

На правах рукописи



ТЕЛИЧКО ВИКТОР ГРИГОРЬЕВИЧ

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОМБИНИРОВАННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
С УЧЁТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ
ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ СРЕД И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ**

Специальность 2.1.9. Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
доктора технических наук

Тула – 2023

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Тульский государственный университет».

Научный консультант: чл.-корр. Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), доктор технических наук, профессор
Трещёв Александр Анатольевич

Официальные оппоненты: **Белостоцкий Александр Михайлович**
академик Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), доктор технических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта», кафедра «Строительные конструкции, здания и сооружения», профессор

Коробко Андрей Викторович
доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», кафедра «Мехатроника, механика и робототехника», профессор

Овчинников Игорь Георгиевич
доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», кафедра «Транспортное строительство», профессор

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (г. Москва)

Защита состоится 21 апреля 2023 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.286.05, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», по адресу: г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84, ауд. 101 бизнес-инкубатора.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет» и на сайте <https://cchgeu.ru>.

Автореферат разослан 20 февраля 2023 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
канд. техн. наук



Макеев
Алексей Иванович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В настоящее время накоплен большой теоретический багаж знаний в направлении проведения исследований, связанных с получением качественно уточнённых теорий поведения материалов в строительных конструкциях. Одним из таких направлений является построение математических моделей строительной механики, которые можно было бы использовать в расчетной практике строительного проектирования. В частности, возникла потребность в корректном отображении свойств материалов, проявляющих зависимость механических свойств от компонентного состава тензора напряжений (зависимость физико-механических свойств материала от вида напряженного состояния). Несмотря на значительное количество публикаций с результатами исследования в указанном научном направлении, добиться удовлетворительных результатов в ряде актуальных задач расчётного моделирования не удалось. Хотя для некоторых частных теорий такие решения имеются.

Между тем, потребность в достоверных расчётных моделях, построенных для таких материалов, как конструкционные графиты, бетон (железобетон), керамика и другие композитные материалы, становится всё более актуальной. Этому способствует их распространенность в строительной отрасли, а также отсутствие обобщённого теоретического обоснования используемых моделей. Имеются ввиду материалы, склонные к дилатации, механические свойства которых, активно проявляют свою зависимость от компонентного состава тензора напряжений (разносопротивляющиеся материалы, материалы с «усложнёнными» свойствами), а также реагируют на наличие температурных воздействий и агрессивных проявлений со стороны химически активной внешней среды.

Теоретические модели, учитывающие указанные выше свойства материалов и воздействий, оказываются достаточно сложными для практической адаптации. Их аналитические решения, в подавляющем большинстве случаев, на сегодня неизвестны. Поэтому имеется настоятельная потребность в получении новых числовых моделей, описывающих поведение конструкций в реальных условиях эксплуатации. Это осложняется тем, что одним из основных направлений получения уточнённых моделей их поведения, является учёт совместности работы несущего каркаса (остова) здания, его фундамента и деформируемого основания (системы типа «сооружение-основание»).

Действующая нормативная документация в области расчётного моделирования в строительстве однозначно требует учёта всех вышеперечисленных особенностей, определяющих возможность повышения точности прогнозной оценки напряжённо-деформированного состояния (НДС) строительной конструкции. Откуда и возникает потребность в новых механико-математических моделях, а также средствах их использования в расчётной практике.

Таким образом, **рассматриваемая в диссертации проблема** разработки теории деформирования и прочности пространственных конструкций из начально-изотропных материалов, чьи деформационно-прочностные характеристики зависят от вида НДС, в рамках единого подхода к расчётному моделированию комбинированных сооружений на деформируемом многослойном основании, а также отдельных армированных конструкций и их фрагментов, в том числе с учётом воздействия химически активной эксплуатационной среды, температурных воздействий и повреждаемости, **является актуальной проблемой строительной механики** как в научном, так и в практическом плане.

Степень разработанности темы. Работа изотропных и начально-изотропных значимо физически нелинейных материалов, свойства которых зависят от компонентного состава тензора напряжений, рассмотрена в работах С.А. Амбарцумяна, В.Н. Барабанова, А.В. Березина, Г.В. Бригадирова, Д.Л. Быкова, С.С. Вялова, Д.А. Гаврилова, П.Н. Ельчанинова, А.А. Золочевского, А.И. Козачевского, В.И. Кудашова, М.Я. Леонова, Е.В. Ломакина, В.А. Ляховского, Малинина Н.Н., Н.М. Матченко, И.Г. Овчинникова, А.И. Олейникова, В.М. Панфёрова, В.В. Петрова, Б.В. Пономарева, Ю.Н. Работнова, К.Н. Русинко, Н.Г. Тамурова, Л.А. Толоконникова, А.А. Трещёва, Г.В. Туровцева, В.П. Устинова, Ю.И. Цвелодуба, Г.С. Шапиро, С.W. Bert, R.M. Jones, D.A.R. Nelson, А.Н. Nilson, J.N. Reddy, F. Tabaddor, М.Е. Tasuji и других. Было установлено, что полученные

теоретические результаты не покрывают в полной мере потребности описания механического поведения материалов, когда речь идет о работе в составе реальных конструкций.

Широкое распространение железобетона в строительстве стало возможным благодаря многочисленным исследованиям, выполненными учёными разных стран. В России и мире, множество видных учёных и инженеров, занимались исследованием железобетона и конструкций из него (а также рассмотрением сопутствующих проблем), среди которых В.М. Бондаренко, А.М. Белостоцкий, А.А. Гвоздев, Г.А. Гениев, Ю.В. Зайцев, А.Б. Золотов, Н.И. Карпенко, В.Н. Киссюк, В.И. Колчунов, А.В. Коробко, В.И. Коробко, С.Б. Крылов, А.Ф. Лолейт, В.И. Мурашев, Г.В. Мурашкин, Ю.А. Нелиндер, Я.М. Немировский, П.Л. Пастернак, В.Н. Римшин, Л.А. Толоконников, В.И. Травуш, А.А. Трещёв, Г.А. Тюпин, Г.И. Шапиро, К. Maekawa, М.Р. Nielsen, Н.В. Kupfer, М.Е. Tasuji, D.J. Nan и другие.

Во многих случаях реальные здания имеют сложную конфигурацию в плане и пространственное распределение жёсткостей, обусловленное, в том числе, сложностью механического поведения используемых материалов и грунтов, поэтому обычно довольно трудно оценить влияние различных факторов на результаты расчёта. Существующие прикладные теории не всегда позволяют достаточно и эффективно решать подобную задачу с целью внедрения теоретических исследований в реальную проектную деятельность. Проблему учёта взаимодействия конструкции с грунтом основания изучали: Д.Д. Баркан, Н.И. Безухов, А.Н. Богомолов, И.И. Гольденблат, М.Н. Гольдштейн, М.В. Егоров, Ю.К. Зарецкий, В.А. Ильиных, А.З. Кац, В.И. Колчунов, П.А. Коновалов, В.В. Леденев, И.Я. Лучковский, О.В. Мкртычев, А.Г. Назаров, П.Л. Пастернак, Е.А. Синицин, Г.М. Скибин, З.Г. Тер-Мартirosян, В.И. Травуш, А.А. Трещёв, Р.Р. Хасанов, М.В. Шитикова, С.И. Яковлев, S. Chan, M. Herzog, W. John, G.G. Meyerhof и другие.

Одним из сравнительно новых направлений в расчётном моделировании строительных конструкций стал учёт влияния химически активной (агрессивной) среды на НДС несущих элементов. Опубликованные, в сравнительно небольшом числе, работы по этому направлению, были выполнены В.М. Долинским, Н.С. Дядькиным, И.Г. Овчинниковым, В.В. Петровым, В.П. Селяевым, Ю.А. Соколовой, В.И. Соломатовым, А.А. Трещёвым, P.V. Vamforth, F. Biondini, D.M. Frangopol, L.O. Nilsson и другими. Итогом этих исследований стала методика, разработанная в трудах В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова и О.В. Пениной. Этот подход даёт возможность адекватного описания влияния химически активной среды на механические свойства материалов несущих конструкций. Однако, применение этой методики к классу разносопротивляющихся материалов оказалось менее эффективным, так как, точность отображения взаимодействия химически активных сред с подобными материалами, не всегда оставалась приемлемой.

Еще одним фактором эксплуатационной среды, объективно влияющим на поведение строительных конструкций, является температура. Решению проблемы учёта влияния напряжённого состояния на температурные характеристики материалов посвящены работы С.А. Амбарцумяна, А.В. Березина, Г.В. Бригадирова, Е.В. Ломакина, В.Г. Малинина, Н.А. Малининой, А.А. Маркина, Н.М. Матченко, В.М. Панфёрова, В.В. Петрова, С.В. Плотниковой, Ю.Н. Работнова, М.Ю. Соколовой, Н.Г. Тамурова, Л.А. Толоконникова, А.А. Трещёва, Г.В. Туровцева, С.М. Шляхова, C.W. Bert, R.M. Jones, N. Kamiya, J.N. Reddy, Y. Takeuti и других авторов. По работам этих учёных можно проследить путь развития теории для расчётного моделирования НДС, причиной возникновения которого является изменение температуры вокруг несущего элемента конструкции. Актуальными являются и работы, в которых исследуется зависимость механических и температурных свойств материалов от температурных воздействий. Подобные работы были выполнены Н.Л. Охлопковым, В.В. Петровым, М.С. Корнишиным, С.П. Тимошенко и др. Выяснилось, что построенные соотношения не могут с достаточной точностью, адекватной экспериментальным данным, описать поведение значимо нелинейных разносопротивляющихся материалов в условиях температурного и механического воздействия.

Проблемами механики разрушения, в том числе в строительной отрасли, занимались такие известные специалисты, как В.И. Астафьев, Г.И. Баренблатт, А.В. Березин,

В.В. Глаголев, Р.В. Гольдштейн, А.В. Звягин, А.Б. Золотов, Д.Д. Ивлев, И.М. Лавит, Е.В. Ломакин, А.А. Маркин, Е.М. Морозов, В.З. Партон, Г.П. Черепанов, Е.И. Шифрин, Т. Belytschko, S.N. Atluri, D. Broek, R. Frosch, R. Gilbert и другие. Анализ существующих научных работ достоверно показал, что в настоящее время, решению задач механики разрушения для материалов, чьи механические характеристики проявляют зависимость от компонентного состава тензора напряжений, уделено недостаточно внимания.

Целью диссертационной работы является разработка, в рамках единого подхода, теории деформирования и прочности, а также практического исследовательского инструментария для изучения напряженно-деформируемого состояния, формирующегося при использовании материалов, обладающих зависимостью физико-механических характеристик от напряженного состояния, с учётом повреждаемости, воздействия химически активных эксплуатационных сред и температуры.

Для достижения поставленной цели необходимо решить **следующие задачи**:

- выявить результаты экспериментов, подтверждающих проявление значимых нелинейных зависимостей, характеризующих изменение механических свойств изотропных материалов, чьи механические свойства зависят от напряжённого состояния, под воздействием химически активных сред и температуры;

- разработать единый, достаточно универсальный для решения практических задач, подход к моделированию НДС пространственных конструкций, когда в их составе присутствуют несущие элементы из значимо нелинейных начально-изотропных материалов со свойствами, зависящими от компонентного состава тензора напряжений, подверженных повреждаемости, воздействию эксплуатационных сред;

- используя нелинейные определяющие соотношения термоупругости и потенциалы деформаций А.А. Трещёва – Н.М. Матченко, а также подход, связанный с использованием нормированных пространств напряжений, разработать модель решения задач связанной термоупругости для исследуемого класса материалов;

- разработать механико-математическую модель поведения пространственных конструкций, допускающих представление в виде совокупности плоских элементов, опирающуюся на теорию пластин и оболочек средней толщины, имеющую возможность учёта воздействия химически активной среды, в рамках оптимальной формы потенциала деформаций, с использованием гибридной формулировки метода конечных элементов (МКЭ);

- сформулировать разрешающую систему уравнений МКЭ для модификации трёхмерного конечного элемента в форме тетраэдра, разработав алгоритм применения данного конечного элемента для расчётов систем типа «сооружение-основание», в рамках единого подхода к моделированию конструкций из нелинейных начально-изотропных материалов со свойствами, зависящими от напряженного состояния;

- разработать алгоритм решения задач механики разрушения для тонких пластинок, выполненных из изотропного нелинейного материала, с различными типами дефектов в виде трещин;

- провести тестирование и апробацию разработанных алгоритмов и моделей, путём решения практических задач по расчёту различных типов конструкций и их элементов в физически нелинейной постановке с учётом воздействия различных физических факторов:

- решить ряд задач по деформированию оболочек различной конфигурации, в том числе с учётом термомеханического воздействия;
- построить числовую модель для решения задачи о давлении жёсткого штампа на деформируемое многослойное основание с учётом дилатации, провести расчёт высотного здания на этом основании;
- выполнить расчётное моделирование железобетонных плит, которые покрыты слоем полимербетона, выполняющим функцию защиты от активности хлоридсодержащей среды;
- решить задачу механики разрушения для полубесконечной пластины с трещинами нормального разрыва и сдвига.

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

- предложен новый единый подход к моделированию напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций из существенно нелинейных начально-изотропных

материалов, чьи механические характеристики проявляют значимую зависимость от вида напряжённого состояния;

- впервые, в рамках применения методики нормированных пространств напряжений, решена задача механики разрушения для полубесконечной пластины, имеющей повреждения в виде трещин (нормального разрыва и сдвига), и выполненной из нелинейного, начально-изотропного материала, свойства которого зависят от напряженного состояния;

- на основе универсальных определяющих соотношений для начально-изотропных материалов получено новое теоретическое описание механического поведения различных грунтов;

- с применением единого подхода, решена проблема учёта, как механической повреждённости, так и потери несущей способности (деградации), вследствие воздействия температуры и химически активной среды;

- на базе предложенного единого подхода, с использованием МКЭ, выполнена программная реализация новой механико-математической модели, которая построена в рамках теории связанной термоупругости для нелинейных изотропных материалов, свойства которых зависят от компонентного состава тензора напряжений в точке среды;

- впервые сформулирована механико-математическая модель многослойных армированных плит, материал которых принадлежит классу нелинейных разносопротивляющихся, склонных к повреждаемости в форме образования трещин (несущие слои) и деградации (защитный слой в условиях присутствия химически активной среды), с применением новой модификации плоского многослойного гибридного конечного элемента;

- в рамках единого подхода к численному моделированию механического поведения строительных конструкций, предложена новая эффективная модель упругопластического деформирования здания на многослойном деформируемом основании с учётом повреждаемости материала несущих конструкций;

- получены новые результаты расчётов, демонстрирующие значимые количественные и качественные эффекты, проявляющиеся при численном моделировании конструкций и их элементов из физически нелинейных начально-изотропных материалов, в том числе при наличии химически активной эксплуатационной среды, температурных воздействий, а также совместной работы с многослойным нелинейно деформируемым основанием.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения и результаты:

- универсальный практический подход к расчётному моделированию конструкций и их элементов из значимо нелинейных начально-изотропных материалов с механическими характеристиками, зависящими от компонентного состава тензора напряжений;

- модель учёта механической повреждаемости и потери несущей способности, вследствие воздействия химически активной среды, математическая формулировка для соответствующего плоского гибридного треугольного многослойного конечного элемента;

- теоретическое описание механического поведения деформируемого основания на основе универсальных определяющих соотношений для нелинейных изотропных материалов с механическими свойствами, зависящими от компонентного состава тензора напряжений, а также разработка модифицированного изопараметрического объёмного конечного элемента, использованного при моделировании комбинированных систем «здание-основание»;

- механико-математическая модель связанной термоупругости для значимо нелинейных изотропных материалов, свойства которых зависят компонентного состава тензора напряжений в точке среды несущего элемента, и программное обеспечение для получения массивов значений характеристик НДС элементов, описанных разработанной моделью;

- результаты расчётного моделирования задач механики разрушения для тонких полубесконечных пластин с дефектами-трещинами разного вида из материала с «усложнёнными» свойствами;

- результаты вычислительных экспериментов по определению НДС элементов и конструкций в целом, анализ которых подтвердил наличие новых оценок уровня влияния химически активных эксплуатационных сред, температурных воздействий и механической нагрузки на объекты расчётного моделирования.

Основные результаты, достигнутые в диссертационном исследовании, соответствует **паспорту научной специальности 2.1.9. Строительная механика,** по направлениям исследований:

- п. 1. Общие принципы расчёта зданий, сооружений и их элементов на всех этапах жизненного цикла;

- п. 2. Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчёта;

- п. 4. Численные и численно-аналитические методы расчёта зданий, сооружений и их элементов на прочность, жёсткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях.

Теоретическая и практическая значимость. Предложены новые механико-математические модели, которые обеспечены разработанной программной средой, реализующей высокоэффективные вычислительные методы. В числе разработок представлены модели и методы, позволяющие:

- с использованием новых эффективных модификаций конечных элементов получать характеристики НДС комбинированных систем, состоящих из здания и деформируемого основания, с учётом повреждаемости в форме трещинообразования, зависимости свойств материалов от компонентного состава тензора напряжений, появления пластических деформаций в армирующих элементах;

- обеспечивать решение широкого спектра задач связанной термоупругости для элементов конструкций из композиционных материалов со свойствами, зависящими от компонентного состава тензора напряжений, с применением изопараметрических объёмных конечных элементов;

- решение задач механики разрушения для материалов, чьи свойства существенно зависят от вида напряженного состояния;

- исследовать напряжённо-деформированное состояние элементов строительных конструкций с защитным слоем, подвергающихся воздействию химически активных сред, с учётом деградации материала.

Созданная механико-математическая модель доведена до уровня прикладного инструмента, позволяющего получать числовые массивы данных, характеризующих НДС конкретных расчётных схем. На основе единого подхода к описанию механического поведения нелинейных начально-изотропных материалов и повреждаемости различной природы, использование этой модели делает доступным прогнозирование деформационных и теплофизических характеристик материалов и конструкций. Разработанный исследовательский инструментарий предоставляет возможность дополнить и уточнить основные положения расчётных методик для конструкций из материалов, свойства которых проявляют чувствительность к виду напряженного состояния, повысить качество и безопасность проектирования, оптимизировать экономическую составляющую проектов.

Методология и методы. Методологической базой для исследования стали известные принципы моделирования строительной механики, механики деформированного твёрдого тела и вычислительной механики. Принципы и методы математического моделирования были использованы при решении краевых задач с целью получения числовых массивов данных, прогнозирующих поведение несущих элементов и конструкций в целом. Важнейшей составляющей методологии исследования стали вариационные формулировки, положенные в основу применения методов вычислительной механики, в частности МКЭ. При решении нелинейных задач применялись варианты метода последовательных нагружений и метода переменных параметров упругости.

Достоверность представленных в исследовании положений и выводов подтверждается:

- использованием системы гипотез и теоретических моделей, входящих в число базовых для строительной механики, механики деформируемого твёрдого тела и вычислительной механики;

- включением в доказательную основу выводов экспериментальных данных и облечённых в математическую форму соотношений, которые уже признаны обоснованными;

- применением, получивших широкое распространение численных методов, в модифицированной, но соответствующей теоретическим положениям форме (МКЭ, метода конечных разностей и других);

- получением с заданной погрешностью числовых моделей НДС пространственных конструкций и их элементов в различных задачах под контролем достоверных экспериментальных данных.

Разработанный практический инструментарий использует разработанные авторские модификации КЭ в гибридной формулировке, реализованные в зарегистрированном расчётном комплексе, что дает возможность получения сходящихся решений с управляемой погрешностью.

Внедрение результатов работы. Разработанные вычислительные алгоритмы, воплощены в расчётную программную среду, получено 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ: 2021661108, 06.07.2021 (заявка № 2021619761 от 21.06.2021); 2022617259, 19.04.2022 (заявка № 2022616634 от 12.04.2022); 2022617551, 22.04.2022 (заявка № 2022616501 от 12.04.2022). Автор принимал участие в работах по выполнению: госбюджетных тематик № 07-16 «Разработка технологий новых строительных материалов и теорий расчёта конструкций» (2016–2020 гг.) и № 01-21 «Формирование структуры, разработка технологий современных строительных материалов и математических моделей расчёта конструкций» (2021–2025 гг.); договоров с ПАО РКК «Энергия» № 341801 и № 341802 (2018 г.); научно-исследовательских работ по гранту губернатора Тульской области № 13-2008 от 16.01.2009 и гранту Правительства Тульской области (в соответствии с договором № ДС/284 от 25.10.2021).

Методики расчёта конструкций, предложенные в диссертационном исследовании, внедрены в проектную и расчётную практику ООО «Строительное проектирование» (г. Тула). Результаты выполненной работы присутствуют и активно используются в дисциплинах магистратуры кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции» Тульского государственного университета, которая является выпускающей (направление подготовки 08.04.01 – Строительство, профиль «Теория и проектирование зданий и сооружений»).

Апробация работы. Получаемые в процессе работы над диссертацией теоретические и практические результаты систематически выносились на обсуждение научной общественности в ходе ряда российских и международных конференций: XXXII Всероссийской научно-технической конференции: «Актуальные проблемы современного строительства» (2003 г., г. Пенза); Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (2004., г. Самара); Международной научно-технической конференции «Композиционные строительные материалы. Теория и практика» (2007 г., г. Пенза); Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (2009 г., г. Воронеж); VII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных (2012 г., г. Пенза); Международной научно-методической конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения В.Н. Байкова «Железобетонные конструкции: Исследования, проектирование, методика преподавания» (2012 г., г. Москва); Международной конференции «Фундаментальные проблемы механики деформируемого твёрдого тела, математического моделирования и информационных технологий» (2013 г., г. Чебоксары); Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (2008, 2013, 2014 гг., г. Тула); Международной конференции «Современные проблемы расчёта железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия» (2016 г., г. Москва); Всероссийской научно-практической конференции «Роль опорного вуза в развитии транспортно-энергетического комплекса Саратовской области (ТРАНСЭНЕРГОКОМ-2018)» (2018 г., г. Саратов); Международной научно-практической конференции, посвящённой 150-летию со дня рождения профессора,

автора методики расчёта железобетонных конструкций по стадии разрушения, основоположника советской научной школы теории железобетона, основателя и первого заведующего кафедрой железобетонных конструкций Московского инженерно-строительного института (МИСИ) А.Ф. Лолейта (Лолейтовские чтения-150) «Современные методы расчёта железобетонных и каменных конструкций по предельным состояниям» (2018 г., г. Москва); 5-й Международной научно-практической конференции Института архитектуры, строительства и транспорта (2018 г., г. Тамбов); научно-технической конференции с иностранным участием «Нелинейная механика грунтов и численные методы расчётов в геотехнике и фундаментостроении» (2019 г., г. Воронеж); конференции с международным участием «Современные вопросы механики сплошных сред – 2019» (2019 г., г. Чебоксары); Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии» (2001–2022 гг., Тула); 11-й, 13–16-й, 18-й Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики» (2015, 2017–2020, 2022 гг., г. Тула); XVIII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (2020 г., г. Тула).

Содержание выполненных на научных форумах докладов опубликовано в виде полнотекстовых материалов и тезисов. В полном объёме диссертация докладывалась на научных семинарах: Тульского государственного университета им. Л.А. Толоконникова (2022 г., г. Тула); Воронежского государственного технического университета (2022 г., г. Воронеж); НИУ МГСУ (2022 г., г. Москва).

Публикации. Тема диссертационной работы и её содержательное наполнение отражено в 65 опубликованных работах, среди которых, 5 статей опубликованы в изданиях, индексируемых в международных базах данных Web of Science и Scopus, 24 статьи в рекомендуемых изданиях ВАК Минобрнауки РФ, кроме того, опубликована 1 монография по теме диссертационной работы и получены 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора заключается в определении актуальности темы диссертации, в постановке цели, задач, стратегии и программы исследований, создании схем основных вычислительных экспериментов, подборе оптимальных расчётных методик, анализе и обработке полученных результатов, написании диссертации, формулировке выводов и положений, выносимых на защиту, написании программ для ЭВМ, внедрении полученных результатов в практику использования, а также публикации всех разработок в научных изданиях. Автором диссертационного исследования разработан универсальный подход и практический инструментарий для исследования проблемы деформирования пространственных комбинированных конструкций с учётом повреждаемости и воздействия эксплуатационных сред.

Соавторы не возражают против использования соискателем совместных работ. Личный вклад Теличко В.Г. в полученных результатах составляет не менее 75%.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из пяти глав, заключения, списка цитируемой литературы из 334 наименований, включая работы автора, приложений. Общий объём диссертации составляет 393 страницы, включая 187 рисунков и 15 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении указана актуальность исследованной проблемы, изложена степень ее разработанности, сформулированы цели и решаемые в диссертации задачи, отмечена научная новизна полученных результатов, раскрыта их теоретическая и практическая ценность, перечислены положения, выносимые на защиту, представлена апробация работы, публикации и личный вклад соискателя, описаны структура и объём диссертационной работы.

Первая глава состоит из шести разделов. Представлен расширенный обзор литературы по проблеме теории деформирования и прочности, а также разработке практического инструментария для расчётного моделирования пространственных комбинированных конструкций, включающих в себя несущие элементы из нелинейных материалов, свойства которых существенно зависят от компонентного состава тензора напряжений, с учётом получаемых механических повреждений и изменения физико-механических свойств под действием активных эксплуатационных сред.

Во второй главе в разделе 2.1 рассмотрена методика нормированных пространств напряжений. В разделе 2.2 рассматривается потенциал деформаций в форме W_1 для начально изотропного нелинейного разносопротивляющегося материала, предложенный в работах Н.М. Матченко и А.А. Трещёва:

$$W_1 = (A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta \cos 3\varphi) \tau^2 + \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^n; \quad (1)$$

где $\sigma = \delta_{ij} \sigma_{ij} / 3$ – нормальные напряжения на октаэдрической площадке; δ_{ij} – тензор Кронекера; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $\tau = \sqrt{S_{ij} S_{ij} / 3}$ – касательные напряжения на октаэдрической площадке; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$ – компоненты девиатора напряжений; $\xi = \cos \psi = \sigma / S_0$ – нормированные нормальные напряжения на октаэдрической площадке; $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ – модуль вектора полного напряжения; $\eta = \sin \psi = \tau / S_0$ – нормированные касательные напряжения; ψ – угол между вектором полного напряжения на октаэдрической площадке и нормалью к этой площадке; $\cos 3\varphi = \sqrt{2} \det(S_{ij}) / \tau^3$; φ – фаза напряжений; $A_e \dots E_e$, $A_p \dots E_p$ – константы потенциала соответственно квазилинейной и нелинейной частей.

Зависимости между деформациями и напряжениями получены путём применения формул Кастильяно к потенциалу (1):

$$e_{ij} = \frac{\partial W_1}{\partial \sigma_{ij}}; \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Приводятся законы изменения объёма и формы, а также фазовая характеристика для начально изотропных физически нелинейных разносопротивляющихся материалов, вытекающие из потенциала деформаций W_1 , которые имеют вид:

$$e = \sigma / (3K_0) + \tau / (3D_0), \quad (3)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + tg^2 \omega} \left[\tau / (2G_0) + \sigma / (3D_0) \right], \quad (4)$$

$$tg \omega = 3R\eta \sin 3\varphi / \left[3\eta / (2G_0) + \xi / D_0 \right], \quad (5)$$

где K_0 , G_0 , D_0 – обобщённые функции модуля объёмных деформаций, сдвига и дилатации; $e = e_{ij} \delta_{ij} / 3$ – средние деформации; $\varepsilon = \gamma / 2$ – деформации сдвига на октаэдрической площадке; $\omega = \varphi - \beta$ – разность фаз напряжённого и деформированного состояния.

В разделе 2.3 рассмотрены две формы термодинамического потенциала для нелинейных материалов, чьи свойства значимо зависят от напряжённого состояния, находящихся в температурном поле, полученные объединением потенциала деформаций для изотропных материалов Н.М. Матченко и А.А. Трещёва с термомеханической частью потенциала Гиббса. Исходя из проведённых исследований, универсализма, а также удобства использования, наиболее применим к рассматриваемым задачам оказался потенциал, записанный в нормированном пространстве № 2:

$$\Gamma_1 = \left[(A_p + B_p \xi) \sigma^2 + (C_p + D_p \xi + E_p \eta \cos 3\varphi) \tau^2 \right]^n + (A_e + B_e \xi) \sigma^2 + (C_e + D_e \xi + E_e \eta \cos 3\varphi) \tau^2 + [(b_{11} \xi + b_{12}) \sigma + b_{11} \eta \tau] \theta + 0,5 \cdot C_\sigma (\theta)^2 / T_0, \quad (6)$$

где $A_e = 3(A_1 + C_1)$; $B_e = \sqrt{3}(B_1 + 2D_1)$ $C_e = 3(A_1 - 0,5C_1)$; $D_e = \sqrt{27}B_1$; $E_e = \sqrt{1,5}(B_1 - D_1)$; $A_p = 3(A_2 + C_2)$; $B_p = \sqrt{3}(B_2 + 2D_2)$ $C_p = 3(A_2 - 0,5C_2)$; $D_p = \sqrt{27}B_2$; $E_p = \sqrt{1,5}(B_2 - D_2)$, $b_{11} = \sqrt{3}B_i$; $b_{12} = 3A_i$; $A_1 \dots D_1$ – константы потенциала в нормированном пространстве № 1.

Далее по тексту раздела проводится сравнение теоретических кривых деформирования с экспериментальными данными в широком диапазоне видов напряжённого состояния, рассматриваются законы изменения объёма и формы, а также выражения для фазовой характеристики и плотности энтропии.

В третьей главе формулируется актуальная методика по решению задач механики разрушения для материалов, чувствительных к виду напряжённого состояния, по разному работающим на растяжение и сжатие.

Окончательное разрушение твёрдого тела происходит путём распространения трещины, которое приводит к образованию дефектов, накоплению их и образованию макротрещин. Данные процессы наиболее активно протекают вблизи вершины. В связи с этим, значительный интерес для механики разрушения, представляет решение практических задач об определении НДС в указанной зоне, что позволяет получить дополнительную информацию о разрушении твёрдых тел и способствует исследованию механизмов разрушения для разносопротивляющихся материалов.

В диссертации рассматривается задача об осесимметричном плоском напряжённом состоянии тонкой пластинки шириной B и бесконечной длины с учётом наличия трещин и свободными от усилий берегами. В качестве граничных условий задавались значения функции и ее производных в зависимости от полярного угла θ раскрытия трещины, как показано ниже. Используя потенциал (1), сформулированы уравнения связи деформаций и напряжений для плоского напряжённого состояния. С использованием методики исследования трещинообразования для материалов, чьи свойства зависят от вида напряжённого состояния, предложенной в работах А.В. Березина, получены разрешающие дифференциальные уравнения, описывающее плоское напряжённое состояние тонкой пластинки с учётом повреждаемости в форме: 1) трещины поперечного сдвига, 2) нормального разрыва.

Ввиду симметрии геометрии задачи, для ее решения, удобно воспользоваться полярной системой координат с центром в вершине трещины (см. рис. 1 и 2). Будем считать пластинку ограниченной по торцам абсолютно жёсткими и гладкими плоскостями. На рис. 1, 2 – r это расстояние от вершины трещины.

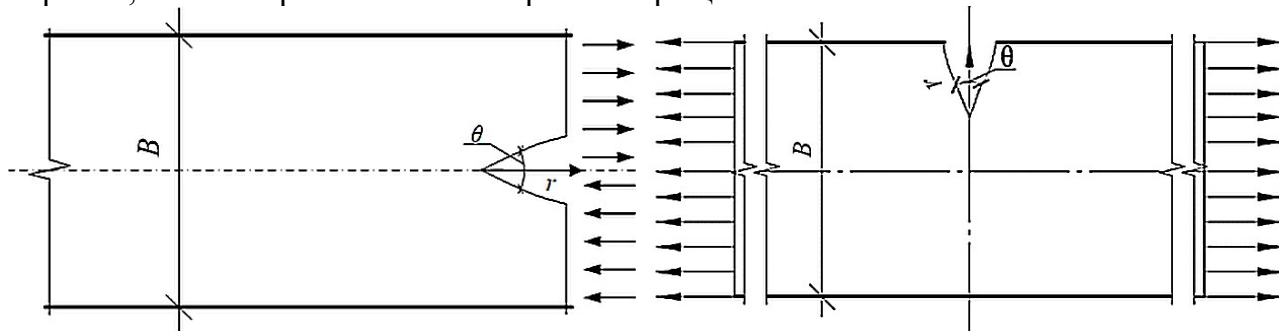


Рисунок 1 – Схема пластины (трещина сдвига)

Рисунок 2 – Схема пластины (трещина нормального разрыва)

В качестве основного модельного материала использован бетон с пределом прочности на сжатие $R^+ = 28,4$ МПа, чье механическое поведение рассматривается в

рамках потенциала деформаций (1). В диссертационном исследовании получены также решения для пластинок из графитов АРВ и ВПП.

Для варианта с **трещиной сдвига**, имеем следующие граничные условия: при $\theta = 0$, $f(\theta = 0) = f''(\theta = 0) = 0$, $f'(\theta = 0) = 1$; при $\theta = \pi$, $f(\theta = \pi) = f'(\theta = \pi) = 0$, где $f(\theta)$ – функция, учитываемая в функции напряжений и зависящая только от полярного угла (угла раскрытия трещины). Для задачи с трещиной **нормального разрыва** – граничные условия: при $\theta = 0$, $f'(\theta = 0) = f'''(\theta = 0) = 0$, $f(\theta = 0) = 1$, при $\theta = \pi$, $f(\theta = \pi) = f'(\theta = \pi) = 0$.

На первом этапе представим определяющие соотношения для изотропного тела с указанными выше свойствами. Для этого воспользуемся соотношениями:

$$\{e\} = [A]\{\sigma\}, \quad (7)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & A_{14} & A_{15} \\ & A_{22} & A_{26} & A_{24} & A_{25} \\ & & A_{66} & A_{64} & A_{65} \\ & sim & & A_{44} & A_{45} \\ & & & & A_{55} \end{bmatrix}; \quad (8)$$

В соответствии с условиями рассматриваемой задачи о плоском напряжённом состоянии, компоненты тензора напряжений τ_{13} , τ_{23} , σ_{33} , соответствующие им компоненты тензора деформаций и матрицы $[A]$ обращаются в ноль. Принимая во внимание условия задачи, определяющие соотношения переписываются в следующем виде:

$$e_{11} = A_{11}\sigma_{11} + A_{12}\sigma_{22}; \quad e_{22} = A_{12}\sigma_{11} + A_{22}\sigma_{22}, \quad e_{12} = A_{66}\tau_{12}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \{2(R_1 + 2R_2)/3 + R_3\xi(1 - \xi^2)/3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) + \\ &+ 4(\sigma_{11} - 2\sigma_{22})/9S_0] + R_5[\eta \cos 3\varphi(1 + \xi^2) + 2\sqrt{2}\xi - 2\cos 3\varphi - \sqrt{2}\sigma_{22}/S_0]\}/3; \\ A_{12} &= \{2(R_1 - R_2)/3 + (R_3 + R_4/3)\xi + R_5[\cos 3\varphi(1 - \xi) - \sqrt{2}\xi]\}/3; \\ A_{22} &= \{2(R_1 + 2R_2)/3 + R_3[\xi(1 - \xi^2)/3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) + \\ &+ 4(\sigma_{22} - 2\sigma_{11})/9S_0] + R_5[\eta \cos 3\varphi(1 + \xi^2) + 2\sqrt{2}\xi - 2\cos 3\varphi - \sqrt{2}\sigma_{11}/S_0]\}/3; \\ A_{66} &= 2\{2R_2 - R_3\xi^3 + R_4[\xi(2 - \eta^2) - (\sigma_{11} + \sigma_{22})/3S_0] + \\ &+ R_5[\sqrt{2}\eta(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2 - \eta^3 \cos 3\varphi]\}/3, \end{aligned} \quad (10)$$

R_i – следующие выражения для потенциала деформаций W_1 (1):

$$\{R\} = \left\{ \begin{array}{l} A_e + n(A_p\sigma^2 + C_p\tau^2 + B_p\xi\sigma^2 + D_p\xi\tau^2 + E_p\eta\tau^2 \cos 3\varphi)^{n-1} A_p \\ C_e + n(A_p\sigma^2 + C_p\tau^2 + B_p\xi\sigma^2 + D_p\xi\tau^2 + E_p\eta\tau^2 \cos 3\varphi)^{n-1} C_p \\ B_e + n(A_p\sigma^2 + C_p\tau^2 + B_p\xi\sigma^2 + D_p\xi\tau^2 + E_p\eta\tau^2 \cos 3\varphi)^{n-1} B_p \\ D_e + n(A_p\sigma^2 + C_p\tau^2 + B_p\xi\sigma^2 + D_p\xi\tau^2 + E_p\eta\tau^2 \cos 3\varphi)^{n-1} D_p \\ E_e + n(A_p\sigma^2 + C_p\tau^2 + B_p\xi\sigma^2 + D_p\xi\tau^2 + E_p\eta\tau^2 \cos 3\varphi)^{n-1} E_p \end{array} \right\}. \quad (11)$$

Для исследования распределения параметров напряжённо-деформируемого состояния у вершины трещины в зависимости от полярного угла θ (угол раскрытия трещины) в случае плоского напряжённого состояния, кроме полярной системы координат (r, θ) , введём специальную функцию напряжений $\chi(r, \theta)$. Поскольку в данном исследовании не рассматривается область трещины, где реализуется асимптотика, функция напряжений примет следующий вид – $\chi(r, \theta) = r^{3/2} f(\theta)$.

Трещина сдвига. Воспользуемся дифференциальными уравнениями напряжений, приведёнными в монографии А.В. Березина для трещин сдвига в телах, характеристики которых зависят от вида напряжённого состояния:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}; \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta}. \quad (12)$$

Деформации удовлетворяют условию совместности, которое в полярных координатах имеет вид:

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_\theta)}{\partial r^2}. \quad (13)$$

Тогда уравнения равновесия удовлетворяются автоматически.

$$e_r = A_{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right),$$

$$e_\theta = A_{12} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = A_{66} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} \right). \quad (14)$$

Полученные выражения для деформаций (12) подставляем в уравнение совместности деформаций (13) и получаем:

$$f^{(IV)}(\theta) - r \cdot f'''(\theta) + \frac{3}{2} f''(\theta) + \frac{A_{12}}{2A_{11}} f''(\theta) + \frac{A_{66}}{2A_{11}} f''(\theta) - \frac{3}{2} r \cdot f'(\theta) - \frac{3A_{12}r}{4A_{11}} f'(\theta) - \frac{3}{8} \frac{A_{12}}{A_{11}} f(\theta) - \frac{3A_{22}}{16A_{11}} f(\theta) = 0. \quad (15)$$

Для эффективного нахождения решения сформулированной задачи удобно применять метод малого параметра по методике, рекомендованной в работах А.В. Березина. В результате решения уравнения (15) относительно функции $f(\theta)$, было получено следующее:

$$f(\theta) = \left(\frac{1}{2} + b \frac{2-3\pi}{8} g_1 + b \int_0^{\frac{\theta}{(1+g_1b)}} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta \right) \sin \frac{\theta}{2(1+g_1b)} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + b \frac{1+2\pi}{8} g_1 - \frac{b}{3} \int_0^{\frac{\theta}{(1+g_1b)}} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta \right) \times$$

$$\times \sin \frac{3\theta}{2(1+g_1b)} - b \cos \frac{\theta}{2(1+g_1b)} \int_0^{\frac{\theta}{(1+g_1b)}} \Omega_1 \sin \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{b}{3} \cos \frac{3\theta}{2(1+g_1b)} \int_0^{\frac{\theta}{(1+g_1b)}} \Omega_1 \sin \frac{3\theta}{2} d\theta, \quad (16)$$

где:

$$\Omega_1 = bg_1 \left(r \cdot f''' + f'' - \frac{A_{12}}{2A_{11}} f'' - \frac{A_{66}}{2A_{11}} f'' + \frac{3}{2} r \cdot f' + \frac{3A_{12}r}{4A_{11}} f' + \frac{3}{8} \frac{A_{12}}{A_{11}} f + \frac{3A_{22}}{16A_{11}} f + \frac{9}{16} f \right).$$

Применяя полученное выражение для функции $f(\theta)$ совместно с функцией $\chi(r, \theta) = r^{3/2} f(\theta)$, можно получить точные аналитические выражения для напряжений и деформаций (12), (14).

Для бетона $R^- = 28,4$ МПа константы потенциала W_I имеют следующие значения:

$$n = 2,75; A_e = 6,533 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}; B_e = 9,961 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}; C_e = 1,090 \cdot 10^{-4} \text{ МПа};$$

$$D_e = 3,493 \cdot 10^{-5} \text{ МПа}; E_e = 8,829 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}; A_p = 1,682 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{(1-2n)/n};$$

$$B_p = 1,609 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; C_p = 1,376 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; \quad (17)$$

$$D_p = 2,008 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}; E_p = 1,412 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{(1-2n)/n}.$$

На рис. 3–4 показаны результаты расчёта напряжений вблизи вершины трещины (при расстоянии $r = 0,05$ от вершины трещины). Анализируя полученные результаты, заметим, что при учёте эффекта разнсопротивляемости наблюдается значительное снижение уровня возникающих напряжений вблизи вершины трещины, причём эта разница явно зависит от угла раскрытия трещины (полярного угла) θ . На рис. 3 для напряжений σ_r разница достигает 290% в сжатой зоне и 17% в растянутой в зависимости от полярного угла θ (в радианах). На рис. 4 для напряжений σ_θ разница достигает 15% процентов, в зависимости от величины полярного угла θ (в радианах).

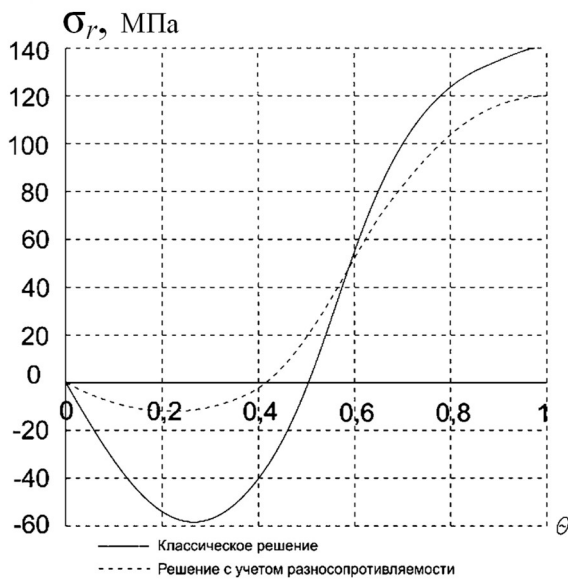


Рисунок 3 – Напряжения $\sigma_r(\theta)$ вблизи вершины трещины

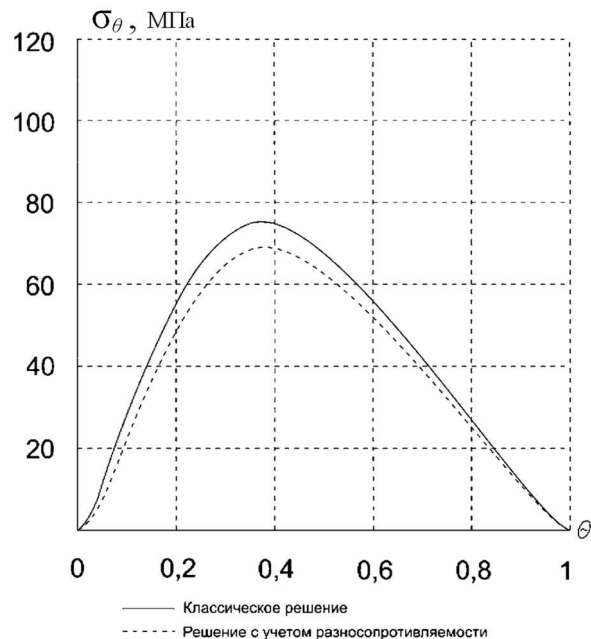


Рисунок 4 – Напряжения $\sigma_\theta(\theta)$ вблизи вершины трещины

Трещина нормального разрыва. По аналогии с трещиной сдвига, воспользуемся дифференциальными уравнениями для компонентов тензора напряжений, приведёнными в работах А.В. Березина (12) и (13). Разрешающее уравнение для варианта задачи с трещиной нормального разрыва примет вид:

$$-A_{11} f^{(IV)}(\theta) + A_{11} r \cdot f'''(\theta) - \frac{1}{2} (A_{66} + 3A_{11} + A_{12}) f''(\theta) + \frac{1}{4} r (6A_{11} + 3A_{12}) f'(\theta) + \frac{1}{16} (6A_{12} + 3A_{22}) f(\theta) = 0. \quad (18)$$

Решение ищем, используя граничные условия, приведённые выше. Константы указаны в (17). На рис. 5–6 показаны результаты расчёта избранных напряжений

вблизи вершины трещины (при расстоянии $r = 0,04$), также для двух вариантов расчёта, с учетом разносопротивляемости (зависимости от характеристик напряженного состояния) и с усредненными свойствами (классическое решение). На рис. 5 для напряжений σ_r разница достигает 23% в зависимости от полярного угла θ (в радианах). На рис. 6 для касательных напряжений $\sigma_{r\theta}$ разница достигает 77% в зависимости от величины полярного угла θ (в радианах). Важно также отметить некоторые качественные различия в получаемых результатах.

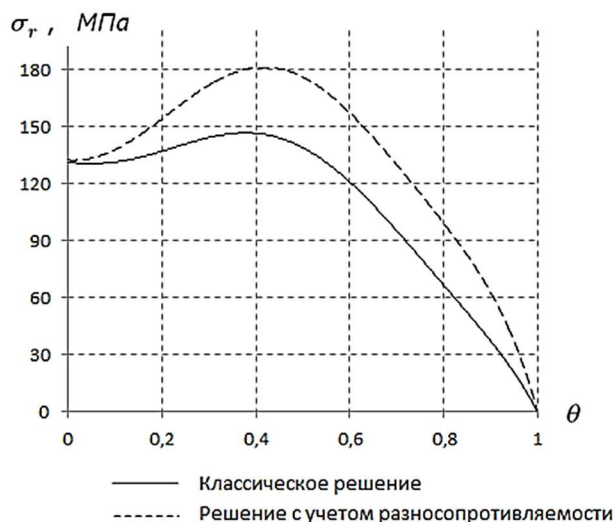


Рисунок 5 – Напряжения $\sigma_r(\theta)$
вблизи вершины трещины

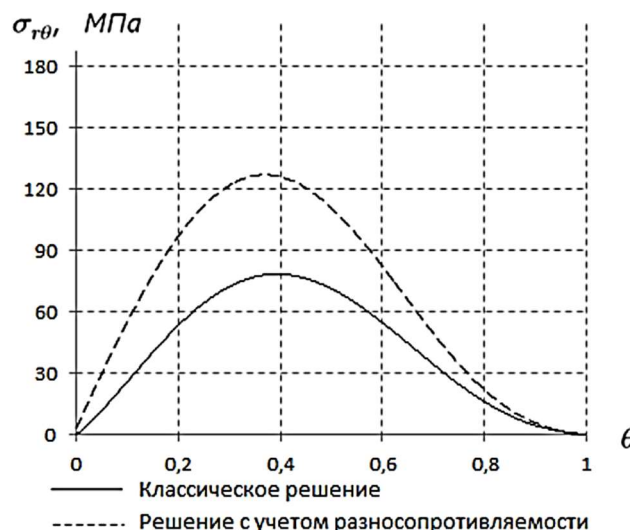


Рисунок 6 – Напряжения $\sigma_{r\theta}(\theta)$
вблизи вершины трещины

Описанная новая методика расчёта НДС с учётом наличия дефектов в форме трещин позволяет выполнять расчёты тонких пластин из начально-изотропного материала, чувствительного к виду напряжённого состояния. Результаты исследований подтверждают, что учёт данного эффекта является весьма важным для задач механики разрушения.

К сожалению, данный подход не применим для решения более сложных, по своей постановке задач механики, например, с более сложной геометрией. Поэтому далее, будем применять наиболее универсальный и алгоритмизированный, на сегодня, численный метод из современной расчетной практики – *метод конечных элементов*.

В четвертой главе диссертации приведена процедура построения уравнений метода конечных элементов для треугольного многослойного плоского гибридного конечного элемента (КЭ) с 3-я узлами и 5-ю степенями свободы в узле, применяемого для моделирования элементов конструкций, допускающих их представление в виде совокупности плоских треугольников, с учётом особенностей механической работы композитных материалов, таких как железобетон. Здесь же строится матрица жёсткости для изопараметрического четырёхузлового КЭ в форме тетраэдра с тремя степенями свободы в узле, с помощью которого моделируются массивные объекты, например деформируемое грунтовое основание.

Гибридный плоский треугольный элемент. Для описания связи между перемещениями и деформациями используем гипотезы С.П. Тимошенко:

$$e_{11} = u_{1,1} + x_3 \psi_{2,1}; \quad e_{22} = u_{2,2} - x_3 \psi_{1,2}; \quad e_{33} = 0; \quad (19)$$

$$\gamma_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} + x_3 (\psi_{2,2} - \psi_{1,1}); \quad \gamma_{13} = \psi_2 + w_{1,1}; \quad \gamma_{23} = -\psi_1 + w_{2,2},$$

где u_k – горизонтальные перемещения; ψ_k – углы поворота срединной поверхности; x_3 – координата по толщине; w_k – производная прогиба; γ_k – деформации поперечного сдвига. Уравнения равновесия записываются в традиционном виде:

$$\begin{aligned} N_{11,1} + N_{12,2} &= 0; & N_{12,1} + N_{22,2} &= 0; \\ M_{11,1} + M_{12,2} &= Q_1; & M_{12,1} + M_{22,2} &= Q_2; & Q_{1,1} + Q_{2,2} &= q. \end{aligned} \quad (20)$$

Зависимость между напряжениями и деформациями (σ_{33} пренебрежимо малы), получаемая из потенциала W_1 будет иметь вид:

$$\{\sigma\} = [B]\{e\}, \quad (21)$$

где $[B] = [A]^{-1}$, в соответствии с формулами (7) и (8), из потенциала (1).

Тогда усилия в сечении элемента определяются следующим образом:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3; \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3; \quad Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{i3} dx_3, \quad (i, j = 1, 2). \quad (22)$$

Связь между вектором обобщённых сил и вектором обобщённых деформаций срединной поверхности представим в матричном виде:

$$M = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix}; \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & K_{14} & K_{15} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ & D_{22} & D_{26} & K_{24} & K_{25} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ & & D_{66} & K_{64} & K_{65} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{14} & C_{24} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{15} & C_{25} & C_{65} \\ & & & & & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & & & & & & C_{22} & C_{26} \\ & & & & & & & C_{66} \end{bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \psi_{2,1} \\ -\psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} - \psi_{1,1} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix}; \quad (23)$$

где $C_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} dx_3$; $K_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3 dx_3$; $D_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3^2 dx_3$ – интегральные жёсткостные характеристики, получаемые численным интегрированием компонентов матрицы упругости по толщине элемента, которые зависят от напряжённого состояния.

Вектор обобщённых сил внутри конечного элемента в матричном виде

$$\{M\} = [P]\{\beta\}, \quad (24)$$

где $[P]$ – матрица некоторых функций от координат точки элемента; $\{\beta\}$ – вектор коэффициентов, подлежащих определению. Вектор обобщённых деформаций запишем

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{M\} = [E]\{M\}. \quad (25)$$

Принимая во внимание, что матрица $[E]$ представляет собой интеграл по толщине плоского элемента, определим энергию деформации:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{M\}^T [E] \{M\} dS. \quad (26)$$

P. Tong и T.T.H. Piau в своих трудах показали, что конечные элементы в гибридной формулировке могут быть основаны на функционале вида:

$$\Pi = \sum_n \left(U_n - \int_{V_n} \{\Phi\}^T \{t\} dS + \int_S \{\bar{\Phi}\}^T \{t\} dS \right), \quad (27)$$

где V_n – граница объёма элемента; S – часть V_n , находящаяся под действием внешнего вектора сил $\{\bar{\Phi}\}$; n – количество элементов; $\{t\}$ – перемещения на границе КЭ, связанные с перемещениями в узлах $\{q\}$ формулой:

$$\{t\} = [L]\{q\}. \quad (28)$$

Действующий на границу элемента вектор сил $\{\Phi\}$ определим как:

$$\{\Phi\} = [R]\{\beta\}, \quad (29)$$

где $[R]$ – матрица $[P]$ для контура V_n элемента. Подставляя выражения (23)-(26) в уравнение (27), получим

$$II = \sum_n \left(\frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [T] \{q\} + \{\Phi_0\}^T \{q\} \right), \quad (30)$$

где

$$[H] = \int_S [P]^T [E] [P] dS; [T] = \int_{V_n} [R]^T [L] dS; \{\Phi_0\}^T = \int_S \{\bar{\Phi}\} [L] dS. \quad (31)$$

Определяя вариации функционала (30) по параметрам $\{\beta\}$, $\{q\}$ и приравнивая эти вариации нулю, можно получить выражение вида:

$$\sum_n [T]^T [H]^{-1} [T] \{q\} = \sum_n \{\Phi_0\}, \quad (32)$$

откуда получаем выражение для матрицы жёсткости:

$$[K] = [T]^T [H]^{-1} [T]. \quad (33)$$

Кроме того, при вычислении вариаций функционала (30) по неизвестным коэффициентам $\{\beta\}$ можно зафиксировать связь данных коэффициентов с перемещениями в узлах КЭ:

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (34)$$

Подставляя коэффициенты $\{\beta\}$ в (24), приходим к зависимостям

$$\{M\} = [P] [H]^{-1} [T] \{q\}. \quad (35)$$

Таким образом, вектор $\{M\}$ определяется непосредственно после вычисления перемещений в узлах элемента. Далее, вектор обобщённых сил $\{M\}$ перепишем через коэффициенты $\{\beta\}$ в виде:

$$M_{11} = \beta_1 + \beta_4 x_1 + \beta_9 x_2; M_{22} = \beta_2 + \beta_5 x_2 + \beta_{10} x_1; M_{12} = \beta_3 + \beta_{12} x_1 + \beta_{11} x_2; \quad (36)$$

$$Q_1 = \beta_4 + \beta_{11}; Q_2 = \beta_5 + \beta_{12}; N_{11} = \beta_6; N_{22} = \beta_7; N_{12} = \beta_8.$$

Подставляя (37) в соотношения (31) и учитывая выражения для площади треугольника (конечного элемента), получим выражения для элементов квадратной матрицы $[H]$ с размерностью 12x12. Матрицу $[T]$ можно получить следующим способом. Запишем выражение работы вектора сил $\{M\}$ вдоль контура конечного элемента, выделим оттуда векторы $\{\beta\}^T$ и $\{q\}$. Оставшееся и окажется матрицей $[T]$ размером 12x15. Из условия равновесия для треугольника КЭ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} &= M_{11} C_{ij} + M_{12} S_{ij}; \quad \bar{M}_{22} = -M_{22} S_{ij} - M_{12} C_{ij}; \\ \bar{N}_{11} &= N_{11} C_{ij} + N_{12} S_{ij}; \quad \bar{N}_{22} = N_{22} S_{ij} + N_{12} C_{ij}; \\ \bar{Q} &= Q_1 C_{ij} + Q_2 S_{ij}, \quad C_{ij} = \cos \varphi_{ij}; \quad S_{ij} = \sin \varphi_{ij}. \end{aligned} \quad (37)$$

Учитывая зависимости (37):

$$A_{ij} = L_{ij} \int_0^1 \left[(Q_1 C_{ij} + Q_2 S_{ij}) w - (M_{12} C_{ij} + M_{22} S_{ij}) \psi_1 + (M_{12} S_{ij} + M_{11} C_{ij}) \psi_2 + (N_{11} C_{ij} + N_{12} S_{ij}) u_1 + (N_{22} S_{ij} + N_{12} C_{ij}) u_2 \right] d\xi, \quad (38)$$

где $\xi = l / L_{ij}$ – безразмерная координата, измеряемая вдоль стороны треугольника конечного элемента по стороне $i - j$.

Можно показать, что работа силовых факторов, совершаемая на соответствующих

перемещениях вдоль всего контура элемента, в общем виде имеет представление:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} \quad (39)$$

Зададим вектор неизвестных перемещений в i -ом узле конечного элемента

$$\{q_i\} = \{w_i \ \psi_{1i} \ \psi_{2i} \ u_{1i} \ u_{2i}\}^T = \{q_{i1} \ q_{i2} \ q_{i3} \ q_{i4} \ q_{i5}\}^T. \quad (40)$$

Тогда вектор узловых перемещений полного КЭ можно записать, как

$$\{q\} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_{15}\}^T. \quad (41)$$

Аппроксимацию перемещений по границе зададим в виде:

$$\begin{aligned} w &= [(1-\xi) \ \xi] \{w_i \ w_j\} + L_{ij} \xi (1-\xi) (\theta_i - \theta_j) / 2; \psi_1 = [(1-\xi) \ \xi] \{\psi_{1i} \ \psi_{1j}\}; \\ \psi_2 &= [(1-\xi) \ \xi] \{\psi_{2i} \ \psi_{2j}\}; u_1 = [(1-\xi) \ \xi] \{u_{1i} \ u_{1j}\}; u_2 = [(1-\xi) \ \xi] \{u_{2i} \ u_{2j}\}; \end{aligned} \quad (42)$$

где $\theta_i = \psi_{1i} c_{ij} + \psi_{2i} s_{ij}$; $\theta_j = \psi_{1j} c_{ij} + \psi_{2j} s_{ij}$; L_{ij} – длина стороны $i-j$.

Выразим текущие координаты x_1, x_2 на стороне $i-j$ через координаты узлов:

$$x_1 = x_{1i} - L_{ij} \xi s_{ij}; \quad x_2 = x_{2i} + L_{ij} \xi c_{ij}. \quad (43)$$

Используя зависимости (36), (38), (41–43) совместно с уравнением (40), получим, очевидным образом, выражения для элементов матрицы $[T]$, размерностью 12×15 .

Дополнительные гипотезы и математические модели фиктивных слоёв для плоского гибридного элемента. Известно, что модель определения НДС железобетонных элементов, из которых состоит здание, должна реально учитывать специфику взаимодействия сложной композитной среды типа «бетон-арматура» на разных стадиях работы и быть эффективной для практического использования в программном обеспечении.

Будем считать справедливым следующие допущения: 1) размеры элементов сооружения в плане велики по сравнению со средним расстоянием между стержнями представляющими арматуру; арматура в виде распределённого слоя задается коэффициентом армирования; 2) нагружение учитывается только простое, деформация активная, деформации ползучести не принимаются во внимание; 3) из-за неоднородности конструкции по толщине, плоские элементы делятся на ряд фиктивных слоёв: а) неармированные (бетонные) слои без трещин; б) армированные (железобетонные) слои без трещин; в) неармированные (бетонные) слои с трещинами; г) армированные (железобетонные) слои с трещинами; д) армированные (железобетонные) слои с пересекающимися трещинами; 4) напряжения в пределах слоёв КЭ, содержащих армирование, определяются суммированием напряжений в арматуре и бетоне, а за условие совместной работы арматуры с бетоном принимается равенство деформаций обоих материалов на общей поверхности; 5) срединная поверхность плиты представляется сетью КЭ в гибридной формулировке, описанной выше; 6) механические характеристики, рассчитанные для центра фиктивного слоя данного конечного элемента, распространяемы на весь слой целиком; 7) критерий прочности бетона принимается как частный случай критерия прочности Г.А. Гениева, в варианте, предложенном П.П. Баландиным, для каждого слоя по толщине отдельно; 8) в пределах конечного элемента, для треснувшего фиктивного слоя, трещины считаются сквозными и параллельными; влияние растянутого бетона учитывается при помощи коэффициента, предложенного В.И. Мурашевым; 9) при запуске процесса трещинообразования бетон в пределах фиктивного слоя моделируется трансверсально-изотропным телом с плоскостью изотропии, параллельной плоскости трещин.

Неармированные (бетонные) слои без трещин. Связь деформаций с напряжениями имеет вид (9). Выписав зависимости e_{ij} от σ_{ij} в формулах (2) и представив полученный результат в виде матричного произведения, получим компоненты матрицы

податливости. Для конечного элемента из неармированных слоёв матрица упругости $[B]$ выражается через матрицу податливостей:

$$[B] = [A]^{-1}. \quad (44)$$

Армированные (железобетонные) слои без трещин. С учётом принятых выше допущений, напряжения в этом слое принимаются как сумма напряжений в арматуре и бетоне, что позволяет записать матрицу упругости для армированных слоёв без трещин в виде

$$[B] = [A]^{-1} + [B_s], \quad (45)$$

где

$$[B_s] = \begin{bmatrix} \mu_{11} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2 \mu_{11}} & \mu_{11} \frac{E_s \nu_s}{1 - \nu_s^2 \mu_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{22} \frac{E_s \nu_s}{1 - \nu_s^2 \mu_{22}} & \mu_{22} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2 \mu_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{11} \frac{E_s}{1 + \nu_s \mu_{11}} + \mu_{22} \frac{E_s}{1 + \nu_s \mu_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{22} \frac{E_s}{1 + \nu_s \mu_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{11} \frac{E_s}{1 + \nu_s \mu_{11}} \end{bmatrix};$$

E_s – модуль упругости арматуры, ν_s – коэффициент Пуассона для арматуры; $\mu_{11} = A_{s_i} / S_{i11} h_s$, $\mu_{22} = A_{s_i} / S_{i22} h_s$ – коэффициенты армирования по осям X_1 и X_2 исходной системы координат; A_{s_i} – площадь сечения каждого арматурного стержня; S_{i11} , S_{i22} – шаг стержней арматуры, параллельных осям X_1 и X_2 ; h_s – суммарная толщина армированных слоёв. Заметим, что компоненты матрицы упругости в выражении (45) определяются по формулам для неармированных слоёв, только вместо полных напряжений σ_{ij} должны использоваться напряжения в бетоне – σ_{Bij} .

Неармированные (только из бетона) слои с трещиной. Согласно гипотезе № 7 трещины будут появляться, когда выполняется условие

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3 \cdot (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2) - (\sigma_{11} \sigma_{22}) - (R_{bt} - R_b)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - R_{bt} R_b > 0, \quad (46)$$

где σ_{11} , σ_{22} , τ_{12} , τ_{13} , τ_{23} – напряжения в бетоне в момент начала трещинообразования, рассчитанные для центра выделенного фиктивного слоя. Здесь R_{bt} , R_b – пределы прочности бетона при осевом растяжении и сжатии.

Срабатывание критерия (46) в бетонном слое формирует трещины вдоль площадок, ортогональных к направлению наибольшего из главных растягивающих напряжений, вычисляемого по формуле для плоского напряжённого состояния:

$$\sigma_{lt} = [\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2}] / 2. \quad (47)$$

Направление развития трещин, таким образом, получим как величину угла между нормалью к трещине и осью x_1 : $\chi_1 = \arctg[(\sigma_{lt} - \sigma_{11}) / \tau_{12}]$. Будем полагать выбранные потенциальные соотношения справедливыми только для направлений вдоль трещин, где не нарушалась целостность бетона. В указанном направлении, нелинейные свойства

бетона, будем учитывать через аппроксимацию секущим модулем упругости E_B и секущим коэффициентом поперечных деформаций ν_B , получаемых из уравнения:

$$e_{22}^* = A_{12}^* \sigma_{11}^* + A_{22}^* \sigma_{22}^* = (\sigma_{22}^* - \nu_B \sigma_{11}^*) / E_B,$$

т.е. $E_B = 1 / A_{22}^*$; $\nu_B = -A_{12}^* / A_{22}^*$, где A_{12}^* , A_{22}^* – компоненты матрицы податливостей, получаемые по формулам для бетонных слоёв без трещин; σ_{ij}^* – напряжения в бетоне, вычисленные в ортогональной системе координат $X_1^* O X_2^*$, повёрнутой относительно исходной системы $X_1 O X_2$ на угол χ_1 .

Используя соображения, изложенные в работах А.А. Трещёва и выполняя преобразования координат в исходную систему, зафиксируем компоненты матрицы жёсткости для треснувшего бетона $[B^c]$:

$$[A^c]^{-1} = [B^c] = \begin{bmatrix} B_{11}^c & B_{12}^c & B_{16}^c & 0 & 0 \\ & B_{22}^c & B_{26}^c & 0 & 0 \\ & & B_{66}^c & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & B_{44}^c & 0 \\ & & & & B_{55}^c \end{bmatrix}. \quad (48)$$

где – $B_{11}^c = B_{22}^* \sin^4 \chi_1$; $B_{22}^c = B_{22}^* \cos^4 \chi_1$; $B_{12}^c = B_{22}^* \sin^2 \chi_1 \cos^2 \chi_1$; $B_{16}^c = B_{22}^* \cos \chi_1 \sin^3 \chi_1$;

$$B_{26}^c = B_{22}^* \cos^3 \chi_1 \sin \chi_1; B_{66}^c = 4B_{22}^* \sin^2 \chi_1 \cos^2 \chi_1; B_{44}^c = B_{55}^* \sin^2 \chi_1; B_{55}^c = B_{55}^* \cos^2 \chi_1.$$

Армированные (железобетонные) слои с трещиной. Появление трещин определяется согласно условию прочности в пределах слоя конечного элемента:

$$\sigma_{B11}^2 + \sigma_{B22}^2 + 3 \cdot (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2) - (\sigma_{B11} \sigma_{B22}) - (R_{bt} - R_b)(\sigma_{B11} + \sigma_{B22}) - R_{bt} R_b > 0, \quad (49)$$

где σ_{Bij} – напряжения в бетоне. Направление развития трещин определяется как величина угла χ_1 между нормальным направлением к трещине и осью X_1 в исходной системе: $\chi_1 = \arctg[(\sigma_{1t} - \sigma_{B11}) / \tau_{12}]$, где σ_{1t} – наибольшие из главных растягивающих напряжений в несущем слое (бетоне). Далее, учитывая рассуждения, проведённые выше, получим:

$$e_{22}^* = A_{12}^* \sigma_{B11}^* + A_{22}^* \sigma_{B22}^* = (\sigma_{B22}^* - \nu_B \sigma_{B11}^*) / E_B, \quad (50)$$

т. е. $E_B = 1 / A_{22}^*$; $\nu_B = -A_{12}^* / A_{22}^*$, где A_{12}^* , A_{22}^* – компоненты матрицы податливости, получаемые из формул, в которых σ_{11} и σ_{22} необходимо заменить напряжениями, рассчитанными в ортогональной системе координат $X_1^* O X_2^*$, развёрнутой относительно исходной системы $X_1 O X_2$ на угол χ_1 ; σ_{B11}^* , σ_{B22}^* – будут напряжениями в бетоне в этой системе координат. Зависимости между деформациями и напряжениями после поворота системы координат получают форму:

$$\{e^*\} = [A^*] \{\sigma_B^*\}, \quad (51)$$

где

$$\{e^*\} = \begin{Bmatrix} e_{11}^* \\ e_{22}^* \\ \gamma_{12}^* \\ \gamma_{13}^* \\ \gamma_{23}^* \end{Bmatrix}; [A^*] = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66}^* & 0 & 0 \\ & & & A_{44}^* & 0 \\ & & & & A_{55}^* \end{bmatrix}; \{\sigma_B^*\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{B11}^* \\ \sigma_{B22}^* \\ \tau_{B12}^* \\ \tau_{B13}^* \\ \tau_{B23}^* \end{Bmatrix}; \quad (52)$$

$A_{11}^* = 1/(E_B \omega)$; $A_{12}^* = -\nu_B / E_B$; $A_{22}^* = 1/E_B$; $A_{44}^* = A_{66}^* = 2(1+\nu_B)/(E_B \omega)$; $A_{55}^* = 2(1+\nu)/E_B$, где в направлении оси X_1^* секущий модуль упругости (модуль деформации для бетона) определится величиной $E_B \omega$ (ω – функция, характеризующая степень повреждения бетона $0 < \omega \leq 1$). Выполнив преобразование координат из системы $X_1^* O X_2^*$ в исходную, получим матрицу податливостей $[A^C]$ для треснувшего бетона.

Матрица упругости для арматуры рассматриваемого армированного слоя в исходной ортогональной системе координат $X_1 O X_2$ получит вид:

$$[B_S^C] = \begin{bmatrix} \mu_{11} \frac{E_{s11} \chi_{11}}{(1-\nu_{s11}^2 \mu_{11}) \lambda_{11}} & \mu_{11} \frac{E_{s11} \nu_{s11} \chi_{11}}{(1-\nu_{s11}^2 \mu_{11}) \lambda_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{22} \frac{E_{s22} \nu_{s22} \chi_{22}}{(1-\nu_{s22}^2 \mu_{22}) \lambda_{22}} & \mu_{22} \frac{E_{s22} \chi_{22}}{(1-\nu_{s22}^2 \mu_{22}) \lambda_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{S3,3}^C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{S4,4}^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{S5,5}^C \end{bmatrix}, \quad (53)$$

где E_{skk} – секущие модули для арматуры, расположенной вдоль осей X_1 и X_2 , ν_{skk} – секущий коэффициент для поперечных деформаций армирующих стержневых элементов ($k = 1, 2$). С целью учёта развития пластических деформаций в арматуре, будем вычислять их значения по следующим формулам:

$$E_{Skk} = \begin{cases} E_S & \text{при } \sigma_{Skk} < \sigma_p \mu_{kk} \\ \sigma_p / e_{kk} & \text{при } \sigma_{Skk} \geq \sigma_p \mu_{kk} \end{cases}, k = 1, 2, \text{ где } \sigma_p \text{ – предел текучести арматуры.}$$

Коэффициенты, учитывающие зацепление и нагельный эффект:

$$B_{S3,3}^C = \frac{\mu_{11} E_{s11} \chi_{11}}{(1+\nu_{s11} \mu_{11}) \lambda_{11} \text{ctg}^2 \chi_1} + \frac{\mu_{22} E_{s22} \chi_{22}}{(1+\nu_{s22} \mu_{22}) \lambda_{22} \text{tg}^2 \chi_1}, B_{S4,4}^C = \frac{\mu_{22} E_{s22} \chi_{22}}{(1+\nu_{s22} \mu_{22}) \lambda_{22} \text{ctg}^2 \chi_1},$$

$$B_{S5,5}^C = \frac{\mu_{11} E_{s11} \chi_{11}}{(1+\nu_{s11} \mu_{11}) \lambda_{11} \text{tg}^2 \chi_1}, \chi_{11} = 1 + \frac{\mu_{11} (1 - \lambda_{11} \psi_s) E_s \cos^2 \chi_1}{E_B}, \chi_{22} = 1 + \frac{\mu_{22} (1 - \lambda_{22} \psi_s) E_s \sin^2 \chi_1}{E_B},$$

$$\lambda_{11} = \frac{\eta_\tau \mu_{11}}{\eta_\tau \mu_{11} + \mu_{22} \text{ctg}^2 \chi_1}, \lambda_{22} = \frac{\eta_\tau \mu_{22}}{\eta_\tau \mu_{22} + \mu_{11} \text{tg}^2 \chi_1},$$

здесь η_τ – коэффициент, учитывающий повышенную чувствительность арматурных стержней к воздействию тангенциальных перемещений в бетоне у трещины; он принимается равным $\eta_\tau \approx 16$, согласно рекомендациям, приведённым в работах Н.И. Карпенко. Матрицу упругости для армированного слоя запишем формулой:

$$[B] = [B_B^C] + [B_S^C], \quad (54)$$

где $[B_B^C] = [A^C]^{-1}$. Для модели треснувшего армированного слоя используется функция повреждённости ω , определяемая через параметр В.И. Мурашева ψ_s , который позволяет учесть работу растянутого бетона на участках между трещинами:

$$\psi_s = E_{sn} / (E_B \omega + E_{sn}), \quad (55)$$

где E_{sn} – модуль упругости для арматуры в нормальном направлении к трещине,

$$E_{sn} = E_{S11} \mu_{11} \cos^4 \chi_1 + E_{S22} \mu_{22} \sin^4 \chi_1. \quad (56)$$

Решая совместно уравнения (55) и (56) относительно функции повреждённости, выражение для неё запишем получим в виде

$$\omega = (E_{S11} \mu_{11} \cos^4 \chi_1 + E_{S22} \mu_{22} \sin^4 \chi_1) (1 / \psi_s - 1) / E_B. \quad (57)$$

Параметр ψ_s вычисляем, используя эмпирическую формулу, рекомендованную в трудах Г.А. Гениева, В.Н. Киссюк и Г.А. Тюпина:

$$\psi_s = 1 - 0,7 R_{bt} / \sigma_{11}^*. \quad (58)$$

Подразумевается, что $\sigma_{B11}^* = 0,7 R_{bt}$, а σ_{11}^* , σ_{B11}^* – нормальные напряжения в железобетонных и бетонных элементах на площадках, совпадающих с трещиной.

Используя выражение для σ_{B11}^* с учётом правил преобразования координат для напряжений σ_{Bij} можно записать нелинейное уравнение относительно параметра ω :

$$\begin{aligned} & (B_{B11}^C e_{11} + B_{B12}^C e_{22} + B_{B16}^C \gamma_{12}) \cos^2 \chi_1 + (B_{B12}^C e_{12} + B_{B22}^C e_{22} + B_{B26}^C \gamma_{12}) \sin^2 \chi_1 + \\ & + (B_{B16}^C e_{11} + B_{B26}^C e_{26} + B_{B66}^C \gamma_{12}) \sin 2 \chi_1 = 0,7 R_{bt}. \end{aligned} \quad (59)$$

Решение данного уравнения строится при помощи метода последовательных приближений. Поэтому матрица $[A^C]$ и компоненты матрицы упругости $[B]$ возможно определить по рассчитываемой функции повреждённости и параметру В.И. Мурашева.

Армированные (железобетонные) слои с пересекающимися трещинами. С учётом принятой модели для армированного слоя с трещинами и принятыми допущениями, матрицу упругости в пределах слоя запишем в виде:

$$[B] = [B_S^C]. \quad (60)$$

Объёмный элемент в форме тетраэдра. Рассмотрим получение компонентов матрицы жёсткости объёмного изопараметрического конечного элемента, который с различными физическими компонентами может быть использован для решения различных задач в рамках положений трёхмерной теории упругости, в том числе с учетом температуры.

Матрица жёсткости для i -го КЭ $[K]_i$ запишется в форме:

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [K]_{i1}^{(1)} & [K]_{i1}^{(2)} & [K]_{i1}^{(3)} & [K]_{i1}^{(4)} \\ [K]_{i2}^{(1)} & [K]_{i2}^{(2)} & [K]_{i2}^{(3)} & [K]_{i2}^{(4)} \\ [K]_{i3}^{(1)} & [K]_{i3}^{(2)} & [K]_{i3}^{(3)} & [K]_{i3}^{(4)} \\ [K]_{i4}^{(1)} & [K]_{i4}^{(2)} & [K]_{i4}^{(3)} & [K]_{i4}^{(4)} \end{bmatrix}, \quad (61)$$

где ее типовой блок $[K]_{ij}^{(k)}$ можно записать в виде

$$[K]_{ij}^{(k)} = \iiint_{V_i} ([B]^{(j)})^T [D] [B]^{(k)} dV. \quad (62)$$

В выражении (62) $[B]$ – матрица деформаций, имеющая, как и векторы узловых перемещений $\{q\}_i$ и реакций $\{R\}_i$, блочную структуру:

$$[B] = \left[[B]^{(1)} [B]^{(2)} \dots [B]^{(k)} \dots [B]^{(n)} \right], \quad (63)$$

где $[B]^k = [\Phi][C]^{(k)}$, в котором $[\Phi]$ – матрица дифференциальных операторов вида:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial / \partial z \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial z & \partial / \partial y \\ \partial / \partial z & 0 & \partial / \partial x \end{bmatrix}, \quad (64)$$

а $[C]$ – матрица интерполяционных функций. Для определения матрицы $[C]$ следует выразить перемещения внутри элемента через узловые перемещения, т.е. определить зависимость $\{u\} = [C]\{q\}_i = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} \dots [C]^{(k)} \dots [C]^{(n)} \right] \{q\}_i$, где матрица внутренних перемещений выглядит как $\{u\} = \{u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\}$. Тогда

$$[C] = \left[[C]^{(1)} [C]^{(2)} [C]^{(3)} [C]^{(4)} \right], \quad (65)$$

где $[C]^{(k)} = E_3 C_k(x, y, z)$, а E_3 – единичная матрица третьего порядка.

Распределение перемещений u , v и w внутри элемента принято в форме:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z; \quad v(x, y, z) = \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z; \\ w(x, y, z) &= \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z. \end{aligned} \quad (66)$$

Как показано в работах С.Ф. Клованича, данный вид функций формы гарантировано обеспечивает неразрывность перемещений между соседними конечными элементами. Данное выражение содержит двенадцать неизвестных коэффициентов, которые можно определить, решая соответствующую систему из двенадцати уравнений, полученных для каждого из трех направлений во всех четырёх узлах. Каждое из уравнений системы (66) является отношением объёма тетраэдра с перемещённым узлом m ко всему объёму i -го конечного элемента, что соответствует выполнению соотношений:

$$C_1(x, y, z) = \frac{V_{m234}}{V_i}, \quad C_2(x, y, z) = \frac{V_{m134}}{V_i}, \quad C_3(x, y, z) = \frac{V_{m124}}{V_i}, \quad C_4(x, y, z) = \frac{V_{m123}}{V_i}, \quad (67)$$

где

$$\begin{aligned} V_{m234} &= \frac{(a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z)}{6}, \quad V_{m134} = \frac{(a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z)}{6}, \\ V_{m124} &= \frac{(a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z)}{6}, \quad V_{m123} = \frac{(a_4 + b_4 x + c_4 y + d_4 z)}{6}. \end{aligned}$$

В выражениях (67) определяются объёмные L координаты, которые являются нормализованными для данного конечного элемента. Следовательно

$$\begin{aligned} L_1 &= C_1(x, y, z); \quad L_2 = C_2(x, y, z); \\ L_3 &= C_3(x, y, z); \quad L_4 = C_4(x, y, z). \end{aligned} \quad (68)$$

Значения L_j в выражениях (68) ограничены интервалом $0 \dots 1$:

$$L_j(x_k, y_k, z_k) = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}, L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \quad (69)$$

Типовой блок матрицы деформаций выглядит так:

$$[B]^{(k)} = [\Phi] C_k(x, y, z) = \frac{1}{6V_i} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix}, (k = 1, 2, 3, 4). \quad (70)$$

Связь напряжений с деформациями для материала в объёмном случае реализуется матрицей $[D] = [D_{ij}]$, где $i, j = 1, \dots, 6$, а $D_{ij} = D_{ji}$ – матрица связи напряжений и деформаций, полученная из потенциала (1). Примем гипотезу о неизменности данной матрицы в пределах i -го конечного элемента. Для получения типового блока матрицы жёсткости четырёхузлового конечного элемента необходимо подставить выражение (70) и матрицу $[D]$ в формулу (62), а затем осуществить интегрирование.

Решение прикладных задач. 1. Определение НДС трубчатых элементов при чистом кручении. Для верификации использовались данные экспериментов, выполненных в НИИЖБ Э.Г. Елагиным. Эксперименты проводили на образцах кольцевого сечения наружного диаметра 0,3 м, внутреннего – 0,2 м, длиной 3,34 м. Арматура для продольных стержней – класса А400 (предел текучести $\sigma_p = 390$ МПа, модуль упругости $E_s = 2 \cdot 10^5$ МПа), диаметром 12 мм; для поперечных – класса А240 (предел текучести $\sigma_p = 235$ МПа, модуль упругости $E_s = 2,1 \cdot 10^5$ МПа) диаметром 6,5 мм. Кубиковая прочность бетона принималась равной 28,4 и 37 МПа. В диссертации решены задачи для образцов: ОК-14, ОК-4, ОК-7, ОНК-7 (с учетом предварительного напряжения). Правильность модели в общем виде могут характеризовать углы закручивания. Результаты расчёта углов закручивания по разработанной теории для некоторых вышеупомянутых образцов приведены ниже на рис. 7–8.

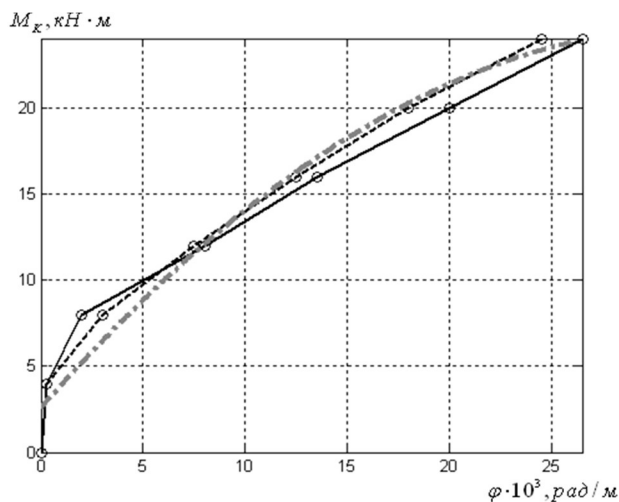


Рисунок 7 – Образец ОК-7

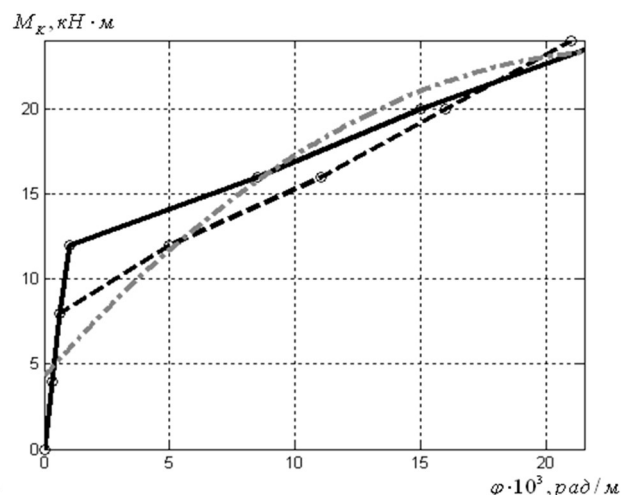


Рисунок 8 – Образец ОНК-7

Здесь штрихпунктирной линией показаны результаты, полученные с применением разработанной теории расчёта НДС, сплошной линией – результаты по теории Н.И., Карпенко, пунктирной линией – полученные экспериментально. Сравнение с экспериментальными данными свидетельствует об адекватности разработанной теории и возможности ее использования при решении задачи об определении НДС железобетонных оболочек.

2. *Определение НДС железобетонной оболочки положительной гауссовой кривизны в следующей конфигурации: оболочка размерами в плане 24x24 м, с высотой подъёма 6 м, постоянной толщиной со значением 0,12 м. В качестве основного материала использовался бетон с пределом прочности на сжатие $R^- = 28,4 \text{ МПа}$. Армирование оболочки принималось по схеме: а) по всей поверхности оболочка армировалась двумя сетками из арматуры класса А240 диаметром 6 мм с шагом 0,25 м на расстоянии 0,025 м от крайних поверхностей; б) в приконтурных полосах для восприятия изгибающих моментов укладывалась арматура класса А400 диаметром 6 мм в виде сетки, расположенной в растянутой от изгиба зоне на расстоянии 0,015 м от нижней поверхности оболочки с шагом 0,15 м; в) в угловых областях оболочки под углом в 45° на глубине центра тяжести поперечного сечения – рабочая арматура класса А300 диаметром 10 мм (предел текучести $\sigma_p = 295 \text{ МПа}$, модуль упругости $E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$).*

Расчёт проводился для оболочки, шарнирно опёртой по углам. По контуру оболочка опирается на ж/б фермы типа ФКБ24 – контурные фермы пролётом 24 м, цельные, безраскосные с предварительно напряжённым нижним поясом. В качестве напрягаемой арматуры для стержней нижнего пояса фермы принята горячекатаная арматура класса А500 (предел текучести $\sigma_p = 785 \text{ МПа}$, модуль упругости $E_s = 1,9 \cdot 10^5 \text{ МПа}$) диаметром 20 мм. Использовался бетон с пределом прочности на сжатие $R^- = 37 \text{ МПа}$. В качестве ненапрягаемой арматуры для остальных стержней использовалась арматура класса А400 диаметром 18 мм. При моделировании стержней учитывались «усложнённые» свойства: разносопротивляемость, пластические деформации в арматуре и повреждаемость в форме трещинообразования в бетоне: учитывались продольные перемещения и поперечные сдвиги. Стержни представлялись КЭ, приведённым в работе М. Секуловича, и модифицированным для учёта механических свойств железобетона.

Оболочка нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивности от 0 до 78 кПа с учётом собственного веса оболочки. На рис. 9 приведены результаты расчёта вертикальных прогибов w в центре оболочки и распределение их вдоль диагонали плана.

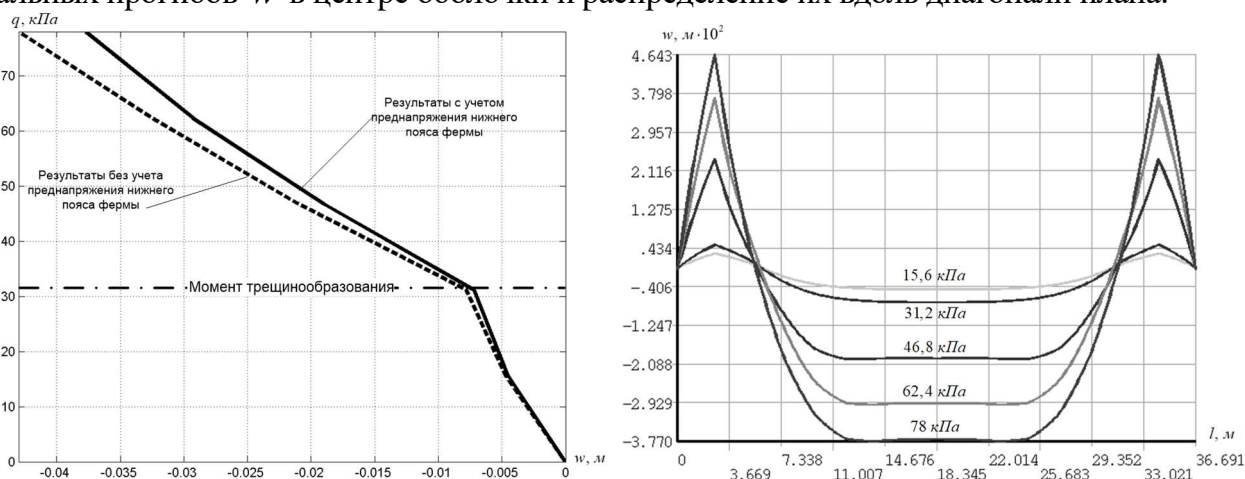


Рисунок 9 – Прогибы $w(q)$ в оболочке

Из графика видно, что чувствительность материала к виду напряжённого состояния, трещинообразование и пластические деформации в арматуре имеют существенное влияние на оценку параметров НДС по сравнению с расчётом без принятия во внимание «усложненных» свойств.

3. *Определение НДС цилиндрических оболочек следующих конфигураций:*

– жёстко защемлённая вдоль образующих цилиндрическая оболочка с размерами в плане 24x12 м из бетона с прочностью на сжатие $R^- = 28,4 \text{ МПа}$. Толщина оболочки 0,095 м; высота подъёма 2,5 м; интенсивность равномерно распределённой нагрузки q

от 0 до 40 кПа (учитывался собственный вес). Армирование оболочки: в срединной поверхности оболочка армирована сеткой из стержней класса А300 диаметром 10 мм, параллельных образующей оболочки и перпендикулярных к ней. Кроме того, в угловых зонах располагалась косая арматура класса А240 диаметром 6 мм;

– свободно опертая вдоль образующих цилиндрическая оболочка с размерами в плане 6x12 м; бетон с прочностью на сжатие $R^- = 28,4 \text{ МПа}$. Толщина оболочки 0,07 м; высота подъёма 1,8 м; интенсивность равномерно распределённой нагрузки q от 0 до 35 кПа (учитывался собственный вес). Армирование оболочки: в срединной поверхности оболочка армирована сеткой из арматуры класса А300 диаметром 10 мм параллельной образующим оболочки. Кроме того, в угловых зонах располагалась косая арматура класса А240 диаметром 6 мм.

Расчёт проводился с учётом эффектов нелинейной разносопротивляемости и без них. Разница в результатах по перемещениям достигала 33%. Анализ результатов расчёта показал, что учёт «усложнённых свойств» и повреждаемости, позволяет заметно уточнить фактическое НДС для оболочечных конструкций. Здесь зафиксированы известные факты и обнаружены новые эффекты деформирования.

Расчёт характеристик грунтового основания. Используя экспериментальные данные, приведённые в работах А.Н. Ставрогина и А.Г. Протосени, получены константы потенциала (1) для четырёх слоёв типов грунта: известняк, талькохлорит-1, кварцевый диорит Д-2, песчаник П-026. На рис. 10–12 показаны экспериментальные данные (точки) и их аппроксимации (пунктир), в соответствии с алгоритмом предложенным А.А. Трещёвым. Испытывались стандартные образцы в условиях сжатия по 1-ой оси с боковым поджатием.

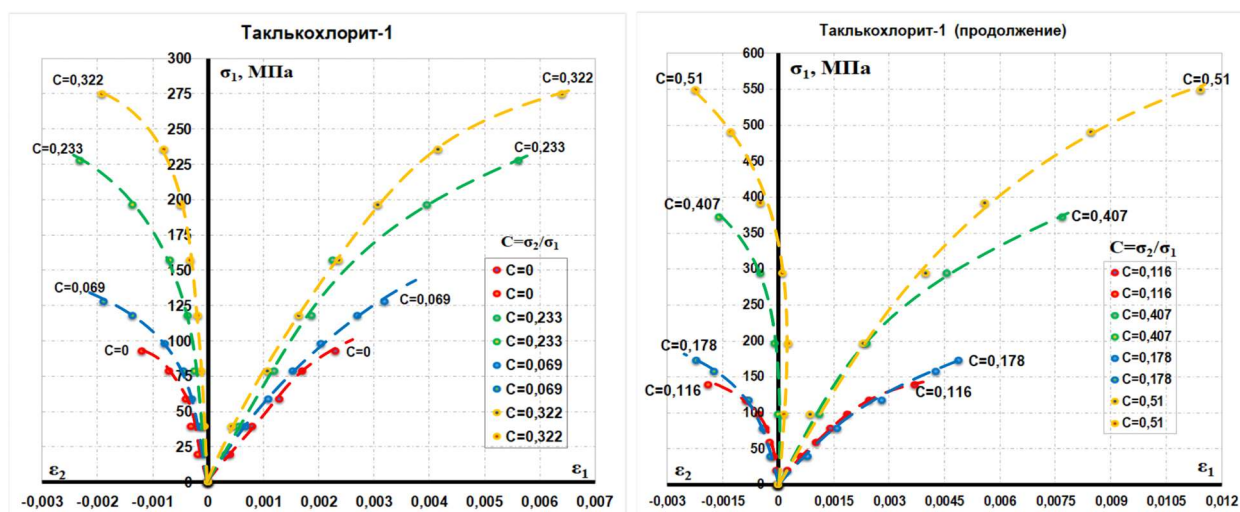


Рисунок 10 – Талькохлорит-1, диаграммы деформирования и их аппроксимации

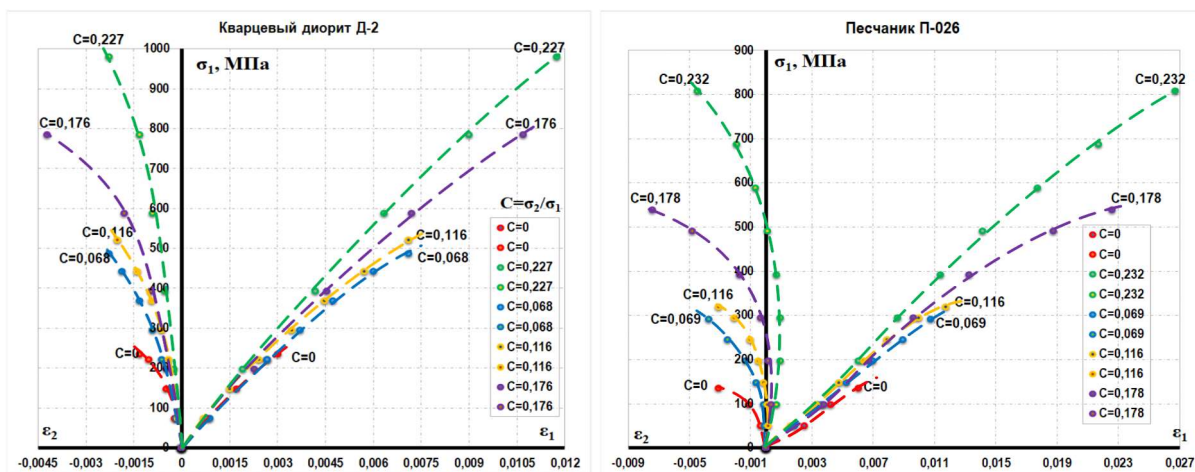


Рисунок 11 – Кварцевый диорит Д-2 и песчаник П-026

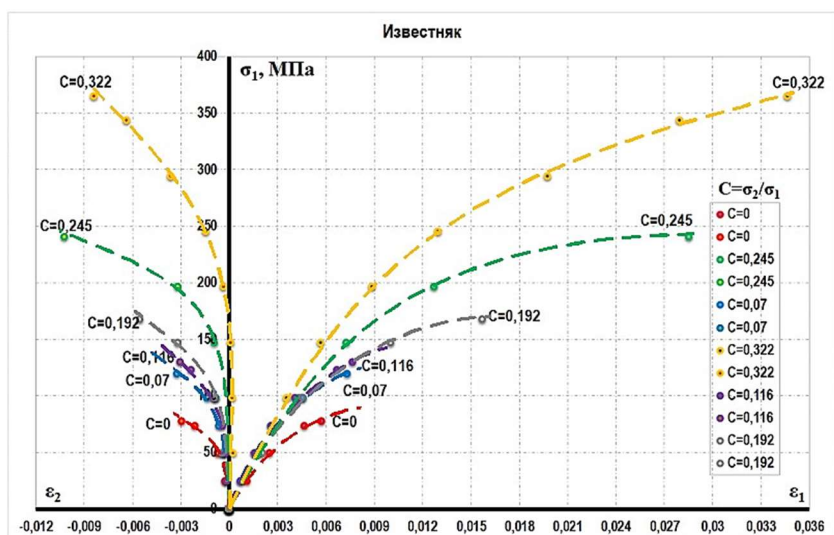


Рисунок 12 – Известняк, диаграммы деформирования и их теоретические аппроксимации

Расчёт штампа на грунтовом основании. Выполнено решение модельной задачи о давлении штампа на деформируемое основание, показанное на рис. 13. Кластер грунта жёстко закреплён по контуру со всех сторон, кроме верха. Четыре слоя грунта: известняк – 4 м, талькохлорит-1 – 10 м, кварцевый диорит Д-2 – 5 м, песчаник П-026 – 6 м. Расчёт выполнен для трех вариантов: 1) теория деформирования начально-изотропных нелинейных разносопротивляющихся материалов; 2) расчёт с учётом явно заданных нелинейных диаграмм деформирования в ANSYS; 3) расчёт с усреднёнными механическими характеристиками (расчёт без учёта разносопротивляемости). На рис. 14 показана осадка по линии, вдоль оси OY, (см. рис. 13) на поверхности кластера, при максимальной нагрузке q на штамп (от 0 до 3,468 МПа). Показано, что разница в вычисленных величинах осадки при нагрузке $q=3,468$ МПа, достигает 97% по отношению к расчёту с усреднёнными характеристиками и 27% по отношению к расчёту в среде ANSYS.

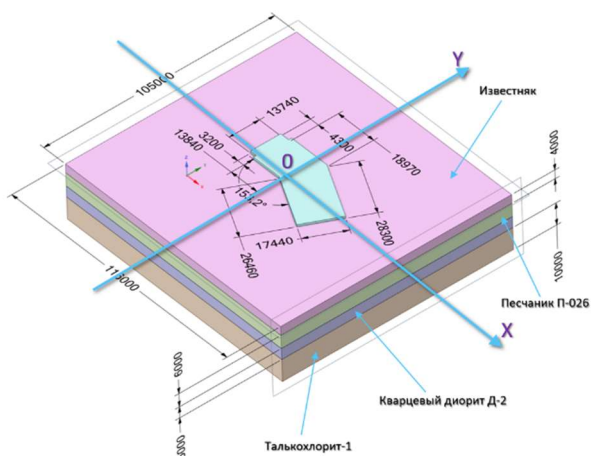


Рисунок 13 – Схема штампа на грунтовом основании

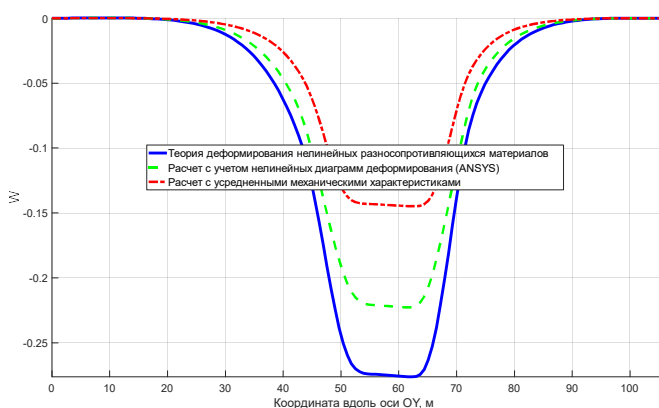


Рисунок 14 – Осадка в грунте W по оси OY, м (см рис. 13)

Далее предлагается алгоритм решения прикладных задач по расчёту НДС пространственного каркаса железобетонного здания на многослойном основании. Решена задача о расчёте деформированного состояния многоэтажного здания на начально изотропном деформируемом основании, под действием нагрузки (приведенной к статической) в двух направлениях, полезной на перекрытия и эмулирующей ветровую.

Здание содержит 25 этажей, имеющих одинаковую планировку (рис. 15), внешний вид здания в виде 3D модели показан на рис. 16.

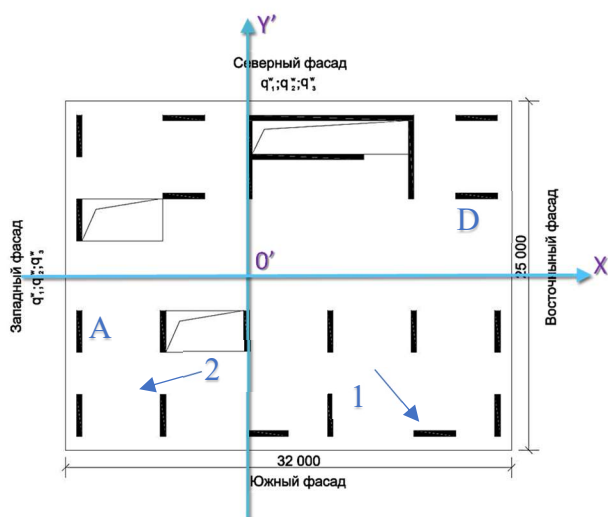


Рисунок 15 – План этажа

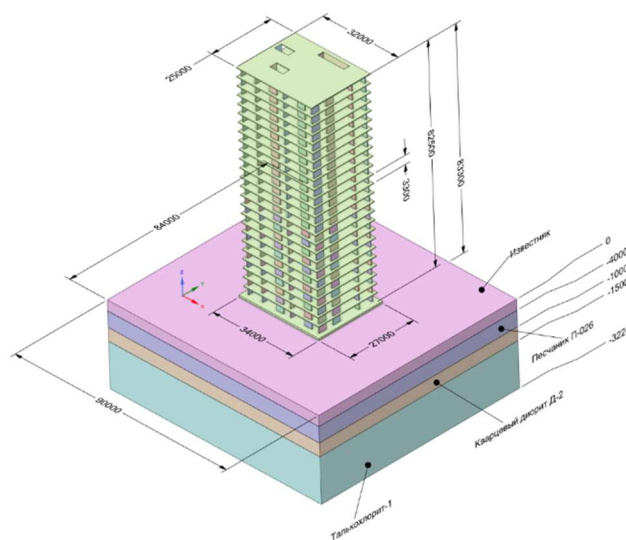


Рисунок 16 – Общий вид здания

В качестве основного материала здания использовался бетон с пределом прочности на сжатие $R^- = 28,4$ МПа. Армирование фундаментной плиты принято стержнями А400 диаметром 16 мм в виде сетки, расположенной симметрично в сечении плиты (защитный слой 40 мм, предел текучести $\sigma_p = 400$ МПа); армирование плит перекрытия принято стержнями А400 диаметром 12 мм в виде сетки, расположенной симметрично в сечении плиты (защитный слой 32 мм, предел текучести $\sigma_p = 400$ МПа); армирование пилонов принято стержнями А400 диаметром 12 мм в виде двух сеток, симметрично расположенных в сечении пилона (защитный слой 35 мм, предел текучести $\sigma_p = 400$ МПа).

Таблица 1 – Виды нагрузки и значения её параметров

Нагрузка	Шаг нагрузки		Максимальная величина нагрузки	
	Па	кН/м	Па	кН/м
Единицы измерения:				
На покрытие – q_{rf}	50	-	5000	-
На этаж – q_{fl}	40	-	4000	-
ЮГ Ветровая 1 – q_1^w	0,712	0,230	712	2,30
ЮГ Ветровая 2 – q_2^w	0,635	0,210	635	2,10
ЮГ Ветровая 3 – q_3^w	0,495	0,163	495	1,63
ЗАПАД Ветровая – q_1^w	0,712	0,230	712	2,30
ЗАПАД Ветровая 2 – q_2^w	0,609	0,201	609	2,01
ЗАПАД Ветровая 3 – q_3^w	0,530	0,175	530	1,75

При расчёте принимались следующие допущения: 1) расчётная модель здания состоит только из горизонтальных и вертикальных несущих элементов монолитного железобетонного остова, междуэтажных перекрытий и пилонов; 2) толщина всех междуэтажных перекрытий принята одинаковой и равной 220 мм (толщина фундаментной плиты 600 мм); 3) толщина всех пилонов по высоте здания принимается одинаковой и равной 300 мм; 4) все узлы сопряжения элементов несущего остова между собой

приняты жёсткими; 5) деформирование горизонтальных и вертикальных элементов несущего каркаса происходит с учётом процессов разрушения; 6) деформируемое основание моделируется на основе определяющих соотношений (1) (см. рис. 10-12).

Проведённый численный эксперимент по решению задачи об определении НДС здания позволяет объективно утверждать, что данная модель обладает некоторыми преимуществами перед существующими, реализованными в популярных САПР (САЕ – систем). Модель позволяет учесть зависимость физико-механических свойств материала от значений компонент тензора напряжений, повреждаемость, пластические деформации в арматуре; построенный КЭ получен в форме удобной для его программной реализации, что и было продемонстрировано в данной работе; учитывается работа основания. Неучёт «усложнённых» свойств приводит к значительным погрешностям при вычислении основных характеристик НДС строительных конструкций. Для получения достоверных результатов инженерных расчётов и предотвращения возникновения аварийных состояний, необходимо максимально полно и точно, учитывать механическую работу материалов, в данном случае, железобетона и грунтов основания.

На рис. 17-18 приведены результаты расчёта перемещений для точек плиты перекрытия и пилонов верхнего 25-ого этажа (см. рис. 15), которые сравниваются с результатами, полученными в системе ANSYS по нелинейным диаграммам деформирования и с расчётом без учёта свойств разносопротивляемости (с усреднёнными характеристиками). Разница по вертикальным перемещениям, в зависимости от модели расчета, достигает величины в 19%, по горизонтальным 22%. Нагрузку на рисунках представлена в нормализованном виде.

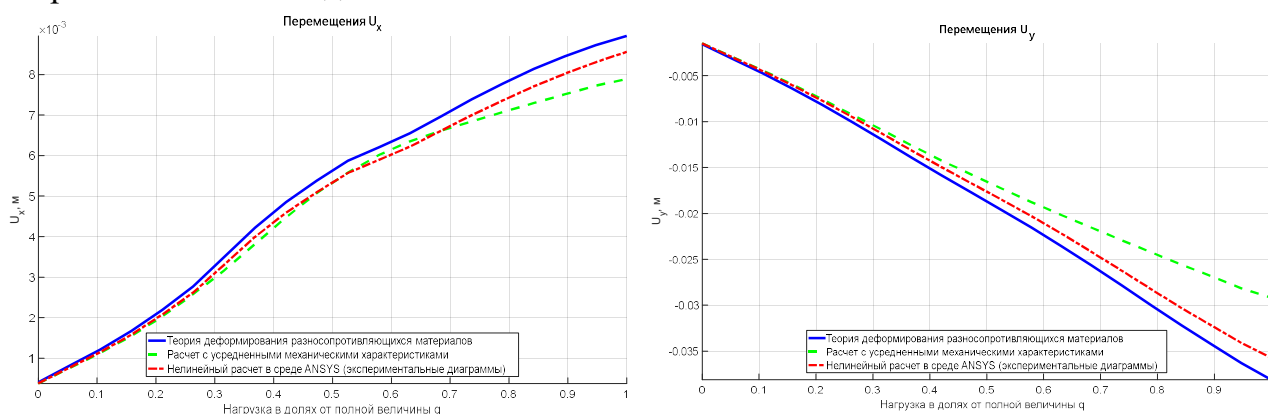


Рисунок 17 – Горизонтальные перемещения по осям Ox и Oy в пилонах A (слева) и D (справа) (см. рис. 15) 25 этажа, m

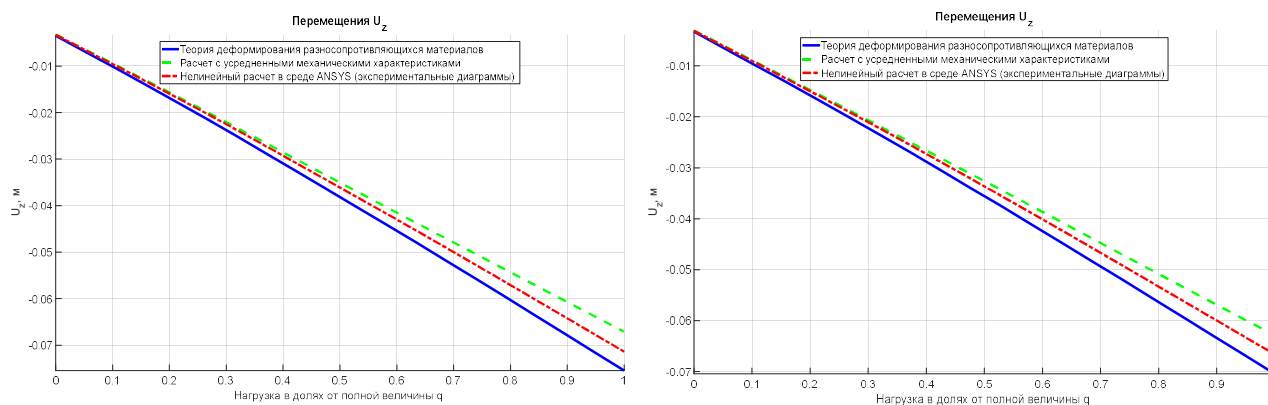


Рисунок 18 – Вертикальные перемещения в точках 1 и 2 (см. рис. 15) от нагрузки, m

В пятом разделе рассматривается разрешающая система уравнений МКЭ для задач связанной термоупругости. При малых изменениях температур $\theta/T_0 \ll 1$ её можно представить в общем матричном виде:

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [C^{tu}] & [C^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{T}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ [0] & [K^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix}, \quad (71)$$

где $[C^{tu}] = -T_0 [K^{ut}]^T$ – элемент матрицы термоупругого затухания;

$[K^{ut}] = -\iiint_{vol} [B]^T \{\beta\} ([C]^T) dx \cdot dy \cdot dz$ – термоупругая составляющая матрицы жёсткости;

$\{\dot{T}\}$ – вектор скоростей изменения температур (для аппроксимации производных по времени будем применять неявную разностную схему);

$\{\beta\} = [D]\{\chi\}$, $\{\chi\}$ – столбец коэффициентов линейного теплового расширения материала по направлениям координатных осей, записанных с учётом зависимости от вида напряжённого состояния,

$\{\chi\} = \left\{ \frac{b_{i1}\xi\sigma_{11}}{3\sigma} + \frac{1}{3}b_{i2} \quad \frac{b_{i1}\xi\sigma_{22}}{3\sigma} + \frac{1}{3}b_{i2} \quad \frac{b_{i1}\xi\sigma_{33}}{3\sigma} + \frac{1}{3}b_{i2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T$; $\{\dot{u}\}$ – вектор скоростей изменения перемещений;

$[C^t] = \rho \iiint_{vol} C_\sigma \{C\} \{C\}^T dx \cdot dy \cdot dz$ – элемент матрицы температурного затухания; $[C]$ – матрица интерполяционных функций; C_σ – теплоёмкость материала при постоянном давлении,

$[K] = \iiint_{vol} [B]^T [D][B] dx \cdot dy \cdot dz$ – матрица жёсткости КЭ в виде тетраэдра при механическом нагружении; $[B]$ – матрица деформаций, $[D]$ – матрица упругости;

$[K^t] = \iiint_{vol} [B_T]^T [D_T][B_T] dx \cdot dy \cdot dz$ – элемент матрицы теплопроводности; $[B]_T = \{L\}\{C\}\{C\}^T\{T\}$; $\{L\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}^T$ – вектор–оператор;

$\{u\}$ – вектор перемещений; $[D_T] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, λ – коэффициент теплопроводности; $\{T\}$ – вектор температур; $\{F\}$ – вектор узловых механических нагрузок; $\{Q\}$ – вектор узловых температурных нагрузок.

Для учёта эффектов разнсопротивляемости при определении матрицы жёсткости $[K]$ вычисляем матрицу упругости $[D]$ на основе предложенного потенциала Гиббса (6) (без температурной составляющей) по формуле:

$$e_{ij} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{ij}} = A_{ijkm} \sigma_{km}; \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3), \quad [A_{ijkm}] = [D]^{-1}. \quad (72)$$

Далее рассмотрен алгоритм и результаты расчётов по деформируемой схеме **оболочек положительной гауссовой кривизны** прямоугольных и круглых в плане, выполненных из изотропных существенно нелинейных разнсопротивляющихся материалов. Решение получено **в связанной постановке**. Алгоритм решения задачи реализован в среде MATLAB.

Для определения степени влияния рассматриваемых физических эффектов на НДС конструкций проводилось решение задач согласно шести моделям: модель № 1 – пошаговый расчёт по деформируемой схеме для существенно нелинейной разнсопротивляемости; модель № 2 – пошаговый расчёт по деформируемой схеме для квазилинейной разнсопротивляемости Н.М. Матченко и А.А. Трещёва; модель № 3 – расчёт по недеформируемой схеме для существенно нелинейной разнсопротивляемости; модель № 4 – пошаговый расчёт по деформируемой схеме для линейной термоупругости с использованием осреднённых характеристик материала; модель № 5 – пошаговый расчёт по деформируемой схеме для существенно нелинейной разнсопротивляемости без температуры. Дополнительно для модели № 1 проводилось сравнение решений в связанной и несвязанной постановках.

Была рассчитана жёстко опёртая квадратная в плане оболочка положительной гауссовой кривизны. Размер в плане 1x1 м, толщина 0,04 м, стрела подъёма 0,1 м, радиус кривизны нижней поверхности оболочки 2,55 м. На нижней поверхности температура повышалась на 20 К, на верхней понижалась на 30 К. Помимо перепада температур на прямоугольном участке верхней поверхности, расположенном с эксцентриситетом относительно оси симметрии оболочки, прикладывалась равномерно распределённая внешняя нагрузка интенсивностью от 0 до 400 кПа.

Дополнительно рассчитывалась пологая сферическая оболочка радиусом кривизны 6,5 м, радиусом в плане 1 м со стрелой подъёма 0,08 м и толщиной 0,06 м. К оболочке прикладывалась нагрузка в виде равномерно распределённого давления интенсивностью от 0 до 10 кПа при свободном опирании и от 0 до 80 кПа при жёстком опирании по контуру. На нижней поверхности температура понижалась на 20 К, на верхней повышалась на 30 К.

Константы нелинейных потенциалов вычислялись по методике, изложенной в главе 2. В качестве материала применялся графит АРВ с характеристиками: коэффициент линейного температурного расширения при одноосном растяжении $\alpha_{11}^+ = 4 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, коэффициент линейного температурного расширения при одноосном сжатии $\alpha_{11}^- = 6 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, коэффициент линейного температурного расширения при отсутствии напряжений $\chi = 5 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, теплоёмкость при постоянном напряжении $C_\sigma = 500 \text{ Дж} / (\text{кг} \cdot K)$, плотность $\rho = 1700 \text{ кг} / \text{м}^3$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 150 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot K)$, начальная температура $T_0 = 293 K$. Для расчёта по квазилинейной теории разнсопротивляемости Н.М. Матченко и А.А. Трещёва использовались: модуль упругости при растяжении $E^+ = 3750 \text{ МПа}$, модуль упругости при сжатии $E^- = 6130 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона при растяжении $\nu^+ = 0,2$, коэффициент Пуассона при сжатии $\nu^- = 0,35$.

На рис. 19-20 представлены отдельные результаты для жёстко опертой оболочки положительной гауссовой кривизны, на рис. 21-22 – для пологой сферической оболочки и свободном опирании.

Были выявлены значительные поправки значений характеристик НДС за счёт учёта эффекта чувствительности материалов к виду напряжённого состояния. Решение по классическим уравнениям линейной термоупругости приводит к разнице величин нормальных напряжений до 46%. Результаты нелинейной и квазилинейной теорий разнсопротивляемости зачастую весьма близки, но в отдельных задачах расхождение доходит до 26%. Учёт деформируемости схемы проявляется для жёстко опёртых оболочек и приводит к корректировке нормальных напряжений до 26%. Влияние связанности полей напряжений и температур сказывается только в первые секунды нагружения, максимальные поправки при этом составляют 16%. Выявлено также влияние вида напряжённого состояния на скорость установления линейного распределения температур по толщине оболочки.

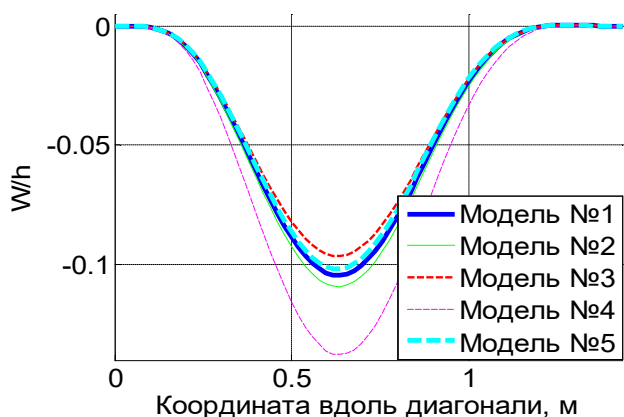


Рисунок 19 – Распределение прогибов вдоль диагонали квадратной оболочки

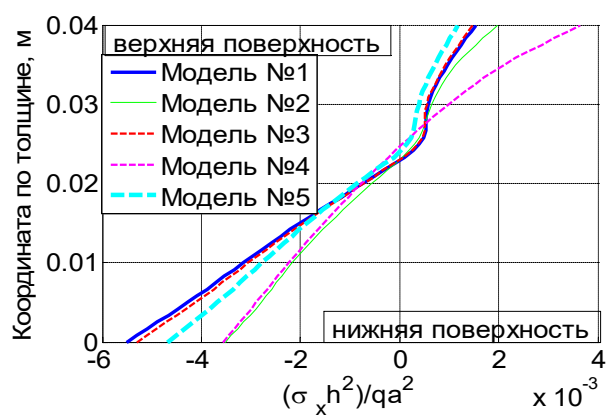


Рисунок 20 – Распределение напряжений σ_x по толщине в углу квадратной оболочки

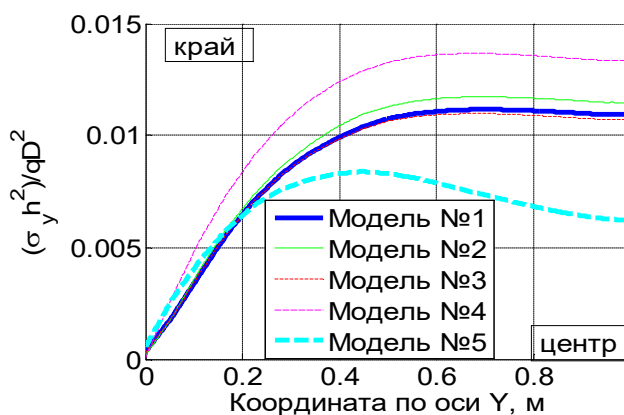


Рисунок 21 – Распределение напряжений σ_y вдоль радиуса свободно опертой оболочки

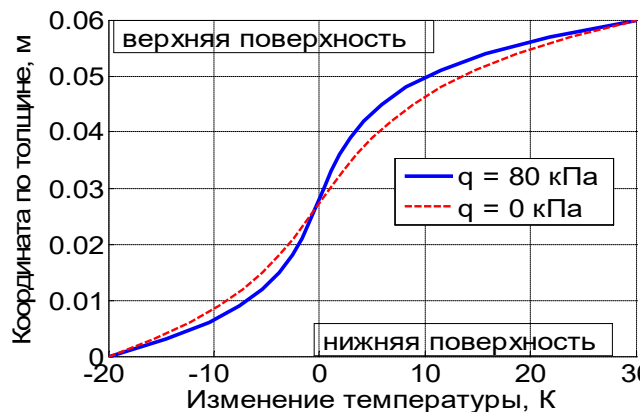


Рисунок 22 – Распределение температур по толщине оболочки в момент времени $t = 1$ с

Расчёт НДС армированных плит из нелинейных материалов с учётом воздействия химически активной среды. Проверка эффективности предложенной математической модели продолжилась решением прикладных задач по определению НДС в конструкциях, подверженных воздействию химически активной эксплуатационной среды. Рассчитываются армированные слоистые плиты с защитным полимербетонным слоем, воспринимающие механическую нагрузку вместе с негативным воздействием среды. Рассмотрены плиты из опытов W. Gehler и H. Amos, которые также анализировались в трудах Н.И. Карпенко. Плиты из указанных опытов были модифицированы, путём добавления в сжатую зону защитного слоя из специального эпоксидного тяжёлого полимербетона, который будет противостоять агрессивному воздействию внешней среды хлоридсодержащей среды. Для рассмотренного выше плоского КЭ введем описание дополнительного фиктивного слоя.

Неармированные слои двойного назначения (полимербетонные слои), контактирующие с агрессивной средой. Моделирование осуществляется по аналогии с работами В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, О.В. Пениной и П.В. Селяева в области исследования влияния агрессивных сред на конструкционные материалы с учётом теории малых упругопластических деформаций А.А. Ильющина (при соответствующих изменениях).

Глубину слоя, поражённого агрессивной средой, примем в виде функции:

$$\delta(t) = \alpha\sqrt{t}, \quad (73)$$

где t – время воздействия агрессивной среды, α – экспериментальный коэффициент, зависящий от конкретной пары «материал – среда». С учётом процесса деградации материала выражения переменных, секущего E_c и касательного E_k модулей примут вид:

$$E_c = E_c^0 F(B(z)); \quad E_k = E_k^0 F(B(z)), \quad (74)$$

здесь z – координата, перпендикулярная срединной плоскости в направлении толщины пластинки; $B(z)$ – концентрация агрессивной среды, $F(B)$ – функция деградации модуля деформаций. Теперь функция деградации может быть представлена в форме

$$\omega_{pb} = F(B(z)) = \exp(-\lambda B(z)), \quad (75)$$

где $-\lambda = \frac{F'(B)}{F(B)}$ – относительная скорость изменения секущего и касательного модулей, $F'(B)$ – скорость деградации.

Связь деформаций и напряжений записывается следующим образом:

$$\{e^s\} = [A^s] \{\sigma^s\}, \quad (76)$$

$$\{e^s\} = \begin{Bmatrix} e_{11}^s \\ e_{22}^s \\ \gamma_{12}^s \\ \gamma_{13}^s \\ \gamma_{23}^s \end{Bmatrix}; [A^s] = \begin{bmatrix} A_{11}^s & A_{12}^s & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22}^s & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66}^s & 0 & 0 \\ Sim & & & A_{44}^s & 0 \\ & & & & A_{55}^s \end{bmatrix}; \{\sigma^s\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^s \\ \sigma_{22}^s \\ \tau_{12}^s \\ \tau_{13}^s \\ \tau_{23}^s \end{Bmatrix}. \quad (77)$$

Здесь компоненты матрицы $[A^s]$ вычисляются согласно общему модельному представлению:

$$A_{11}^s = A_{22}^s = \frac{1}{E_c \omega_{pb}}; A_{12}^s = -\nu_b / (E_c \omega_{pb}); A_{44}^s = A_{66}^s = A_{55}^s = \frac{2(1+\nu_b)}{(E_c \omega_{pb})}; E_c = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad (78)$$

где σ_i – интенсивность напряжений, ε_i – интенсивность деформаций. Модуль деформации полимербетона определим величиной $E_c \omega_{pb}$, где ω_{pb} – функция, характеризующая степень коррозионного повреждения $0 < \omega_{pb} \leq 1$. Матрицу «жёсткости» слоя определим следующим образом: $[B^s] = [A^s]^{-1}$.

В табл. 2 приведены исходные данные для изгибаемых слоистых плит с учётом их модификации. Модуль упругости арматурной стали принят равным $E_s = 2 \times 10^5$ МПа. Защитный слой состоит из эпоксидного бетона, начальный модуль упругости которого на основании нормативной литературы равен $E_b = 3,2 \times 10^5$ МПа. Агрессивная среда – 20% раствор NaCl, с плотностью $\rho = 1,2192 / \text{см}^3$. Константы потенциала (1) для бетона пластин $R^- = 28,4$ МПа указаны выше (17).

Таблица 2 – Значения параметров геометрии и материалов пластин

№ плит	Размеры пластин, м	Предел текучести для арматуры, МПа	Коэффициенты армирования		Число фиктивных слоёв по толщине	Толщина полимербетонного слоя, мм
			μ_{11}	μ_{22}		
771	3×1,5×0,189	320	0,0137	0,0092	38	40
825	2×2×0,152	480	0,0122	0,0122	42	30
844	2×2×0,106	480	0,0146	0,0167	36	20
863	3×2×0,151	428	0,0117	0,0117	34	30

Граничные условия для пластин приняты в обозначениях диссертационной работы. Для пластины № 1 (плита № 711): $w_i = 0$ в узлах по осям ОХ и ОУ; для пластин № 2, № 3, № 4 (плиты № 825, № 844, № 863): в угловых точках разрешены все перемещения, в других точках: 1) по сторонам, параллельным оси ОХ $w_i = 0, \psi_{1i} = 0$, 2) по сторонам, параллельным оси ОУ $w_i = 0, \psi_{2i} = 0$.

Приведённые графики моментов и перемещений показывают наличие значимых эффектов, связанных с учётом чувствительности механических свойств материала к виду напряжённого состояния и влияния химически активной эксплуатационной среды. Из графиков следует, что по мере увеличения концентрации агрессивной среды в материале величина прогиба плиты увеличивается на 24%, а значение моментов, воспринимаемых плитой, уменьшается на 25–28%.

Некоторые характерные результаты расчётов для плиты № 1 (плита № 711) приведены на рис. 23–24.

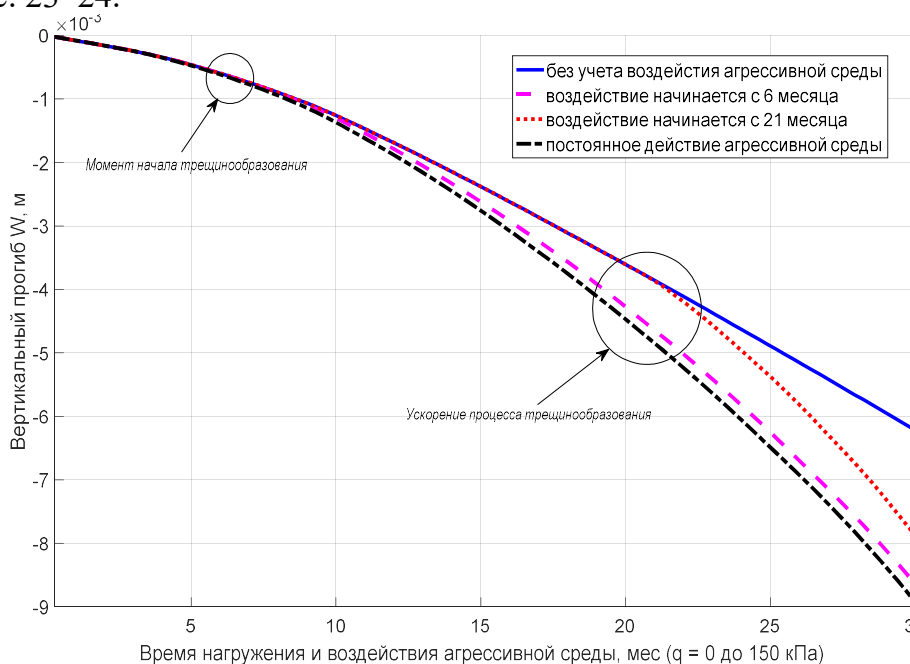


Рисунок 23 – Зависимость величин вертикальных перемещений от момента начала и длительности последующего действия химически активной внешней среды

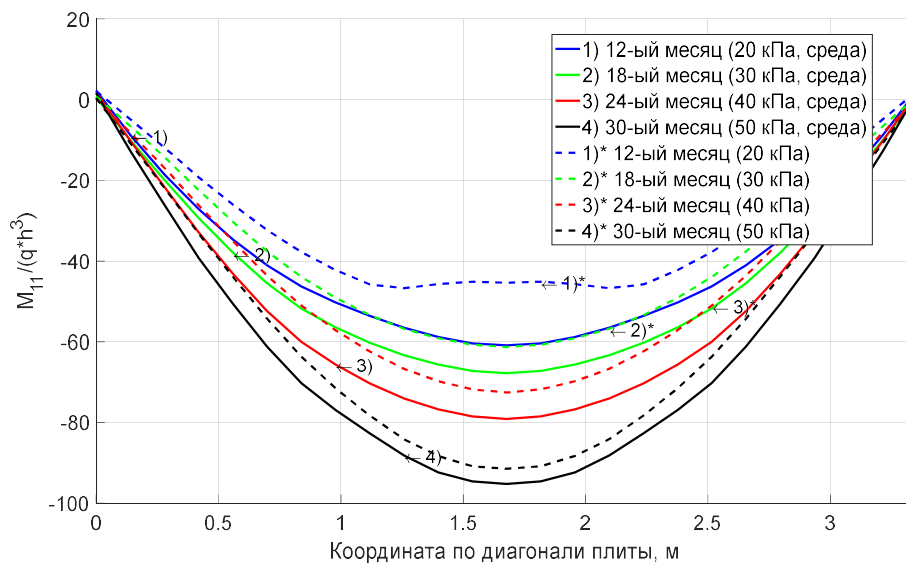


Рисунок 24 – Распределение значений усилий M_{11} вдоль диагонали плиты

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

На основе проведённого в первом разделе диссертации анализа известных экспериментальных данных показано, что характер упругопластического деформирования многих конструкционных материалов не соответствует гипотезе «единой кривой» и деформирование их может происходить по дилатационному принципу. Такие материалы можно отнести к материалам с «усложнёнными» свойствами, физико-механические характеристики которых проявляют значимую зависимость от вида и количественных значений параметров текущего напряжённого состояния в точке среды материала. На основе обзора результатов экспериментов и существующих определяющих соотношений для разносопротивляющихся и дилатирующих материалов показано, что эти два специфические свойства их механической природы во многом взаимосвязаны и зачастую выступают в качестве внешних проявлений сложной структуры. Показано также, что большинство известных определяющих соотношений для материалов с усложнёнными свойствами не учитывают важных особенностей их деформирования, что вносит определённые модельные ограничения на характеристики материалов или приводит к значительным погрешностям получаемых аппроксимаций экспериментальных данных. Решение прикладных задач строительной механики с учётом нелинейной механики материалов требует применения достаточно универсальных и надёжных определяющих соотношений, а также усовершенствования известных методов решения этих задач.

Полученные в диссертационной работе результаты указывают на то, что предложенный в диссертационной работе подход на базе определяющих соотношений для нелинейно деформируемых материалов с неклассическими свойствами и специально ориентированные на их использование численные методы решения практически важных задач определения НДС пространственных конструкций, в том числе комбинированных, могут служить удовлетворительной основой для исследования деформирования сложных элементов конструкций, выполненных из подобных материалов.

Итоги результатов диссертационного исследования могут быть представлены следующими выводами:

1. На основе предложенных определяющих соотношений проанализированы данные экспериментов для достаточно широкого круга нелинейных разносопротивляющихся материалов. Показано, что используемая форма потенциальных соотношений обладает достаточной точностью аппроксимации механического поведения этих материалов и позволяет, в целом, более эффективно вычислять характеристики НДС конструкций из материалов указанного класса.

2. На основе подхода, связанного с нормированными пространствами напряжений и определяющими соотношениями для начально-изотропных материалов, обладающих свойствами разносопротивляемости, получены аппроксимации для механического поведения ряда грунтов, в том числе скальных пород, что позволило исследовать деформирование упругих оснований и сформировать единую универсальную модель исследования прочности зданий и сооружений на деформируемом основании в условиях их совместной работы, как того требует «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» от 30.12.2009 № 384-ФЗ.

3. Выполнен обзорный анализ теоретических и экспериментальных работ по влиянию химически активных эксплуатационных сред на изменение физико-механических свойств материалов, в том числе, на НДС конструкций из материалов со свойствами, зависимыми от компонентного состава тензора напряжений.

4. Рассмотрены известные теоретические подходы и экспериментальные исследования по определению НДС несущих элементов строительных конструкций в условиях температурного воздействия. Проанализированы аспекты развития теоретических

моделей термоупругости, описывающих процессы теплопроводности в условиях деформирования, ограниченность скоростей распространения термоупругих волн, влияние температуры на механические свойства материалов несущих элементов, варианты постановок задач. Установлено, существует проблема точности представления НДС термоупругого деформирования значимо нелинейных изотропных материалов.

5. Построен плоский треугольный гибридный многослойный конечный элемент, обеспечивающий решение задач об исследовании элементов пространственных конструкций, выполненных из материалов с усложнёнными свойствами, для которых допустимо представление в виде ансамбля плоских элементов, в том числе с учётом разрушения и воздействия химически активной среды.

6. Построена теоретическая модель для решения задач связанной термоупругости. Для этого была использована модификация нелинейного термодинамического потенциала Гиббса в нормированном пространстве напряжений. Эта модель легла в основу вывода уравнений объёмного конечного элемента (тетраэдра) новой модификации, который позволил определить значения характеристик НДС некоторых прикладных задач с помощью разработанного на его основе программного обеспечения. Алгоритм решения задач включает учёт влияния компонентного состава тензора напряжений на термомеханические свойства применяемых материалов.

7. Для решения задач определения НДС многослойного грунтового основания построен новый объёмный конечный элемент изопараметрического типа с 12 поступательными степенями свободы в узлах и матрицей жёсткости, параметры которой могут отображать механические свойства слоёв основания.

8. Проведённые исследования позволили отыскать принципиально новое решение для проблемы деформирования разносопротивляющихся материалов, а главное, методологии внедрения современных модификаций МКЭ в инженерную практику. Разработана математическая модель и программный комплекс, ориентированные на решение задач по исследованию НДС элементов макрооднородных и армированных конструкций, выполненных из материалов, чьи механические свойства зависят от вида напряжённого состояния, с учётом разрушения и пластических деформаций в арматуре, в том числе, совместно с многослойным деформированным основанием, с учётом температурного воздействия и влияния химически активной среды.

9. Решена задача об определении НДС трубчатых элементов при чистом кручении. Сравнение с экспериментальными данными и теорией Н.И. Карпенко свидетельствует об адекватности разработанной механико-математической модели, правильности работы разработанного алгоритма и его реализации на ЭВМ, а также возможности использования этой модели для решения задач об определении НДС железобетонных оболочек.

10. Проведён расчёт двух разомкнутых цилиндрических оболочек, жёстко защемлённой вдоль образующих, и опёртой шарнирно, а также задача определения характеристик НДС для оболочки положительной гауссовой кривизны, опёртой на типовые фермы. Анализ результатов решения этих задач подтвердил, что учёт усложняющих поведение материала свойств даёт значительный эффект при проведении статических расчётов. В частности, различия в перемещениях составили до 70% по сравнению с расчётами без учёта усложнённых свойств бетона; разница по напряжениям составила до 50%.

11. Выполнен расчётный анализ воздействия химически активной среды на несущие элементы типа армированная «многослойная плита», защищённая полимербетоном. Постановка задачи включает учёт деградации защитных слоёв, разносопротивляемость бетона и наличие повреждаемости (трещинообразования). Полученные результаты расчётного моделирования показали, что указанные факторы нелинейности оказывают значимое влияние на НДС

элемента: за счёт развития повреждений и увеличения периода агрессивного воздействия прогибы возросли с 17% до 35%; максимальные напряжения увеличили значения с 20% (за 12 месяцев) до 48% (за 24 месяца) при снижении сопротивляемости плит по изгибающему моменту на 25–28%; деградация защитного слоя ускорила процесс развития повреждённости.

12. Решены новые постановки задач связанной термоупругости для материалов, свойства которых зависимы от компонентного состава тензора напряжений. Объектами расчётного моделирования стали оболочки круглая и прямоугольная в плане. Обе имеют положительную кривизну Гаусса.

Анализ значений НДС решённых задач показал: нелинейность определяющих соотношений вносит изменения до 26% (при прочих равных); связности напряжений и температур вносит изменения: в значения нормальных напряжений – до 12%; нелинейная разнсопротивляемость изменяет: прогибы не более, чем на 28%, горизонтальные перемещения – до 33%, нормальные напряжения – до 46%, касательные напряжения – до 15%; расчёт по деформируемой схеме изменяет прогибы – до 8%, горизонтальные перемещения – до 3%, нормальные напряжения – до 26%, касательные – до 10%.

13. Выполнены количественная и качественная оценки результатов расчётного моделирования с помощью конечно-элементной модели, состоящей из плоских треугольных и трёхмерных (в форме тетраэдра) конечных элементов, высотного здания как призматической оболочки. Анализ полученных результатов позволил установить необходимость учёта разнсопротивляемости материала на всех стадиях работы конструкции, в том числе, при совместной работе с деформируемым основанием. Показано, что учёт особых, неклассических эффектов, работы материалов, в том числе в железобетоне, позволяет получить уточнения значений различным характеристикам НДС до 25–30%, что зависит от их значений, получаемых в рамках упрощённых подходов к работе основания и бетона в составе несущих элементов.

14. Построены разрешающие уравнения для определения НДС тонких пластинок в условиях плоского напряжённого состояния при условиях: материал – начально-изотропной разнсопротивляющийся, повреждённость – трещины сдвига и нормального разрыва. Показано, что разница по напряжениям при учёте разнсопротивляемости и без её учёта может достигать 45% и более.

СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и Web of Science

1. Treschov, A.A. Modeling stress-strain state thick cylindrical shells made of materials with complicated properties / A.A. Treschov, **V.G. Telichko**, P.Y. Khodorovich // *Materials Physics and Mechanics*. – 2014. – V. 21. – № 1. – Pp. 38–50.

2. Shafigullin, L.N. Calculation of reinforced concrete shell of positive gaussian curvature, given different resistance of concrete and cracking / L.N. Shafigullin, A.A. Treschev, **V.G. Telichko**, Erofeev V.T. // *Astra Salvensis*. – 2017. – V. 2017. – Pp. 77–91.

3. Treschev, A.A. The analysis of stress-strain state of multi storied building made of cast reinforced concrete with consideration of effects of different resistance and cracking / A.A. Treschev, **V.G. Telichko**, N.V. Zolotov [et al.] // *Revista Publicando*. – 2017. – V. 4. – № 13. Part 2. – Pp. 249–263.

4. Treschev, A.A. Determination of stress-strain state of reinforced slabs from non-linear material taking into account the influence of aggressive environment / A.A. Treschev, A.V. Bashkatov, **V.G. Telichko** [et al.] // *Scientific Review Engineering and Environmental Sciences*. – 2018. – V. 27. – № 4. – Pp. 488–503.

5. Zhuravlev, G.M. The development of a mathematical complex for modeling the progress of destruction of composite structures based on high-speed deformation models / G.M. Zhuravlev, **V.G. Telichko**, N.S. Kurien [et al.] // *Chebyshevskii Sbornik*. – 2020. – V. 21. – № 3. – Pp. 292–305.

Публикации в рецензируемых журналах и изданиях, рекомендованных ВАК РФ

6. **Теличко, В.Г.** Гибридный конечный элемент для расчёта плит и оболочек с усложнёнными свойствами / В.Г. Теличко, А.А. Трещёв // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. – 2003. – № 5 (533). – С. 17–23.

7. **Теличко, В.Г.** Гибридный конечный элемент для моделирования пространственных машиностроительных конструкций с усложнёнными свойствами / В.Г. Теличко, А.А. Трещёв // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2004. – № 1. – С. 61–65.

8. **Теличко, В.Г.** Определение напряжённо-деформированного состояния трубчатых железобетонных оболочек при чистом кручении методом конечных элементов / В.Г. Теличко, Трещёв А.А. *Изв. вузов. Строительство*. – 2008. – № 6 (594). – С. 11–19.

9. Петров, А.А. Моделирование напряжённо-деформированного состояния тонких пластин из разносопротивляющихся материалов в условиях термомеханического нагружения / А.А. Петров, **В.Г. Теличко**, А.А. Трещёв // *Изв. вузов. Строительство*. – 2009. – № 1 (601). – С. 25–30.

10. Трещёв, А.А. Расчёт напряжённо-деформированного состояния железобетонной оболочки положительной гауссовой кривизны / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко** // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. – 2010. – № 2 (8). – С. 506–512.

11. Трещёв, А.А. Анализ определяющих соотношений для нелинейных изотропных разносопротивляющихся материалов в задачах термоупругости / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**, Д.С. Чигинский // *Изв. ТулГУ. Технические науки*. – 2011. – № 2. – С. 547–555.

12. Трещёв, А.А. Связанная задача термомеханического изгиба тонких прямоугольных пластин из изотропных разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**, Д.С. Чигинский // *Изв. ТулГУ. Технические науки*. – 2011. – № 2. – С. 494–502.

13. Трещёв, А.А. Моделирование напряжённо-деформированного состояния гибких слоистых пластин из анизотропных разносопротивляющихся материалов с учётом геометрической нелинейности / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**, Н.В. Васильев // *Изв. ТулГУ. Технические науки*. – 2011. – № 2. – С. 541–547.

14. Трещёв, А.А. Моделирование пространственных конструкций из разносопротивляющихся материалов 3D конечными элементами / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**, А.Н. Царёв // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. – 2012. – № 4 (14). – С. 74–82.

15. Трещёв, А.А. Конечно-элементная модель расчёта пространственных конструкций из материалов с усложнёнными свойствами / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**, А.Н. Царёв [и др.] // *Изв. ТулГУ. Технические науки*. – 2012. – № 10. – С. 106–114.

16. Трещёв, А.А. Термоупругий потенциал деформации для нелинейных материалов, находящихся в условиях термомеханического нагружения / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**, Д.С. Чигинский [и др.] // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. – 2012. – № 4 (14). – С. 66–74.

17. Трещёв, А.А. Изгиб прямоугольных пластин из ортотропного нелинейно-упругого разносопротивляющегося материала / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**, Д.А. Ромашин // *Строительная механика и расчёт сооружений*. – 2012. – № 6 (245). – С. 26–30.

18. Трещёв, А.А. Модель определения напряжённо-деформированного состояния толстых цилиндрических оболочек из разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещёв, А.Н. Царёв, **В.Г. Теличко** // *Строительная механика и расчёт сооружений*. – 2012. – № 2 (241). – С. 32–37.

19. Трещёв, А.А. Моделирование сферической оболочки из разносопротивляющегося графита 3d конечными элементами / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**, А.Н. Царёв [и др.]

др.] // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – № 3 (17). – С. 62–71.

20. Трещёв, А.А. Расчёт цилиндрических оболочек покрытий транспортных сооружений из материалов с усложнёнными свойствами / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**, П.Ю. Ходорович // Транспортное строительство. – 2014. – № 9. – С. 24–26.

21. Трещёв, А.А. Построение математической модели деформирования комплексной железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**, А.В. Башкатов // Вестник МГСУ, 2014. – № 3. – С. 126–132.

22. Делягин, М.Ю. Применение МКЭ для решения связанных задач термоупругости нелинейных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния / М.Ю. Делягин, **В.Г. Теличко**, А.А. Трещёв // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2014. – № 11-1. – С. 317–326.

23. **Теличко, В.Г.** К расчёту оснований методом конечных элементов / В.Г. Теличко, П.Ю. Ходорович // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2014. – № 11-1. – С. 341–346.

24. Башкатов, А.В. Моделирование напряжённо-деформированного состояния конструкций из железобетона и полимербетона с учётом влияния агрессивной среды / А.В. Башкатов, **В.Г. Теличко**, А.А. Трещёв // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – № 4 (22). – С. 80–88.

25. Трещёв, А.А. Определение напряжённо-деформированного состояния армированных плит из нелинейного материала с учётом воздействия агрессивных сред / А.А. Трещёв, А.В. Башкатов, **В.Г. Теличко** // Междун. журн. по расчёту граждан. и строит. констр. – 2016. – Т.12. – № 4. С. 147–152.

26. **Теличко, В.Г.** Прочность многоэтажного здания из монолитного железобетона с учётом разносопротивляемости и повреждаемости материала / В.Г. Теличко, Н.В. Золотов // Строительство и реконструкция. – 2018. – № 6 (80). – С. 22–31.

27. Treschev, A.A. Determination of strain-stress parameters of a multi-storey reinforced concrete building on an elastic foundation with allowance for different resistance of materials and cracking / A.A. Treschev, **V.G. Telichko**, N.V. Zolotov // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2019. – V. 15. – № 4. – Pp. 150–163.

28. **Теличко, В.Г.** Трещина сдвига при плоском напряжённом состоянии начально изотропной пластинки из композитного материала с учётом наведённой деформационной анизотропии / В.Г. Теличко // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 1 (32). – С. 29–38.

29. **Теличко, В.Г.** Трещина нормального отрыва при плоском напряжённом состоянии тонкой полубесконечной пластинки из композитного изотропного материала / В.Г. Теличко // Эксперт: теория и практика. – 2022. – № 3 (18). – С. 70–74.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

30. **Теличко, В.Г.** Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2021661108. Программа расчёта НДС конструкций, состоящих из стержневых и оболочечных элементов с учётом разносопротивляемости основного материала, армирования и разрушения FE_BEAM&SHELL / В.Г. Теличко, В.О. Кузнецова; правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (RU). Заявка № 2021619761 от 21.06.2021; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 06.07.2021.

31. **Теличко, В.Г.** Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2022617259. Расчёт напряжённо-деформированного состояния осесимметричной сферической оболочки с учётом кинетики наводороживания (FD_SPHERE) / В.Г. Теличко, В.О. Кузнецова; правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (RU). Заявка № 2022616634 от 12.04.2022; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 19.04.2022.

32. **Теличко, В.Г.** Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2022617551. Расчёт напряжённо-деформированного состояния цилиндрической оболочки вращения с учётом кинетики наводороживания (FD_CYLINDER) / В.Г. Теличко, В.О. Кузнецова; правообладатель: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет» (RU). Заявка № 2022616501 от 12.04.2022; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 22.04.2022.

Монография

33. Трещёв, А.А. Теория деформирования пространственных железобетонных конструкций: монография / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**. – М.; Тула: Изд-во РААСН: Изд-во ТулГУ, 2019 – 386 с. – ISBN 978-5-7679-4337-1.

Публикации в других изданиях

34. Трещёв, А.А. Напряжённо-деформированное состояние тонких прямоугольных пластин из разносопротивляющихся материалов в условиях термосилового нагружения / А.А. Трещёв, А.А. Петров, **В.Г. Теличко** // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2008. – № 1. – С. 110–117.

35. **Теличко, В.Г.** Исследование прочности при двухосном сжатии бетона класса В-25 / В.Г. Теличко, Л.А. Зиборов // Изв. ТулГУ. Технические науки. – 2009. – № 1-2. – С. 89–94.

36. Петров, А.А. Поперечный изгиб тонких прямоугольных пластин из разносопротивляющихся материалов в условиях термомеханического нагружения / А.А. Петров, **В.Г. Теличко**, А.А. Трещёв // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2009. – № 1 (6). – С. 172–178.

37. Трещёв, А.А. Расчёт напряжённо-деформированного состояния композитных железобетонных плит с учётом воздействия агрессивной среды / А.А. Трещёв, А.В. Башкатов, **В.Г. Теличко** // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2017. – № 5 (325). – С. 36–41.

38. **Теличко, В.Г.** Математическая модель расчёта многоэтажных зданий из монолитного железобетона / В.Г. Теличко, Н.В. Золотов // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2017. – № 2 (322). – С. 18–25.

39. Трещёв, А.А. Учёт анизотропии и разносопротивляемости при определении параметров НДС многослойного полупространства / А.А. Трещёв, П.Ю. Ходорович, **В.Г. Теличко** // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 1 (327). – С. 4–12.

40. Трещёв, А.А. Новое о расчёте монолитного железобетонного остова многоэтажного здания / А.А. Трещёв, **В.Г. Теличко**, Н.В. Золотов // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 2 (21). – С. 89–97.

Подписано в печать 19.01.2023.

Формат бумаги 60x84 ¹/₁₆. Бумага писчая.

Усл. печ. л. 2,0.

Тираж 150 экз. Заказ 011

Тульский государственный университет

300012, г. Тула, просп. Ленина, 92

Отпечатано в Издательстве ТулГУ

300012, г. Тула, просп. Ленина, 95