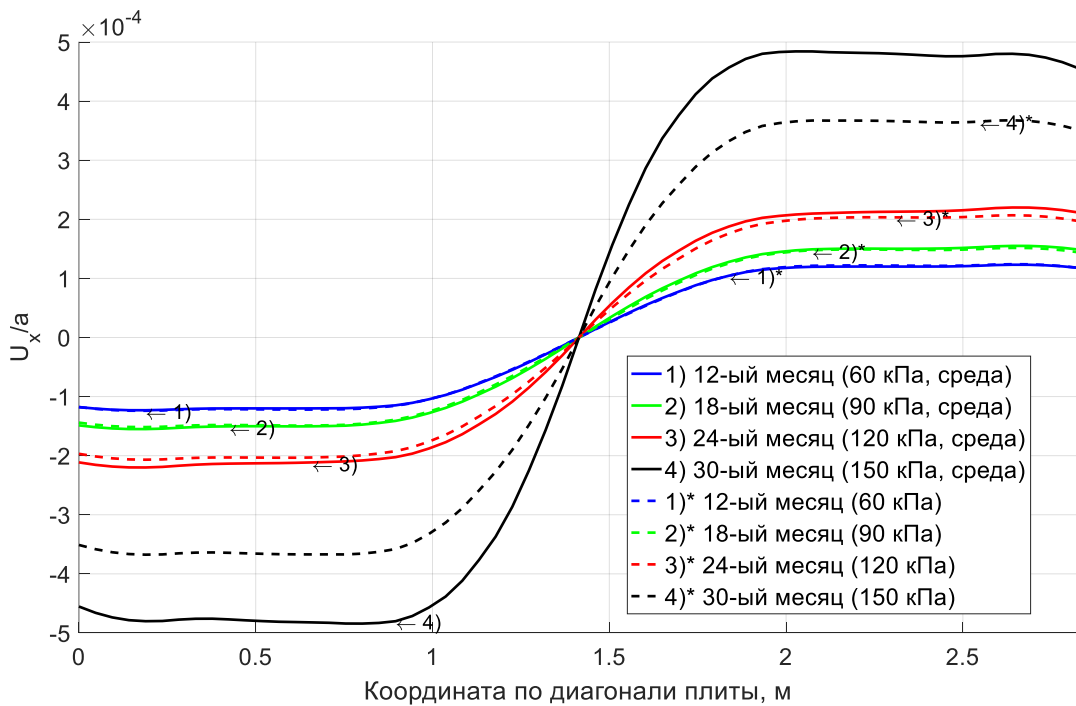


Рисунок П2.2 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль диагонали, в срединной поверхности)

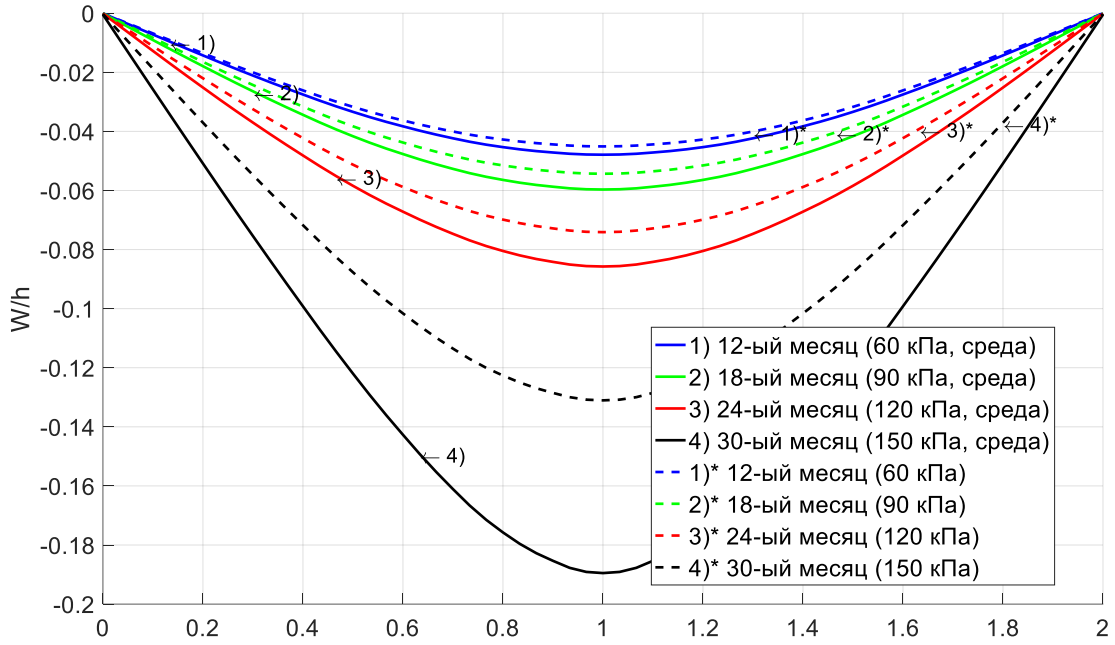


Рисунок П2.3 – Распределение значений вертикальных перемещений W/h (вдоль оси симметрии OX , в срединной поверхности)

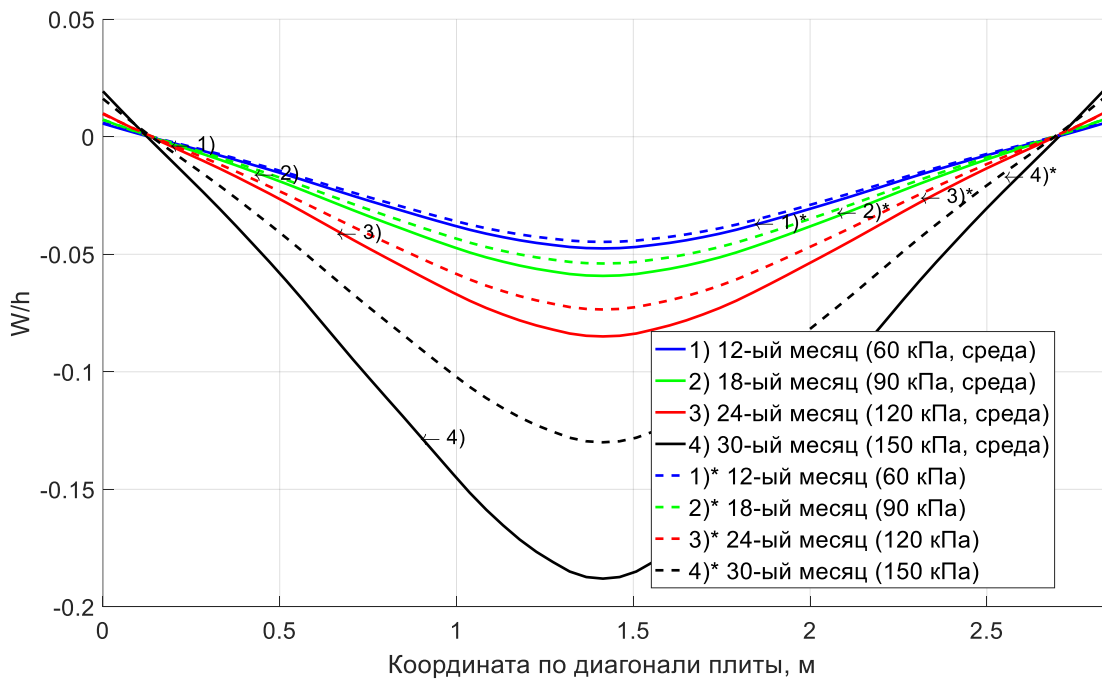


Рисунок П2.4 – Распределение значений вертикальных перемещений W/h (вдоль диагонали, в срединной поверхности)

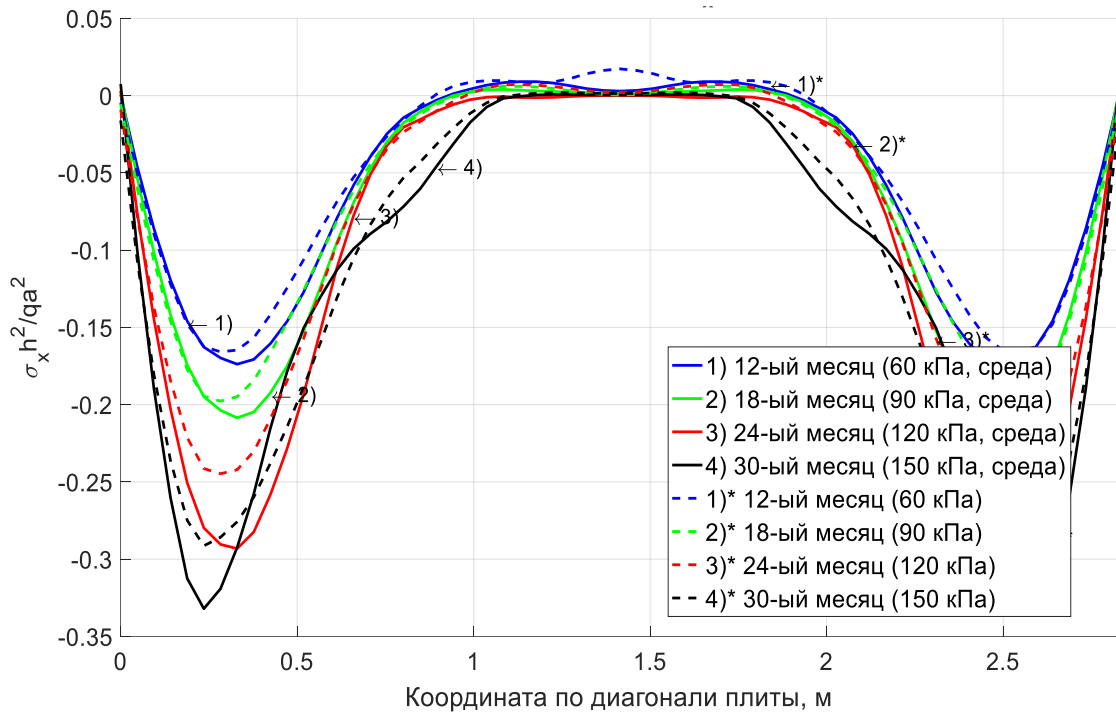


Рисунок П2.5 – Величина напряжений в бетоне
(на нижней поверхности плиты, вдоль диагонали)

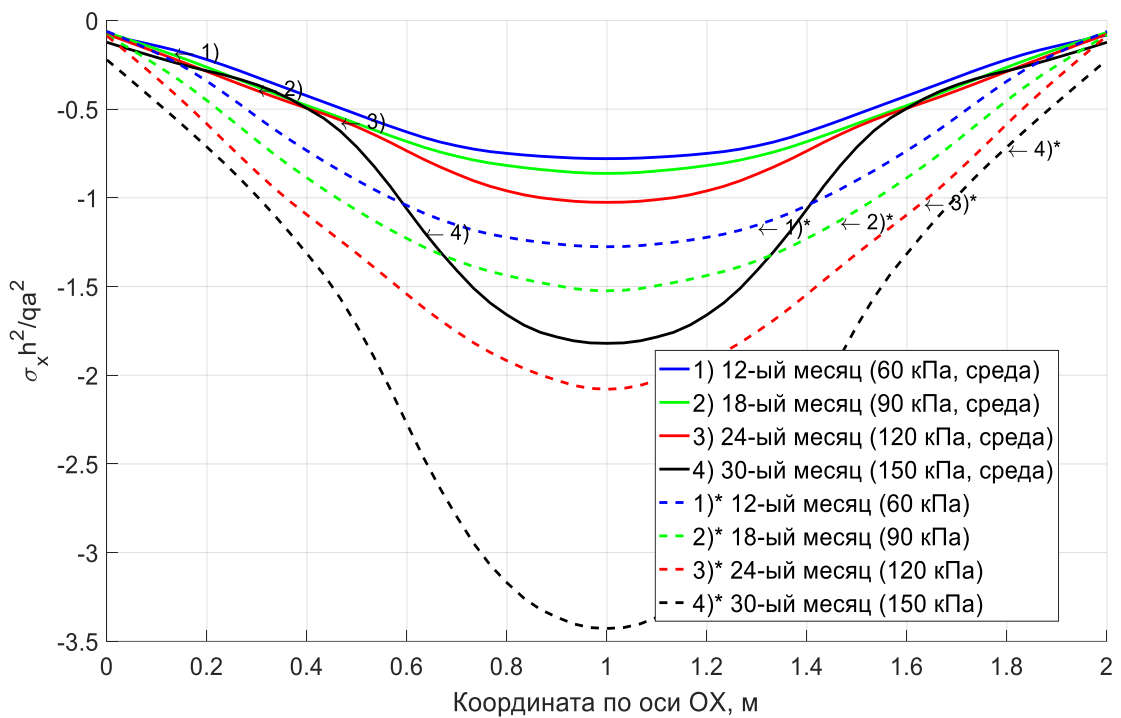


Рисунок П2.6 – Величина напряжений в бетоне
(на верхней поверхности плиты, вдоль оси симметрии OX)

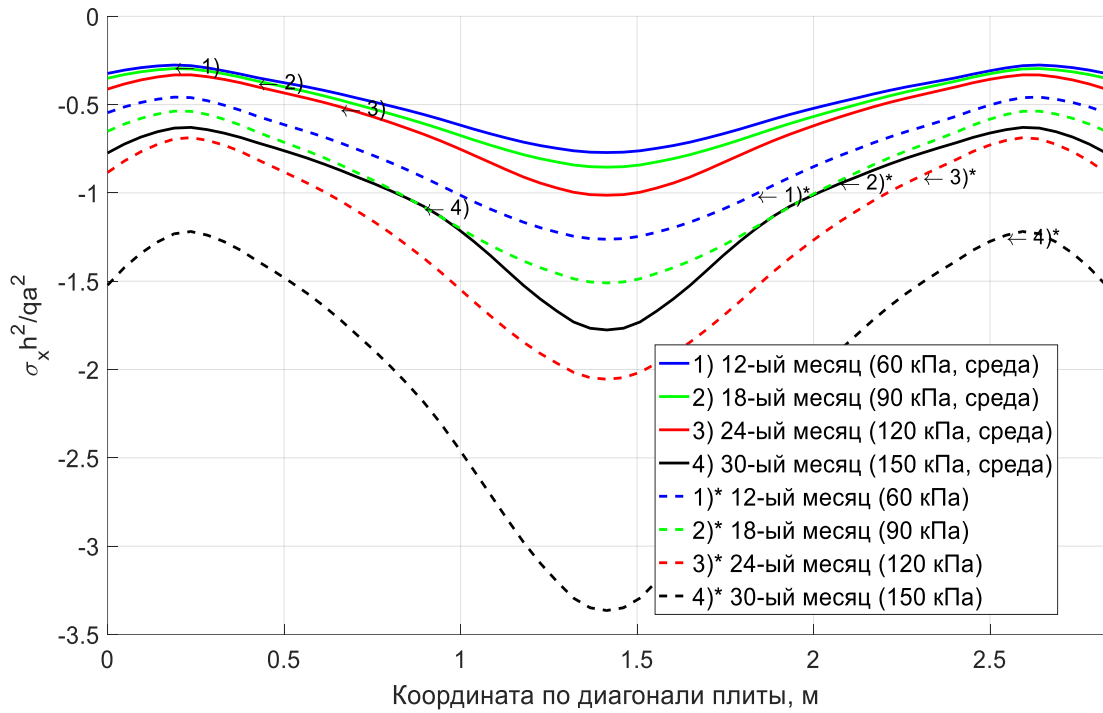


Рисунок П2.7 – Величина напряжений в бетоне (на верхней поверхности плиты, вдоль диагонали)

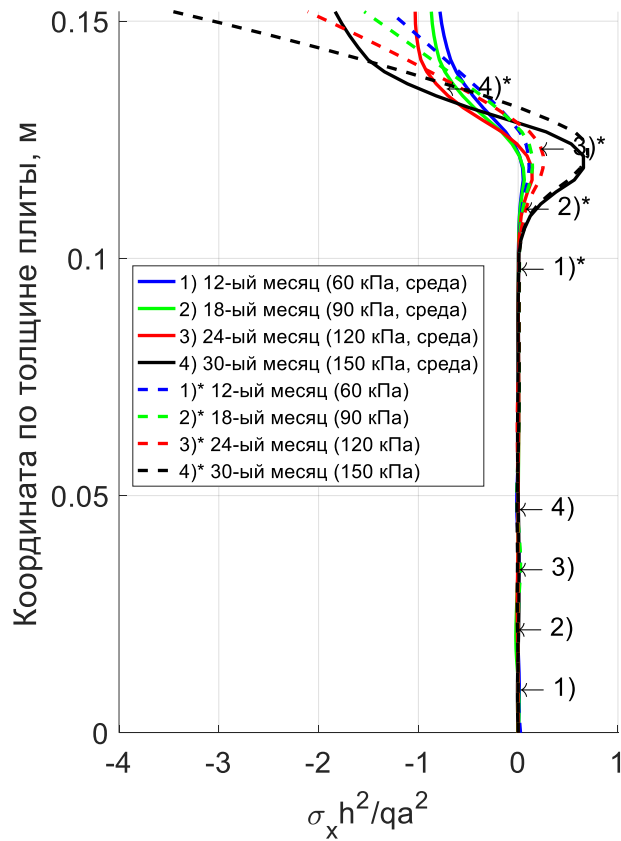


Рисунок П2.8 – Величина напряжений в бетоне (распределение по толщине плиты, в центре геометрии)

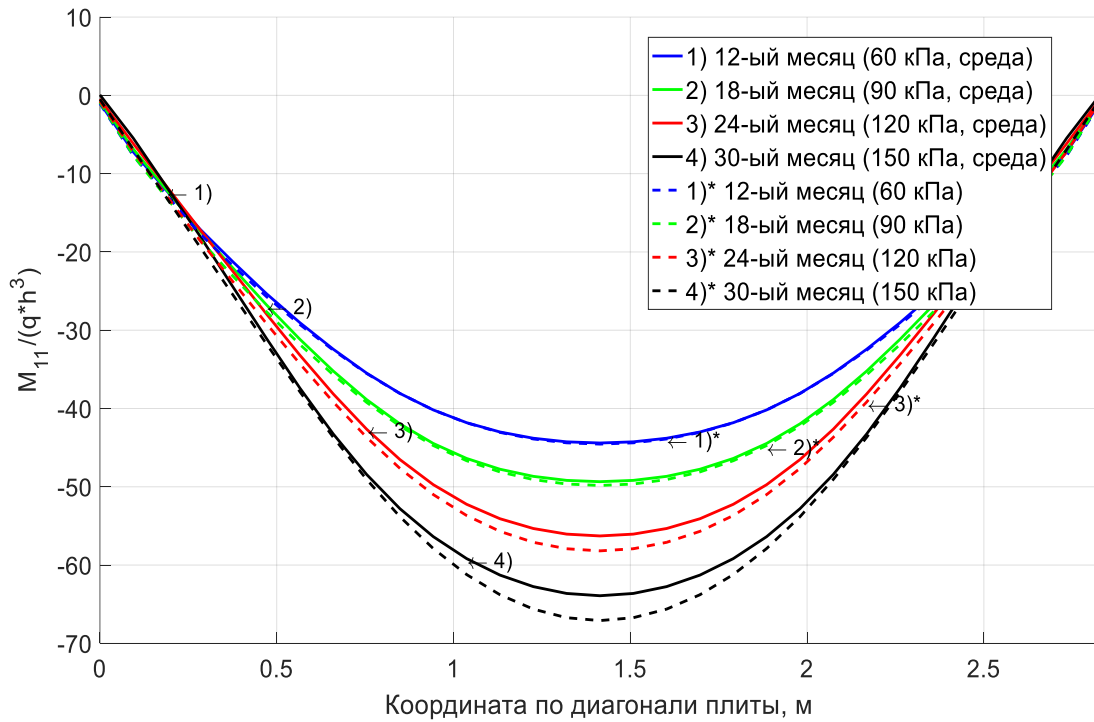


Рисунок П2.9 – Распределение значений усилий M_{11} вдоль диагонали плиты

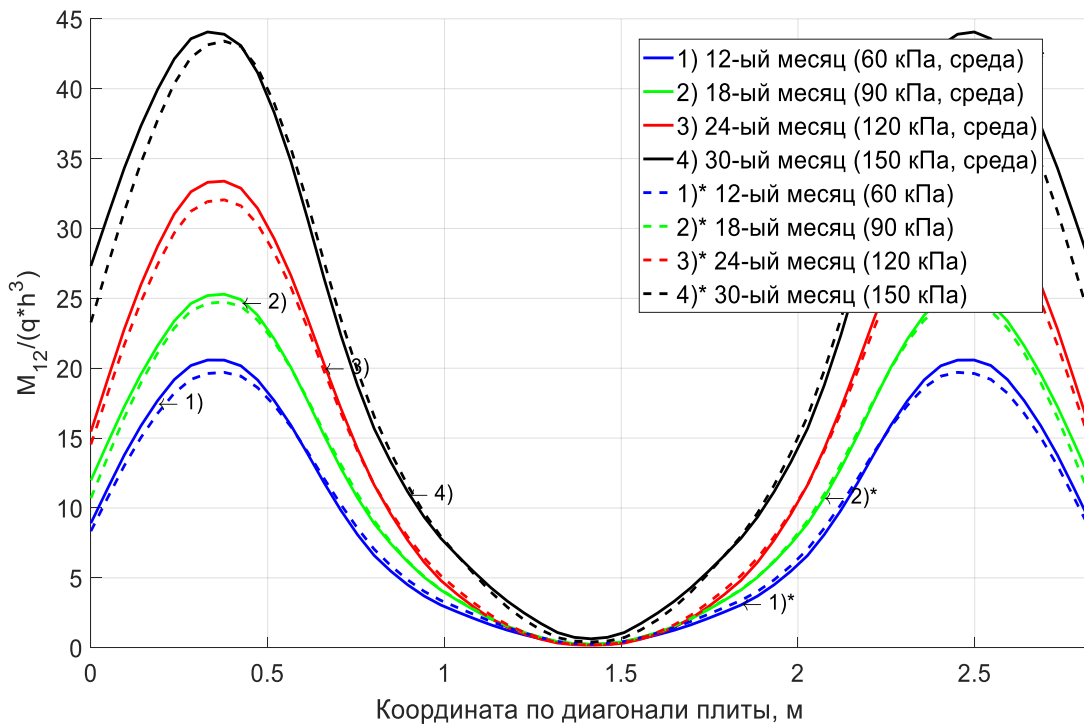


Рисунок П2.10 – Распределение значений усилий M_{12} вдоль диагонали плиты

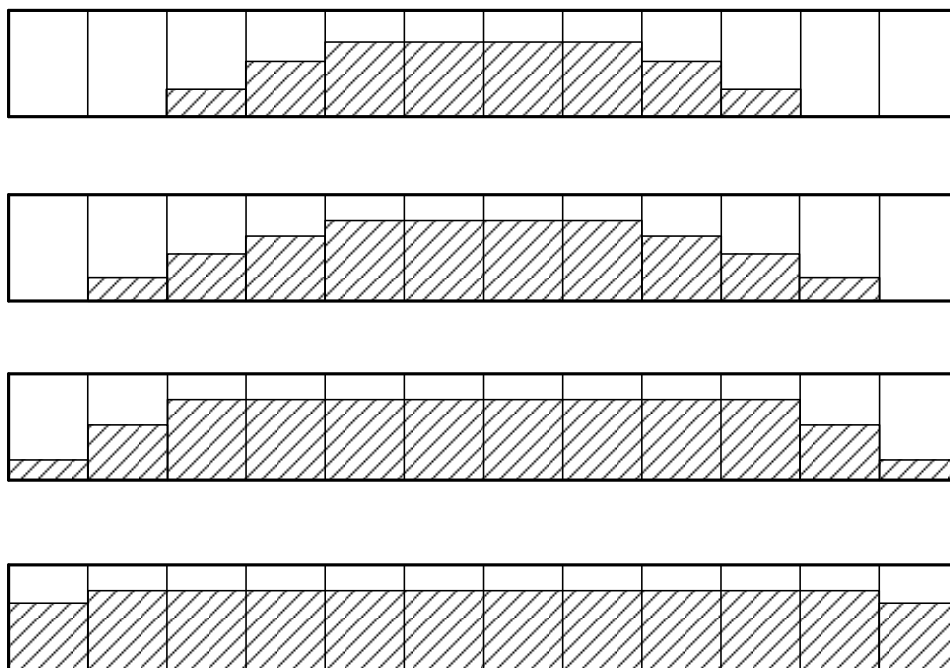


Рисунок П2.11 – Иллюстрация процесса развития повреждаемости в сечении плиты при величине нагрузки q 4/10, 6/10, 8/10, 1 от максимальной (в расчете)

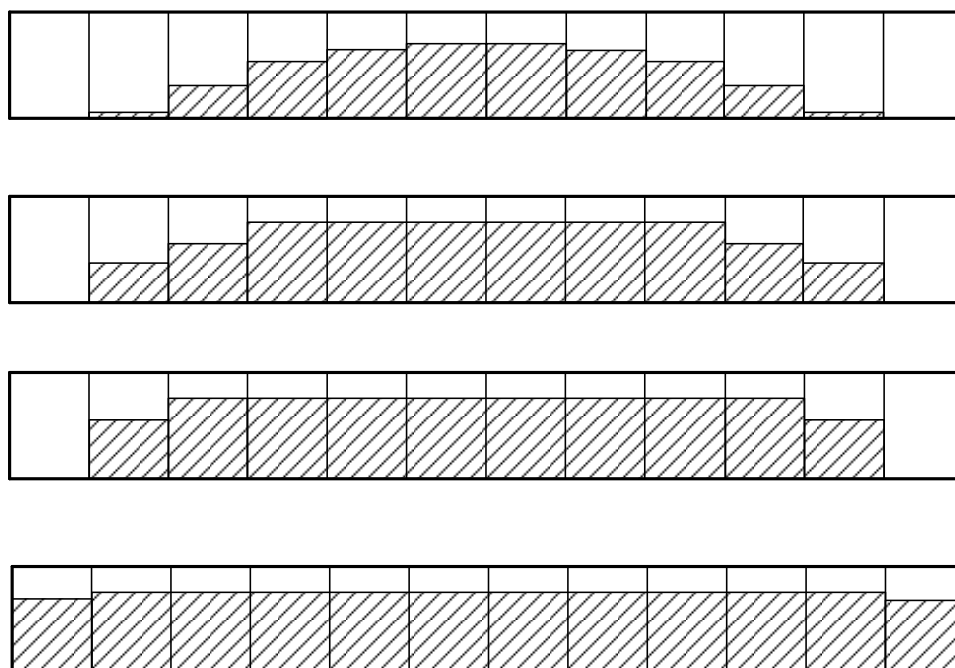


Рисунок П2.12 – Иллюстрация процесса развития повреждаемости в сечении плиты при величине нагрузки q 4/10, 6/10, 8/10, 1 от максимальной (в расчете)

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Избранные результаты к решению задачи о расчёте НДС плиты №844 (3),
с учётом воздействия химически активной хлоридсодержащей среды
на защитный слой из эпоксидного полимербетона

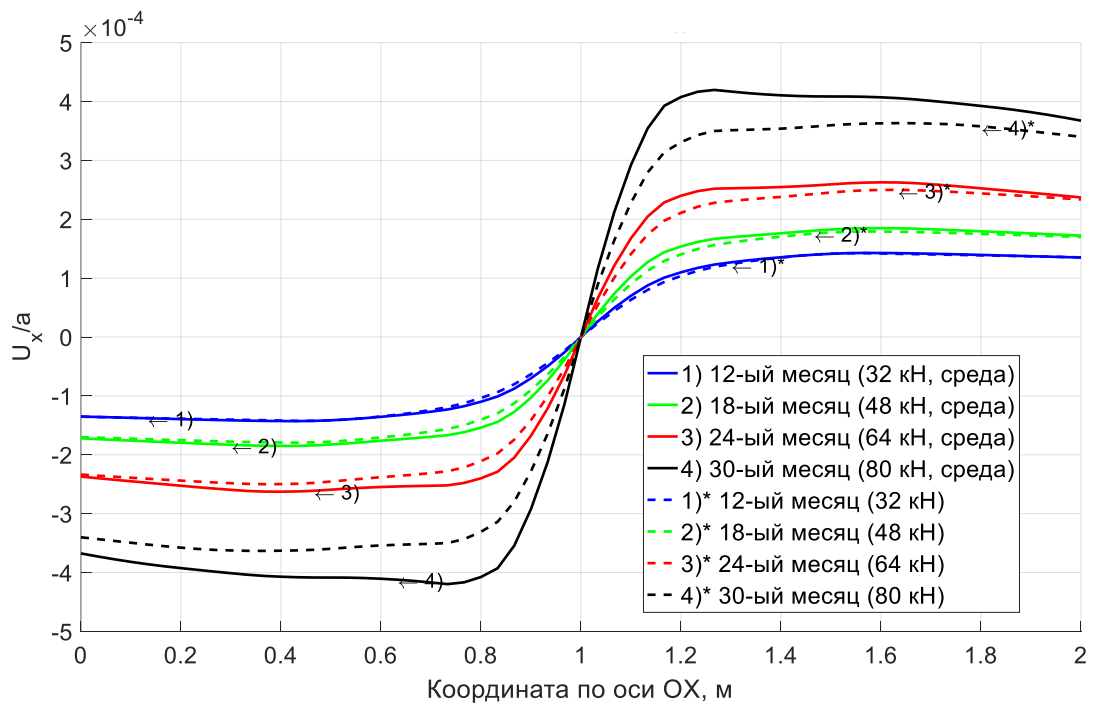


Рисунок П3.1 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль оси симметрии OX, в срединной поверхности)

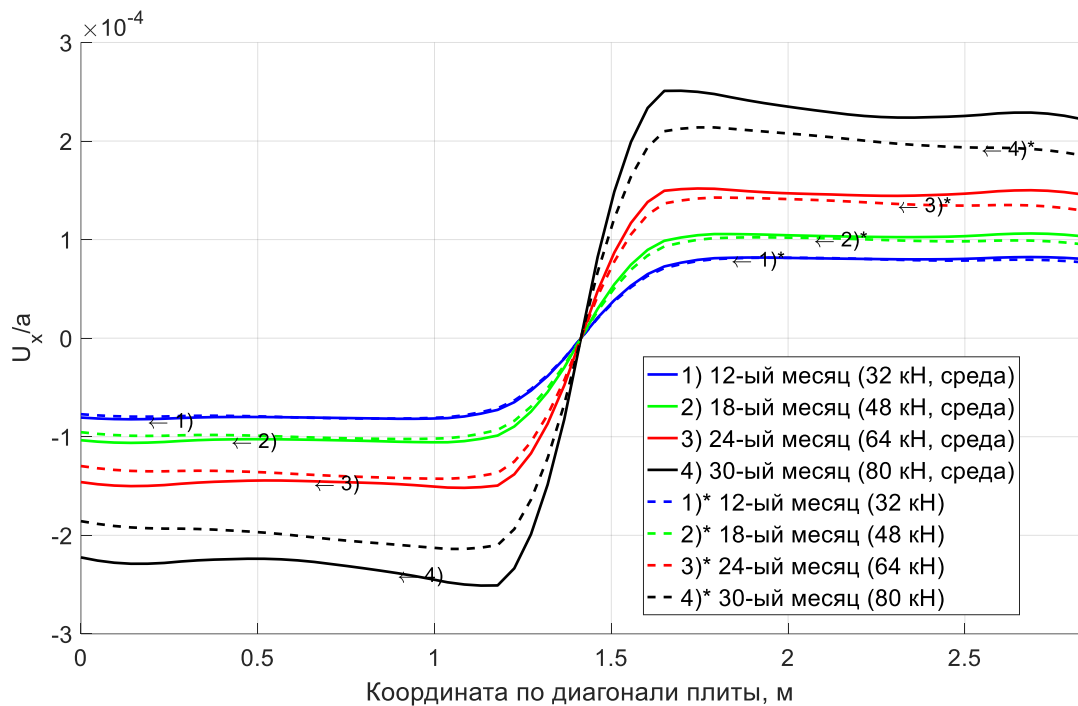


Рисунок П3.2 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль диагонали, в срединной поверхности)

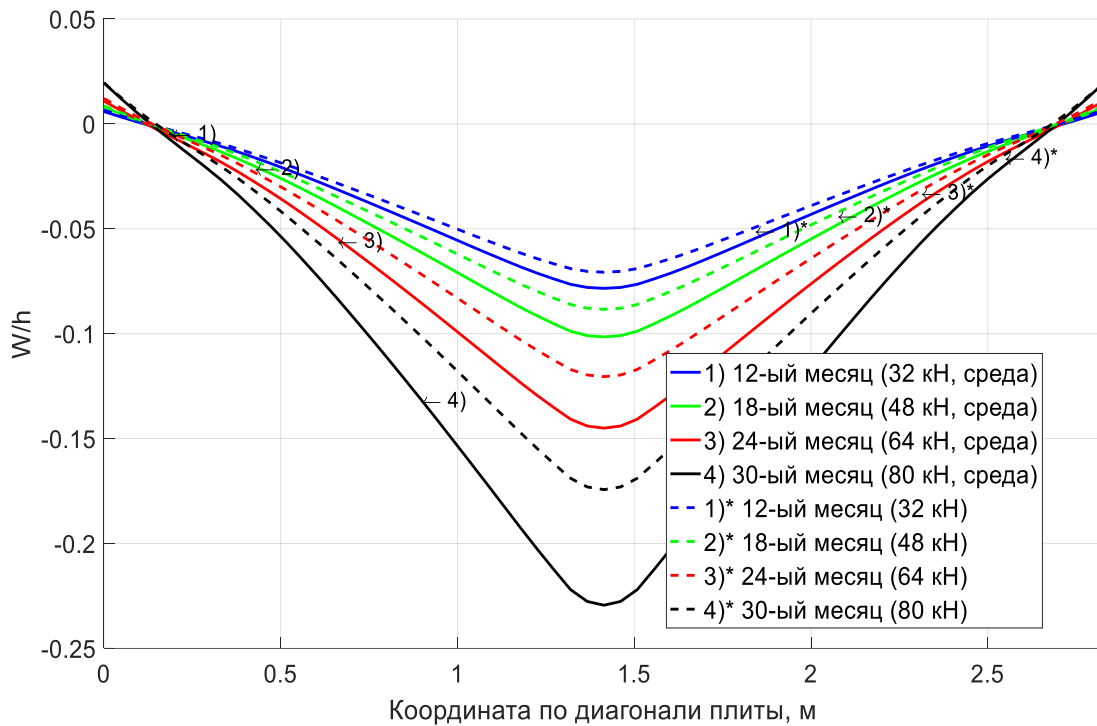


Рисунок ПЗ.3 – Распределение значений вертикальных перемещений W / h (вдоль диагонали, в срединной поверхности)

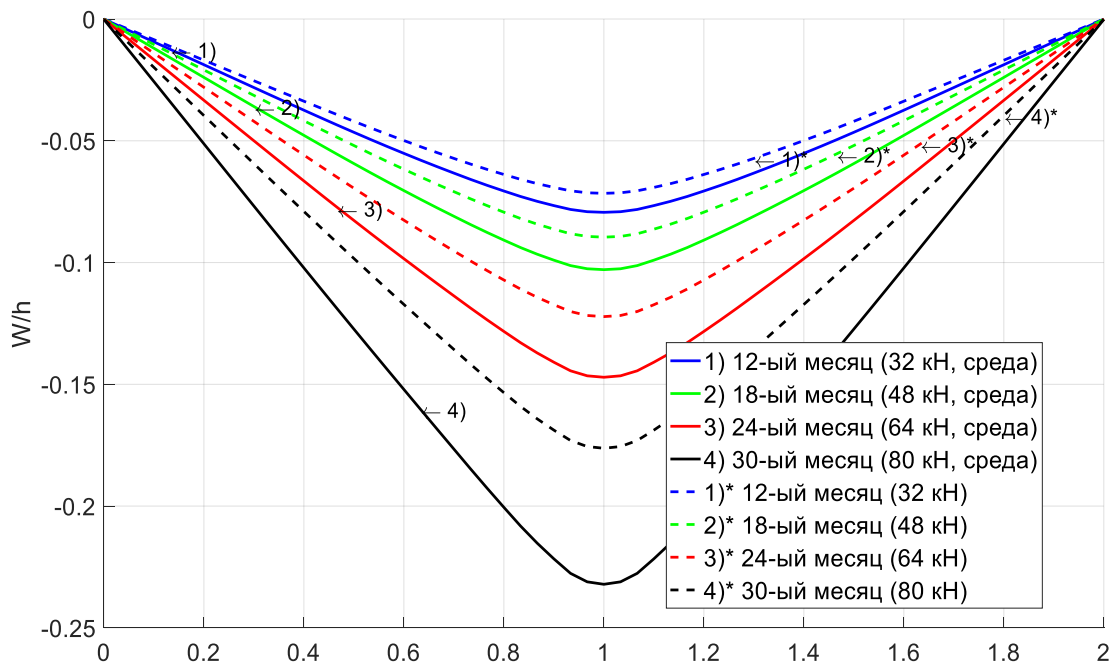


Рисунок ПЗ.4 – Распределение значений вертикальных перемещений W / h (вдоль оси симметрии Ox , в срединной поверхности)

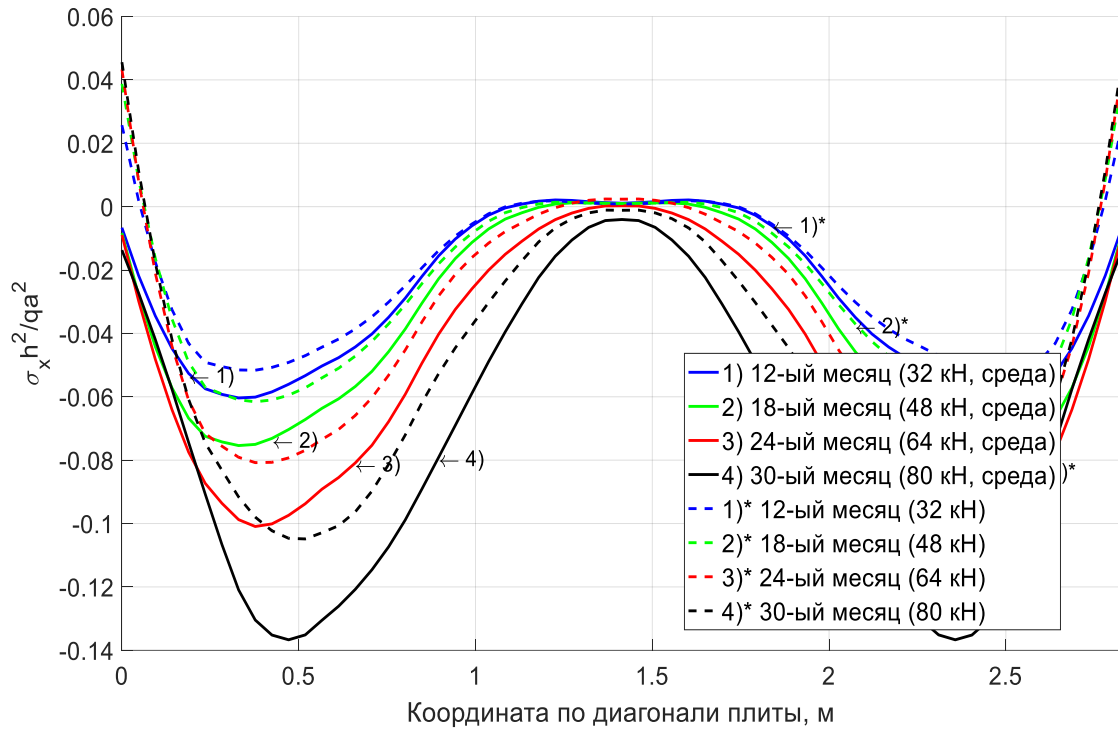


Рисунок ПЗ.5 – Величина напряжений в бетоне
(на нижней поверхности плиты, вдоль диагонали)

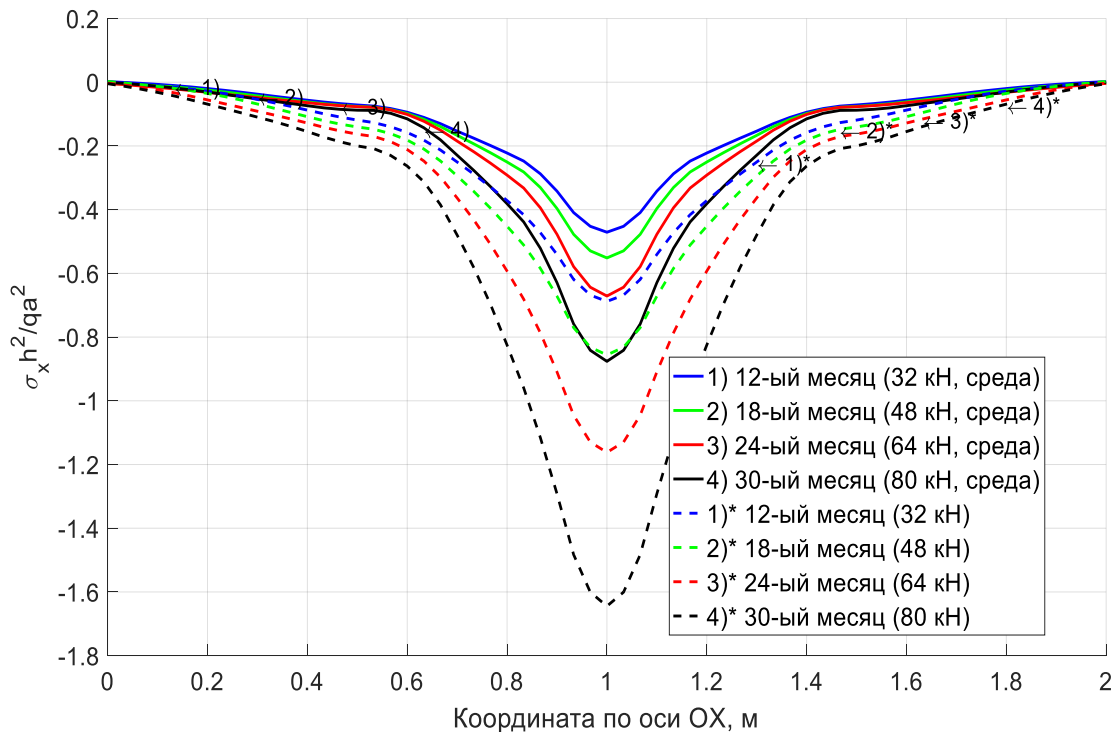


Рисунок ПЗ.6 – Величина напряжений в бетоне
(на верхней поверхности плиты, вдоль оси симметрии OX)

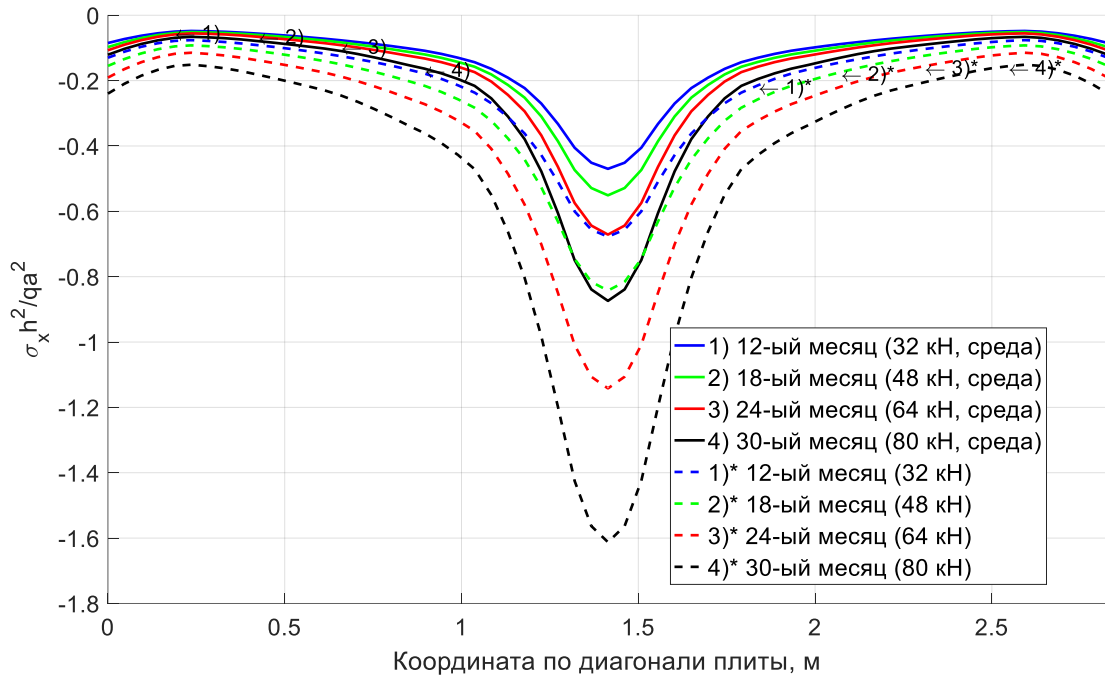


Рисунок ПЗ.7 – Величина напряжений в бетоне
(на верхней поверхности плиты, вдоль диагонали)

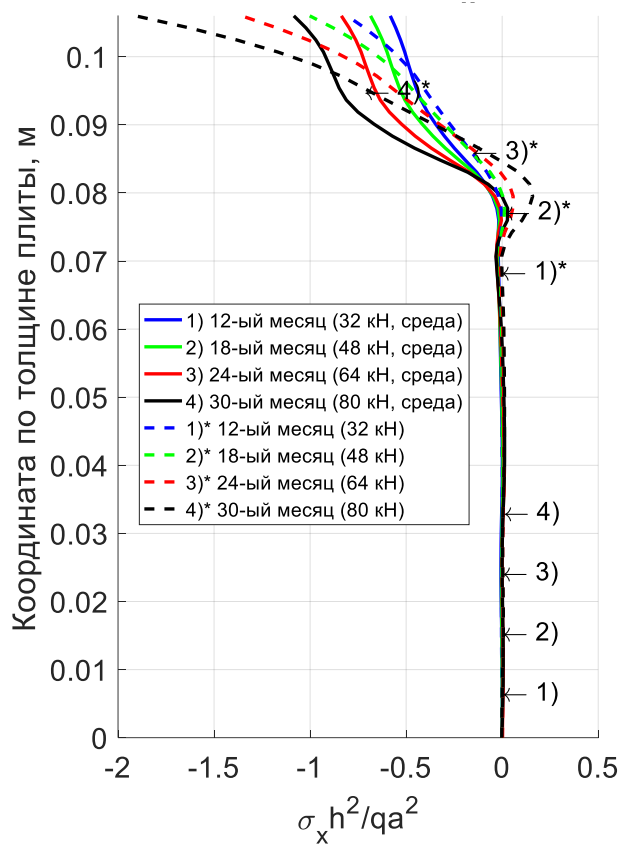


Рисунок ПЗ.8 – Величина напряжений в бетоне
(распределение по толщине плиты, в центре геометрии)

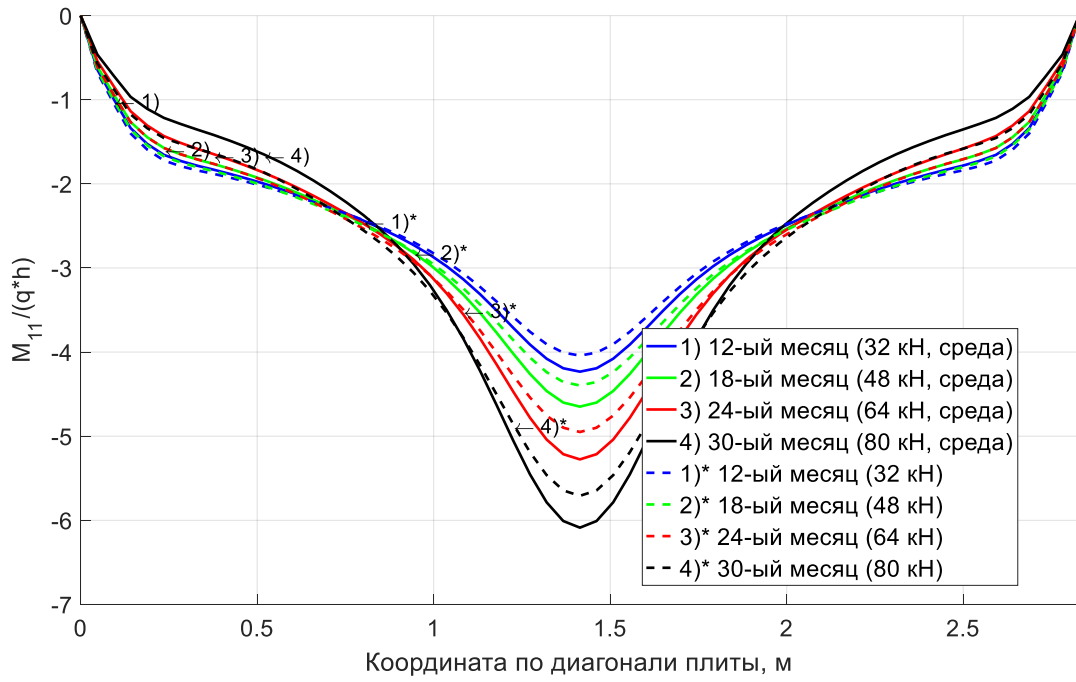


Рисунок ПЗ.9 – Распределение значений усилий M_{11} вдоль диагонали плиты

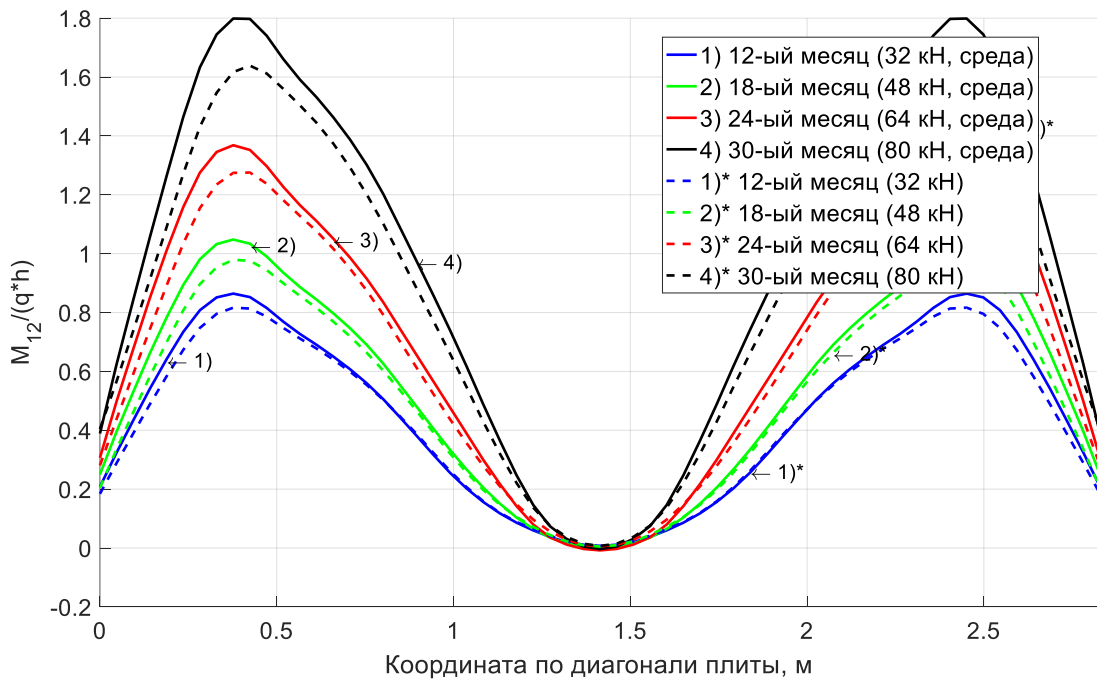


Рисунок ПЗ.10 – Распределение значений усилий M_{12} вдоль диагонали плиты

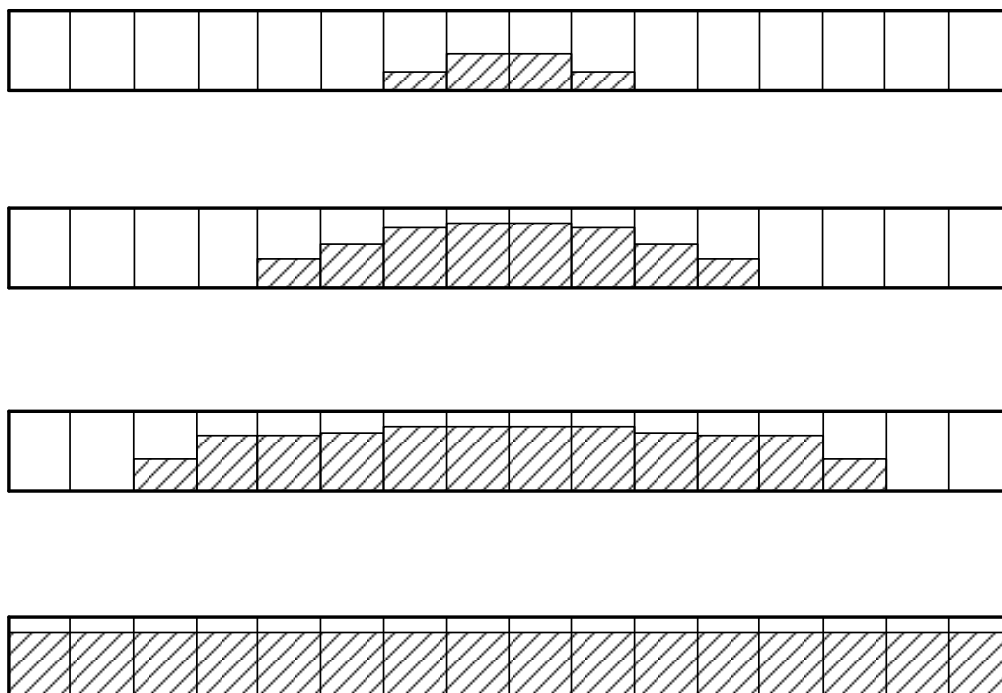


Рисунок ПЗ.11 – Иллюстрация процесса развития повреждаемости в сечении плиты при величине нагрузки q 4/10, 6/10, 8/10, 1 от максимальной (в расчете)

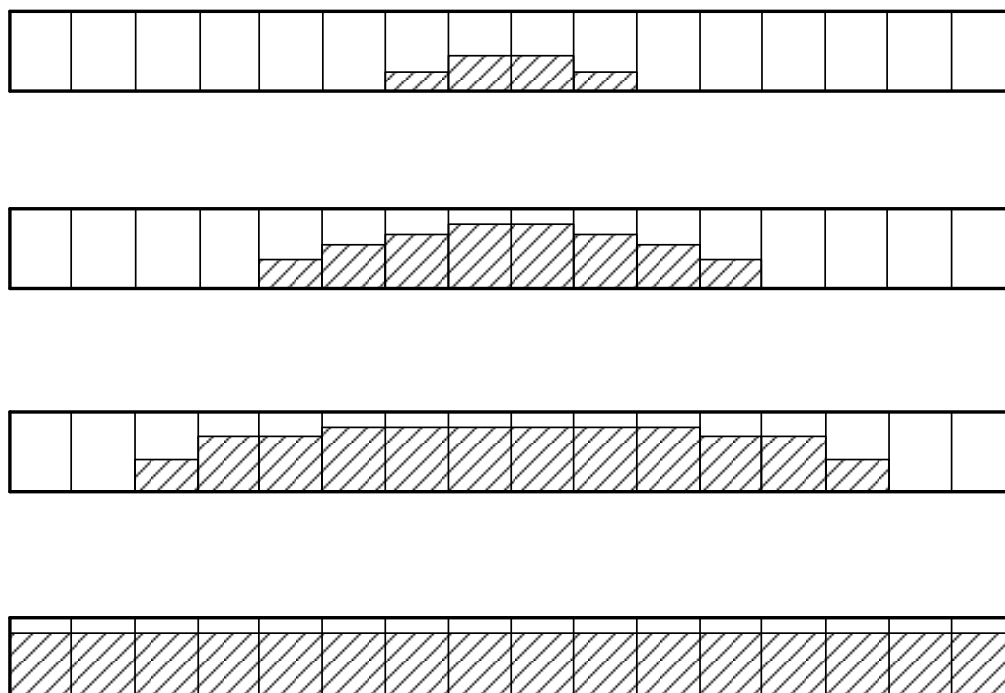


Рисунок ПЗ.12 – Иллюстрация процесса развития повреждаемости в сечении плиты при величине нагрузки q 4/10, 6/10, 8/10, 1 от максимальной (в расчете)

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Избранные результаты к решению задачи о расчёте НДС плиты №863 (4),
с учётом воздействия химически активной хлоридсодержащей среды
на защитный слой из эпоксидного полимербетона

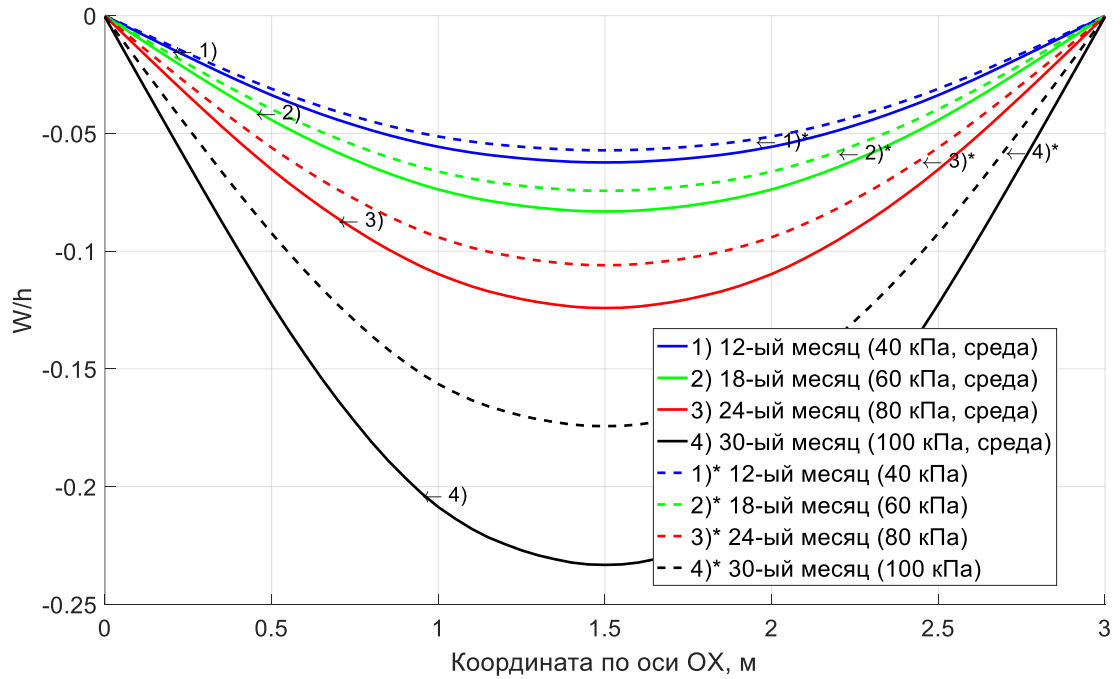


Рисунок П4.1 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль оси симметрии OX, в срединной поверхности)

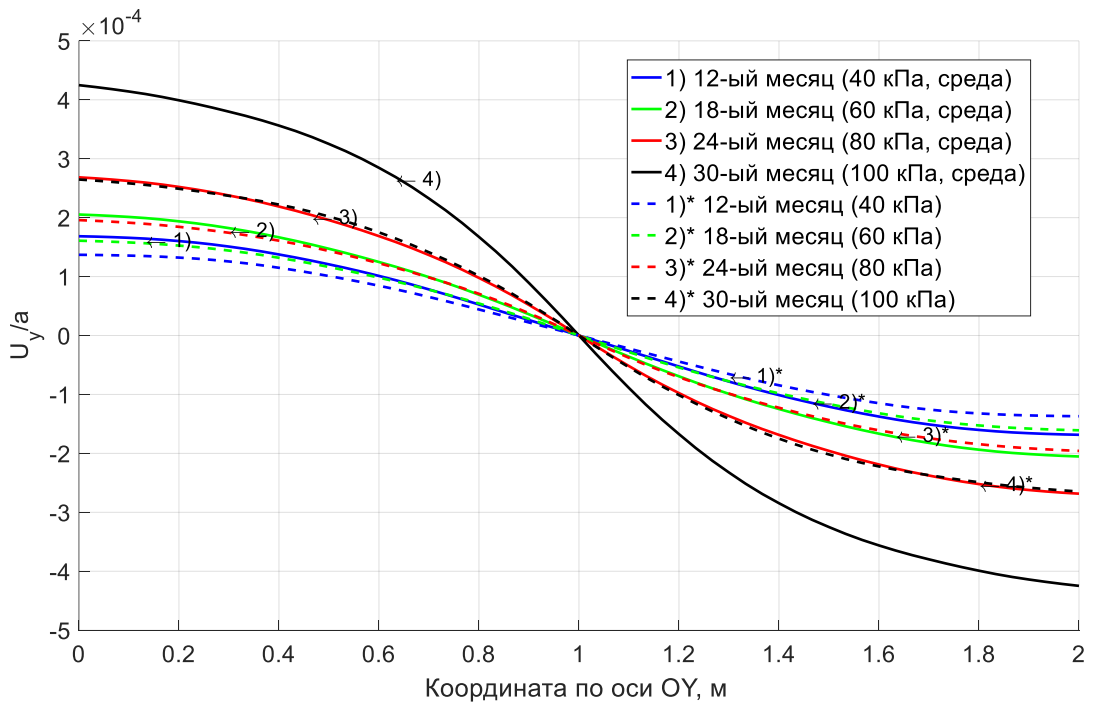


Рисунок П4.2 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль оси симметрии OY, в срединной поверхности)

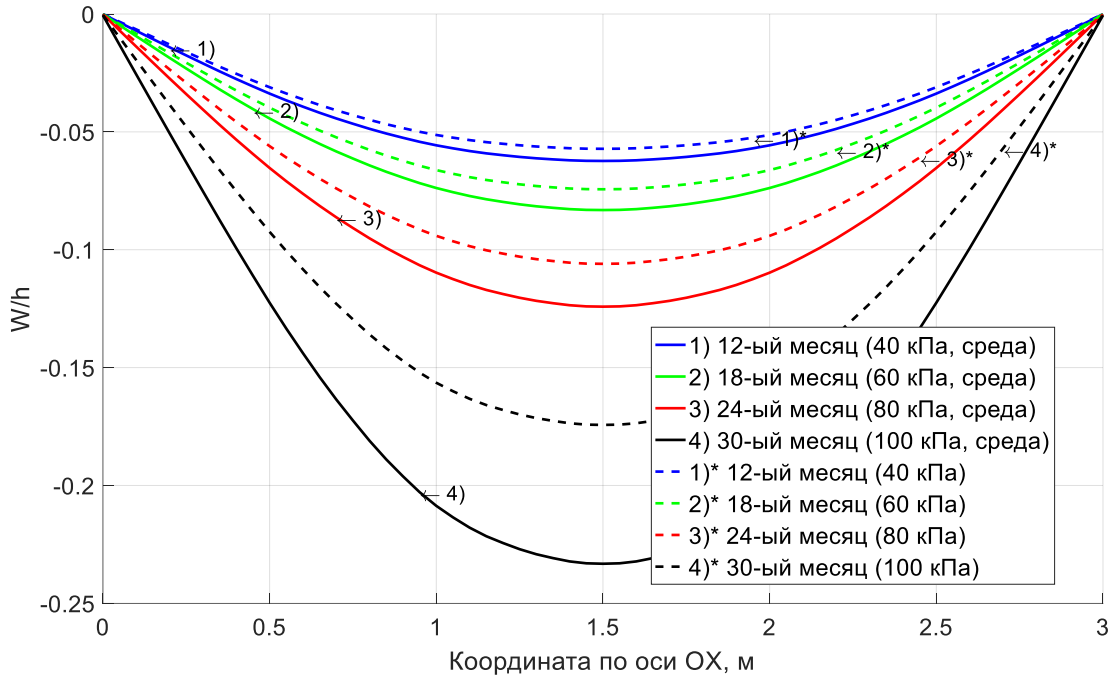


Рисунок П4.3 – Распределение значений вертикальных перемещений W/h (вдоль оси симметрии OX, в срединной поверхности)

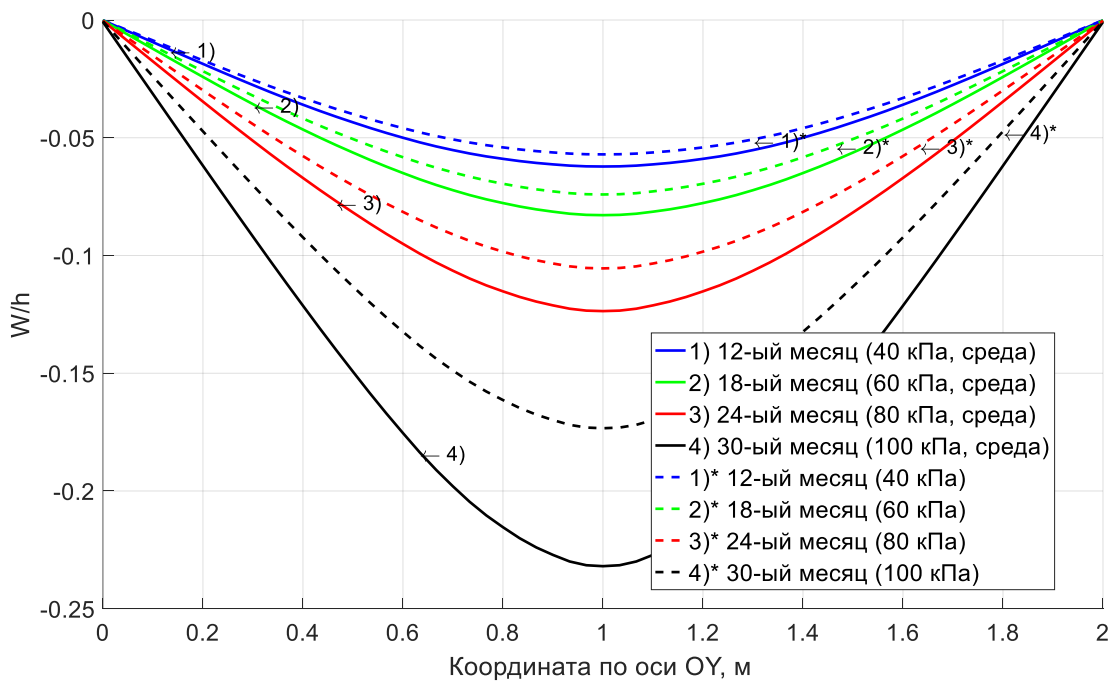


Рисунок П4.4 – Распределение значений вертикальных перемещений W/h (вдоль оси симметрии OY, в срединной поверхности)

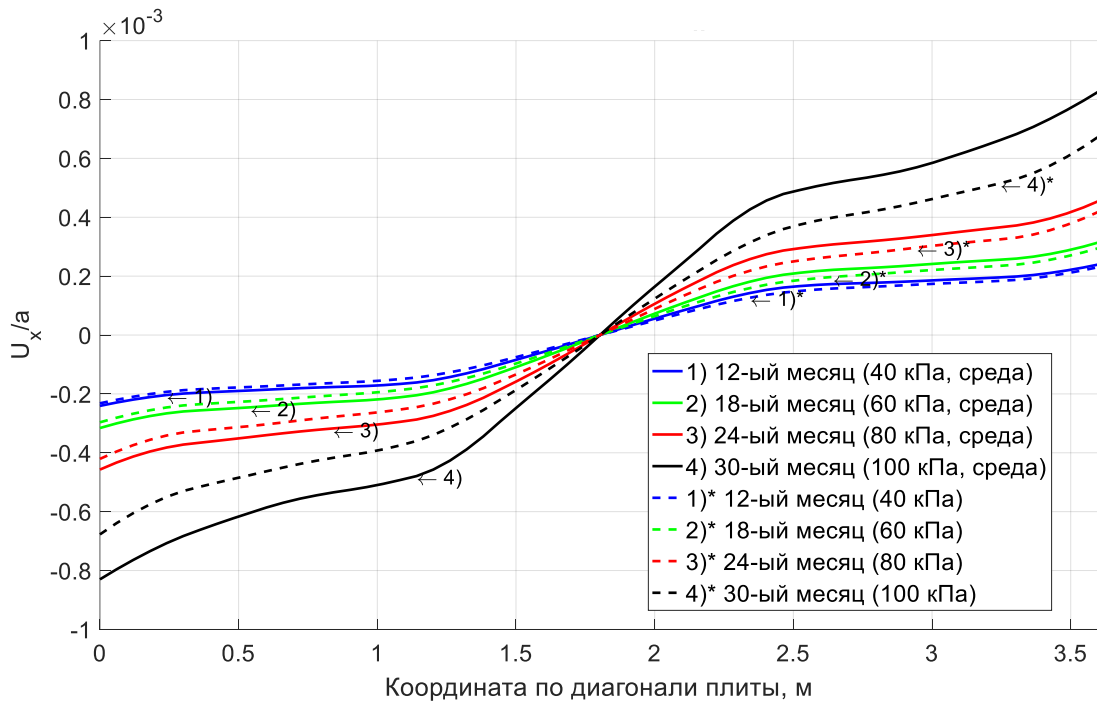


Рисунок П4.5 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль диагонали плиты, в срединной поверхности)

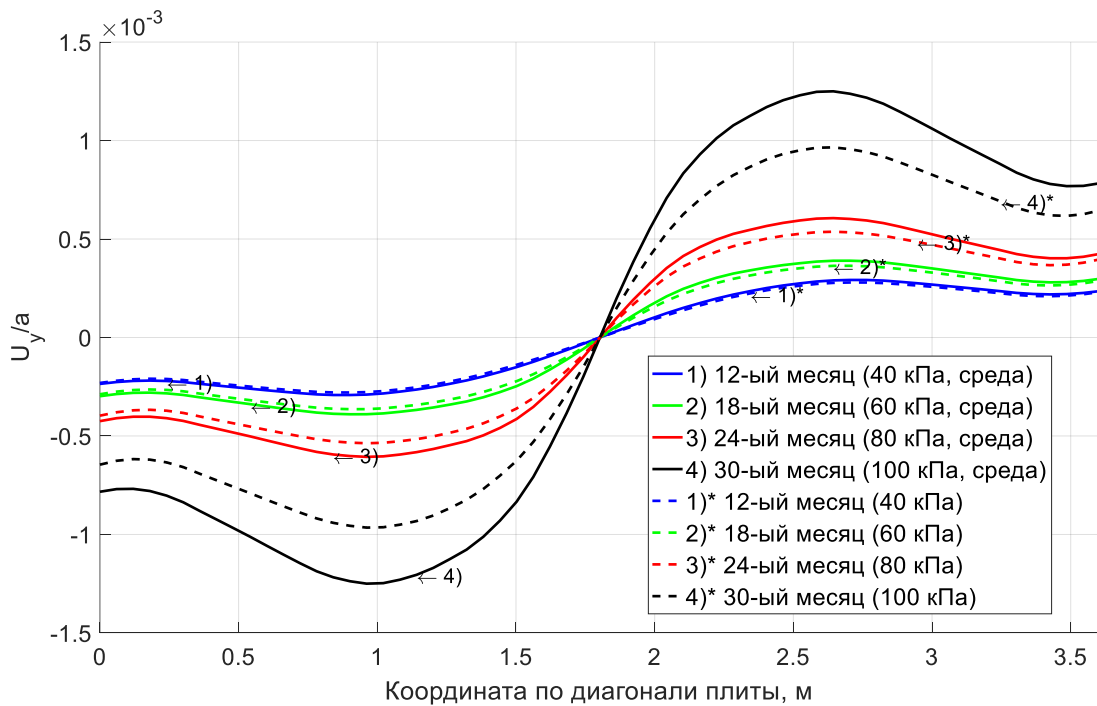


Рисунок П4.6 – Распределение значений горизонтальных перемещений (вдоль диагонали плиты, в срединной поверхности)

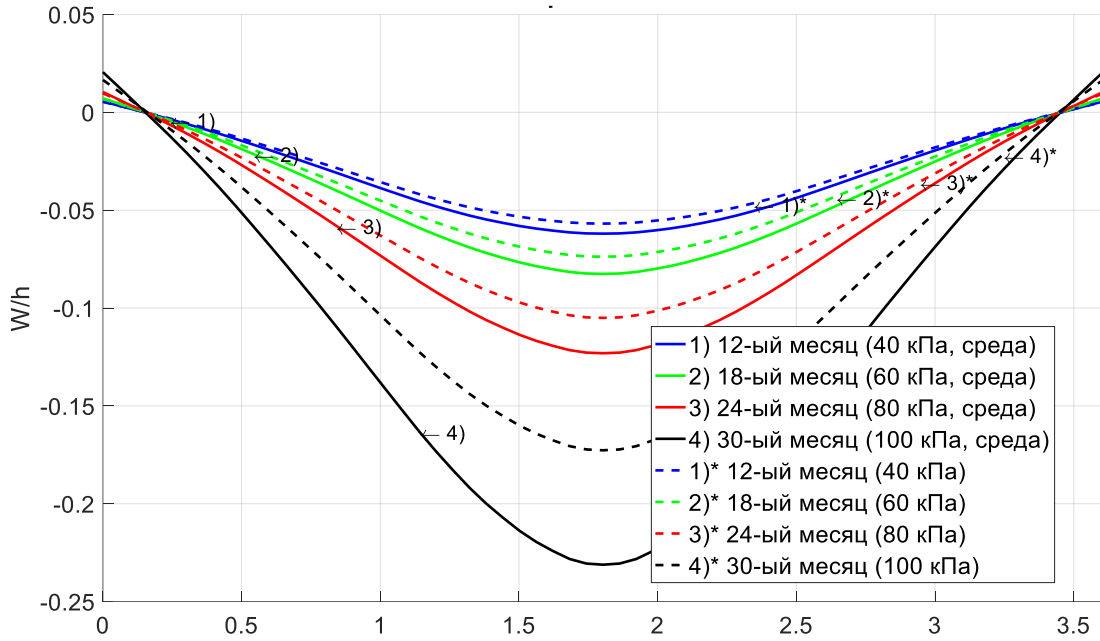


Рисунок П4.7 – Распределение значений вертикальных перемещений W/h (вдоль диагонали плиты, в срединной поверхности)

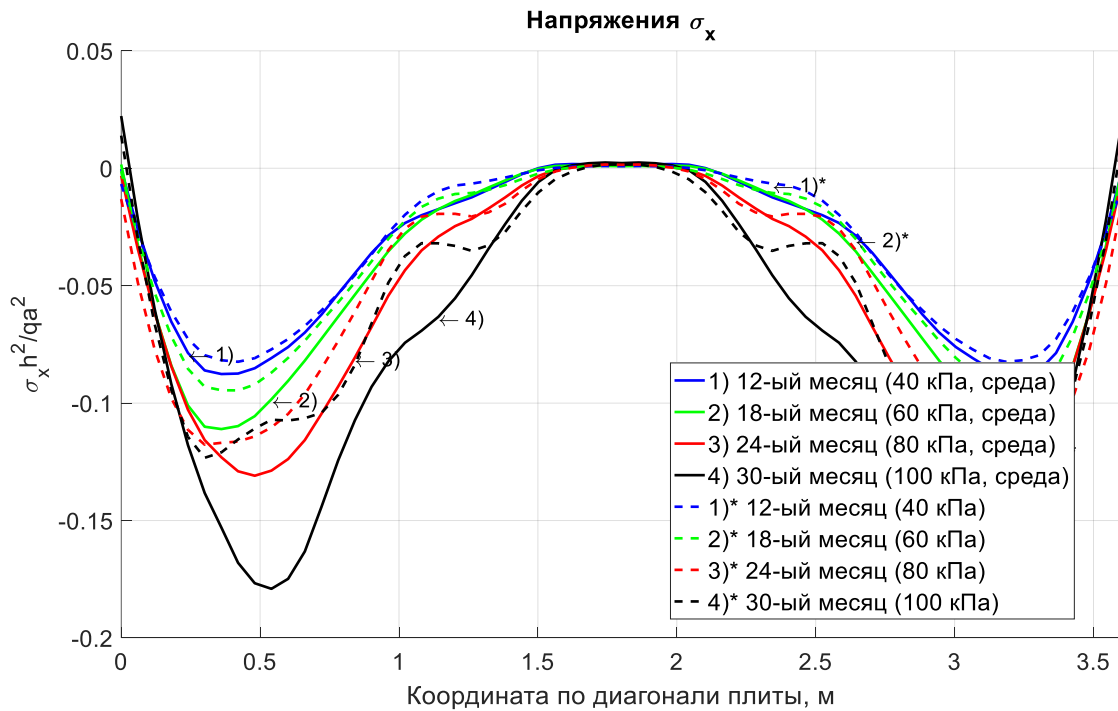


Рисунок П4.8 – Величина напряжений в бетоне (на нижней поверхности плиты, вдоль диагонали)

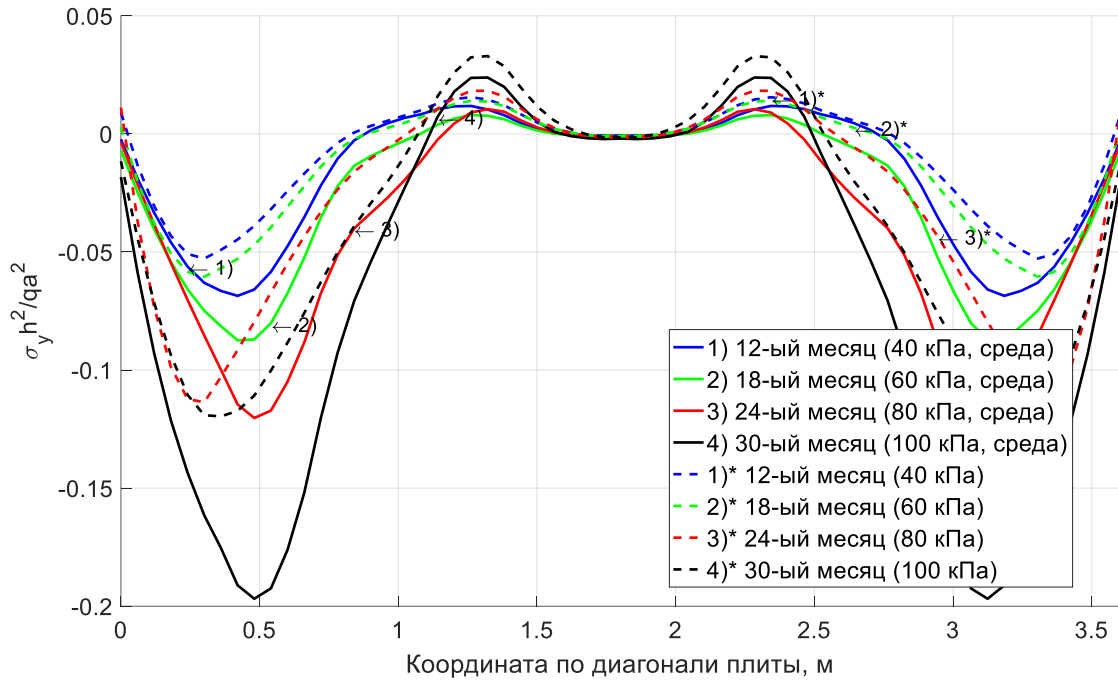


Рисунок П4.9 – Величина напряжений в бетоне
(на нижней поверхности плиты, вдоль диагонали)

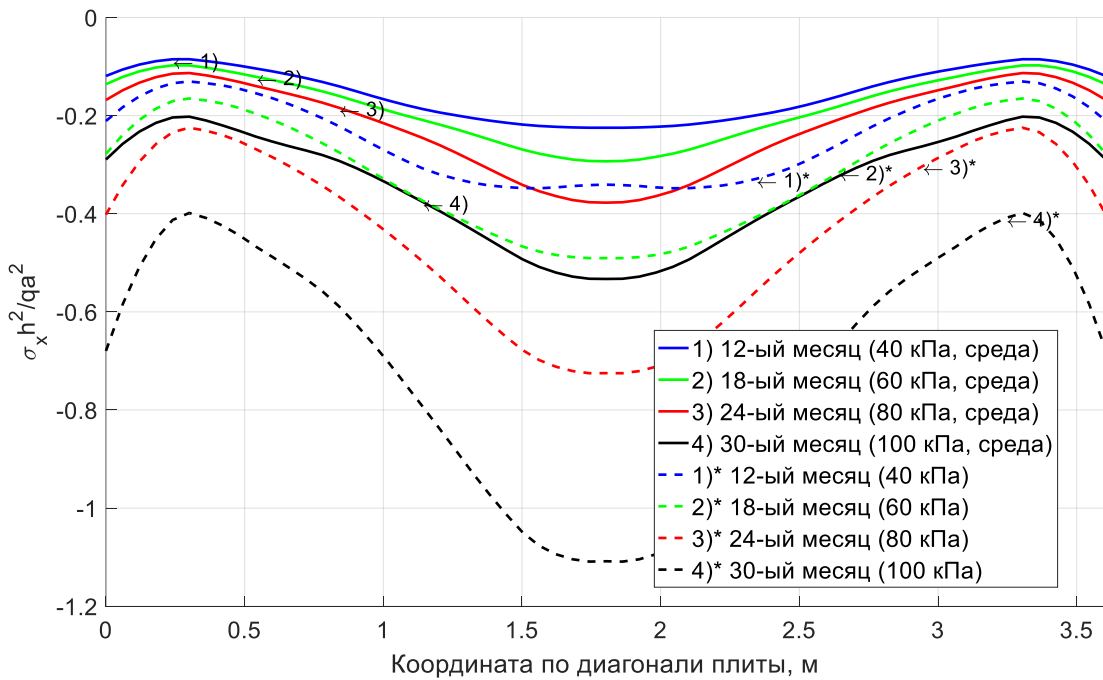


Рисунок П4.10 – Величина напряжений в бетоне
(на верхней поверхности плиты, вдоль диагонали)

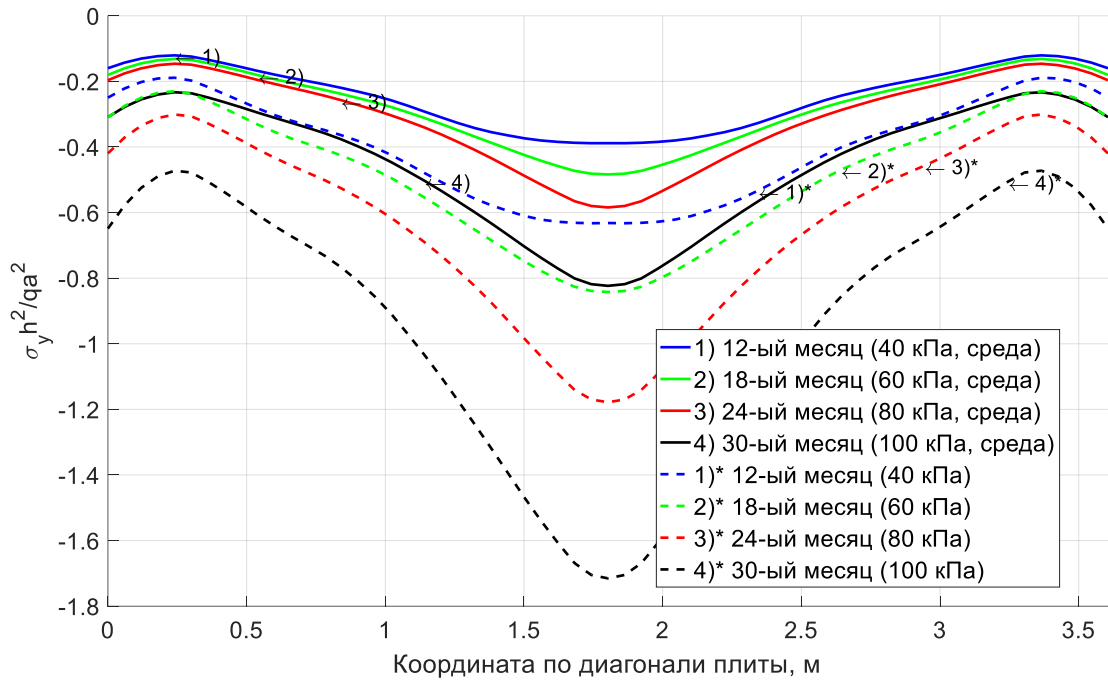


Рисунок П4.11 – Величина напряжений в бетоне
 (на верхней поверхности плиты, вдоль диагонали)

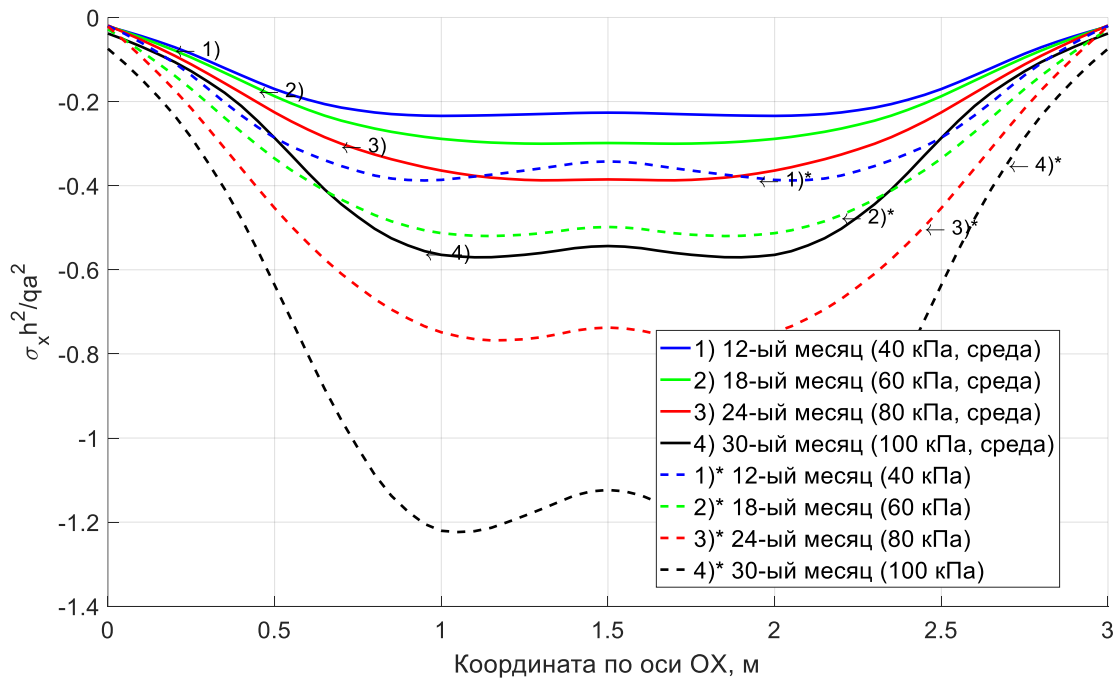


Рисунок П4.12 – Величина напряжений в бетоне
 (на верхней поверхности плиты, вдоль оси симметрии OX)

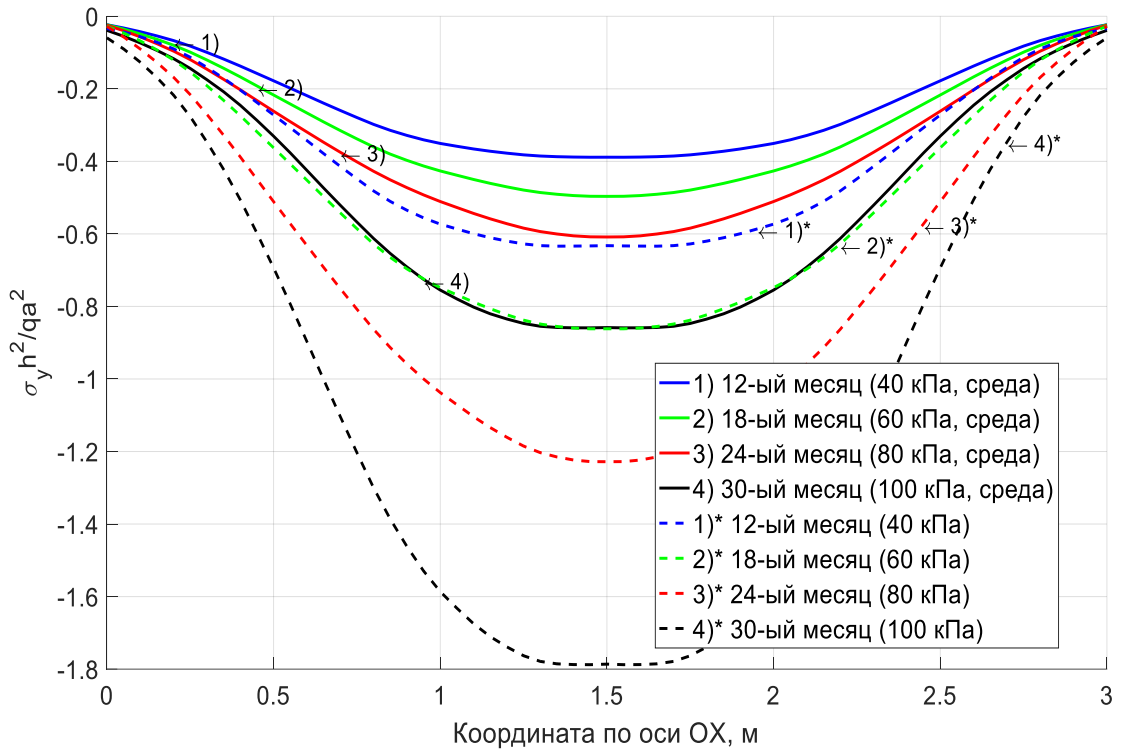


Рисунок П4.13 – Величина напряжений в бетоне
(на верхней поверхности плиты, вдоль оси симметрии OX)

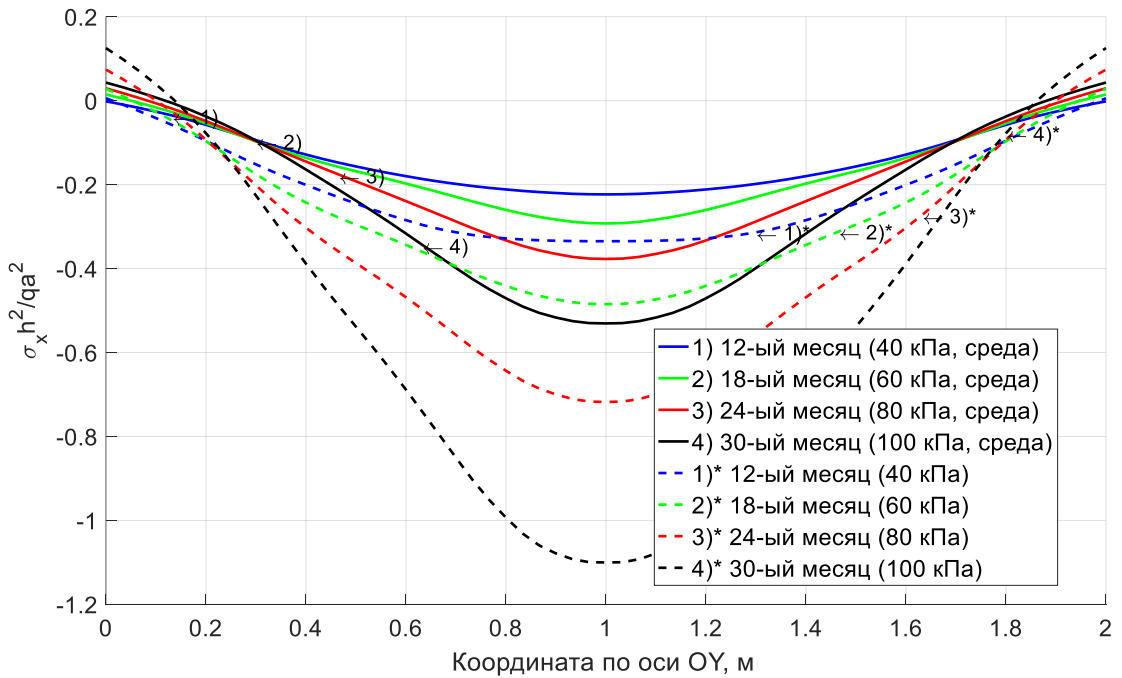


Рисунок П4.14 – Величина напряжений в бетоне
(на верхней поверхности плиты, вдоль оси симметрии OY)

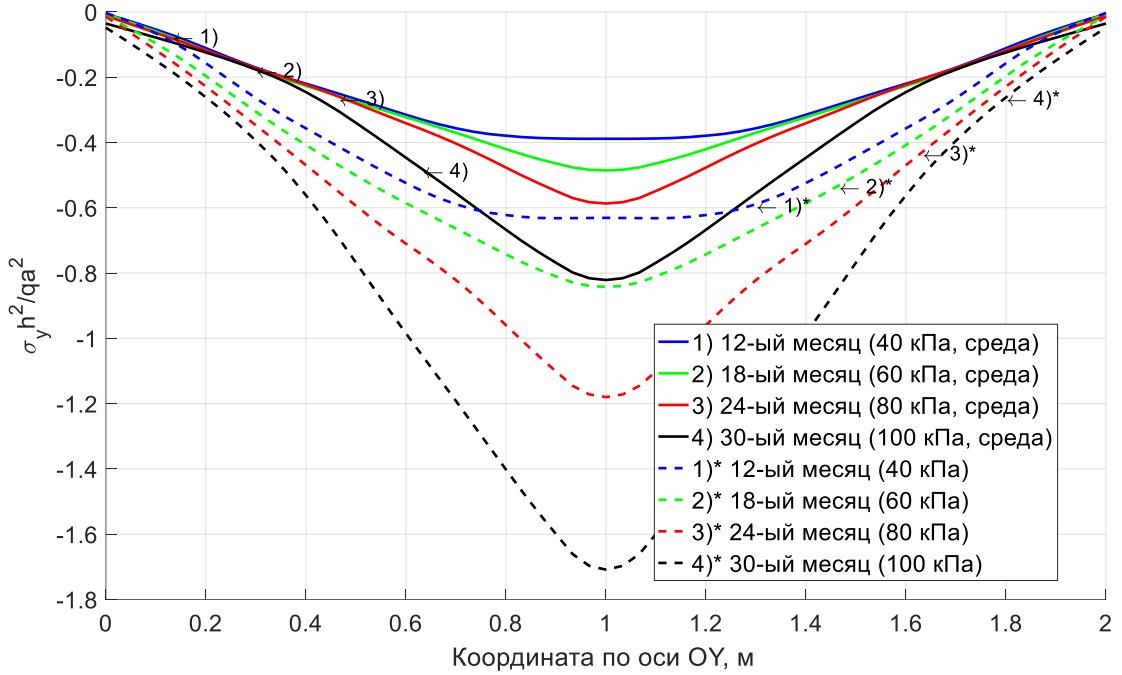


Рисунок П4.15 – Величина напряжений в бетоне
(на верхней поверхности плиты, вдоль оси симметрии OY)

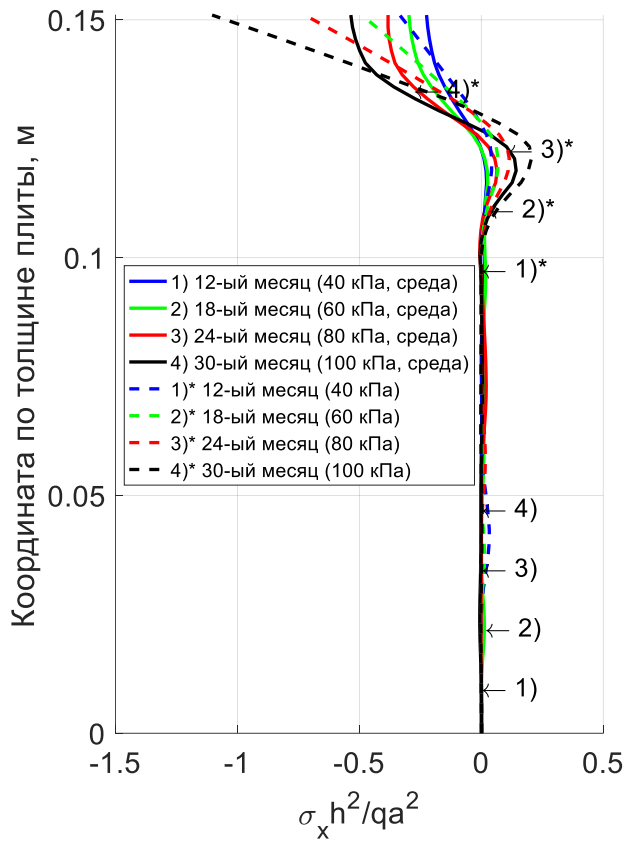


Рисунок П4.16 – Величина напряжений в бетоне
(распределение по толщине плиты, в центре геометрии)

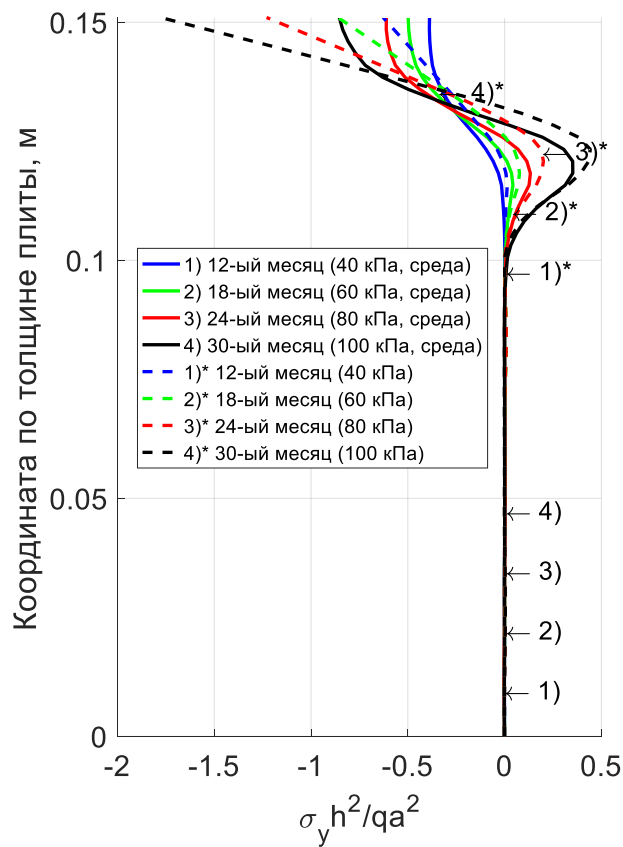


Рисунок П4.17 – Величина напряжений в бетоне (распределение по толщине плиты, в центре геометрии)

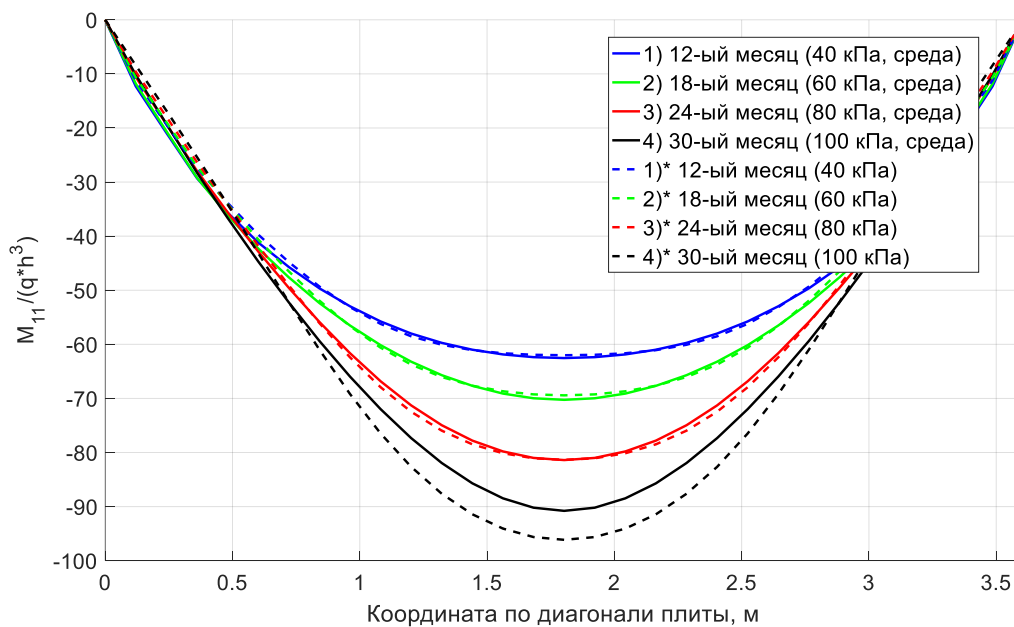


Рисунок П4.18 – Распределение значений усилий M_{11} вдоль диагонали плиты

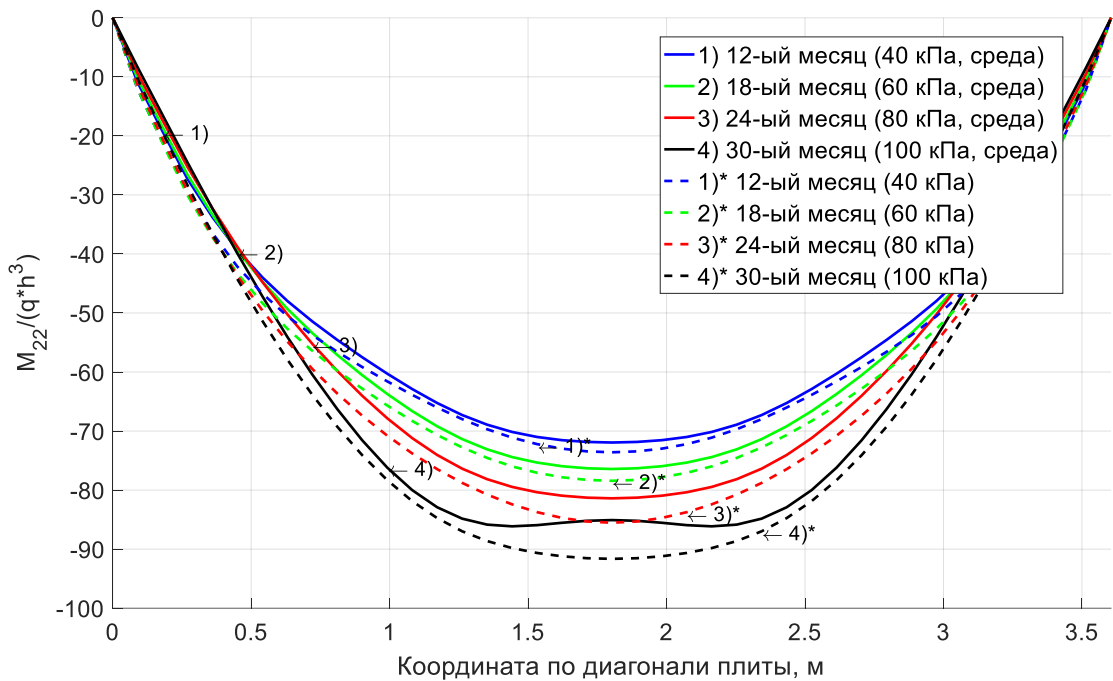


Рисунок П4.19 – Распределение значений усилий M_{22} вдоль диагонали плиты

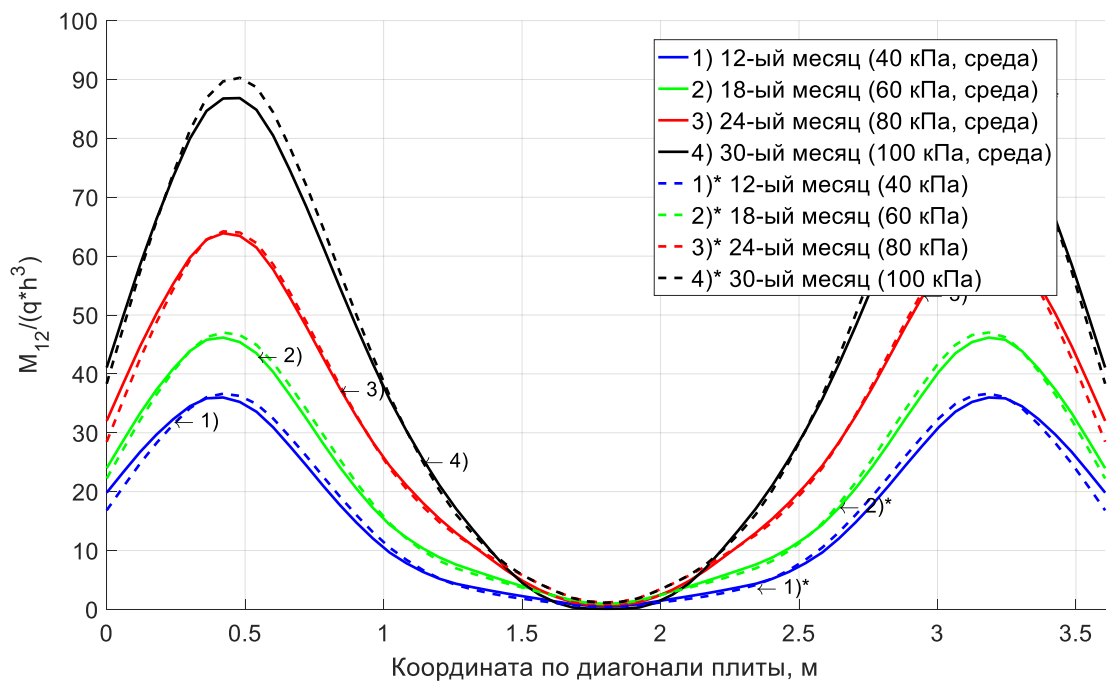


Рисунок П4.20 – Распределение значений усилий M_{12} вдоль диагонали плиты



Рисунок П4.21 – Иллюстрация процесса развития повреждаемости в сечении плиты при величине нагрузки q 4/10, 6/10, 8/10, 1 от максимальной (в расчете)



Рисунок П4.22 – Иллюстрация процесса развития повреждаемости в сечении плиты при величине нагрузки q 4/10, 6/10, 8/10, 1 от максимальной (в расчете)

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ и справка о внедрении

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU2021661108

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2021661108	Автор(ы): Теличко Виктор Григорьевич (RU), Кузнецова Виолетта Олеговна (RU)
Дата регистрации: 06.07.2021	Правообладатель(и): Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (ТулГУ) (RU)
Номер и дата поступления заявки: 2021619761 21.06.2021	
Дата публикации и номер бюллетеня: 06.07.2021 Бюл. № 7	

Название программы для ЭВМ:

Программа расчета напряжённо-деформированного состояния конструкций, состоящих из стержневых и оболочечных элементов с учётом разносопротивляемости основного материала, армирования и разрушения FE_Beam&Shell

Реферат:

Программа предназначена для выполнения прочностных поверочных расчетов строительных конструкций и их элементов при проведении работ по технической экспертизе состояния зданий и сооружений, а также при проектировании новых сооружений и выполнении работ по научно-техническому сопровождению. Прикладное использование разработанных алгоритмов и программной продукции позволяет с высокой точностью оценивать состояние строительных конструкций из материалов чувствительных к виду напряженного состояния, находящихся под действием механической нагрузки и кинетики агрессивной среды. Область применения: проектирование элементов строительных конструкций, прогнозирование состояния строительных конструкций в процессе эксплуатации зданий и сооружений, работающих в условиях воздействия агрессивной среды с учетом разрушения. Функциональные возможности программы: разработанный алгоритм расчета конструкций позволяет учесть разносопротивляемость и физическую нелинейность материалов, повреждаемость в форме трещинообразования, а также воздействие агрессивной эксплуатационной среды. Тип ЭВМ: IBM PC на базе процессора Intel Core 2 Duo, AMD Phenom II и выше; ОС: Windows.

Язык программирования: Visual C++ 2010

Объем программы для ЭВМ: 466 КБ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU2022617551

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2022617551 Дата регистрации: 22.04.2022 Номер и дата поступления заявки: 2022616501 12.04.2022 Дата публикации и номер бюллетеня: 22.04.2022 Бюл. № 5	Автор(ы): Теличко Виктор Григорьевич (RU), Кузнецова Виолетта Олеговна (RU) Правообладатель(и): Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тулский государственный университет» (ТулГУ) (RU)
--	--

Название программы для ЭВМ:
Расчет напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки вращения с учетом кинетики наводороживания (FD_Cylinder)

Реферат:

Программа предназначена для выполнения поверочных расчетов строительных конструкций и элементов при проведении работ по технической экспертизе состояния зданий и сооружений. Прикладное использование разработанных алгоритмов и программной продукции позволяет с высокой точностью оценивать состояние строительных конструкций, испытывающих воздействие агрессивной водородосодержащей среды. Область применения: проектирование элементов строительных конструкций, прогнозирование состояния строительных конструкций в процессе эксплуатации зданий и сооружений, работающих в условиях воздействия водородосодержащей среды. Функциональные возможности программы: разработанный алгоритм расчета конструкций позволяет учесть разностойкость и нелинейность заданного материала, повреждаемость в виде больших прогибов, а также воздействие агрессивной водородосодержащей среды. Тип ЭВМ: IBM PC-совмест. ПК на базе процессора Intel Pentium IV и выше; ОС: Windows XP и выше.

Язык программирования: Matlab, SciLab

Объем программы для ЭВМ: 65 КБ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU2022617259

**ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ**

Номер регистрации (свидетельства): 2022617259 Дата регистрации: 19.04.2022 Номер и дата поступления заявки: 2022616634 12.04.2022 Дата публикации и номер бюллетеня: 19.04.2022 Бюл. № 4 Контактные реквизиты: нет	Автор(ы): Теличко Виктор Григорьевич (RU), Кузнецова Виолетта Олеговна (RU) Правообладатель(и): Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (ТулГУ) (RU)
--	---

Название программы для ЭВМ:
Расчет напряженно-деформированного состояния осесимметричной сферической оболочки с учетом кинетики наводороживания (FD_Sphere)

Реферат:

Программа предназначена для выполнения поверочных расчетов строительных конструкций и элементов при проведении работ по технической экспертизе состояния зданий и сооружений. Прикладное использование разработанных алгоритмов и программной продукции позволяет с высокой точностью оценивать состояние строительных конструкций, испытывающих воздействие агрессивной водородосодержащей среды. Область применения: проектирование элементов строительных конструкций, прогнозирование состояния строительных конструкций в процессе эксплуатации зданий и сооружений, работающих в условиях воздействия водородосодержащей среды. Функциональные возможности программы: разработанный алгоритм расчета конструкций позволяет учесть разностойкость и нелинейность заданного материала, повреждаемость в виде больших прогибов, а также воздействие агрессивной водородосодержащей среды. Тип ЭВМ: IBM PC-совмест. ПК на базе процессора Intel Pentium IV и выше. ОС: Windows XP и выше.

Язык программирования: Matlab/SciLab

Объем программы для ЭВМ: 65 КБ



**СТРОИТЕЛЬНОЕ
ПРОЕКТИРОВАНИЕ**

Советская ул., д. 23И, оф. 04
г. Тула, 300041
тел.: +7 (4872) 30-92-20
факс: +7 (4872) 30-92-50
stroitel@proekt.st

Регистрационный номер в реестре членов АСРО «Объединение проектировщиков Тульской области»
(рег. номер в государственном реестре СРО-П-049-09112009) — СРО-0049 от 07.12.2009 г.

СПРАВКА

о внедрении результатов диссертационного исследования

Теличко Виктора Григорьевича по теме «Деформирование пространственных комбинированных конструкций с учетом воздействия эксплуатационных сред и повреждаемости»

Результаты диссертационного исследования инженера Теличко Виктора Григорьевича были использованы ООО «Строительное Проектирование» при выполнении договорных работ по расчету железобетонных конструкций по объекту «Проектирование железобетонных сводчатых перекрытий коло-кольни Успенского собора Тульского кремля» Договор на выполнение проектных работ № 08/13 от 28.02.2013 г. с заказчиком ООО «Преображение», по расчету монолитных железобетонных несущих конструкций объекта «Многоэтажный жилой дом по адресу: Тульская обл., Ленинский район, п. Рассвет» Договор №07/14 от 06.03.2014 г., при выполнении технического отчета на обследование технического состояния строительных конструкций зданий и сооружений по объекту: «Таманский терминал навалочных грузов. Этап I» по договору №ПС-1004/2-22 от 28.02.2022 г. «Том 5. Отчет о построении предварительной геотехнической модели ПС-70/2-10-ОБ.ГМ» с заказчиком ООО «ОТЭКО-Портсервис», при выполнении работ по составлению научно-технического отчета по теме «Научное обоснование принятых решений по объекту «Реконструкция и техническое перевооружение производственно-административного зданий №114 в части создания сборочно-испытательного комплекса для сборки и испытаний изделий пилотируемой тематики» с анализом выполненной проектной документации, примененных методик и результатов расчетов, оценка принятых конструктивных решений с выдачей рекомендаций по проектированию с учетом эксплуатационных нагрузок и аварийных ситуаций Договор №341801 от 23.08.2018 с заказчиком РКК «Энергия» им. С.П. Королёва.

Кроме того, настоящий акт подтверждает, что методики расчета железобетонных конструкций с учетом повреждаемости и воздействия эксплуатационных сред, разработанные в диссертационном исследовании, внедрены в проектную и расчетную практику ООО «Строительное проектирование» и используются при проектировании и экспертизе элементов строительных конструкций.

Практическое использование разработанных методик позволяет ускорить процесс проектирования и экспертизы элементов строительных конструкций, достоверно прогнозировать их состояние в процессе их эксплуатации.

Настоящая справка выдана для предъявления в диссертационный совет 24.2.286.05 по месту защиты Теличко В.Г. диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук.

Генеральный директор
ООО «Строительное Проектирование»
д.т.н., проф.

2022.11.10

