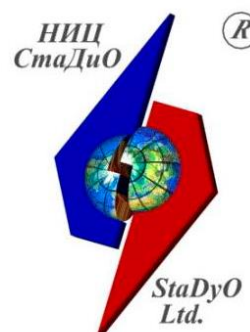




Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский
Московский государственный строительный
университет»
(НИУ МГСУ)



Акционерное общество
«Научно-исследовательский центр СтаДиО»
(НИЦ СтаДиО)

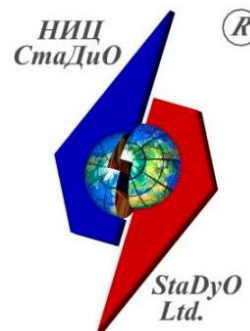
УТВЕРЖДАЮ:
Директор НТП НИУ МГСУ
_____/ Кабанцев О.В. /
«__» _____ 2025 г.

УТВЕРЖДАЮ:
Ген. директор АО НИЦ СтаДиО
_____/ Белостоцкий А.М. /
«__» _____ 2025 г.

Верификационный отчет по программному комплексу Ansys Fluent



Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский
Московский государственный строительный
университет»
(НИУ МГСУ)



Акционерное общество
«Научно-исследовательский центр СтаДиО»
(НИИЦ СтаДиО)

УТВЕРЖДАЮ:
Директор НТП НИУ МГСУ
_____/ Кабанцев О.В. /
«__» _____ 2025 г.

УТВЕРЖДАЮ:
Ген. директор АО НИИЦ СтаДиО
_____/ Белостоцкий А.М. /
«__» _____ 2025 г.

Верификационный отчет по программному комплексу Ansys Fluent

Том 1

Руководители работы:
докт. техн. наук, академик РААСН **А.М. Белостоцкий**
канд. техн. наук **О.С. Горячевский**

Ответственный исполнитель:
канд. техн. наук **Н.А. Бритиков**

Исполнители:
И.Ю. Негрозова
А.Ю. Куреева

Москва, 2025

Содержание

1.	Список сокращений и обозначений.....	6
2.	Введение	11
3.	Назначение и область применения программного комплекса	12
4.	Описание программного комплекса.....	14
4.1.	Верифицируемые возможности Ansys Fluent.....	14
4.2.	Реализация верифицируемых типов решаемых задач (видов расчетов) в Ansys Fluent	15
4.2.1.	Базовые уравнения	15
4.2.1.1.	Общий вид уравнений движения и неразрывности	15
4.2.1.2.	Периодические течения	16
4.2.1.3.	Завихренные и вращающиеся течения.....	17
4.2.2.	Моделирование турбулентности	18
4.2.2.1.	Уравнения, осредненные по Рейнольдсу (ансамблю) (RANS).....	18
4.2.2.1.1.	Стандартная k-ε модель	19
4.2.2.1.2.	RNG k-ε модель	20
4.2.2.1.3.	Разрешающая k-ε модель.....	21
4.2.2.1.4.	Моделирование конвективного теплопереноса в k-ε моделях	22
4.2.2.1.5.	SST k-ω модель	23
4.2.2.1.6.	Обобщенная k-ω модель (GEKO)	23
4.2.2.1.7.	SAS SST модель	24
4.2.2.2.	Фильтрация уравнений Навье-Стокса	25
4.2.2.2.1.	Модель LES WALE	27
4.2.2.3.	Гибридное RANS-LES моделирование.....	27
4.2.2.3.1.	Гибридная вихререзающая модель турбулентности (SBES)	27
4.2.2.4.	Обработка пристеночных слоев	28
4.2.2.4.1.	Стандартные функции стенки.....	28
4.2.2.4.2.	Масштабируемые функции стенки.....	30
4.2.2.4.3.	Неравновесные функции стенки.....	30
4.2.2.4.4.	у+-нечувствительная обработка стенки ω-уравнение	31
4.2.2.4.5.	Обработка стенки для метода LES	31
4.2.2.5.	Поправка на кривизну для моделей с двумя уравнениями	32
4.2.2.6.	Коррекция углового потока	33
4.2.2.7.	Ограничители генерации энергии турбулентности для моделей с двумя уравнениями.....	33
4.2.2.8.	Демпфирование турбулентности.....	34
4.2.2.9.	Определение масштабов турбулентности	34
4.2.3.	Перенос веществ.....	35
4.2.4.	Многофазные течения.....	36
4.2.4.1.	Введение	36
4.2.4.2.	Временная дискретизация, устойчивость и сходимости решения	38
4.2.4.3.	Модель объема жидкости.....	39
4.2.4.3.1.	Уравнение объемной доли фазы.....	40
4.2.4.3.2.	Свойства материалов	40
4.2.4.3.3.	Уравнение движения и энергии	41

4.2.4.4.	Модель смеси	42
4.2.4.4.1.	Уравнение неразрывности, движения и энергии	42
4.2.4.4.2.	Скорость скольжения и дрейфовая скорость	43
4.2.4.4.3.	Уравнение объемной доли вторичной фазы.....	44
4.2.4.4.4.	Свойства зернистой среды	44
4.2.4.4.5.	Концентрация площади интерфейса	45
4.2.4.5.	Эйлерова модель	46
4.2.4.5.1.	Уравнение объемной доли.....	46
4.2.4.5.2.	Уравнение неразрывности, движения и энергии	47
4.2.4.5.3.	Концентрация площади интерфейса	48
4.2.4.5.4.	Коэффициент межфазного обмена	49
4.2.4.5.5.	Коррекция коэффициента подъемной силы	50
4.2.4.5.6.	Подъемная сила	50
4.2.4.5.7.	Пристеночная сила	51
4.2.4.5.8.	Турбулентная дисперсионная сила.....	51
4.2.4.5.9.	Сила виртуальной массы	52
4.2.4.5.10.	Напряжение сдвига	52
4.2.4.5.11.	Механизм теплообмена	53
4.2.4.5.12.	Модели турбулентности	54
4.2.4.5.13.	Численная реализация Эйлеровой модели	55
4.2.4.6.	Модель плотной дискретной фазы	55
4.2.4.7.	Моделирование массопереноса в многофазных потоках	56
4.2.4.8.	Моделирование кавитации	57
4.2.4.9.	Моделирование переноса веществ в многофазных течениях	59
4.2.4.9.1.	Уравнения неразрывности и движения.....	60
4.2.4.9.2.	Взаимодействие гетерогенных фаз.....	61
4.2.5.	Теплоперенос	62
4.2.6.	Взаимодействие жидкости/газа и конструкции (FSI, Fluid-Structure Interaction)	64
4.2.7.	Динамические сетки.....	65
4.2.7.1.	Основные уравнения сохранения	65
4.2.7.2.	Методы сглаживания сетки	65
4.2.7.2.1.	Метод сглаживания на основе пружин	65
4.2.7.2.2.	Метод сглаживания на основе диффузии	66
4.2.7.2.3.	Метод сглаживания линейно-упругого твердого тела	67
4.2.7.2.4.	Метод сглаживания пограничного слоя.....	67
4.2.7.2.5.	Метод сглаживания Лапласа	67
4.2.7.3.	Метод динамического добавления/удаления ячеек сетки	68
4.2.7.4.	Методы перестроения сетки	68
4.2.7.4.1.	Метод локального перестроения сетки	69
4.2.7.4.2.	Метод локального перестроения сетки на поверхности	69
4.2.7.4.3.	Метод полного перестроения сетки	69
4.2.7.4.4.	Метод перестроения сетки на поверхности, примыкающей к движущейся границе	69
4.2.7.4.5.	Метод перестроения сетки CutCell.....	70
4.2.7.4.6.	2.5D метод перестроения сетки	70
4.2.8.	Решатель (МКО, численные схемы).....	70

4.2.8.1.	МКО – пространственная дискретизация	71
4.2.8.1.1.	Вычисление градиентов в центре КО.....	72
4.2.8.1.2.	Вычисление градиентов в центре грани КО.....	73
4.2.8.1.3.	Вычисление давлений в центре грани КО.....	73
4.2.8.1.4.	Вычисление плотности потоков через грани КО.....	73
4.2.8.1.5.	Интегрирование источникового члена плотности потоков через грани КО....	76
4.2.8.2.	МКО – временная дискретизация	76
4.2.8.3.	Релаксация неизвестных и уравнений	76
4.2.8.4.	Алгоритмы на основе давления	77
4.2.8.4.1.	SIMPLE и SIMPLEC.....	78
4.2.8.4.2.	Coupled.....	79
4.2.8.5.	Алгебраический многосеточный метод	80
5.	Матрицы верификации.....	83
5.1.	Матрицы верификации (Том 2. Верификационные примеры из Ansys Fluid Dynamics Verification Manual).....	83
6.	Описание принципов верификации.....	86
7.	Результаты верификации программного комплекса.....	87
8.	Проект Свидетельства РААСН о верификации программного комплекса (с приложением)..	88
9.	Список используемой литературы (Перечень источников).....	89
	Приложение А.....	92

1. Список сокращений и обозначений

<i>Термин</i>	<i>Обозначение</i>
Плотность	ρ
Время	t
Скорость	\vec{v}
Источниковый член	S
Осевая координата	x
Радиальная координата	r
Осевая скорость	v_x
Радиальная скорость	v_r
Статическое давление	p
Тензор напряжений	$\bar{\tau}$
Гравитационная сила	$\rho \vec{g}$
Внешняя сила	\vec{F}
Молекулярная вязкость	μ
Единичный тензор	I
Радиус-вектор	\vec{r}
Вектор периодической длины	\vec{L}
Скорость завихрения	v_z
Интервал усреднения	T
Осредненная компонента скорости	\bar{u}_j
Флуктуирующая компонента скорости	u'_j
Произвольная скалярная величина	ϕ
Кинетическая энергия турбулентности	k
Тензор скоростей деформаций осредненного потока	\bar{S}_{ij}
Коэффициент турбулентной вязкости	μ_t
Кинематическая вязкость	ν
Динамическая вязкость	μ
Коэффициент турбулентной кинематической вязкости	ν_t
Турбулентное число Прандтля для кинетической энергии турбулентности	σ_k
Тензор скоростей деформаций турбулентных пульсаций	$\overline{S'_{ij}}$
Скорость диссипации турбулентности	ϵ
Генерация кинетической энергии турбулентности за счет градиентов средней скорости	G_k
Генерация кинетической энергии турбулентности за счет плавучести	G_b
Турбулентное число Прандтля для скорости диссипации турбулентности	σ_ϵ
Эффективная вязкость	μ_{eff}
Обратное число Прандтля для кинетической энергии турбулентности	α_k
Обратное число Прандтля для скорости диссипации турбулентности	α_ϵ
Характерное вихревое число	Ω
Безразмерная величина RNG $k - \epsilon$ модели	η

<i>Термин</i>	<i>Обозначение</i>
Константа завихренности	α_s
Частота турбулентности	ω
Константа фон Кармана	κ
Пространственный масштаб турбулентности	L_t
Длина фон Кармана	L_{vk}
Характерный размер конечного объема	Δ
Область жидкости	D
Функция фильтрации LES	$G(x, x')$
Объем расчетной ячейки	V
Тензор остаточных (подсеточных) напряжений	τ_{ij}^r
Подсеточная вязкость	μ_{sgs}
Кинематическая подсеточная вязкость	ν_{sgs}
Явная энтальпия	h_s
Теплопроводность	λ
Подсеточное число Прандтля	Pr_{sgs}^r
Изотропная часть подсеточных напряжений	k^r
Подсеточный турбулентный поток произвольного скаляра	q_j
Подсеточное турбулентное число Прандтля	σ_t
Тензор, учитывающий линейные и вращательные деформации скорости	\bar{S}_{ij}^d
Параметр размера вихрей LES	L_s
Расстояние до стенки	d
Безразмерная скорость	U^*
Безразмерное расстояние до стенки	y^*
Безразмерная температура	T^*
Безразмерная толщина теплового вязкого подслоя	y_T^*
Молекулярное число Прандтля	Pr_m
Турбулентное число Прандтля	Pr_t
Локальная массовая доля вещества i	Y_i
Молекулярное число Шмидта	Sc
Турбулентное число Шмидта	Sc_t
Поток диффузии вещества i	\vec{J}_i
Безразмерная локальная массовая доля вещества i	γ^*
Полная энергия	E
Эффективная теплопроводность	λ_{eff}
Девииатор напряжений	$(\tau_{ij})_{eff}$
Физическая толщина вязкого подслоя	y_v
Скорость сдвига	u_τ
Функция поправки на кривизну	f_{rot}
Турбулентный масштаб скорости	ν_t
Турбулентный масштаб времени	τ
Колмогоровский масштаб скорости	ν_K
Колмогоровский масштаб времени	τ_K
Масштаб длины сетки LES	l_{LES}
Скорость генерации вещества i ввиду химических реакций	R_i

<i>Термин</i>	<i>Обозначение</i>
Скорость генерации вещества i ввиду добавок из дисперсной фазы	S_i
Коэффициент массовой диффузии вещества i	$D_{i,m}$
Коэффициент термической диффузии вещества i	$D_{i,T}$
Коэффициент турбулентной диффузии вещества i	$D_{i,t}$
Объемная доля фазы q	α_q
Массоперенос из фазы q в фазу p	\dot{m}_{qp}
Турбулентная теплопроводность	λ_t
Осредненная по массе скорость	\vec{v}_m
Осредненная по массе плотность	ρ_m
Дрейфовая скорость вторичной фазы k	$\vec{v}_{dr,k}$
Скорость скольжения вторичной фазы p относительно фазы q	\vec{v}_{pq}
Столкновительная диссипация энергии	γ_{θ_s}
Концентрация площади интерфейса	χ_p
Подъемная сила	\vec{F}_{lift}
Пристеночная сила	\vec{F}_{wl}
Сила виртуальной массы	\vec{F}_{vm}
Сила турбулентной дисперсии	\vec{F}_{td}
Коэффициент обмена импульсом между фазами p и q	K_{pq}
Межфазная скорость	\vec{v}_{pq}
Объемная интенсивность теплообмена между фазами p и q	Q_{pq}
Межфазная энтальпия	h_{pq}
Коэффициент подъемной силы	C_L
Диаметр частицы	d_p
Коэффициент смазывания	C_{wl}
Коэффициент виртуальной массы	C_{vm}
Объемная вязкость	λ_s
Коэффициент ограничения силы турбулентной дисперсии	$f_{td,limiting}$
Коэффициент силы лобового сопротивления	C_D
Число Рейнольдса	Re
Давление трения	p_{fr}
Напряжение трения	τ_{fr}
Удельная теплота при постоянном давлении фазы q	$c_{p,q}$
Объемный коэффициент интенсивности теплообмена между фазами p и q	h_{pq}
Площадь межфазной поверхности	A_i
Число Нуссельта	Nu
Радиус пузырька в уравнении Рэлея-Плессета	\mathfrak{R}_b
Коэффициент поверхностного натяжения жидкости	σ_l
Поверхностное уравнение пузырька в уравнении Рэлея-Плессета	P_b

<i>Термин</i>	<i>Обозначение</i>
Объемная доля ядер в модели Zwart-Gerber-Belamri	α_{nuc}
Коэффициент испарения	F_{vap}
Коэффициент конденсации	F_{cond}
Скорость гетерогенной реакции	\mathcal{R}
Число Грасгофа	Gr
Число Рэлея	Ra

КО – конечный объем;

МКО – метод конечных объемов;

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений;

AMG – Algebraic Multi Grid, алгебраический многосеточный метод;

CAE – Computer-Aided Engineering, программное обеспечение, предназначенное для расчётов, анализа и симуляции физических процессов в решении инженерных задач;

CFD – Computational Fluid Dynamics, вычислительная гидрогазодинамика;

CFL – Courant–Friedrichs–Lewy condition, критерий Куранта–Фридрихса–Леви;

DDES – Delayed Detached Eddy Simulation, модернизированная модель DES с задержкой перехода от RANS к LES в пограничном слое;

DDPM – Discrete Phase Model, модель плотных дискретных фаз;

DES – Detached Eddy Simulation, моделирование отсоединенных вихрей;

DNS – Direct Numerical Simulation, прямое численное моделирование;

EDC – Eddy-Dissipating Concept, модель концептуальной диссипации вихрей;

FEM – Finite Element Method, метод конечных элементов;

FSI – Fluid Structure Interaction, задача взаимодействия жидкости/газа и конструкции;

FSI – Fluid Structure Interaction, моделирование взаимодействия жидкости и конструкции;

GEKO $k-\omega$ – Generalized $k-\omega$ model, обобщенная $k-\omega$ модель;

HPC – High-Performance Computing, высокопроизводительные вычисления;

IDDES – Improved Delayed Detached Eddy Simulation, усовершенствованная DDES модель;

LES – Large Eddy Simulation, метод крупных вихрей;

PC-SIMPLE – Phase Coupled SIMPLE, расширение алгоритма SIMPLE для многофазных потоков.

PISO – Pressure-Implicit with Splitting of Operators, метод связи скоростей и давления с разделением операторов;

RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса;

RNG $k-\epsilon$ – Re-Normalisation Group $k-\epsilon$, модернизированная $k-\epsilon$ модель с использованием теории ренормализованных групп;

SAS – The Scale-Adaptive Simulation Method, модель адаптивных масштабов;

SBES – Stress-Blended Eddy Simulation, метод смешивания вихрей по напряжениям;

SDDES – Steady Detached Eddy Simulation, стационарное моделирование отсоединенных вихрей;

SIMPLE – Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations, сегрегированный алгоритм связи скоростей и давлений;

SIMPLEC – Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations-Consistent, связанный алгоритм связи скоростей и давлений;

SST $k-\omega$ – Menter's Shear Stress Transport turbulence model, модель турбулентности Ментера;

UDF – User-Defined Function, функция, заданная пользователем;

URANS – Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes, нестационарный RANS подход;

VOF – Volume Of Fluid, модель объема жидкости;

WALE – Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity, модель локальной вихревой вязкости с адаптацией к стенке;

WMLES – Wall-Modeled Large-Eddy Simulation, модель LES с использованием пристеночной функции и теории пути смешения Прандтля;

2. Введение

Расчет конструкций зданий и сооружений на ветровые и снеговые воздействия, а также решение сопутствующих проблем ветроинженерии (таких как анализ пешеходной комфортности, загрязнения воздуха, внутренней вентиляции и др.), в настоящее время тесно связаны с использованием численного («компьютерного») моделирования. Широкое распространение нетипового строительства, плотной застройки, повышение высотности зданий, строительство большепролетных сооружений уникальной архитектуры и конструктивных решений приводит к усложнению решаемых задач. Появляется необходимость учета ряда важных факторов, в том числе:

- Большие размеры моделей и вычислительных задач (до нескольких десятков миллионов неизвестных) и необходимость поддержки многопроцессорных расчетов с распараллеливанием вычислений;
- Трудоемкость подготовки геометрических моделей и совершенствование алгоритмов автоматической генерации расчетных сеток;
- Необходимость расчета конструкций на исключение аэроупругих явлений (дивергенции, флаттера, галопирования);
- Необходимость решения нетиповых задач теплообмена и вентиляции;
- Оптимизация проектных параметров нетиповых конструкций.

Для решения этих и других проблем сегодня широко используются методы вычислительной гидрогазодинамики (Computational Fluid Dynamics, CFD) – мощного инструмента для анализа и прогнозирования поведения газов и жидкостей в самых разных промышленных приложениях. Одним из наиболее распространенных, точных и признанных мировым сообществом программных комплексов, реализующих эти методы, является Ansys Fluent.

Пакет программ Ansys достаточно распространен в России и мире и имеет более 400 тысяч коммерческих и исследовательских инсталляций и более миллиона легальных пользователей, являясь наиболее популярным в мире расчетным (CAE) программным комплексом. Пакет сертифицирован по основным зарубежным стандартам (ISO-9001, ISO 9000-3, Britishstandard BS 5750, Lloyd's Register's software certification, NAFEMS QA certification, The TickIT initiative и др.). Имеется сертификат Госатомнадзора России (Регистрационный номер ПС в ЦОЭП при РНЦ КИ №490 от 10.09.2002, Регистрационный номер паспорта аттестации ПС №145 от 31.10.2002) и сертификат Морского Регистра России. С участием авторов настоящего отчета проведена верификация программного комплекса Ansys Mechanical согласно требованиям Российской академии архитектуры и строительных наук (свидетельство РААСН №02/Ansys/2009).

Основная цель разработанного верификационного отчета заключается в демонстрации широких возможностей комплекса Ansys Fluent в задачах, имеющих отношение к строительной отрасли и имеющих аналитическое или экспериментальное решение. Некоторые возможности комплекса (например, расчет сверхзвуковых течений, многофазных потоков в лагранжевой постановке, некоторые специальные модели турбулентности и др.), не относящиеся напрямую к строительной отрасли, не были рассмотрены в рамках данной верификации. Тесное согласование решений Ansys Fluent с теоретическими результатами в данном отчете позволяют пользователю быть уверенным в достоверности результатов, получаемых с его помощью. Рассмотренные примеры могут служить основанием для дополнительной проверки и уточнения возможностей Ansys Fluent самим пользователем.

3. Назначение и область применения программного комплекса

Ansys Fluent – это ведущий универсальный многоцелевой программный комплекс для решения задач CFD (computational fluid dynamics – вычислительная гидрогазодинамика), который применяется для моделирования течения одно- и многофазных потоков, теплообмена, взаимодействия жидкостей с конструкциями, реагирующих систем. Ansys Fluent широко используется в различных отраслях промышленности, включая аэрокосмическую, автомобильную, строительную, химическую и другие. Для решения основных уравнений течения жидкости и теплообмена Ansys Fluent использует метод конечных объемов (МКО). При этом область моделирования делится на ряд небольших, взаимосвязанных конечных объемов (ячеек), значения переменных (таких как скорость и температура) рассчитываются в центрах этих ячеек. Ansys Fluent использует итерационные алгоритмы для решения этих уравнений и получения сходящегося решения.

Ansys Fluent позволяет моделировать ламинарный и турбулентный потоки, сжимаемую и несжимаемую жидкости, связанные задачи теплообмена и аэроупругости, задачи аэроакустики, многофазные потоки, задачи с подвижными границами, процессы кипения, горения, конденсации, фильтрации, химические реакции и многие другие физические процессы. Поддерживаются эффективные алгоритмы параллельных вычислений в нестационарной и стационарной («чистой» и «квази») постановках. В части моделирования турбулентности Ansys Fluent имеет большой набор общераспространенных RANS-моделей турбулентности (SA, k - ε , k - ω , SST, различные варианты RSM и др.), подсеточных LES-моделей (Smagorinsky-Lilly, WALE, WMLES и др.) и гибридных RANS-LES вариантов (DES, DDES, IDDES). Также Ansys Fluent обладает собственными уникальными моделями, например, GEKO k - ω (RANS-подход с возможностями настройки параметров модели под экспериментальные данные) и SBES (гибридный RANS-LES подход с эффективными функциями экранирования). Ansys Fluent поддерживает различные типы сеток, в т.ч. доказавшие высокую вычислительную эффективность и удобство применения в инженерных приложениях полигексагор сетки (комбинация упорядоченных шестигранных элементов в ключевых регионах расчетной области и неупорядоченных полиэдров у границ расчетной области). Для создания сеток полигексагор используется входящий в комплект сеточный генератор Fluent Meshing, обладающий высокой скоростью генерации КО-сеток, благодаря эффективным многопоточным алгоритмам. Для автоматизации работы в Ansys Fluent, внедрения специфических функций и параметров расчета используются язык макрокоманд Scheme, пользовательские функции (user-defined functions – UDF), написанные на языках C или Fortran, средства среды Ansys Workbench. Также Ansys Fluent предлагает высокопроизводительные масштабируемые вычисления (HPC– high-performance computing) для быстрого и экономичного решения сложных задач CFD с использованием больших расчетных сеток – так, с его помощью была решена задача на 172000 ядрах, что стало мировым суперкомпьютерным рекордом.

Расчет с помощью Ansys Fluent подразумевает создание геометрии, расчетной сетки и задания граничных условий. Также необходимо задать свойства жидкостей и материалов, участвующих в моделировании. После настройки моделей всех рассматриваемых физических явлений Ansys Fluent выполняет решение необходимых уравнений и предоставляет результаты расчета.

Ansys Fluent – это мощный инструмент CFD. Благодаря большому набору возможностей, удобному интерфейсу, постоянной разработке и поддержке он

исключительно широко распространен среди инженеров и ученых, занимающихся анализом и прогнозированием поведения жидкостей.

4. Описание программного комплекса

4.1. Верифицируемые возможности Ansys Fluent

Ansys Fluent является универсальным многоцелевым программным комплексом, который может быть использован для решения различных классов инженерных задач. Верифицируемые в настоящем отчете возможности Ansys Fluent включают:

- 1) Моделирование основных видов течений жидкости и газа:
 - произвольных;
 - периодических;
 - завихренных и вращающихся;
- 2) Моделирование турбулентности:
 - RANS-модели:
 - семейство k - ϵ моделей: стандартная, RNG, разрешающая;
 - семейство k - ω моделей: SST, обобщенная (GEKO), SAS;
 - LES-модели:
 - WALE;
 - гибридные RANS-LES модели:
 - SBES;
 - функции стенок: стандартные, масштабируемые, неравновесные, y^+ -нечувствительные, LES;
 - поправка на кривизну потока, коррекция углового потока, ограничители генерации, демпфирование;
- 3) Моделирование переноса веществ в смесях;
- 4) Моделирование многофазных течений:
 - модель объема жидкости (VOF - volume of fluid);
 - модель смеси (Mixture);
 - Эйлера модель (Eulerian);
 - модель плотных дискретных фаз (DDPM);
 - расчет массопереноса;
 - расчет кавитации;
 - расчет течения многофазных смесей;
- 5) Моделирование теплопереноса;
- 6) Моделирование взаимодействия потока с твердым телом (Fluid-Structure Interaction);
- 7) Реализация динамически перестраивающихся расчетных сеток;
- 8) Численные схемы решателя:
 - основные уравнения МКО;
 - схемы дискретизации / интерполяции временных, конвективных, диффузионных и источниковых членов;
 - схемы дискретизации / интерполяции градиентов;
 - коррекция Ри-Чоу для плотности потока через грани;
 - явная релаксация искомых величин, неявная релаксация решаемых уравнений, неявная релаксация уравнений на основе квазистационарного метода;

- сегрегированные и связанный алгоритмы связи скоростей и давлений: SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations), SIMPLEC (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations-Consistent) и Coupled;
- алгебраический многосеточный метод (AMG) решения СЛАУ.

4.2. Реализация верифицируемых типов решаемых задач (видов расчетов) в Ansys Fluent

4.2.1. Базовые уравнения

4.2.1.1. Общий вид уравнений движения и неразрывности

Для всех типов течений в Ansys Fluent решаются уравнения сохранения массы (неразрывности) и импульса (движения). При учете дополнительных явлений подключаются соответствующие уравнения: для теплообмена – уравнение для сохранения энергии; для смешивания веществ и иных химических реакций – уравнение сохранения доли вещества, и т.д.

В общем виде уравнение неразрывности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = S_m, \quad (1)$$

где ρ – плотность, t – время, \vec{v} – скорость, S_m – источниковый член.

Поскольку в рамках данной верификации рассматриваются только несжимаемые течения ($\rho = \text{const}$), уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} S_m. \quad (2)$$

В двумерном осесимметричном случае уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = \frac{1}{\rho} S_m, \quad (3)$$

где x – осевая координата, r – радиальная координата, v_x – осевая скорость, и v_r – радиальная скорость.

Уравнение движения описывается выражением [1]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \vec{v}) = \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) + p \vec{g} + \vec{F}), \quad (4)$$

где p – статическое давление, $\bar{\bar{\tau}}$ – тензор напряжений (см. ниже), а $p \vec{g}$ и \vec{F} – гравитационная и внешняя (например, вследствие взаимодействия с дисперсной фазой) силы, соответственно. В \vec{F} также входят другие источниковые члены, зависящие от модели, такие как пористая среда и источники, определяемые пользователем.

Тензор напряжений $\bar{\bar{\tau}}$ описывается выражением

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu \left[(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} I \right], \quad (5)$$

где μ – молекулярная вязкость, I – единичный тензор.

В двумерном осесимметричном случае уравнения осевого и радиального движения соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial x} (r v_x v_x) + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r v_x) = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial x} \left[r \mu \left(2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \right] + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{\rho} F_x \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial x} (r v_x v_r) + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r v_r) = \\
& = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial x} \left[r \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] - \\
& - \frac{1}{\rho} \left[2 \mu \frac{v_r}{r} + \frac{2 \mu}{3 r} (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{v_z^2}{r} + F_r \right],
\end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \quad (8)$$

и v_z – скорость завихрения.

4.2.1.2. Периодические течения

Периодическое течение возникает в том случае, когда рассматриваемая геометрия и ожидаемая картина потока имеют периодически повторяющуюся природу. Ansys Fluent позволяет моделировать два типа подобных потоков: с учетом и без учета перепада давления при переходе через периодическую границу. В первом случае говорят о «полностью развитом» или «струйно-периодическом» течении. Такие потоки встречаются в различных практических задачах, включая течения в трубах, каналах и теплообменниках.

Предположение о периодичности подразумевает, что компоненты скорости повторяются в пространстве следующим образом (рис. 4.1):

$$\begin{aligned}
v_x(\vec{r}) &= v_x(\vec{r} + \vec{L}) = v_x(\vec{r} + 2\vec{L}) = \dots \\
v_r(\vec{r}) &= v_r(\vec{r} + \vec{L}) = v_r(\vec{r} + 2\vec{L}) = \dots \\
v_z(\vec{r}) &= v_z(\vec{r} + \vec{L}) = v_z(\vec{r} + 2\vec{L}) = \dots
\end{aligned} \quad (9)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, \vec{L} – вектор периодической длины рассматриваемой области.

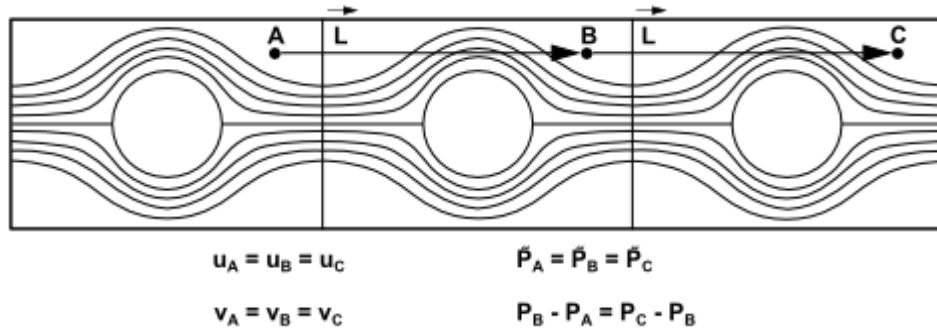


Рисунок 4.1 – Пример периодически повторяющегося потока

Для вязких потоков периодическим является не само давление, а его перепад между повторяющимися участками:

$$\Delta p = p(\vec{r}) - p(\vec{r} + \vec{L}) = p(\vec{r} + \vec{L}) - p(\vec{r} + 2\vec{L}) = \dots \quad (10)$$

Для решателя на основе давления локальный градиент давления можно разложить на две части: градиент периодической компоненты, $\nabla p(\vec{r})$, и градиент линейной компоненты, $\beta \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}$:

$$\nabla p(\vec{r}) = \beta \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|} + \nabla \bar{p}(\vec{r}) \quad (11)$$

где $\bar{p}(\vec{r})$ – периодическое давление, оставшееся после вычитания линейно изменяющегося давления. Поскольку значение β не известно априори, его необходимо корректировать до тех пор, пока в расчетной модели не будет достигнут заданный массовый расход. Эта коррекция предусмотрена в алгоритмах SIMPLE, SIMPLEC и PISO.

Интегрирование уравнения 11 дает выражение для статического давления в периодическом потоке:

$$p(\vec{r}) = p(\vec{r}_{\text{ref}}) + \frac{\beta}{L} \vec{L} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{\text{ref}}) + \bar{p}(\vec{r}) \quad (12)$$

4.2.1.3. Завихренные и вращающиеся течения

Многие инженерные задачи касаются завихренных или вращающихся течений, и Ansys Fluent обладает функционалом для их моделирования. Как правило, такие задачи относятся к одной из пяти категорий:

- 1) осесимметричные потоки с завихрением или вращением;
- 2) полностью трехмерные завихренные или вращающиеся потоки;
- 3) потоки, требующие подвижной системы отсчета;
- 4) потоки, требующие нескольких подвижных систем отсчета;
- 5) потоки, требующие скользящих сеток.

Осесимметричность подразумевает, что в потоке нет радиальных градиентов, но могут существовать ненулевые окружные скорости. Примеры осесимметричных потоков с завихрениями или вращением показаны на рис. 4.2.

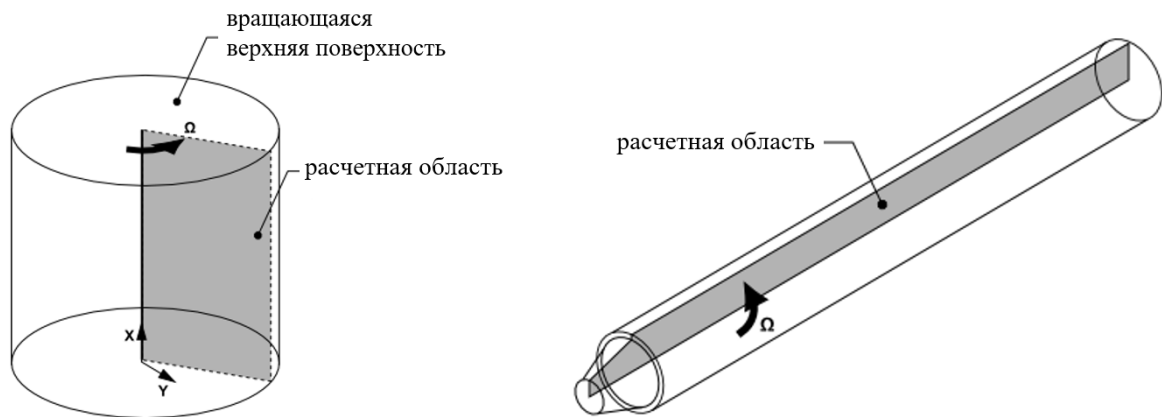


Рисунок 4.2 – Пример осесимметричной задачи с вращением (слева) и завихрением (справа)

Уравнение сохранения касательного импульса для двумерных завихренных потоков можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial x} (r v_r v_z) + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r v_z) \\ = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial x} \left[r \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_z}{r} \right) \right] - \frac{v_r v_z}{r}. \end{aligned} \quad (13)$$

При наличии геометрических изменений и/или градиентов потока в окружном направлении поток необходимо моделировать в трехмерной постановке, однако начальные данные для подобной задачи возможно взять из решения предварительной задачи в упрощенной двумерной постановке.

В закрученных потоках сохранение углового момента (rv_z или $r^2\Omega = \text{const}$) приводит к образованию свободного вихря, в котором v_z резко возрастает по мере уменьшения r (и, в конце концов, v_z уменьшается до нуля вблизи $r = 0$, поскольку начинают преобладать вязкие силы). Торнадо – один из примеров такого вихря. На рис. 4.3: показано радиальное распределение v_z в типичном свободном вихре.



Рисунок 4.3 – Типичное радиальное распределение w в свободном вихре

Для идеального свободного вихря центробежные силы, создаваемые вращательным движением, находятся в равновесии с радиальным градиентом давления:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v_z^2}{r} \quad (14)$$

Однако в неидеальном свободном вихре изменение распределения углового момента вызывает неоднородное изменение радиального градиента давления, из-за чего возникают радиальные и осевые потоки. Именно высокая степень связи между завихрением и полем давления делает моделирование закрученных потоков сложным.

В потоках, движущихся за счет вращения стенок, движение стенок стремится придать жидкости вынужденное вихревое движение, при котором v_z / r или Ω является постоянной величиной. Важной характеристикой таких потоков является тенденция потокам, обладающим большим угловым моментом (например, пристеночных) выталкиваться к внешним границам геометрии.

4.2.2. Моделирование турбулентности

В этом разделе приведены теоретические сведения о моделях турбулентности, доступных в Ansys Fluent.

4.2.2.1. Уравнения, осредненные по Рейнольдсу (ансамблю) (RANS)

При осреднении по Рейнольдсу мгновенные переменные уравнений Навье-Стокса разлагаются на средние (по времени или по ансамблю) и пульсационную составляющие. Для компонент скорости:

$$u_j(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_j(\mathbf{x}) + u_j'(\mathbf{x}, t), \quad (15)$$

где

$$\bar{u}_j(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_j(\mathbf{x}, t) dt, \quad (16)$$

где T – интервал усреднения, u_j' – флуктуирующая компонента скорости ($j = 1, 2, 3$), а $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор пространственных координат.

Аналогично для давления и других скалярных величин (энергии, концентрации вещества и т.д.):

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{x}) + \phi'(\mathbf{x}, t) \quad (17)$$

где ϕ – произвольная скалярная величина.

Подстановка выражений такой формы в уравнения неразрывности и движения даёт уравнения, осредненные по Рейнольдсу (RANS), которые могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (18)$$

и

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\overline{\partial u'_i u'_j}}{\partial x_j}; \quad (19)$$

Система 18-19 не замкнута из-за наличия дополнительных неизвестных – компонент тензора рейнольдсовых напряжений $\overline{u'_i u'_j}$. Поэтому требуются дополнительные гипотезы (уравнения), которые называются моделями турбулентности.

Наиболее употребительны в практических задачах модели турбулентности, основанные на гипотезах турбулентной вязкости и градиентной диффузии. Использование этих гипотез позволяет перейти от прямого определения компонент тензора рейнольдсовых напряжений к уравнениям переноса кинетической энергии турбулентности и ее диссипации.

Гипотеза турбулентной вязкости (связь анизотропной части тензора рейнольдсовых напряжений и производных от средних скоростей потока):

$$\rho \left(\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) = 2\mu_t \bar{S}_{ij}, \quad (20)$$

где μ_t – коэффициент турбулентной вязкости, $k = \frac{\overline{u'_k u'_k}}{2}$ – кинетическая энергия турбулентности, $\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор скоростей деформаций осредненного потока.

Гипотеза градиентной диффузии (связь производной от кинетической энергии турбулентности со специальной величиной, характеризующей перераспределение энергии турбулентности в пространстве за счет турбулентных пульсаций скорости и давления) описывается следующим выражением:

$$\left(\frac{\overline{u'_i u'_i u'_j}}{2} + \frac{\overline{u'_j p'}}{\rho} - 2\nu \overline{u'_i S'_{ij}} \right) = -\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (21)$$

где ν – кинематическая вязкость, ν_t – коэффициент турбулентной кинематической вязкости, σ_k – турбулентное число Прандтля для кинетической энергии турбулентности, $\overline{S'_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор скоростей деформаций турбулентных пульсаций.

Гипотеза 21 позволяет сформулировать уравнения Рейнольдса 18-19 без корреляций:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right). \quad (22)$$

4.2.2.1.1. Стандартная k-ε модель

Стандартная k – ε модель [2] – полуэмпирическая модель, основанная на двух уравнениях переноса: для кинетической энергии турбулентности (k) и скорости диссипации турбулентности (ε). Устойчивость, экономичность и приемлемая точность для широкого спектра турбулентных потоков объясняют ее повсеместное применение в решении промышленных задач. При этом, она справедлива только для полностью турбулентных потоков, в которых влияние молекулярной вязкости пренебрежимо мало.

Кинетическая энергия турбулентности, k, и скорость ее диссипации, ε, вычисляются путем решения следующих уравнений переноса:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (ku_i) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \varepsilon + \frac{1}{\rho} (G_k + G_b + S_k) \quad (23)$$

и

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon u_i) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\rho} \left[C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) + S_\varepsilon \right] - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (24)$$

где G_k описывает генерацию кинетической энергии турбулентности k за счет градиентов средней скорости (см. 4.2.2.7); G_b описывает генерацию k за счет плавучести; $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_{2\varepsilon} = 1.92$ – константы модели; $\sigma_k = 1.0$ и $\sigma_\varepsilon = 1.3$ – турбулентные числа Прандтля для k и ε , соответственно; S_k и S_ε – опциональные источниковые члены.

Турбулентная вязкость, μ_t , вычисляется путем комбинирования k и ε следующим образом:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (25)$$

где $C_\mu = 0.09 = \text{const}$ – константа модели.

Константы модели по умолчанию были определены на основе экспериментов для основных турбулентных течений, в которых возникают сдвиговые потоки: течений в пограничном слое, слоях смешения, струйных течений. Было установлено, что они достаточно хорошо подходят для разрешения широкого спектра пристеночных и свободных сдвиговых потоков. При необходимости значения констант можно изменять.

4.2.2.1.2. RNG k - ε модель

RNG $k - \varepsilon$ модель [3] получена с помощью статистического метода ренормализационной группы. Она во многом похожа на стандартную $k - \varepsilon$ модель, но отличается следующими положениями:

- 1) Содержит дополнительный член в уравнении переноса ε , который повышает точность расчета быстро деформируемых потоков;
- 2) Учитывает влияние завихрений на турбулентность;
- 3) Значения турбулентных чисел Прандтля σ_k и σ_ε вычисляются согласно специальной аналитической формуле, в то время как в стандартной $k - \varepsilon$ модели они постоянны;
- 4) В отличие от высокорейнольдсовой стандартной $k - \varepsilon$ модели, RNG $k - \varepsilon$ модель содержит аналитическую формулу для расчета эффективной вязкости, что позволяет распространить ее применение и на низкорейнольдсовые потоки, хотя и требует соответствующей обработки пристеночной области.

Эти особенности делают RNG $k - \varepsilon$ модель более точной и надежной для более широкого класса потоков, чем стандартная $k - \varepsilon$ модель.

Уравнения переноса RNG $k - \varepsilon$ модели похожи на стандартную $k - \varepsilon$ модель:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (ku_i) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_k \mu_{\text{eff}} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \varepsilon + \frac{1}{\rho} (G_k + G_b + S_k) \quad (26)$$

и

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon u_i) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_\varepsilon \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\rho} \left[C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - R_\varepsilon + S_\varepsilon \right] - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (27)$$

где все обозначения идентичны таковым в уравнениях 23 и 24, за исключением: μ_{eff} – эффективная вязкость (см. уравнение 28), α_k и α_ε – обратные числа Прандтля для

кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации, соответственно, $C_{1\varepsilon} = 1.42$, $C_{2\varepsilon} = 1.68$.

Процедура устранения масштаба в методе RNG дает дифференциальное уравнение для турбулентной вязкости:

$$d\left(\frac{\rho^2 k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = 1.75 \frac{\hat{v}}{\sqrt{\hat{v}^3 - 1 + C_v}} d\hat{v} \quad (28)$$

где $\hat{v} = \mu_{\text{eff}} / \mu$, $C_v \approx 100$.

Уравнение 28 интегрируется для получения точного описания того, как эффективный турбулентный перенос изменяется в зависимости от эффективного числа Рейнольдса (или масштаба вихря), что позволяет модели лучше рассчитывать низкорейнольдсовые и пристеночные потоки. В высокорейнольдсовом случае уравнение 28 дает $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$, где $C_\mu = 0.0845$, что довольно близко к значению аналогичной величины в стандартной $k - \varepsilon$ модели, полученному эмпирическим путем. В Ansys Fluent предусмотрена возможность переключения между высокорейнольдсовым случаем и применением уравнения 36.

Как правило, завихрения потока оказывают существенное влияние на турбулентность. RNG $k - \varepsilon$ модель предоставляет возможность учитывать это влияние, соответствующим образом изменяя турбулентную вязкость:

$$\mu_t = \mu_{t0} f\left(\alpha_s, \Omega, \frac{k}{\varepsilon}\right) \quad (29)$$

где μ_{t0} – значение турбулентной вязкости, рассчитанное без модификации завихрения с помощью уравнения 28. Ω – характерное вихревое число, вычисляемое Ansys Fluent, и α_s – константа завихренности, принимающая различные значения в зависимости от влияния завихренности на поток. Эта модификация завихренности всегда действует для осесимметричных, закрученных потоков и трехмерных потоков, когда выбрана RNG $k - \varepsilon$ модель. Для слабозавихренных потоков (по умолчанию в Ansys Fluent) $\alpha_s = 0.07$, однако для сильно закрученных потоков ее значение можно увеличить.

Основное различие между RNG и стандартными моделями заключается в дополнительном члене в уравнении, представленном в виде

$$R_\varepsilon = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k}, \quad (30)$$

где $\eta \equiv S k / \varepsilon$, $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, $\eta_0 = 4.38$, $\beta = 0.012$.

В областях, где $\eta < \eta_0$, этот член вносит положительный вклад, что для слабо- и умеренно напряженных потоков дает результаты, в значительной степени сопоставимые со стандартной $k - \varepsilon$ моделью. В областях же с высокой скоростью деформации ($\eta > \eta_0$), этот член вносит отрицательный вклад, в результате чего в быстро деформируемых потоках RNG $k - \varepsilon$ модель дает более реалистичную меньшую турбулентную вязкость, чем стандартная $k - \varepsilon$ модель. Таким образом, RNG $k - \varepsilon$ модель более чувствительна к эффектам быстрой деформации и кривизны линии потока, чем стандартная $k - \varepsilon$ модель, что объясняет превосходство RNG $k - \varepsilon$ модели для некоторых видов течений.

4.2.2.1.3. Разрешающая $k - \varepsilon$ модель

Разрешающая $k - \varepsilon$ модель [4] отличается от стандартной $k - \varepsilon$ модели двумя важными особенностями:

1) Разрешающая $k - \epsilon$ модель содержит альтернативную формулировку для турбулентной вязкости;

2) Модифицированное уравнение переноса для скорости диссипации, ϵ , получено из точного уравнения для переноса среднеквадратичной флуктуации завихренности.

Термин «разрешающая» означает, что модель удовлетворяет определенным математическим ограничениям на напряжения Рейнольдса, согласующимся с физикой турбулентных потоков. Ни стандартная $k - \epsilon$ модель, ни RNG $k - \epsilon$ модель в этом смысле не являются разрешающими.

Уравнения переноса k и ϵ в разрешающей $k - \epsilon$ модели имеют вид:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (k u_j) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \epsilon + \frac{1}{\rho} (G_k + G_b + S_k) \quad (31)$$

и

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon u_j) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} S_\epsilon \epsilon - C_2 \frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{v\epsilon}} + \frac{1}{\rho} [C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} C_{3\epsilon} G_b + S_\epsilon], \quad (32)$$

где все обозначения идентичны таковым в уравнениях 23 и 24 $C_1 = \max \left[0.43, \frac{\eta}{\eta+5} \right]$, $C_{1\epsilon} = 1.44$, $C_{2\epsilon} = 1.9$.

Уравнение 31 для k совпадает с уравнениями 23 стандартной $k - \epsilon$ модели и 26 RNG $k - \epsilon$ модели, за исключением значений констант. Однако форма уравнения 32 для ϵ существенно отличается от уравнения 24 в стандартной $k - \epsilon$ модели и уравнения 27 RNG $k - \epsilon$ модели. Предполагается, что такая форма лучше отражает спектральный перенос энергии. Другой существенной особенностью является то, что в члене $C_2 \epsilon^2 / k + \sqrt{v\epsilon}$ отсутствует сингулярность, в отличие от стандартной $k - \epsilon$ и RNG $k - \epsilon$ моделей. Эта модель была тщательно проверена для широкого спектра течений [3, 5], включая вращающиеся однородные сдвиговые потоки, свободные потоки, включая струи и слои смешения, потоки в канале и пограничном слое, а также сепарированные потоки. Для всех этих случаев было обнаружено, что эффективность модели существенно лучше, чем у стандартной $k - \epsilon$ модели. Как и в других моделях, вихревая вязкость рассчитывается из уравнения 25, однако отличие реализуемой $k - \epsilon$ модели от стандартной и RNG-моделей заключается в том, что C_μ не константа, а функция S, Ω и ω . В равновесном пограничном слое её значение также становится равно 0.09.

4.2.2.1.4. Моделирование конвективного теплопереноса в $k-\epsilon$ моделях

Для $k - \epsilon$ моделей в Ansys Fluent турбулентный перенос тепла моделируется аналогично турбулентному переносу импульса. Таким образом, моделируемое уравнение энергии имеет вид:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} [u_j (\rho E + p)] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial x_j} + u_j (\tau_{ij})_{\text{eff}} \right) + \frac{1}{\rho} S_h \quad (33)$$

где E – полная энергия, λ_{eff} – эффективная теплопроводность, и $(\tau_{ij})_{\text{eff}}$ – девиатор напряжений:

$$(\tau_{ij})_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu_{\text{eff}} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (34)$$

который выражает вязкий нагрев. В зависимости от используемых физических моделей в уравнении энергии могут появляться дополнительные термины.

Для стандартной и разрешающей $k - \epsilon$ моделей λ_{eff} задается уравнением:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \quad (35)$$

Для RNG $k - \varepsilon$ модели λ_{eff} вычисляется как:

$$\lambda_{\text{eff}} = \alpha c_p \mu_{\text{eff}} \quad (36)$$

где $\alpha = f(\mu_{\text{mol}} / \mu_{\text{eff}}, k / \mu c_p)$.

4.2.2.1.5. SST $k-\omega$ модель

Модель сдвиговых напряжений Ментера (Shear Stress Transport) [6] является пространственной комбинацией моделей $k - \varepsilon$ и $k - \omega$, сочетающей их преимущества в моделировании свободных потоков и пристеночных течений соответственно.

Уравнения переноса:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{v_t}{\sigma_{k3}} \frac{\partial k}{\partial x_j} + G_k - \beta^* k \omega; \quad (37)$$

и

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{v_t}{\sigma_{\omega 3}} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + 2(1 - F_1) \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \alpha_3 \frac{\omega}{k} G_k - \beta_3 \omega^2, \quad (38)$$

где $\omega = \frac{\varepsilon}{k}$ – частота турбулентности (величина, обратная времени жизни крупных вихрей), $v_t = \max\left(\frac{k}{\omega}, \frac{0.31k}{|\bar{S}|^2 F_2}\right)$; $G_k = v_t |\bar{S}|^2$; $\alpha_3 = F_1 \alpha_1 + (1 - F_1) \alpha_2$; $\beta_3 = F_1 \beta_1 + (1 - F_1) \beta_2$; $\sigma_{k3}^{-1} = F_1 \sigma_{k1}^{-1} + (1 - F_1) \sigma_{k2}^{-1}$; $\sigma_{\omega 3}^{-1} = F_1 \sigma_{\omega 1}^{-1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega 2}^{-1}$ – эмпирические коэффициенты, переключающиеся между $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделями; F_1 – булева функция, равная 0 вдали от поверхностей ($k-\varepsilon$ модель), и равная 1 вблизи ($k-\omega$ модель); F_2 – другая булева функция; α_1 и α_2 – специальные функции для $k-\omega$ и $k-\varepsilon$ моделей соответственно; $\beta_1 = 0.075$; $\beta_2 = 0.0828$ – константы $k-\omega$ и $k-\varepsilon$ моделей соответственно; $\sigma_{k1} = 1.176$; $\sigma_{\omega 1} = 2.0$ – константы $k-\omega$ модели соответственно; $\sigma_{k2} = 1.0$; $\sigma_{\omega 2} = 1.168$ – константы $k-\varepsilon$ моделей соответственно; $\beta^* \approx C_\mu = 0.09$ (β^* – функция, но в задачах строительной аэродинамики она практически равна константе).

Дополнительно генерация энергии G_k ограничена сверху величиной $10C_\mu k \omega$, что позволяет достичь лучшего согласия с экспериментальными данными.

4.2.2.1.6. Обобщенная $k-\omega$ модель (GEKO)

В рамках концепции RANS невозможно с достаточной точностью охватить все течения с помощью одной модели. Поэтому промышленные CFD-коды предлагают множество моделей турбулентности, позволяя пользователям выбирать наилучшую из них для своих задач. Однако такая стратегия не является оптимальной, поскольку не все модели одинаково качественны (с точки зрения надежности, совместимости с другими моделями, обработки ближних стенок). Переход от одной модели к другой может повлечь за собой дополнительные последствия. Альтернативный подход заключается в том, чтобы предложить одну модель, обладающую достаточной гибкостью, чтобы охватить широкий спектр приложений. Ему отвечает модель GEKO, которая предоставляет свободные параметры, которые можно настраивать для конкретной задачи, не оказывая негативного влияния на базовую калибровку модели. Это существенно отличает её от классических моделей, где изменение коэффициентов может привести к потере калибровки даже для самых простых течений.

Уравнения переноса:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} + G_k - C_\mu k \omega; \quad (39)$$

и

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{v_t}{\sigma_{\omega 3}} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + C_{\omega 1} F_1 \frac{\omega}{k} P_k - C_{\omega 2} F_2 \omega^2 + F_3 \frac{2}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad (40)$$

где $v_t = k \max^{-1} \left(\omega, \frac{|\bar{S}|}{C_{Realise}} \right)$, $C_{Realise} = 0.577$; C_{μ} ; $C_{\omega 1}$; $C_{\omega 2}$; σ_k ; σ_{ω} – коэффициенты модели; F_1 ; F_2 ; F_3 – функции калибровки, зависящие от свободно назначаемых параметров C_{SEP} , C_{NW} , C_{MIX} , C_{JET} .

1) C_{SEP} – параметр для оптимизации отсоединения потока от гладких поверхностей, $0.7 < C_{SEP} < 2.5$ (по умолчанию $C_{SEP} = 1.75$). Увеличение C_{SEP} приводит к более раннему и устойчивому отсоединению. Значение $C_{SEP} = 1$ дает результаты, сопоставимые со стандартной $k - \epsilon$ моделью, а $C_{SEP} = 1.75$ – к модели SST.

2) C_{NW} – параметр для оптимизации течения в неравновесных пристеночных областях, $-2 < C_{NW} < 2$ (по умолчанию $C_{NW} = 0.5$). C_{NW} в основном влияет на потоки с теплообменом. Его увеличение приводит к увеличению теплоотдачи в зонах присоединения потока и, как правило, его значение по умолчанию не должно изменяться, за исключением случаев, когда имеются подробные экспериментальные данные.

3) C_{MIX} – параметр для оптимизации смешивания в потоках со свободным сдвигом, $0 < C_{MIX} < 1$ (по умолчанию – рассчитывается по специальной формуле: $C_{MIXCor} = 0.35 \operatorname{sgn}(C_{SEP} - 1) \sqrt{|C_{SEP} - 1|}$). Увеличение C_{MIX} приводит к усилению перемешивания. Корреляция C_{MIXCor} гарантирует, что при изменении C_{SEP} сохраняется классическая скорость распространения слоя смешения.

4) C_{JET} – параметр для оптимизации смешивания в свободном сдвиговом слое (оптимизация свободных струй, не зависящих от слоя смешивания), $0 < C_{JET} < 1$ (по умолчанию $C_{JET} = 0.9$). Увеличение C_{MIX} также увеличит скорость распространения свободных струйных потоков. Это может быть нежелательно, поэтому C_{JET} позволяет уменьшить влияние C_{MIX} на такие потоки. C_{JET} активен только в том случае, если C_{MIX} имеет ненулевое значение. Этот параметр требуется только в ограниченном количестве приложений.

5) C_{curv} – параметр коррекции кривизны. Описан в 4.2.2.5.

Отдельные комбинации параметров представляют особый интерес: например, $C_{SEP} = 1$, $C_{MIX} = 0$, и $C_{NW} = 1$ дают точное преобразование к стандартной $k - \epsilon$ модели (хотя и с улучшенной обработкой пристеночного слоя $k - \omega$ моделью). По умолчанию используются значения $C_{SEP} = 1.75$, $C_{MIX} = 0.3$, $C_{NW} = 0.5$, и $C_{JET} = 0.9$, которые дают близкое приближение к модели SST, но позволяют получать лучшие результаты для потоков со свободным сдвигом.

4.2.2.1.7. SAS SST модель

Модель адаптивных масштабов (SAS) – это нестационарная (URANS) модель, основанная на модели SST, которая обладает вихререзающими свойствами ввиду наличия вторых производных ω в уравнении переноса ω . Концепция SAS основана на введении масштаба длины фон Кармана в уравнение масштаба турбулентности. Информация, предоставляемая шкалой длин фон Кармана, позволяет модели SAS-SST динамически подстраиваться под разрешенные масштабы, что приводит к LES-подобному поведению в нестационарных областях поля течения. В то же время модель обеспечивает стандартные возможности RANS в областях стабильного течения.

Уравнения переноса для модели SST-SAS, реализованные в Ansys Fluent, имеют вид:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{v_t}{\sigma_{k3}} \frac{\partial k}{\partial x_j} + G_k - C_\mu k \omega; \quad (41)$$

и

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{v_t}{\sigma_{\omega 3}} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + 2(1 - F_1) \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \alpha_3 \frac{\omega}{k} P_k - \beta_3 \omega^2 + Q_{SAS}, \quad (42)$$

где соответствующие параметры модели полностью совпадают с аналогичными в уравнениях 37-38 для модели SST за исключением Q_{SAS} – дополнительного источникового члена, формирующего модель SAS, который имеет вид:

$$Q_{SAS} = \max \left[\eta_2 \kappa |S|^2 \left(\frac{L_t}{L_{vk}} \right)^2 - C \frac{2k}{\sigma_\phi} \max \left(\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), 0 \right], \quad (43)$$

где $\eta_2 = 3,51$; $\sigma_\phi = 2/3$; $C = 2$ – параметры модели SAS, $\kappa = 0.41$ – константа фон Кармана,

$L_t = \frac{\sqrt{k}}{(C_\mu^{0.25} \omega)}$ – пространственный масштаб турбулентности; L_{vk} – дополнительный пространственный масштаб турбулентности (длина Кармана), ограниченный сверху специальной демпфирующей функцией, препятствующей возникновению слишком высоких волновых чисел:

$$L_{vk} = \max \left(\frac{|S|}{\sqrt{\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}}}, C_s \sqrt{\frac{\kappa \eta_2}{\beta_3} \frac{\Delta}{C_\mu^{-\alpha_3}}} \right), \quad (44)$$

где $C_s = 0.11$ – параметр демпфирования, Δ – характерный размер конечного объема (кубический корень из объема). Подробный вывод см. в работе Yegorov and Menter [7].

4.3.4. Моделирование генерации турбулентной кинетической энергии в k - ϵ моделях

Член, представляющий собой генерацию (производство) кинетической энергии турбулентности, моделируется одинаково для стандартной, RNG и реализуемой – моделей. Из точного уравнения для переноса этот член может быть определен как

$$G_k = -\overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (45)$$

что, при использовании гипотезы Буссинеска, дает

$$G_k = \mu_t S^2 \quad (46)$$

где $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$. В высокорейнольдсовом случае $\mu_t = \mu_{eff}$.

4.2.2.2. Фильтрация уравнений Навье-Стокса

Турбулентные потоки характеризуются наличием вихрей с широким диапазоном длин и временных масштабов. Самые крупные вихри обычно сравнимы по размеру с характерной длиной потока (например, толщиной сдвигового слоя), а самые мелкие отвечают за диссипацию кинетической энергии турбулентности. Теоретически возможно напрямую разрешить весь спектр турбулентных масштабов с помощью подхода, известного как прямое численное моделирование (DNS), не требующего моделей турбулентности. Однако DNS не подходит для решения практических инженерных задач.

В методе крупных вихрей (LES) крупные вихри разрешаются напрямую, а мелкие – моделируются. Таким образом, LES находится «между» DNS и RANS в смысле разрешенных масштабов. LES может быть реализован на гораздо более грубых сетках и

больших временных шагах, чем DNS, однако все равно требует значительно больших ресурсов, чем RANS-расчеты. Кроме того, для получения стабильной статистики моделируемого течения, LES-расчеты необходимо проводить достаточно длительное время.

Основные уравнения, используемые в моделях LES, получаются путем фильтрации зависящих от времени уравнений Навье-Стокса либо в конфигурационном (физическом), либо в Фурье-пространстве. Процесс фильтрации эффективно устраняет вихри, масштабы которых меньше ширины фильтра или размера расчетной сетки. Таким образом, полученные уравнения управляют динамикой крупных вихрей.

Фильтруемая переменная (под чертой) имеет вид:

$$\bar{\varphi}(x) = \int_D \varphi(x') G(x, x') dx' \quad (47)$$

где D – область жидкости, $G(x, x')$ – функция фильтрации, определяющая масштаб разрешенных вихрей.

Усреднение уравнений 2 и 3 по пространству основано на фильтрации неизвестных переменных некоторым малым объемом [8]. В МКО, реализованном в программных комплексах, применяется неявное фильтрование непосредственно по области конечного объема:

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{1}{V} \int_v \varphi(x') dx', x' \in v \quad (48)$$

где V – объем сеточной ячейки. Функция фильтрации, $G(x, x')$, подразумеваемая здесь, имеет вид

$$G(x, x') = \begin{cases} 1/V, & x' \in v \\ 0, & x' \notin v \end{cases} \quad (49)$$

Фильтруя уравнения непрерывности и импульса, получим:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (50)$$

и

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^r}{\partial x_j} \quad (51)$$

соответственно, где $\tau_{ij}^r = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ – тензор остаточных (подсеточных) напряжений.

Аналогично RANS-подходу, значения компонент этого тензора неизвестны и требуют моделирования. Во многих LES моделях принимается гипотеза об анизотропной части тензора остаточных напряжений, аналогичная гипотезе турбулентной вязкости RANS моделей (уравнение 20):

$$\left(\tau_{ij}^r - \frac{2}{3} k^r \delta_{ij} \right) = 2\nu_{sgs} \bar{S}_{ij}, \quad (52)$$

где ν_{sgs} – подсеточная турбулентная вязкость, $k^r = \frac{\tau_{ij}^r}{2}$ – изотропная часть подсеточных напряжений. Поскольку τ_{ij}^r зависит от квадрата подсеточного числа Маха, для несжимаемых потоков им можно пренебречь.

Фильтрация уравнения энергии дает выражение

$$\frac{\partial \bar{h}_s}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \bar{u}_i \bar{h}_s}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\underbrace{\overline{u_i h_s} - \bar{u}_i \bar{h}_s}_{\text{поток подсеточной энтальпии}} \right) \quad (53)$$

где h_s – явная энтальпия, λ – теплопроводность.

Последний член в уравнении 53 аппроксимируется градиентной гипотезой:

$$\overline{u_i h_s} - \bar{u}_i \bar{h}_s = \frac{\mu_{sgs} C_p}{\rho Pr_{sgs}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (54)$$

где μ_{sgs} – подсеточная вязкость, а $Pr_{sgs} = 0.85$ – подсеточное число Прандтля.

Подсеточный турбулентный поток q_j произвольного скаляра ϕ моделируется с помощью подсеточного турбулентного числа Прандтля:

$$q_j = -\rho \frac{v_{sgs}}{\sigma_t} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (55)$$

4.2.2.2.1. Модель LES WALE

Ansys Fluent предлагает несколько моделей для v_{sgs} , из которых в рамках данной верификации рассматривается только модель LES WALE.

В модели WALE [9] вихревая вязкость моделируется следующим образом

$$v_{sgs} = L_s^2 \frac{(\bar{S}_{ij}^d \bar{S}_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (\bar{S}_{ij}^d \bar{S}_{ij}^d)^{5/4}}, \quad (56)$$

где $\bar{S}_{ij}^d = \bar{S}_{ik} \bar{S}_{kj} + \bar{\Omega}_{ik} \bar{\Omega}_{kj}$ – тензор, учитывающий линейные и вращательные деформации скорости, $L_s = \min(\kappa d, C_w \Delta)$ – характерный размер вихрей с ограничителем для пристеночных течений, d – расстояние до ближайшей стенки, $C_w = 0.325$ – модельная константа, принятая в Ansys Fluent. С помощью этого пространственного оператора модель WALE обеспечивает правильное асимптотическое (y^3) поведение для пристеночных потоков.

Одним из преимуществ модели WALE является то, что она даёт нулевую турбулентную вязкость для ламинарных сдвиговых потоков. Это позволяет корректно учитывать ламинарные зоны внутри течения.

4.2.2.3. Гибридное RANS-LES моделирование

Поначалу концепции осреднения по Рейнольдсу и пространственной фильтрации кажутся несовместимыми, поскольку они приводят к появлению различных дополнительных членов в уравнениях движения (рейнольдсовых и подсеточных напряжений). Однако, как только в уравнения движения вводится модель турбулентности (добавляется вихревая/турбулентная вязкость), они больше не несут никакой информации об их выводе (осреднении) и принимают практически идентичную форму как в случае RANS, так и в случае LES. Разница заключается исключительно в величине вязкости, задаваемой базовой моделью турбулентности. Это позволяет сформулировать модели турбулентности, которые могут переключаться из режима RANS в режим LES, соответствующим образом уменьшая вихревую вязкость в зоне LES, без каких-либо формальных изменений в уравнениях импульса.

4.2.2.3.1. Гибридная вихреразрешающая модель турбулентности (SBES)

Модель смешанных напряжений (Stress-Blended Eddy Simulation, SBES) – это гибридная RANS-LES модель турбулентности, которая использует функцию экранирования и добавляет возможность перехода (смешивания) от базовой RANS модели к любой существующей алгебраической LES модели.

Функция экранирования позволяет достичь смешения на уровне напряжений между формулами RANS и LES. В общем случае это влияет на тензор турбулентных напряжений следующим образом:

$$\tau_{ij}^{SBES} = f_{SDES} \tau_{ij}^{RANS} + (1 - f_{SDES}) \tau_{ij}^{LES} \quad (57)$$

где τ_{ij}^{RANS} – RANS-часть, а τ_{ij}^{LES} – LES-часть моделируемого тензора напряжений.

Задача функции экранирования f_{SDES} – обеспечивать быстрый и корректный переход между LES и RANS зонами, поскольку ошибочные появления в RANS включений LES зон приводят к резкому падению турбулентной вязкости пограничного слоя и ошибочному отрыву потока.

С учетом концепций турбулентной вязкости (уравнения 20 и 52), принятых в моделях SST и WALE, смешивание тензоров в уравнении 57 сводится к смешиванию турбулентной вязкости:

$$v_{sgs} = L_s^2 \frac{(\bar{S}_{ij}^d \bar{S}_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (\bar{S}_{ij}^d \bar{S}_{ij}^d)^{5/4}} \quad (58)$$

Такая формулировка осуществима только благодаря особым свойствам функции экранирования.

В уравнении 33 для переноса k модифицируется последнее слагаемое:

$$\frac{\epsilon_{SDES}}{\rho} = -\beta^* k \omega F_{SDES}; \quad (59)$$

$$F_{SDES} = \left[\max \left(\frac{L_t}{C_{SDES} \Delta_{SDES}} (1 - f_{SDES}), 1 \right) - 1 \right],$$

где $C_{SDES} = 0.4$ – модельная константа, $\Delta_{SDES} = \max(\sqrt[3]{V}, 0.2 \Delta_{max})$ – характерный размер конечного объема (V – объем КО, Δ_{max} – его максимальный размер); $L_t = \frac{\sqrt{k}}{(\beta^* \omega)}$ – пространственный масштаб турбулентности.

4.2.2.4. Обработка пристеночных слоев

На поле средних скоростей влияет условие отсутствия проскальзывания, которое должно выполняться у стенки. Турбулентность вблизи стенки изменяется нетривиальным образом. Ближе к стенке вязкие силы уменьшают флуктуации скоростей, на удалении турбулентность быстро усиливается за счет выделения кинетической энергии турбулентности из-за больших градиентов средней скорости. В целом, пристеночное моделирование существенно влияет на точность численных решений, так как стенки являются основным источником завихренности и турбулентности мезо-уровня, поскольку именно в пристеночной области возникают большие градиенты переменных, а перенос импульса и других скалярных параметров происходит наиболее интенсивно.

Следует отметить, что в Ansys Fluent законы стенки для средней скорости и температуры зависят от величины y^* , а не $y^+ \equiv \rho u_\tau y / \mu$. Эти величины примерно равны в равновесных турбулентных пограничных слоях.

4.2.2.4.1. Стандартные функции стенки

Стандартные функции стенок, используемые в Ansys Fluent по умолчанию, основаны на работе Lauder and Spalding [10] и наиболее широко используются в промышленных задачах. Эти функции достаточно хорошо работают для широкого диапазона потоков, ограниченных стенками, однако становятся менее надежными, когда ситуация в потоке отклоняется от идеальных условий, которые предполагаются при их выведении. Среди прочих,

допущения о постоянном сдвиге и локальном равновесии в наибольшей степени ограничивают универсальность стандартных функций.

Закон стенки для средней скорости дает

$$U^* = \frac{1}{k} \ln(Ey^*), \quad (60)$$

где U^* – безразмерная скорость:

$$U^* \equiv \frac{U_p C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\tau_w}, \quad (61)$$

y^* – безразмерное расстояние до стенки:

$$y^* \equiv \frac{C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} y_p}{\mu}, \quad (62)$$

$E = 9.793$ – эмпирическая константа, U_p – средняя скорость жидкости в центреиде ячейки, примыкающей к стенке P , k_p – кинетическая энергия турбулентности в центреиде прилегающей к стенке ячейки P , y_p – расстояние от центраида прилегающей к стенке ячейки до стенки P .

Диапазон y^* значений, для которых подходят пристеночные функции, зависит от числа Рейнольдса. Нижний предел всегда лежит в области порядка $y^* \sim 15$. Верхний предел сильно зависит от числа Рейнольдса: для высокорейнольдсовых течений толщина логарифмического слоя может достигать значений y^* порядка нескольких тысяч, в то время как для низкорейнольдсовых – порядка сотен. В целом, важнее обеспечить достаточное разрешение пограничного слоя структурированными ячейками, чем обеспечить определенное значение y^* .

В Ansys Fluent логарифмический закон используется, когда $y^* > 11.225$. Когда в пристеночных ячейках достигается значение $y^* < 11.225$, Ansys Fluent применяет ламинарное соотношение напряжений и деформаций, которое можно записать в виде

$$U^* = y^* \quad (63)$$

Из аналогичности рейнольдсовых уравнений переноса импульса и энергии получается закон стенки для средней температуры. Как и закон стенки для средней скорости, он состоит из двух различных законов: линейного – для подслоя теплопроводности (теплого вязкого подслоя), и логарифмического – для внешней области, где влияние турбулентности преобладает над теплопроводностью. В Ansys Fluent он реализован для безразмерной температуры с использованием масштабирования стенки:

$$T^* \equiv \frac{(T_w - T_p) c_p u^*}{\dot{q}} = T_c^* + \frac{D}{\dot{q}} \quad (64)$$

где $u^* = C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}$, а конвективно-проводящая часть T_c^* и вязкостная часть нагрева D зависят от безразмерной толщины теплового вязкого подслоя y_T^* и турбулентного числа Прандтля Pr_t . Первая рассчитывается как такое значение y^* , при котором линейный закон и логарифмический закон пересекаются с учетом молекулярного числа Прандтля Pr_m жидкости.

При использовании функций стенки для переноса веществ Ansys Fluent предполагает, что перенос веществ ведет себя аналогично переносу тепла. Аналогично уравнению 64, закон стенки для веществ может быть выражен для потока с постоянными свойствами и без вязкой диссипации в виде:

$$Y^* \equiv \frac{(Y_{i,w} - Y_i) C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{J_{i,w}} = \begin{cases} Sc y^*, & (y^* < y_c) \\ Sc_t [\kappa^{-1} \ln(Ey^*) + P_c], & (y^* > y_c) \end{cases} \quad (65)$$

где Y_i – локальная массовая доля вещества i , Sc и Sc_t – молекулярное и турбулентное числа Шмидта, соответственно, $J_{i,w}$ – поток диффузии вещества i у стенки.

В моделях $k - \epsilon$ уравнение для k решается во всей области, включая прилегающие к стенке ячейки. Граничное условие, накладываемое на стенку, имеет вид

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0 \quad (66)$$

где n – местная нормаль на стенке.

Генерация кинетической энергии, G_k , и скорость ее диссипации, ϵ , в прилегающих к стенке ячейках вычисляются на основе гипотезы локального равновесия, согласно которой они полагаются равными в пристеночном конечном объеме. Таким образом, G_k вычисляется из

$$G_k \approx \tau_w \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\tau_w^2}{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} y_P} \quad (67)$$

и ϵ вычисляется из

$$\epsilon_P = \frac{C_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{k y_P} \quad (68)$$

Уравнение ϵ не решается в пристеночных ячейках, ее значение вычисляется с помощью уравнения 66.

4.2.2.4.2. Масштабируемые функции стенки

Масштабируемые функции стенки позволяют избежать ухудшения результатов, получаемых с помощью стандартных функций, при измельчении сетки ниже величины $y^* < 11$. Они дают устойчивые результаты для сеток произвольной степени измельчения, а для значений $y^* > 11$ – переключаются на стандартные функции.

Масштабируемые функции стенки позволяют использовать логарифмический закон в формулах для стандартных функций путем замены всюду y^* на \tilde{y}^* , которая вычисляется с помощью специального ограничителя по формуле:

$$\tilde{y}^* = \max(y^*, y_{lim}^*) \quad (69)$$

где $y_{lim}^* = 11.225$.

4.2.2.4.3. Неравновесные функции стенки

Основными отличиями неравновесных функций стенки от стандартных и масштабируемых является то, что логарифмический закон Launder and Spalding для средней скорости модифицирован для повышения чувствительности к эффектам градиента давления, а для расчета средних генерации кинетической энергии турбулентности \bar{G}_k и скорости ее диссипации $\bar{\epsilon}$ принята двуслойная концепция в пристеночных ячейках.

Закон стенки для средней температуры или массовой доли вещества остается таким же, что и в уравнениях 64 и 65.

Логарифмический закон для средней скорости, чувствительный к градиентам давления, имеет вид

$$\tilde{U} \frac{C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}}{\tau_w / \rho} = \kappa^{-1} \ln \left(E \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} y}{\tau_w / \mu} \right), \quad (70)$$

где:

$$\tilde{U} = U - \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \left[\frac{y + y_v [\ln(y/y_v) - 1]}{\rho \kappa \sqrt{k}} + \frac{y_v^2}{\mu} \right] \quad (71)$$

и y_v – физическая толщина вязкого подслоя, которая рассчитывается по формуле

$$y_v \equiv \frac{\mu y_v^*}{\rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}} \quad (72)$$

где $y_v^* = 11.225$.

Двуслойная концепция для пристеночных ячеек заключается в том, что соседние со стенкой ячейки можно разделить на вязкий и полностью турбулентный подслои, внутри которых следующие величины имеют значения:

Таблица 4.1 – Значения величин в двуслойной концепции

	τ_t	k	ε
$y < y_v$	0	$k_p (y / y_v)^2$	$2\nu k / y^2$
$y > y_v$	τ_w	k_p	$k^{3/2} / C_l^* y$

где $C_l^* = \kappa C_\mu^{-3/4}$.

Используя эти значения, \bar{G}_k и $\bar{\varepsilon}$ могут быть вычислены из средних по объему значений G_k и ε для пристеночных. Для четырехугольных и шестигранных ячеек, для которых среднее по объему может быть аппроксимировано средним по глубине,

$$\bar{G}_k \equiv \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} \tau \frac{\partial U}{\partial y} dy = \frac{\tau_w^2 \ln(y_n / y_v)}{\kappa y_n \rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}} \quad (73)$$

и

$$\bar{\varepsilon} \equiv \frac{1}{y_n} \int_0^{y_n} \varepsilon dy = \frac{k_p}{y_n} \left[\frac{2\nu}{y_v} + \frac{k_p^{1/2} \ln(y_n / y_v)}{C_l^*} \right] \quad (74)$$

где y_n – высота ячейки ($y_n = 2y_p$). Для ячеек других форм (например, треугольных и четырехгранных сеток) используются соответствующие средние значения объема.

Неравновесные пристеночные функции учитывают влияние градиентов давления на искажение профилей скорости. В таких случаях предположение о локальном равновесии, когда генерация турбулентной кинетической энергии равна скорости ее диссипации, перестает быть справедливым. Поэтому неравновесные пристенные функции, по сути, частично учитывают неравновесные эффекты, которыми пренебрегают стандартные пристенные функции. Это позволяет использовать их для сложных течений, включающих отсоединение потока, повторное присоединение и натекание, где средние величины потока и турбулентность подвержены градиентам давления и быстрым изменениям. В таких потоках можно добиться улучшений, особенно в расчете сдвига (коэффициента поверхностного трения) и теплопередачи (числа Нуссельта или Стэнтона).

4.2.2.4.4. y^+ -нечувствительная обработка стенки ω -уравнение

В отличие от стандартного ε -уравнения, уравнение k -уравнение может быть интегрировано через вязкий подслей без необходимости использования двуслойного подхода. Эта особенность может быть использована для y^+ -нечувствительной обработки стенки путем смешивания формулы вязкого подслоя и формулы логарифмического слоя на основе y^+ . Эта формула используется по умолчанию для всех ω -моделей.

4.2.2.4.5. Обработка стенки для метода LES

Когда сетка достаточно мелкая, чтобы разрешить ламинарный подслей, напряжение сдвига на стенке рассчитывается из зависимости ламинарного напряжения от деформации:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \quad (75)$$

Если сетка слишком грубая для разрешения ламинарного подслоя, предполагается, что центрoид ячейки, примыкающей к стене, попадает в логарифмическую область пограничного слоя, и используется закон стенки:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \kappa^{-1} \ln E \left(\frac{\rho u_\tau y}{\mu} \right) \quad (76)$$

Если сетка такова, что первая точка вблизи стенки находится в буферной области, то два вышеуказанных закона смешиваются.

4.2.2.5. Поправка на кривизну для моделей с двумя уравнениями

Одним из недостатков моделей турбулентности, основанных на концепции вихревой вязкости, является то, что они нечувствительны к кривизне и вращению потока, которые играют значительную роль во многих турбулентных течениях, представляющих практический интерес. Специальная модификация члена генерации кинетической энергии турбулентности позволяет устранить этот недостаток. В Ansys Fluent она предназначена в основном для ω -моделей, поскольку RNG $k - \epsilon$ и разрешающая $k - \epsilon$ модели уже обладают собственными модификациями для учета завихренности потока.

Эмпирическая функция, предложенная Spalart and Shur [11] для учета кривизны потока и эффектов вращения системы, определяется следующим образом

$$f_{rot} = \frac{2(1 + c_{r1})r^*}{1 + r^*} [1 - c_{r3} \arctg(c_{r2}\tilde{r})] - c_{r1} \quad (77)$$

Она используется в качестве множителя члена G_k и ограничивается в Ansys Fluent следующим образом:

$$G_k \rightarrow G_k \cdot f_r, \quad (78)$$

где

$$f_r = \max[0, 1 + C_{curv}(\tilde{f}_r - 1)] \quad (79)$$

и

$$\tilde{f}_r = \max[\min(f_{rot}, 1.25), 0] \quad (80)$$

Исходная функция ограничена значениями от 0 (что соответствует, например, сильно выпуклой кривизне – стабилизированному потоку без образования турбулентности) до 1.25 (сильно вогнутая кривизна, повышенное образование турбулентности). Нижний предел введен из соображений численной стабильности, в то время как верхний предел необходим для того, чтобы избежать чрезмерной генерации вихревой вязкости в потоках с дестабилизирующей кривизной и/или вращением. Специфический ограничитель 1.25 обеспечивает хорошее согласование с экспериментом для различных тестовых случаев, которые рассматривались с помощью модели SST.

Коэффициент C_{curv} в уравнении 79 введен для того, чтобы пользователь мог влиять на силу поправки на кривизну, если это необходимо для конкретного потока. Он должен быть положительным.

Если предположить, что все переменные и их производные определены относительно системы отсчета, которая вращается со скоростью Ω^{rot} , аргументы r^* и \tilde{r} функции f_{rot} определяются следующим образом:

$$r^* = \frac{S}{\Omega} \quad (81)$$

и

$$\tilde{r} = 2\Omega_{ik}S_{jk} \left[\frac{DS_{ij}}{Dt} + (\epsilon_{imn}S_{jn} + \epsilon_{jmn}S_{in})\Omega_m^{\text{rot}} \right] \frac{1}{\tilde{D}} \quad (82)$$

Здесь первый член в скобках (лагранжева производная тензора скорости деформации) эквивалентен второму градиенту скорости, а второй член в скобках является мерой вращения системы. Знаменатель \tilde{D} имеет вид:

$$\tilde{D} = \Omega D^3, \quad D^2 = \max(S^2, 0.09\omega^2) \quad (83)$$

Эмпирические константы $c_{r1} = 1$, $c_{r2} = 2$ и $c_{r3} = 1$.

Функция поправки на кривизну сильно зависит от изменения ориентации тензора скорости деформации и определена только в областях сдвигового течения (закрученные пограничные слои, слои смешения, вихревые потоки и т.д.).

4.2.2.6. Коррекция углового потока

Турбулентные потоки через прямоугольные каналы, трубы некруглого сечения и топологию типа стыка крыла с фюзеляжем содержат вторичные потоки в плоскости, нормальной к основному направлению потока, направленные в угол по биссектрисе и известные как «вторичные потоки второго рода» [12]. Они обусловлены анизотропией тензора напряжений турбулентности и могут оказывать влияние на отсоединение потока при неблагоприятных условиях градиента давления, когда дополнительный перенос импульса в угол может оставить поток прикрепленным.

Модели вихревой вязкости не могут учесть этот эффект, поскольку не моделируют анизотропию нормальных напряжений, и часто некорректно моделируют угловые зоны отсоединения потока. Для устранения этого недостатка существует упрощенное квадратичное нелинейное алгебраическое расширение для моделей двух уравнений, не влияющее на базовую калибровку моделей для простых потоков. Для его реализации существует настраиваемый параметр.

Для определения тензора напряжений Рейнольдса в уравнении импульса используется квадратичная модель, основанная на [13], но для моделей с двумя уравнениями:

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - 2\nu_t S_{ij} - \frac{1.2C_{\text{corner}}\nu_t(S_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik}S_{kj})}{\max\left[0.3\omega, \sqrt{(S^2 + \Omega^2)}\right]} \quad (84)$$

По умолчанию коэффициент C_{corner} является постоянным и равен 1, но может быть настроен пользователем под конкретную задачу.

4.2.2.7. Ограничители генерации энергии турбулентности для моделей с двумя уравнениями

Недостатком стандартных моделей турбулентности является чрезмерная генерация турбулентной кинетической энергии G_k в окрестностях критических точек. Во избежание этого величина генерации может быть ограничена для использования в уравнениях турбулентности одним из двух способов, представленных ниже.

Первая формулировка имеет следующий вид [6]:

$$G_k = \min(G_k, C_{\text{lim}}\rho\epsilon) \quad (85)$$

где по умолчанию значение коэффициента $C_{lim} = 10$. Этот ограничитель не влияет на результаты модели в сдвиговом слое и по умолчанию включен для всех ω -моделей турбулентности.

Используя стандартное приближение Буссинеска для тензора напряжений Рейнольдса, для несжимаемого потока G_k может быть выражена как:

$$G_k = \mu_t S^2 \quad (86)$$

Вторая формулировка основана на работе Kato and Launder [14]. Они заметили, что чрезмерный уровень выделения кинетической энергии турбулентности обусловлен очень высоким уровнем скорости сдвиговой деформации S в критических точках, в то время как величина Ω вблизи них очень мала. Из этих соображений они предложили альтернативное выражение:

$$G_k = \mu_t S \Omega \quad (87)$$

В простом сдвиговом потоке S и Ω равны и, следовательно, уравнение 87 трансформируется в уравнение 86.

4.2.2.8. Демпфирование турбулентности

В многофазных потоках высокий градиент скорости на границе раздела двух фаз приводит к возникновению высокой турбулентности в обеих фазах. Следовательно, для корректного моделирования таких потоков необходимо демпфирование турбулентности в межфазной области. В Ansys Fluent оно поддерживается только моделями $k - \omega$ и $k - \epsilon$.

Для $k - \omega$ модели, в ω -уравнение добавляется следующий член источника [15]:

$$S_{\omega,i} = \frac{36A_i B^2 \mu_i^2}{\beta \rho_i \Delta n^3}, \quad (88)$$

где A_i – плотность межфазной области для фазы i , Δn – высота ячейки, нормальной к границе раздела, $\beta = 0.075$ – коэффициент $k - \omega$ модели, $B = 10$ – коэффициент демпфирования, μ_i – вязкость фазы i , ρ_i – плотность фазы i .

Для $k - \epsilon$ модели, в ϵ -уравнение добавляется следующий член источника:

$$S_{\epsilon,i} = \frac{36A_i B^2 C_\mu k_i \mu_i^2}{\Delta n^3}, \quad (89)$$

где k_i – турбулентная кинетическая энергия фазы i , $C_\mu = 0.09$ – постоянная $k - \epsilon$ модели.

Плотность межфазной области для фазы i рассчитывается как

$$A_i = 2\alpha_i |\nabla \alpha_i|, \quad (90)$$

где α_i – объемная доля фазы i , $|\nabla \alpha_i|$ – величина градиента объемной доли.

Размер Δn рассчитывается с учетом информации о расчетной сетке. Значение по умолчанию для коэффициента демпфирования B может быть изменено.

Демпфирование турбулентности доступно для моделей объема жидкости, смеси и Эйлеровой модели при использовании опции Multi-Fluid VOF.

4.2.2.9. Определение масштабов турбулентности

В этом разделе даются определения турбулентного масштаба скорости v_t и турбулентного масштаба времени τ , которые доступны в различных моделях. На их основе рассчитывается турбулентный масштаб длины по следующей формуле:

$$l = v_t \tau \quad (91)$$

Масштаб скорости v_t определяется как масштаб скорости моделируемой турбулентности (v_m), ограниченный колмогоровским масштабом (v_k):

$$v_t = \max(v_m, v_k) \quad (92)$$

Аналогичным образом можно определить масштаб времени τ :

$$\tau = \max(\tau_m, \tau_k) \quad (93)$$

Для RANS-моделей турбулентности и гибридных моделей масштабы скорости v_m и v_k определяются как:

$$v_m = \sqrt{k}, \quad v_k = \left(\frac{\epsilon \mu}{\rho}\right)^{0.25} \quad (94)$$

Временные масштабы τ_m и τ_k определяются следующим образом:

$$\tau_m = \frac{k}{\epsilon}, \quad \tau_k = \sqrt{\frac{\mu}{\rho \epsilon}} \quad (95)$$

Для метода LES масштабы скорости оцениваются на основе вихревой вязкости μ_t и масштаба длины сетки LES l_{LES} :

$$v_m = \frac{\mu_t}{\rho l_{LES}}, \quad v_k = \left(\frac{\mu v_m^3}{\rho l_{LES}}\right)^{0.25} \quad (96)$$

Временные масштабы τ_m и τ_k определяются следующим образом:

$$\tau_m = \frac{l_{LES}}{v_m}, \quad \tau_k = \sqrt{\frac{\mu l_{LES}}{\rho v_m^3}} \quad (97)$$

Определение масштаба l_{LES} зависит от конкретной модели. В модели WALE он рассчитывается как:

$$l_{LES} = \min(kd, C\Delta) \quad (98)$$

где k – постоянная фон Кармана, d – расстояние до ближайшей стенки, C – коэффициент модели, и $\Delta = V^{1/3}$ – масштаб локальной сетки, зависящий от объема ячейки.

4.2.3. Перенос веществ

Ansys Fluent позволяет рассчитывать сохранение массовой доли вещества Y_i путем решения уравнения конвекции-диффузии для вещества i . В общем виде это уравнение записывается как:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho Y_i) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} Y_i) = -\nabla \cdot \vec{J}_i + R_i + S_i, \quad (99)$$

где R_i – скорость генерации вещества i ввиду химических реакций, S_i – скорость генерации вещества i ввиду добавок из дисперсной фазы, а также пользовательские источники.

\vec{J}_i – поток диффузии вещества i , который для ламинарных потоков имеет вид

$$\vec{J}_{i,lam} = -\rho D_{i,m} \nabla Y_i - D_{i,T} \frac{\nabla T}{T}, \quad (100)$$

а для турбулентных –

$$\vec{J}_{i,turb} = -\left(\rho D_{i,m} + \frac{\mu_t}{Sc_t}\right) \nabla Y_i - D_{i,T} \frac{\nabla T}{T}, \quad (101)$$

где $D_{i,m}$ – коэффициент массовой диффузии вещества i в смеси, $D_{i,T}$ – коэффициент термической диффузии, а $Sc_t = \frac{\mu_t}{\rho D_{i,t}}$ – турбулентное число Шмидта ($D_{i,t}$ – коэффициент турбулентной диффузии).

Поскольку в рамках данной верификации рассматриваются только несжимаемые потоки, с учетом уравнений 100 и 101 уравнение 99 можно переписать в виде:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}Y_i) = -\nabla \cdot \left[(D_{i,m} + D_{i,t})\nabla Y_i - D_{i,T} \frac{\nabla T}{\rho T} \right] + \frac{1}{\rho} (R_i + S_i) \quad (102)$$

где $D_{i,t} = 0$ для ламинарного потока.

Скорость генерации вещества i в результате химических реакций R_i вычисляется в Ansys Fluent при помощи одного из трех методов:

1) *Прямое использование кинетики*: скорость реакций определяется непосредственно химической кинетикой, влияние турбулентных флуктуаций игнорируется.

2) *Модель диссипации вихрей*: упрощенная модель, которая предполагает, что скорости реакций контролируются турбулентностью без учета временных масштабов. Модель эффективна с точки зрения потребления вычислительных ресурсов, но для получения реалистичных результатов следует использовать только одно- или двухступенчатые механизмы теплоотдачи. Этот подход следует использовать только в тех случаях, когда известно, что временные масштабы рассматриваемых химических реакций меньше временных масштабов турбулентности.

3) *Модель концептуальной диссипации вихрей (eddy-dissipating concept – EDC)*: детальная химическая кинетика может быть включена в процесс турбулентного горения, учитывая временные масштабы как турбулентности, так и кинетики. Подробные расчеты химической кинетики могут требовать высоких вычислительных затрат.

Обобщенная конечно-разностная формулировка подходит для широкого круга приложений, включая ламинарные и турбулентные реагирующие системы, а также процессов горения с пламенем предварительно перемешанной/ не перемешанной/частично смешанной смеси и т.д.

4.2.4. Многофазные течения

4.2.4.1. Введение

Многие течения, встречающиеся в природе и технике, состоят из сочетания различных фаз – газовой, жидкой, твердой, – однако понятие фазы можно трактовать и шире. В ее качестве может выступать определенный класс материала, имеющий особые инерционный отклик и характер взаимодействия с потоком, в который он погружен. Например, твердые частицы разного размера из одного и того же материала можно рассматривать как разные фазы, поскольку каждая совокупность частиц одного размера будет иметь схожий динамический отклик на поле потока.

Режимы многофазных течений можно разделить на четыре категории:

- 1) *Газ-жидкость / Жидкость-жидкость*: пузырьковое течение, капельное течение, четочное течение, статифицированное течение (со свободной поверхностью);
- 2) *Газ-твердое тело*: течение с твердыми частицами, пневмоперенос, псевдооживленный слой;
- 3) *Жидкость-твердое тело*; суспензии, гидроперенос, седиментация (оседание);
- 4) *Трехфазные течения*: комбинации вышеприведенных течений.

Примеры перечисленных течений представлены на рис. 4.4.

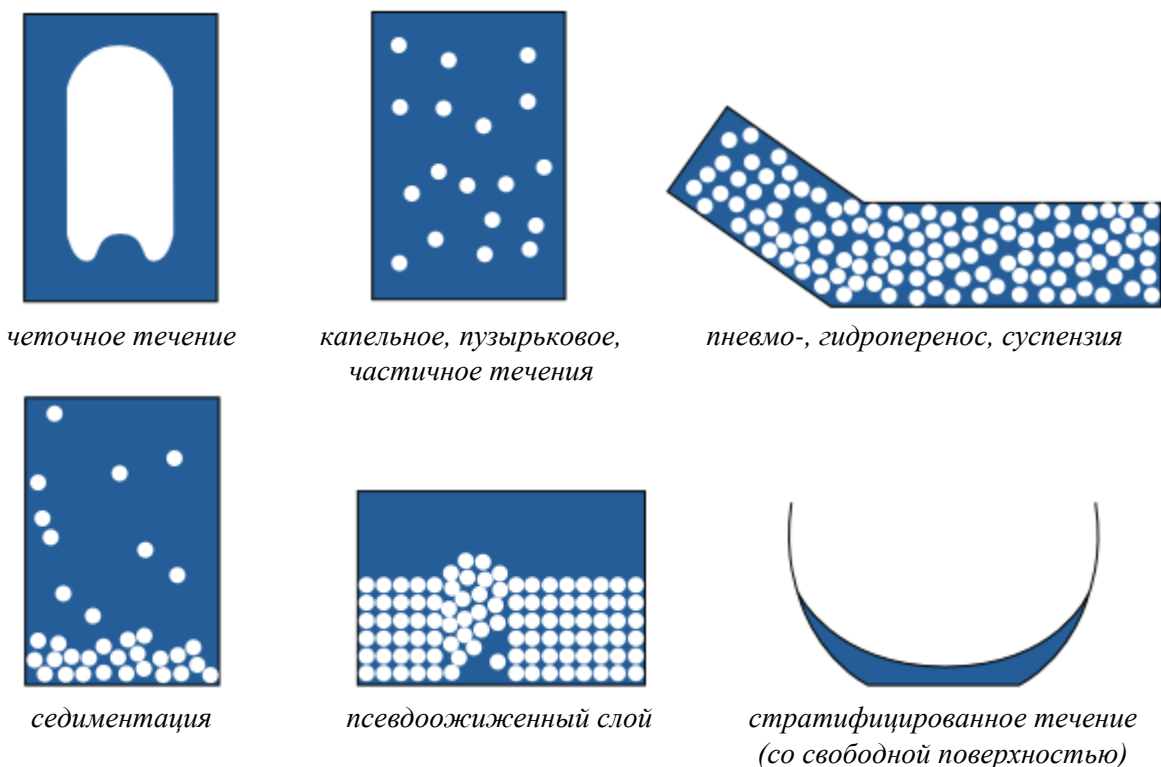


Рисунок 4.4 – Примеры многофазных течений

Для расчета каждого типа течений в Ansys Fluent представлены различные модели, наиболее подходящие для конкретной задачи. В руководстве пользователя Ansys Fluent даны подробные рекомендации по определению типа течения и соответствующих моделей.

В настоящее время существует два подхода к численному расчету многофазных течений: подход Эйлера-Лагранжа и подход Эйлера-Эйлера. В рамках данной верификации рассматривается только второй подход (также называемый эйлеровой постановкой).

В эйлеровой постановке течения математически представляются как взаимопроникающие непрерывные среды. При этом объем одной фазы не может быть занят другими фазами. Также вводится понятие фазовой объемной доли, для которой полагается, что она является непрерывной функцией пространства и времени, и сумма всех объемных долей равна единице. Выводятся схожие по структуре уравнения сохранения для каждой фазы и замыкаются с помощью определяющих соотношений, полученных из эмпирически, или, в случае гранулированных потоков, с помощью кинетической теории. В Ansys Fluent доступны три различные многофазные модели в эйлеровой постановке: модель объема жидкости (VOF), модель смеси (Mixture) и эйлерова модель (Eulerian).

1) *Модель объема жидкости* (volume of fluid - VOF) – метод отслеживания поверхности раздела фаз, применяемый к фиксированной расчетной сетке. Она предназначена для моделирования двух или более несмешивающихся жидкостей, для которых необходимо определить границу раздела. В этой модели жидкости разделяются одним набором уравнений импульса, а объемная доля каждой из жидкостей в каждой расчетной ячейке отслеживается по всей области. Области применения: четочное течение, стратифицированное течение (со свободной поверхностью), заполнение, выплескивание, отслеживание пузырьков в жидкости, отслеживание границы раздела жидкость-газ.

2) *Модель смеси* (Mixture) предназначена для двух или более фаз. Как и в модели Eulerian, фазы рассматриваются как взаимопроникающие среды. Модель смеси решает уравнение движения для смеси и вычисляет относительные скорости для описания

дисперсных фаз. Модель смеси также может использоваться без относительных скоростей для дисперсных фаз для моделирования однородного многофазного потока. **Области применения:** течение с твердыми частицами, пневмоперенос (для однородного потока), гидроперенос, суспензия, пузырьковое течения, седиментация.

3) *Эйлерова модель* (Eulerian) – самая сложная из многофазных моделей в Ansys Fluent. Она решает набор из n уравнений движения и неразрывности для каждой фазы. Связь достигается за счет коэффициентов давления и межфазного обмена. Способ обработки этой связи зависит от типа фаз: гранулированные потоки (жидкость-твердое тело) обрабатываются иначе, чем негранулированные потоки (жидкость-жидкость). Для гранулированных потоков свойства вычисляются из кинетической теории. Обмен импульсами между фазами также зависит от типа моделируемой смеси и может быть настроен пользователем. Пользовательские функции Ansys Fluent позволяют настраивать расчеты обмена импульсами. **Области применения:** пузырьковое, капельное течение, течение с твердыми частицами, суспензия, псевдооживленный слой, пневмоперенос (для неоднородного потока), гидроперенос.

4.2.4.2. Временная дискретизация, устойчивость и сходимость решения

Во многих многофазных приложениях процесс может изменяться как в пространстве, так и во времени. Для точного моделирования многофазного течения необходимы схемы пространственной и временной дискретизации более высокого порядка, чем для однофазного. В дополнение к временной схеме первого порядка в Ansys Fluent, временная схема второго порядка доступна в многофазных моделях смеси, Эйлеровой модели, а также в неявной постановке модели объема жидкости.

Временная схема второго порядка адаптирована ко всем уравнениям переноса, включая уравнения движения фазы в составе смеси, уравнения энергии, уравнения переноса веществ, модели турбулентности, уравнения объемной доли фазы, уравнение коррекции давления и модели гранулированного потока. В многофазном потоке общее уравнение переноса может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha\phi) + \nabla \cdot (\alpha\vec{V}\phi) = \frac{1}{\rho}(\nabla \cdot \vec{\tau} + S_\phi), \quad (103)$$

где ϕ – либо смесевая (для модели смеси), либо фазовая переменная, α – объемная доля фазы (равна единице в модели смеси), ρ – плотность фазы смеси, \vec{V} – скорость смеси или фазы (в зависимости от уравнений), $\vec{\tau}$ – диффузионный член и S_ϕ – член источника.

Будучи полностью неявной, эта схема второго порядка дискретизируется с помощью обратной аппроксимации Эйлера во времени:

$$\frac{3(\alpha_p \rho_p \phi_p V)^{n+1} - 4(\alpha_p \rho_p \phi_p V)^n + (\alpha_p \rho_p \phi_p)^{n-1}}{2\Delta t} = \sum_n [A_{nb}(\phi_{nb} - \phi_p)]^{n+1} + S_U^{n+1} - S_p^{n+1}\phi_p^{n+1} \quad (104)$$

Уравнение 104 можно переписать в более простой форме:

$$A_p \phi_p = \sum_n A_n b \phi_n b + S_\phi \quad (105)$$

где

$$A_p = \sum_n A_{nb}^{n+1} + S_p^{n+1} + \frac{1.5(\alpha_p \rho_p V)^{n+1}}{\Delta t}$$

$$S_{\varphi} = S_U^{n+1} + \frac{2(\alpha_p \rho_p \phi_p V)^n - 0.5(\alpha_p \rho_p \phi_p V)^{n-1}}{\Delta t}$$

Эта схема легко реализуется на основе существующей в Ansys Fluent схемы Эйлера первого порядка. Она безусловно устойчива, однако может давать осциллирующие решения, если выбранный шаг по времени слишком велик.

Для обеспечения устойчивости и сходимости моделирования многофазного течения в Ansys Fluent существуют следующие инструменты:

1) Для *стационарной постановки*: рекомендуется использовать многофазный связный решатель (Coupled). Его итерационный характер требует хороших начальных условий. Для улучшения сходимости рекомендуется понижать значение числа Куранта и увеличивать по мере стабилизации решения. Представлены явные коэффициенты релаксации для полей скоростей и давления.

2) Для *нестационарной постановки*: необходимо обеспечение хороших начальных условий. Для уменьшения затрат процессорного времени допускается использовать решатель PC SIMPLE. Рекомендуется начинать расчет с малого шага по времени, который можно увеличить по мере стабилизации решения.

4.2.4.3. Модель объема жидкости

Модель объема жидкости (VOF) позволяет моделировать две или более несмешивающихся жидкостей путем решения одного набора уравнений импульса и отслеживания объемной доли каждой из жидкостей во всей области.

В рамках данной верификации учитываются следующие ограничения для модели объема жидкости в Ansys Fluent:

1) Все конечные объемы должны быть заполнены либо одной жидкой фазой, либо комбинацией фаз. Модель не позволяет создавать области пустот, в которых нет жидкости одного из представленных типов.

2) При использовании модели объема жидкости нельзя моделировать потоковое периодическое течение с заданным массовым расходом.

Вообще модель объема жидкости в Ansys Fluent предназначена для расчетов в нестационарной постановке, однако может использоваться и для стационарных расчетов при условии, что решение не зависит от начальных условий, и каждая фаза имеет отдельный вход в расчетную область (например, течение воды в канале, над которым существует объем воздуха с собственным входом).

Основное положение модели объема жидкости заключается в том, что две или более жидкости (фазы) не взаимопроникают друг в друга. Для каждой отдельной фазы назначается своя переменная – объемная доля фазы – для каждого конечного объема, внутри которого сумма этих переменных равна единице. Переменные и свойства потока в любой заданной ячейке либо полностью представляют одну из фаз, либо представляют смесь фаз, в зависимости от значений объемной доли. Другими словами, если объемная доля q -й фазы в ячейке обозначается как α_q , то возможны следующие три ситуации:

- $\alpha_q = 0$: в ячейке отсутствует q -я фаза;
- $\alpha_q = 1$: ячейка заполнена q -й фазой;
- $0 < \alpha_q < 1$: ячейка содержит интерфейс между q -й фазой и одной или более другими фазами.

На основе локального значения α_q каждому конечному объему в расчетной области будут назначены соответствующие свойства и переменные.

4.2.4.3.1. Уравнение объемной доли фазы

Отслеживание границы раздела фаз осуществляется путем решения уравнения неразрывности для объемной доли одной (или нескольких) фаз. Для q -й фазы это уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \alpha_q}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_q \vec{v}_q) = S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \quad (106)$$

где \dot{m}_{qp} – массоперенос из фазы q в фазу p , а \dot{m}_{pq} – массоперенос из фазы p в фазу q . По умолчанию член источника S_{α_q} , равен нулю, но может быть изменен пользователем.

Уравнение объемной доли решается только для вторичных фаз. Для несущей фазы она вычисляется по следующему условию:

$$\sum_{q=1}^n \alpha_q = 1 \quad (107)$$

Уравнение объемной доли может решаться как в неявной, так и в явной временной постановке. При использовании неявной формулировки уравнение объемной доли дискретизируется следующим образом:

$$\frac{\alpha_q^{n+1} \rho_q^{n+1} - \alpha_q^n \rho_q^{n+1}}{\Delta t} V + \sum_f (\rho_q^{n+1} U_f^{n+1} \alpha_{q,f}^{n+1}) = \left[S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \right] V, \quad (108)$$

где $n + 1$ – индекс текущего временного шага, n – индекс предыдущего временного шага, α_q^{n+1} – значение объемной доли ячейки на временном шаге $n + 1$, α_q^n – значение объемной доли ячейки на временном шаге n , $\alpha_{q,f}^{n+1}$ – граничное значение объемной доли q -й фазы на временном шаге $n + 1$, U_f^{n+1} – объемный поток через грань на временном шаге $n + 1$, и V – объем ячейки. Поскольку объемная доля на текущем временном шаге является функцией других величин на текущем временном шаге, уравнение переноса скаляра решается итерационно для каждой из объемных долей вторичной фазы на каждом временном шаге. Неявная формулировка может использоваться и в стационарной, и в нестационарной постановке.

Явная формулировка зависит от времени, и объемная доля дискретизируется следующим образом:

$$\frac{\alpha_q^{n+1} \rho_q^{n+1} - \alpha_q^n \rho_q^{n+1}}{\Delta t} V + \sum_f (\rho_q^n U_f^n \alpha_{q,f}^n) = \left[S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \right] V, \quad (109)$$

где $n + 1$ – индекс нового (текущего) временного шага, n – индекс предыдущего временного шага, $\alpha_{q,f}^n$ – граничное значение объемной доли q -й фазы, U_f^n – объемный поток через грань, и V – объем ячейки. Поскольку объемная доля на текущем временном шаге рассчитывается непосредственно на основе известных величин на предыдущем временном шаге, явная формулировка не требует итеративного решения уравнения переноса на каждом временном шаге.

Ansys Fluent автоматически уточняет шаг по времени для интегрирования уравнения объемной доли, но также зависит от выбранного пользователем числа Куранта.

4.2.4.3.2. Свойства материалов

Свойства, входящие в уравнения переноса, определяются наличием составляющих фаз в каждом конечном объеме. Например, в двухфазной системе, если фазы обозначены

индексами 1 и 2 и если отслеживается объемная доля второй из них, плотность в каждой ячейке задается следующим образом

$$\rho = \alpha_2 \rho_2 + (1 - \alpha_2) \rho_1 \quad (110)$$

В общем случае для n -фазной системы осредненная по объемным долям фаз плотность имеет следующий вид:

$$\rho = \sum_q \alpha_q \rho_q \quad (111)$$

Все остальные свойства вычисляются таким же образом.

4.2.4.3.3. Уравнение движения и энергии

Единое уравнение движения решается во всей области, а полученное поле скоростей распределяется между фазами. Уравнение импульса, показанное ниже, зависит от объемных долей всех фаз через свойства ρ и μ .

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot [\nu (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T)] + \vec{g} + \frac{1}{\rho} \vec{F} \quad (112)$$

Одно из ограничений приближения общих полей заключается в том, что в случаях, когда между фазами существует большая разница скоростей, точность вычисления скоростей вблизи границы раздела может пострадать.

Уравнение энергии, также разделяемое между фазами, показано ниже.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\vec{v} (\rho E + p)) = \nabla \cdot \left(\lambda_{\text{eff}} \nabla T - \sum_q \sum_j h_{j,q} \vec{J}_{j,q} + (\bar{\tau}_{\text{eff}} \cdot \vec{v}) \right) + S_h, \quad (113)$$

где $h_{j,q}$ – энтальпия вещества j в фазе q , и $\vec{J}_{j,q}$ – поток диффузии вещества j в фазе q . Первые три члена в правой части уравнения 114 представляют собой перенос энергии за счет теплопроводности, диффузии веществ и вязкой диссипации, соответственно. S_h описывает объемные и пользовательские источники тепла.

В модели объема жидкости полная энергия E рассматривается как переменная, осредненная по массе:

$$E = \frac{\sum_{q=1}^n \alpha_q \rho_q E_q}{\sum_{q=1}^n \alpha_q \rho_q}, \quad (114)$$

где

$$E_q = h_q - \frac{p}{\rho_q} + \frac{v^2}{2} \quad (115)$$

где h_q для каждой фазы зависит от удельной теплоемкости этой фазы и общей температуры.

Свойства ρ , λ_{eff} и μ_{eff} рассчитываются путем объемного осреднения по фазам.

Как и в случае с полем скоростей, точность определения температуры вблизи границы раздела ограничена в тех случаях, когда между фазами существует большая разница температур, а также в случаях, когда свойства различаются на несколько порядков (например, если модель включает жидкий металл в сочетании с воздухом). Такие большие расхождения в свойствах приводят к появлению наборов уравнений с анизотропными коэффициентами, что, в свою очередь, может привести к ограничениям сходимости и точности.

В зависимости от постановки задачи в решение могут быть вовлечены дополнительные скалярные уравнения. Например, при включении модели турбулентности

решается общий набор уравнений переноса k и ϵ для всех фаз, а полученные значения распределяются между фазами по всему полю.

4.2.4.4. Модель смеси

Модель смеси (Mixture model) может использоваться для моделирования многофазных течений, в которых фазы движутся с разными скоростями, но предполагается локальное равновесие на коротких пространственных масштабах, а также для моделирования сильносвязанных однородных многофазных течений. Свойства n фаз (жидких или твердых частиц) вычисляются путем решения уравнений движения, неразрывности и энергии для смеси фаз, уравнений объемной доли для вторичных фаз и алгебраических выражений для относительных скоростей. В ряде случаев модель смеси является хорошей заменой более сложной и вычислительно затратной Эйлеровой модели. Также модель смеси способна учитывать гранулированные фазы.

В рамках данной верификации учитываются следующие ограничения для модели смеси в Ansys Fluent:

1) При использовании модели смеси нельзя моделировать потоковое периодическое течение с заданным массовым расходом.

2) В сочетании с моделью смеси нельзя моделировать затвердевание и плавление.

3) Модель кавитации Singhal et al. не совместима с моделью турбулентности LES.

Основными отличиями модели смеси от модели объема жидкости (VOF) являются следующие положения:

1) Модель смеси позволяет фазам быть взаимопроникающими. Поэтому объемные доли α_q и α_p для конечного объема могут быть равны любому значению между 0 и 1, в зависимости от пространства, занимаемого фазой p и фазой q .

2) Модель смеси позволяет фазам двигаться с разными скоростями, используя концепцию скоростей скольжения.

4.2.4.4.1. Уравнение неразрывности, движения и энергии

Уравнение неразрывности для смеси фаз имеет вид

$$\nabla \cdot (\vec{v}_m) = 0, \quad (116)$$

где \vec{v}_m – осредненная по массе скорость:

$$\vec{v}_m = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \vec{v}_k}{\rho_m}, \quad (117)$$

и ρ_m – плотность смеси:

$$\rho_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k, \quad (118)$$

а α_k – объемная доля фазы k .

Уравнение движения для смеси можно получить путем суммирования отдельных уравнений импульса для всех фаз. Оно может быть выражено как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}_m \vec{v}_m) = \\ = -\frac{1}{\rho_m} \nabla p + \nabla \cdot [v_m (\nabla \vec{v}_m + \nabla \vec{v}_m^T)] + \vec{g} + \frac{\vec{F}}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_m} \nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \vec{v}_{dr,k} \vec{v}_{dr,k} \right), \end{aligned} \quad (119)$$

где n – число фаз, \vec{F} – объемная сила, а v_m – кинематическая вязкость смеси:

$$v_m = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \mu_k}{\rho_m}, \quad (120)$$

$\vec{v}_{dr,k}$ – дрейфовая скорость вторичной фазы k :

$$\vec{v}_{dr,k} = \vec{v}_k - \vec{v}_m \quad (121)$$

Уравнение энергии для смеси имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_k (\alpha_k \rho_k E_k) + \nabla \cdot \sum_k (\alpha_k \vec{v}_k (\rho_k E_k + p)) = \\ = \nabla \cdot \left(\lambda_{\text{eff}} \nabla T - \sum_k \sum_j h_{j,k} \vec{J}_{j,k} + (\bar{\tau} \cdot \vec{v}) \right) + S_h, \end{aligned} \quad (122)$$

где $h_{j,k}$ – энтальпия вещества j в фазе k , $\vec{J}_{j,k}$ – поток диффузии вещества j в фазе k , а λ_{eff} – эффективная теплопроводность, рассчитываемая как:

$$\lambda_{\text{eff}} = \sum_k \alpha_k (\lambda_k + \lambda_t), \quad (123)$$

Первые три члена в правой части уравнения 122 представляют собой перенос энергии за счет теплопроводности, диффузии и вязкой диссипации, соответственно. Последний член S_h включает объемные и пользовательские источники тепла, но не источники тепла, генерируемые конечными объемными или поверхностными реакциями, поскольку энтальпия образования видов уже включена в расчет общей энтальпии, как описано в разделе Источники энергии, обусловленные реакциями. $E_k = h_k$, где h_k – явная энтальпия для фазы k .

4.2.4.4.2. Скорость скольжения и дрейфовая скорость

Относительная скорость (также называемая скоростью скольжения) определяется как скорость вторичной фазы p по отношению к скорости несущей фазы q :

$$\vec{v}_{pq} = \vec{v}_p - \vec{v}_q \quad (124)$$

Массовая доля для любой фазы (k) определяется как

$$c_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho_m} \quad (125)$$

Дрейфовая скорость и относительная скорость связаны следующим выражением:

$$\vec{v}_{dr,k} = \vec{v}_{pq} - \sum_{k=1}^n c_k \vec{v}_{kq}, \quad (126)$$

где \vec{v}_{kq} – скорость фазы k относительно фазы q .

Модель смеси в Ansys Fluent использует формулировку алгебраического проскальзывания. Её основное предположение состоит в том, что для задания алгебраической зависимости для относительной скорости должно быть достигнуто локальное равновесие между фазами на коротком пространственном масштабе. Следуя Manninen et al. [16], форма относительной скорости задается следующим образом:

$$\vec{v}_{pq} = \frac{\tau_p}{f_{\text{drag}}} \frac{(\rho_p - \rho_m)}{\rho_p} \vec{a}, \quad (127)$$

где τ_p – время релаксации частиц:

$$\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\mu_q} \quad (128)$$

d – диаметр частиц (капель, пузырьков) вторичной фазы p , а \vec{a} – ускорение частиц вторичной фазы. Функция лобового сопротивления f_{drag} по умолчанию взята из работы Schiller and Naumann [17]:

$$f_{\text{drag}} = \begin{cases} 1 + 0.15Re^{0.687}, & Re \leq 10^3 \\ 0.0183Re, & Re > 10^3 \end{cases} \quad (129)$$

а ускорение \vec{a} имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{g} - (\vec{v}_m \cdot \nabla)\vec{v}_m - \frac{\partial \vec{v}_m}{\partial t} \quad (130)$$

Простейшей алгебраической формулировкой скольжения является модель дрейфового потока, в которой ускорение частицы задается силой тяжести и/или центробежной силой, а время релаксации частицы изменяется с учетом присутствия других частиц.

В турбулентных потоках относительная скорость должна содержать диффузионный член из-за дисперсии, появляющейся в уравнении импульса для дисперсной фазы. Ansys Fluent добавляет эту дисперсию к относительной скорости:

$$\vec{v}_{pq} = \frac{(\rho_p - \rho_m) d_p^2}{18\mu_q f_{\text{drag}}} \vec{a} - \frac{\eta_t}{\sigma_t} \left(\frac{\nabla \alpha_p}{\alpha_p} - \frac{\nabla \alpha_q}{\alpha_q} \right), \quad (131)$$

где $\sigma_t = 0.75$ – число Прандтля/Шмидта, а η_t – коэффициент турбулентной диффузии, который рассчитывается из соотношения непрерывных и дисперсных флуктуирующих скоростей:

$$\eta_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\gamma_\nu}{1 + \gamma_\nu} \right) (1 + C_\beta \zeta_\nu^2)^{-1/2} \quad (132)$$

$$\zeta_\nu = \frac{|\vec{v}_{pq}|}{\sqrt{2/3k}}, \quad (133)$$

где γ_ν – отношение временного масштаба энергичных турбулентных вихрей, затронутых эффектом пересечения траекторий, к времени релаксации частиц, $C_\beta = 1.8 - 1.35\cos^2\theta$, $\cos\theta = (\vec{v}_{pq} \cdot \vec{v}_p) / (|\vec{v}_{pq}| |\vec{v}_p|)$.

При расчете многофазного течения с моделью смеси в Ansys Fluent доступны несколько методов расчета силы лобового сопротивления. В рамках данной верификации рассматривается только модель Schiller-Naumann (уравнение 129). Если скорость скольжения не вычисляется, то модель смеси редуцируется до однородной многофазной модели.

4.2.4.4.3. Уравнение объемной доли вторичной фазы

Из уравнения непрерывности для вторичной фазы p можно получить уравнение объемной доли вторичной фазы p :

$$\frac{\partial \alpha_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_p \vec{v}_m) = -\nabla \cdot (\alpha_p \vec{v}_{dr,p}) + \frac{1}{\rho_p} \sum_{q=1}^n (\dot{m}_{qp} - \dot{m}_{pq}) \quad (134)$$

4.2.4.4.4. Свойства зернистой среды

Поскольку концентрация частиц является важным фактором при расчете эффективной вязкости смеси, с помощью вязкости отдельных гранул можно получить значение вязкости суспензии. Осредненное по объему значение вязкости при этом будет

содержать сдвиговую вязкость, возникающую из-за обмена частицами импульсом при перемещении и столкновении.

Вязкость сдвига твердых частиц вычисляется как сумма членов столкновения, трения и кинетического члена:

$$\mu_s = \mu_{s,col} + \mu_{s,kin} + \mu_{s,fr} \quad (135)$$

Член столкновения вязкости сдвига моделируется как ([18, 19]):

$$\mu_{s,col} = \frac{4}{5} \alpha_s \rho_s d_s g_{0,ss} (1 + e_{ss}) \left(\frac{\theta_s}{\pi} \right)^{1/2} \quad (136)$$

Для кинетического члена существует два возможных выражения. Первое (по умолчанию) взято из работы Syamlal et al. [19]:

$$\mu_{s,kin} = \frac{d_s \rho_s \sqrt{\theta_s \pi}}{6(3 - e_{ss})} \left[1 + \frac{2}{5} (1 + e_{ss}) (3e_{ss} - 1) \alpha_s g_{0,ss} \right] \quad (137)$$

Второе выражение взято из работы Gidaspow et al. [18]:

$$\mu_{s,kin} = \frac{10 d_s \rho_s \sqrt{\theta_s \pi}}{96 \alpha_s (1 + e_{ss} g_{0,ss})} \left[1 + \frac{4}{5} g_{0,ss} \alpha_s (1 + e_{ss}) \right]^2 \quad (138)$$

Для определения вязкости требуется уточнить температуру зернистой среды s -й твердой фазы. Для этого используется алгебраическое уравнение переноса. Оно применимо только для плотных псевдооживленных слоев, где конвекцией и диффузией можно пренебречь, исходя из того, что генерация и диссипация энергии гранул находятся в равновесии:

$$(-p_s \bar{I} + \bar{\tau}_s) : \nabla \vec{v}_s - \nu_{\theta_s} + \phi_{ls} = 0, \quad (139)$$

где $(-p_s \bar{I} + \bar{\tau}_s)$ – генерация энергии тензором твердых напряжений, ν_{θ_s} – столкновительная диссипация энергии, ϕ_{ls} – обмен энергией между l -й жидкой или твердой фазой и s -й твердой фазой.

Столкновительная диссипация энергии, ν_{θ_s} , представляет собой скорость диссипации энергии внутри s -й твердой фазы из-за столкновений между частицами. Этот член представлен выражением, полученным Lun et al. [20].

$$\nu_{\theta_s} = \frac{12(1 - e_{ss}^2) g_{0,ss}}{d_s \sqrt{\pi}} \rho_s \alpha_s^2 \theta_s^{3/2} \quad (140)$$

ϕ_{ls} выражает передачу кинетической энергии случайных флуктуаций скорости частиц от s -й твердой фазы к l -й жидкой или твердой фазе [18]:

$$\phi_{ls} = -3K_{ls} \theta_s \quad (141)$$

Общее давление твердого тела рассчитывается и включается в уравнения динамики смеси:

$$P_{s,tot} = \sum_{q=1}^N p_q, \quad (142)$$

где p_q – давление твердых частиц, описанное в работе Gidaspow et al. [18].

4.2.4.4.5. Концентрация площади интерфейса

Концентрация площади интерфейса определяется как площадь интерфейса (границы раздела) между двумя фазами, которая приходится на единицу объема смеси. Это важный параметр для прогнозирования переноса массы, импульса и энергии через границу раздела

фаз. При использовании многофазной модели смеси с негранулированными вторичными фазами в Ansys Fluent доступны два метода расчета концентрации площади интерфейса, из которых в рамках данной верификации рассматривается уравнение переноса.

В системах с двумя потоками жидкостей – дискретным и непрерывным – размер и распределение дискретной фазы или частиц может быстро изменяться вследствие роста (массообмен между фазами), расширения из-за изменения давления, слипания, разрушения и/или механизмов зарождения. Для учета этих явлений при расчете концентрации межфазной области решается следующее уравнение переноса для каждой вторичной фазы:

$$\frac{\partial (\rho_g \chi_p)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \vec{u}_g \chi_p) = \frac{1}{3} \frac{D\rho_g}{Dt} \chi_p + \frac{2}{3} \frac{\dot{m}_g}{\alpha_g} \chi_p + \rho_g (S_{RC} + S_{WE} + S_{TI}), \quad (143)$$

где χ_p – концентрация площади интерфейса, а α_g – объемная доля газа. Первые два члена в правой части уравнения связаны с расширением газового пузырька вследствие сжимаемости и массопереносом (изменением фазы). \dot{m}_g – скорость массопереноса в газовую фазу на единицу объема смеси. S_{RC} и S_{WE} – члены стока, относящиеся к слипанию, обусловленному случайными столкновениями и уносом, соответственно. S_{TI} – член источника разрушения, обусловленный турбулентным воздействием.

4.2.4.5. Эйлерова модель

Эйлерова модель (Eulerian model) в Ansys Fluent позволяет моделировать несколько отдельных взаимодействующих фаз, которые могут быть представлены жидкостями, газами или твердыми телами практически в любой комбинации. Количество вторичных фаз ограничивается только вычислительными мощностями и качеством сходимости задачи. Также Эйлерова модель в Ansys Fluent не накладывает никаких условий на физическую фазу гранулированного потока, полагая, что это просто поток, обозначенный как состоящий из отдельных гранул.

Основные положения Эйлеровой модели:

- 1) Единое поле давлений, распределенное между всеми фазами;
- 2) Уравнения движения и неразрывности решаются для каждой отдельной фазы;
- 3) Температура зернистой среды может быть вычислена для каждой отдельной фазы;
- 4) Сдвиговая и объемная вязкости твердой фазы вычисляются с помощью кинетической теории, доступен расчет сдвиговой вязкости на основе учета трения;
- 5) Доступно несколько функций вычисления межфазного коэффициента лобового сопротивления;
- 6) В сочетании с Эйлеровой моделью могут использоваться любые $k - \epsilon$ и $k - \omega$ модели турбулентности, которые могут применяться как ко всей смеси фаз, так и к каждой фазе по отдельности.

В рамках данной верификации учитываются следующие ограничения для Эйлеровой модели в Ansys Fluent:

- 1) При использовании Эйлеровой модели нельзя моделировать поток с периодически изменяющимся массовым расходом.
- 2) В сочетании с Эйлеровой моделью нельзя моделировать процессы затвердевания и плавления.

4.2.4.5.1. Уравнение объемной доли

Объем фазы q , V_q , определяется следующим образом

$$V_q = \int_V \alpha_q dV, \quad (144)$$

где

$$\sum_{q=1}^n \alpha_q = 1 \quad (145)$$

Эффективная плотность фазы q определяется выражением

$$\hat{\rho}_q = \alpha_q \rho_q, \quad (146)$$

где ρ_q – физическая плотность фазы q .

Уравнение объемной доли может быть решено с помощью неявной или явной дискретизации по времени.

4.2.4.5.2. Уравнение неразрывности, движения и энергии

Объемная доля каждой фазы рассчитывается из уравнения неразрывности:

$$\frac{1}{\rho_{rq}} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) \right) = \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}), \quad (147)$$

где \vec{v}_q – скорость фазы q , \dot{m}_{pq} – массоперенос из фазы p в фазу q , \dot{m}_{qp} – массоперенос из фазы q в фазу p , ρ_{rq} – относительная плотность фазы или усредненная по объему плотность q -й фазы в области решения.

Решение этого уравнения для каждой вторичной фазы вместе с условием 146 позволяет рассчитать объемную долю несущей фазы.

Уравнение движения для жидкой фазы q имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{v}_q \vec{v}_q) = \\ = -\alpha_q \nabla p + \nabla \cdot \bar{\tau}_q + \alpha_q \rho_q \vec{g} + \sum_{p=1}^n K_{pq} \left((\vec{v}_p - \vec{v}_q) + \dot{m}_{pq} \vec{v}_{pq} - \dot{m}_{qp} \vec{v}_{qp} \right) + \\ + (\vec{F}_q + \vec{F}_{\text{lift},q} + \vec{F}_{\text{wl},q} + \vec{F}_{\text{vm},q} + \vec{F}_{\text{td},q}), \end{aligned} \quad (148)$$

где $\bar{\tau}_q$ – тензор напряжений-деформаций фазы q :

$$\bar{\tau}_q = \alpha_q \mu_q (\nabla \vec{v}_q + \nabla \vec{v}_q^T) + \alpha_q \left(\lambda_q - \frac{2}{3} \mu_q \right) \nabla \cdot \vec{v}_q \bar{I}, \quad (149)$$

где μ_q и λ_q – сдвиговая и объемная вязкость фазы q , соответственно, \vec{F}_q – внешняя объемная сила, $\vec{F}_{\text{lift},q}$ – подъемная сила, $\vec{F}_{\text{wl},q}$ – пристеночная сила, $\vec{F}_{\text{vm},q}$ – сила виртуальной массы, $\vec{F}_{\text{td},q}$ – сила турбулентной дисперсии (только для турбулентных потоков), $K_{pq} (= K_{qp})$ – коэффициент межфазного обмена импульсом, p – общее давление всех фаз \vec{v}_{pq} – межфазная скорость, определяемая следующим образом: если $\dot{m}_{pq} > 0$ (то есть, масса фазы p переходит в фазу q), $\vec{v}_{pq} = \vec{v}_p$; если $\dot{m}_{pq} < 0$ (то есть, масса фазы q переходит в фазу p), $\vec{v}_{pq} = \vec{v}_q$. Аналогично для \dot{m}_{qp} и \vec{v}_{qp} .

Следуя работам [19-25], Ansys Fluent использует многофазную модель зернистой среды для описания поведения потока смеси жидкости и твердого тела. Напряжения в твердой фазе определяются по аналогии между случайным движением частиц при их столкновении, и тепловым движением молекул в газе, с учетом неупругости зернистой фазы. Как и в случае с газом, интенсивность флуктуаций скорости частиц определяют напряжение, вязкость и давление твердой фазы. Кинетическая энергия, связанная с

флуктуациями скорости частиц, представлена так называемой температурой зернистой среды, которая пропорциональна среднему квадрату случайного движения частиц.

Уравнение движения для жидкой фазы аналогично уравнению 148, а для s -й твердой фазы записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_s \rho_s \vec{v}_s) + \nabla \cdot (\alpha_s \rho_s \vec{v}_s \vec{v}_s) = \\ = -\alpha_s \nabla p - \nabla p_s + \nabla \cdot \bar{\tau}_s + \alpha_q \rho_q \vec{g} + \sum_{l=1}^N K_{ls} ((\vec{v}_l - \vec{v}_s) + \dot{m}_{ls} \vec{v}_{ls} - \dot{m}_{sl} \vec{v}_{sl}) + \\ + (\vec{F}_s + \vec{F}_{\text{lift},s} + \vec{F}_{\text{vm},s} + \vec{F}_{\text{td},s}), \end{aligned} \quad (150)$$

где p_s – давление s -х твердых частиц, $K_{ls} = K_{sl}$ – коэффициент обмена импульсами между жидкой или твердой фазой l и твердой фазой s , N – общее число фаз, а \vec{F}_s , $\vec{F}_{\text{lift},s}$, $\vec{F}_{\text{vm},s}$ и $\vec{F}_{\text{td},s}$ определяются так же, как аналогичные термины в уравнении 148.

Для описания сохранения энергии в эйлеровых многофазных течениях отдельное уравнение энтальпии для q -й фазы может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_q \rho_q \left(e_q + \frac{\vec{v}_q^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\alpha_q \rho_q \vec{v}_q \left(h_q + \frac{\vec{v}_q^2}{2} \right) \right] = \\ = \nabla \cdot \left(\alpha_q \lambda_{\text{eff},q} \nabla T_q - \sum_j h_{j,q} \vec{J}_{j,q} + \bar{\tau}_{\text{eff},q} \cdot \vec{v}_q \right) + \\ + \sum_{p=1}^n (Q_{pq} + \dot{m}_{pq} h_{pq} - \dot{m}_{qp} h_{qp}) + p \frac{\partial \alpha_q}{\partial t} + S_q, \end{aligned} \quad (151)$$

где $\lambda_{\text{eff},q}$ – эффективная теплопроводность, S_q – источниковый член, включающий источники энергии (например, за счет химической реакции), Q_{pq} – интенсивность теплообмена между p -й и q -й фазами (теплообмен между фазами должен удовлетворять условиям локального баланса $Q_{pq} = -Q_{qp}$ и $Q_{qq} = 0$), h_{pq} – межфазная энтальпия (например, энтальпия пара при температуре капель, в случае испарения), $h_{j,q}$ – явная энтальпия вещества j в фазе q , и $\vec{J}_{j,q}$ – поток диффузии вещества j в фазе q .

Определения для внутренней энергии и энтальпии фазы q см. в 4.2.5.

4.2.4.5.3. Концентрация площади интерфейса

При использовании многофазной Эйлеровой модели с негранулированными (не зернистыми) вторичными фазами в Ansys Fluent доступны два метода расчета концентрации площади интерфейса, из которых в рамках данной верификации рассматривается алгебраическая зависимость между заданным диаметром пузырьков и плотностью площади интерфейса.

Алгебраические модели концентрации площади интерфейса выводятся из отношения площади поверхности к объему, A_p , для сферического пузырька или капли:

$$A_p = \frac{\pi d_p^2}{\frac{1}{6} \pi d_p^3} = \frac{6}{d_p}, \quad (152)$$

где d_p – диаметр пузырька или капли. При использовании Эйлеровой модели доступны следующие алгебраические модели:

- 1) Модель частиц (по умолчанию)

Для дисперсной фазы p с объемной долей α_p модель частиц оценивает плотность межфазной области A_i как

$$A_i = \alpha_p A_p = \frac{6\alpha_p}{d_p} \quad (153)$$

2) Симметричная модель

В симметричной модели обе фазы p и q рассматриваются симметрично. Фазы p и q могут быть непрерывными или дисперсными. Плотность площади интерфейса рассчитывается как:

$$A_i = \frac{6\alpha_q\alpha_p}{d_{p,q}}, \quad (154)$$

где α_p и α_q – объемные доли фаз p и q , соответственно, а $d_{p,q}$ – характерный масштаб длины, вычисляемый следующим образом: если фаза p является дисперсной фазой: $d_{p,q} = d_p$; если обе фазы p и q являются дисперсными: $d_{p,q} = \alpha_q d_p + \alpha_p d_q$.

4.2.4.5.4. Коэффициент межфазного обмена

Из уравнений 149 и 151 видно, что обмен импульсом между фазами зависит от величины коэффициента обмена K_{pq} или (для гранулированных потоков) K_{I_s} .

Для потоков типа жидкость-жидкость предполагается, что каждая вторичная фаза образует капли или пузырьки. Это влияет на то, как каждая из жидкостей относится к определенной фазе. Например, в потоках с неравными количествами двух жидкостей преобладающая жидкость должна моделироваться как несущая, поскольку более разреженная жидкость с большей вероятностью образует капли или пузырьки. Коэффициент обмена для таких типов пузырьковых, жидкостно-жидкостных или газожидкостных смесей может быть записан в следующей общей форме:

$$K_{pq} = \frac{\rho_p f}{6\tau_p} d_p A_i, \quad (155)$$

где A_i – межфазная площадь, f – функция сопротивления, а τ_p – время релаксации частиц (см. уравнение 129).

Почти все определения f включают коэффициент сопротивления (C_D), который зависит от относительного числа Рейнольдса (Re). Именно эта функция сопротивления различается в моделях коэффициента обмена, однако в любом случае K_{pq} должен стремиться к нулю, когда несущая фаза отсутствует. В рамках данной верификации рассматривается модель Schiller-Naumann [17] (по умолчанию в Ansys Fluent):

$$f = \frac{C_D Re}{24}, \quad (156)$$

где

$$C_D = \begin{cases} 24(1 + 0.15Re^{0.687})/Re, & Re \leq 1000 \\ 0.44, & Re > 1000 \end{cases} \quad (157)$$

и Re – относительное число Рейнольдса. Относительное число Рейнольдса для несущей фазы q и вторичной фазы p имеет вид:

$$Re = \frac{\rho_q |\vec{v}_p - \vec{v}_q| d_p}{\mu_q}, \quad (158)$$

а для вторичных фаз p и r :

$$Re = \frac{\rho_{rp} |\vec{v}_r - \vec{v}_p| d_{rp}}{\mu_{rp}}, \quad (159)$$

где $\mu_{rp} = \alpha_p \mu_p + \alpha_r \mu_r$ – вязкость смеси фаз p и r , соответственно.

4.2.4.5.5. Коррекция коэффициента подъемной силы

Модель коррекции подъемной силы, разработанная Шавером и Подовски [26], предназначена для гашения подъемной силы вблизи стенки и сводит ее к нулю, когда газ находится ближе, чем один радиус пузырька к стенке. Она повышает точность прогнозирования пустот вблизи стенки и общую устойчивость при использовании в сочетании с моделями турбулентной диссипации и смазки стенки.

Скорректированный коэффициент подъема определяется как:

$$C_{Cl} = \begin{cases} C_L, & \frac{y_w}{d_b} \geq 1.0 \\ C_L \left(3 \left(\frac{2y_w}{d_b} - 1 \right)^2 - 2 \left(\frac{2y_w}{d_b} - 1 \right)^3 \right), & 0.5 \leq \frac{y_w}{d_b} < 1.0 \\ 0, & \frac{y_w}{d_b} < 0.5 \end{cases}, \quad (160)$$

где C_L – коэффициент подъемной силы, y_w – расстояние от стенки, d_b – диаметр пузырька.

4.2.4.5.6. Подъемная сила

Для многофазных течений в сочетании с Эйлеровой моделью Ansys Fluent может учитывать влияние подъемной силы на частицы вторичной фазы, капли или пузырьки, которая действует в основном за счет градиентов скорости в поле потока несущей фазы. Подъемная сила тем выше, чем крупнее частицы, но в Ansys Fluent предполагается, что диаметр частиц намного меньше межчастичного расстояния, что не подходит для плотно упакованных или для очень маленьких частиц.

Согласно Drew [27], подъемная сила, действующая на вторичную фазу p в несущей фазе q , может быть рассчитана как:

$$\vec{F}_{\text{lift}} = -C_L \rho_q \alpha_p (\vec{v}_q - \vec{v}_p) \times (\nabla \cdot \vec{v}_q), \quad (161)$$

где C_L – коэффициент подъемной силы, ρ_q – плотность несущей фазы, α_p – объемная доля вторичной фазы, \vec{v}_q – скорость несущей фазы, \vec{v}_p – скорость вторичной фазы. Рассчитанное значение подъемной силы \vec{F}_{lift} добавляется к правой части уравнения импульса для обеих фаз ($\vec{F}_{\text{lift},q} = -\vec{F}_{\text{lift},p}$).

Для вычисления коэффициента подъемной силы C_L в Ansys Fluent предлагается несколько моделей, из которых в рамках данной верификации рассматривается только модель подъемной силы Moraga. Она применима в основном к сферическим твердым частицам, хотя может быть использована также для капель и пузырьков. В этой модели коэффициент подъемной силы объединяет противоположные действия двух явлений:

- классической аэродинамической подъемной силы, возникающей в результате взаимодействия частиц дисперсной фазы со сдвигом несущей фазы;
- индуцированной вихревой подъемной силы, возникающей в результате взаимодействия между частицами и вихрями.

В результате коэффициент подъемной силы определяется как числом Рейнольдса частиц, так и числом Рейнольдса вихря:

$$Re_p = \frac{\rho_q |\vec{v}_q - \vec{v}_p| d_p}{\mu_q} \quad (162)$$

$$Re_\omega = \frac{\rho_q |\nabla \times \vec{v}_p| d_p^2}{\mu_q} \quad (163)$$

Обозначая $\phi = Re_p Re_\omega$, коэффициент подъемной силы принимает вид:

$$C_L = \begin{cases} 0.0767, & \phi \leq 6 \cdot 10^3 \\ -\left(0.12 - 0.2e^{-(\phi/3.6) \times 10^{-5}}\right) e^{(\phi/3) \times 10^{-7}}, & 6 \cdot 10^3 < \phi < 5 \cdot 10^7 \\ -0.6353, & \phi \geq 5 \cdot 10^7 \end{cases} \quad (164)$$

4.2.4.5.7. Пристеночная сила

При использовании Эйлеровой модели для моделирования пузырьковых потоков жидкости и газа, можно также учитывать влияние особой пристеночной силы, вызванной изменением в распределении скоростей вокруг элементов вторичной фазы (пузырьков). Эта сила (в англоязычных источниках принято название wall lubrication или wall repulsion force, т.е. буквально сила смазывания стенки или сила отталкивания стенки) стремится оттолкнуть вторичную фазу от стенок. Например, в пузырьковом восходящем потоке в вертикальной трубе эта сила приводит к тому, что дисперсная фаза концентрируется в области вблизи стенки, но не примыкает к ней.

Выражение для силы, действующей на вторичную фазу p в несущей фазе q имеет общий вид:

$$\vec{F}_{wl} = C_{wl} \rho_q \alpha_p \left| (\vec{v}_q - \vec{v}_p)_{||} \right|^2 \vec{n}_w, \quad (165)$$

где C_{wl} – коэффициент смазывания, ρ_q – плотность несущей фазы, α_p – объемная доля вторичной фазы, $\left| (\vec{v}_q - \vec{v}_p)_{||} \right|$ – компонент относительной скорости фазы по касательной к поверхности стенки, \vec{n}_w – единичная нормаль, направленная в сторону от стенки. Для вычисления коэффициента смазывания C_{wl} в Ansys Fluent предлагается несколько моделей, из которых в рамках данной верификации рассматривается только модель Antal. Согласно ей, коэффициент C_{wl} вычисляется по формуле:

$$C_{wl} = \max\left(0, \frac{C_{w1}}{d_b} + \frac{C_{w2}}{y_w}\right), \quad (166)$$

где $C_{w1} = -0.01$ и $C_{w2} = 0.05$ – безразмерные коэффициенты, d_b – диаметр пузырька/частицы, и y_w – расстояние до ближайшей стенки. Значение C_{wl} не равно нулю только в тонком слое, прилегающем к стенке, который удовлетворяет:

$$y_w \leq -\frac{C_{w2}}{C_{w1}} d_b \quad (167)$$

соответствующий $y_w \leq 5d_b$ со значениями по умолчанию C_{w1} и C_{w2} . Как следствие, модель Antal активна только на достаточно мелкой сетке.

4.2.4.5.8. Турбулентная дисперсионная сила

Для многофазных турбулентных потоков, использующих Эйлерову модель, Ansys Fluent может учитывать эффекты турбулентных дисперсионных сил, действующих в роли турбулентной диффузии, которые отвечают за межфазный перенос турбулентного импульса. Они возникают в результате осреднения члена межфазного лобового сопротивления. Для дисперсной фазы p и непрерывной фазы q турбулентное лобовое сопротивление имеет вид:

$$K_{pq}(\vec{\tilde{v}}_p - \vec{\tilde{v}}_q) = K_{pq}(\vec{v}_p - \vec{v}_q) - K_{pq} \vec{v}_{dr}, \quad (168)$$

Член $K_{pq}\vec{v}_{dr}$ обычно называют турбулентной дисперсионной силой:

$$\vec{F}_{td,q} = -\vec{F}_{td,p} = -f_{td,limiting}K_{pq}\vec{v}_{dr}, \quad (169)$$

где \vec{v}_{dr} – скорость дрейфа, учитывающая дисперсию вторичных фаз вследствие переноса турбулентным движением жидкости, а $f_{td,limiting}$ – коэффициент, который может быть использован для ограничения силы турбулентной дисперсии. В рамках данной верификации для моделирования силы турбулентной дисперсии рассматривается модель Lopez de Bertodano, которая имеет следующий вид:

$$\vec{F}_{td,q} = -\vec{F}_{td,p} = f_{td,limiting}C_{TD}\rho_q k_q \nabla\alpha_p, \quad (170)$$

где ρ_q – плотность непрерывной фазы, k_q – турбулентная кинетическая энергия в непрерывной фазе, $\nabla\alpha_p$ – градиент объемной доли дисперсной фазы, C_{TD} – пользовательская константа, по умолчанию равная 1. Также по умолчанию на силу турбулентной дисперсии не накладывается ограничений ($f_{td,limiting} = 1$), но при необходимости может использоваться функция, которая линейно изменяется от 0 до 1 в зависимости от объемной доли дисперсной фазы (фаз), α_p :

$$f_{td,limiting}(\alpha_p) = \max\left[0, \min\left(1, \frac{\alpha_{p,2} - \alpha_p}{\alpha_{p,2} - \alpha_{p,1}}\right)\right], \quad (171)$$

По умолчанию, $\alpha_{p,1} = 0.3$ и $\alpha_{p,2} = 0.7$, но могут быть изменены пользователем.

4.2.4.5.9. Сила виртуальной массы

Для многофазных потоков в Эйлеровой модели можно учитывать эффект «виртуальной массы», который возникает при ускорении вторичной фазы p относительно несущей фазы q . Инерция массы несущей фазы, с которой сталкиваются ускоряющиеся частицы, оказывает на частицы «силу виртуальной массы» [27], определяемую согласно выражению:

$$\vec{F}_{vm} = C_{vm}\alpha_p\rho_q\left(\frac{d_q\vec{v}_q}{dt} - \frac{d_p\vec{v}_p}{dt}\right), \quad (172)$$

где C_{vm} – коэффициент виртуальной массы, по умолчанию равный 0.5.

Термин $\frac{d_q}{dt}$ обозначает материальную производную (производную Лагранжа) для фазы, определяемую как:

$$\frac{d_q(\phi)}{dt} = \frac{d(\phi)}{dt} + (\vec{v}_q \cdot \nabla)\phi, \quad (173)$$

Виртуальная массовая сила \vec{F}_{vm} добавляется к правой части уравнения импульса для обеих фаз ($\vec{F}_{vm,q} = -\vec{F}_{vm,p}$). Эффект виртуальной массы значителен, когда плотность вторичной фазы намного меньше плотности несущей фазы

4.2.4.5.10. Напряжение сдвига

Тензор напряжений твердых тел содержит сдвиговую и объемную вязкости, возникающие в результате обмена импульсами частиц при их перемещении и столкновении. Компоненты сдвиговой вязкости рассчитываются так же, как в модели смеси (уравнения 136-139).

Объемная вязкость твердых частиц учитывает сопротивление гранулированных частиц сжатию и расширению. Она имеет следующую форму, приведенную Lun et al. [20]:

$$\lambda_s = \frac{4}{3} \alpha_s^2 \rho_s d_s g_{0,ss} (1 + e_{ss}) \left(\frac{\theta_s}{\pi} \right)^{1/2}, \quad (174)$$

Для моделирования вязкости трения в Ansys Fluent предусмотрено несколько моделей, из которых в рамках данной верификации рассматривается модель Schaeffer:

$$\mu_{s,fr} = \frac{p_{fr} \sin \phi_{fr}}{2\sqrt{I_{2D}}}, \quad (175)$$

где p_{fr} – давление трения, ϕ_{fr} – угол внутреннего трения, и I_{2D} второй инвариант девиатора напряжений. Также можно задать постоянную или пользовательскую вязкость трения.

Давление трения определяется из выражения для напряжения трения:

$$\tau_{fr} = -p_{fr} \vec{l} + \mu_{s,fr} (\nabla \vec{u}_s + (\nabla \vec{u}_s)^T), \quad (176)$$

которое добавляется к напряжению, предсказанному кинетической теорией, когда объемная доля твердых частиц превышает критическое значение, что дает выражение $p_s = p_{kin} + p_{fr}$ и, следовательно, $\mu_s = \mu_{s,kin} + \mu_{s,fr}$. Из нескольких моделей, доступных в Ansys Fluent для вычисления p_{fr} , в рамках данной верификации рассматривается модель Johnson and Jackson [28], согласно которой:

$$p_{fr} = Fr \frac{(\alpha_s - \alpha_{s,min})^n}{(\alpha_{s,max} - \alpha_s)^p}, \quad (177)$$

где $Fr = 0.08\alpha_s$, $\alpha_{s,min}$ – предел уплотнения при трении, $\alpha_{s,max}$ – предел уплотнения, $n = 2$ и $p = 5$.

4.2.4.5.11. Механизм теплообмена

Внутренний энергетический баланс для фазы q записывается в терминах фазовой энтальпии (уравнение 152):

$$H_q = \int c_{p,q} dT_q, \quad (178)$$

где $c_{p,q}$ – удельная теплота при постоянном давлении фазы q .

Объемная интенсивность теплообмена между фазами Q_{pq} считается функцией разности температур и площади межфазной поверхности, A_i :

$$Q_{pq} = h_{pq} A_i (T_p - T_q), \quad (179)$$

где h_{pq} ($= h_{qp}$) – объемный коэффициент теплообмена между p -й и q -й фазами, который связан с числом Нуссельта p -й фазы Nu_p по формуле:

$$h_{pq} = \frac{\lambda_q Nu_p}{d_p}, \quad (180)$$

где λ_q – теплопроводность q -й фазы, d_p – диаметр частицы. Ansys Fluent предоставляет несколько методов для определения h_{pq} , из которых в рамках данной верификации рассматриваются следующие:

- постоянное значение: задается пользователем вручную;
- через число Нуссельта Nu_p : которое также может быть задано для каждой фазы;
- модель Ranz-Marshall [29, 30]: используется для вычисления Nu_p по формуле:

$$Nu_p = 2 + 0.6 Re_p^{1/2} Pr_q^{1/3}, \quad (181)$$

где Re_p – относительное число Рейнольдса, зависящее от d_p и относительной скорости $|\vec{u}_p - \vec{u}_q|$, $Pr_q = c_{p,q}\mu_q / \lambda_q$ – число Прандтля q -й фазы.

4.2.4.5.12. Модели турбулентности

В сочетании с Эйлеровой моделью в Ansys Fluent для всех моделей семейств $k - \epsilon$ и $k - \omega$ доступно три подхода к моделированию турбулентности:

- выбор единой модели турбулентности для смеси фаз (по умолчанию);
- использование модели дисперсной турбулентности;
- выбор модели турбулентности для каждой фазы.

В рамках данной верификации рассматривается только первый подход. Его описание представлено на основе стандартной $k - \epsilon$ модели. Выражения для RNG и разрешающей $k - \epsilon$ моделей и моделей $k - \omega$ выводятся аналогичным образом.

Задание единой модели турбулентности для смеси фаз представляет собой первое расширение однофазной $k - \epsilon$ и применимо при моделировании разделения фаз, для стратифицированных многофазных течений, а также когда отношение плотностей между фазами близко к 1. В этих случаях использование свойств смеси и скоростей смеси достаточно для отражения важных особенностей турбулентного потока.

Уравнения переноса k и ϵ (без дополнительных членов) в этом случае выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}_m k) = \nabla \cdot \left(\left(v_m + \frac{v_{t,m}}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + G_{k,m} - \epsilon + \Pi_{k,m} \quad (182)$$

и

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}_m \epsilon) = \nabla \cdot \left(\left(v_m + \frac{v_{t,m}}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + \frac{\epsilon}{k} (C_{1\epsilon} G_{k,m} - C_{2\epsilon} \epsilon) + \Pi_{\epsilon,m}, \quad (183)$$

где плотность смеси ρ_m , кинематическая вязкость ν_m и скорость смеси \vec{v}_m вычисляются из

$$\rho_m = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i, \quad \nu_m = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i \mu_i}{\rho_m}, \quad \vec{v}_m = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i}, \quad (184)$$

где α_i , ρ_i , μ_i и \vec{v}_i – соответственно, объемная доля, плотность, вязкость и скорость i -й фазы.

Турбулентная кинематическая вязкость смеси $\nu_{t,m}$ вычисляется как

$$\nu_{t,m} = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (185)$$

и генерация кинетической энергии турбулентности, $G_{k,m}$ вычисляется как

$$G_{k,m} = \nu_{t,m} (\nabla \vec{v}_m + (\nabla \vec{v}_m)^T) : \nabla \vec{v}_m \quad (186)$$

$\Pi_{k,m}$ и $\Pi_{\epsilon,m}$ являются источниковыми членами, которые могут быть включены для моделирования турбулентного взаимодействия между дисперсными фазами и непрерывной фазой.

Кинематическая турбулентная вязкость для i -й фазы рассчитывается по формуле

$$\nu_{t,i} = \frac{\rho_i}{\rho_m^2} \nu_{t,m} \quad (187)$$

Обозначения и величины констант в этих уравнениях соответствуют аналогичным в однофазной стандартной $k - \epsilon$ модели.

4.2.4.5.13. Численная реализация Эйлеровой модели

Для расчетов многофазных течений с помощью Эйлеровой модели Ansys Fluent может решать уравнения фазового импульса, общего давления и фазовой объемной доли с помощью связанного и отдельного решателя. Подробное описание связанного решателя приведено в руководстве пользователя Ansys Fluent. При использовании отдельного решателя в Ansys Fluent используется алгоритм PC-SIMPLE с фазовой связью между давлением и скоростью [31]. Это расширение алгоритма SIMPLE [32] для многофазных потоков, в котором скорости полагаются связанными по фазам, но вычисляются отдельно. Для решения векторного уравнения, образованного компонентами скоростей всех фаз, применяется блочная алгебраическая многосеточная схема. Затем строится уравнение для коррекции давления, основанное на неразрывности общего объема, а не массы. Затем давление и скорости корректируются таким образом, чтобы удовлетворить условию неразрывности.

Для несжимаемого многофазного потока уравнение коррекции давления имеет вид:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\rho_{rk}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \alpha_k \rho_k + \nabla \cdot \alpha_k \rho_k \vec{v}'_k + \nabla \cdot \alpha_k \rho_k \vec{v}^*_k - \left(\sum_{l=1}^n (\dot{m}_{lk} - \dot{m}_{kl}) \right) \right\} = 0, \quad (188)$$

где ρ_{rk} – референтная плотность фазы для k -й фазы (средняя плотность фазы k по всему объему), \vec{v}'_k – поправка на скорость для k -й фазы, \vec{v}^*_k – значение \vec{v}_k на текущей итерации. Скоростные поправки сами выражаются как функции поправок на давление.

Объемные доли получаются из уравнений неразрывности фаз. В дискретизированном виде уравнение k -й объемной доли имеет вид

$$a_{p,k} \alpha_k = \sum_{nb} a_{nb,k} \alpha_{nb,k} + b_k = R_k \quad (189)$$

Чтобы удовлетворить условию, что все объемные доли в сумме равны единице, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$.

4.2.4.6. Модель плотной дискретной фазы

В сочетании с Эйлеровой моделью в Ansys Fluent доступна возможность моделирования частиц в лагранжевой постановке – модель плотной дискретной фазы. В стандартной лагранжевой постановке (не рассматривается в рамках данной верификации) полагается, что объемная доля дискретной фазы настолько мала, что она не учитывается при выводе уравнений неразрывности. Чтобы преодолеть это ограничение, при описании дискретной фазы используется такое же уравнение неразрывности, как в Эйлеровой модели (уравнение 148), а к уравнению движения (149) Эйлеровой модели добавляется прибавка:

$$K_{DPM} (\vec{v}_{DPM} - \vec{v}_p) + S_{DPM,explicit} \quad (190)$$

Индекс DPM означает члены, отвечающие за межчастичный обмен импульсом, которые разделяются на явную ($S_{DPM,explicit}$) и неявную часть, в которой \vec{v}_{DPM} – осредненная по частицам скорость дискретной фазы, K_{DPM} – осредненный по частицам коэффициент межфазного обмена импульсом [33].

В ранних версиях Ansys Fluent одним из недостатков модели плотной дискретной фазы являлось то, что она не предотвращала нефизически высокий рост концентрации частиц, вследствие чего ее применимость была существенно ограниченной (например, к расчету псевдооживленного слоя). Однако в современных версиях Ansys Fluent используется специальная обработка уравнения движения, которая предотвращает неограниченное накопление частиц. В частности, это позволяет моделировать суспензии.

Поскольку данный подход использует рамки Эйлеровой модели, для него действуют следующие ограничения:

- 1) Недоступны модели турбулентности LES, SAS, DES, SDES и SBES;
- 2) Недоступны модели затвердевания и плавления.

Напряжение, действующее на частицы в плотном потоке, моделируется с помощью дополнительной силы \vec{F}_{int} в уравнении баланса сил частиц.

$$m_p \frac{d\vec{u}_p}{dt} = m_p \frac{\vec{u} - \vec{u}_p}{\tau_r} + m_p \frac{\vec{g}(\rho_p - \rho)}{\rho_p} + \vec{F} + \vec{F}_{int} \quad (191)$$

Он вычисляется из тензора напряжений, задаваемого кинетической теорией потоков зернистой среды, по формуле

$$\vec{F}_{int} = -m_p \frac{1}{\rho_p} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}_s \quad (192)$$

В модели внутренних напряжений в зернистой среде используется температура зернистой среды, которую можно оценить с помощью любой из ранее описанных моделей в 4.2.4.4.4 (по умолчанию используется алгебраическая формулировка). Уравнение сохранения температуры зернистой среды (кинетической энергии флуктуационного движения частиц) решается с помощью усредненного поля скоростей частиц. Поэтому для обеспечения стабильного поведения уравнения температуры гранул необходимо достаточное статистическое представление фазы частиц. Основное преимущество использования уравнений Эйлеровой модели для моделирования плотной дискретной фазы заключается в том, что нет необходимости определять классы частиц для обработки их распределений по размерам.

4.2.4.7. Моделирование массопереноса в многофазных потоках

В сочетании с рассмотренными моделями многофазных течений в Ansys Fluent доступно несколько моделей массопереноса. Также доступно определение и использование собственных пользовательских моделей массопереноса. Ansys Fluent добавляет прибавку, описывающую массоперенос, только в уравнения движения, переносов вещества и энергии.

Пусть $m_p^{i_qj}$ – скорость массопереноса в единице объема от i -го вещества фазы p к j -му веществу фазы q . Тогда вклад в массовый источник фазы p в ячейке составляет

$$m_p = -m_p^{i_qj}, \quad (193)$$

для фазы q :

$$m_q = m_p^{i_qj} \quad (194)$$

Для Эйлеровой модели в уравнение движения добавляется следующая прибавка для фазы p :

$$m_p \vec{u}_p = -m_p^{i_qj} \vec{u}_p, \quad (195)$$

для фазы q :

$$m_q \vec{u}_q = m_p^{i_qj} \vec{u}_q \quad (196)$$

В уравнения энергии для всех моделей добавляется следующая прибавка для фазы p :

$$H_p = -m_{p^i q^j} (h_q^{f^j} - h_p^{f^i}), \quad (197)$$

для фазы q :

$$H_q = m_{p^i q^j} (h_q^{f^j} - h_p^{f^i}) \quad (198)$$

где $h_p^{f^i}$ и $h_q^{f^j}$ – энтальпии образования вещества i из фазы p и вещества j из фазы q , соответственно. Разница между $h_p^{f^i}$ и $h_q^{f^j}$ представляет собой скрытую теплоту.

Источник образования вещества в ячейке для вещества i фазы p имеет вид

$$m_p^i = -m_{p^i q^j}, \quad (199)$$

для вещества j фазы q :

$$m_q^j = m_{p^i q^j} \quad (200)$$

По умолчанию для турбулентных и других скалярных величин отдельные источниковые члены не прибавляются, однако могут быть определены пользователем.

Модель однонаправленного массопереноса определяет положительный массовый расход на единицу объема от фазы p к фазе q :

$$m_{pq} = \max[0, \lambda_{pq}] - \max[0, -\lambda_{pq}] \quad (201)$$

где

$$\lambda_{pq} = \dot{r} \alpha_p \rho_q \quad (202)$$

и \dot{r} – постоянная скорость сжатия или разбухания частицы (для модели объема жидкости этот параметр недоступен).

Если фаза p представляет собой смесь материалов, и механизм массопереноса определен для вещества i из фазы p , то

$$\lambda_{pq} = \dot{r} \alpha_p y_{p,i} \rho_q \quad (203)$$

где $y_{p,i}$ – массовая доля вида i в фазе p .

4.2.4.8. Моделирование кавитации

Кавитация – процесс образования разрывов сплошности (пустот) в жидкости при постоянной температуре и понижении давления ниже давления насыщенного пара. В жидкости также содержатся микропузырьки (ядра) неконденсирующихся (растворенных или попавших в жидкость) газов, которые при понижении давления могут расти и образовывать полости. При таких процессах в областях низкого давления/кавитации происходят очень большие и резкие изменения плотности. Для моделирования этих явлений в Ansys Fluent существуют три модели: Singhal et al. [34], Zwart-Gerber-Belamri [35] и Schnerr and Sauer [36] (по умолчанию). В рамках данной верификации рассматривается только модель Zwart-Gerber-Belamri, которая доступна для использования вместе с моделями многофазного течения смеси (Mixture) и Эйлеровой модели (Eulerian), совместима со всеми моделями турбулентности, динамическими и неконформными сетками.

В стандартных двухфазных моделях кавитации принимаются допущения:

- 1) Исследуемая система должна состоять из жидкой и паровой фаз;

2) Предполагается, что происходит массообмен между жидкой и паровой фазами. В моделях кавитации учитывается как образование пузырьков (испарение), так и их схлопывание (конденсация).

3) Для модели кавитации Ansys Fluent определяет положительный массоперенос как перенос от жидкости к пару.

4) Модели кавитации основаны на уравнении Рэлея-Плессета, описывающем рост одиночного пузырька пара в жидкости.

5) Входные свойства материала, используемые в моделях кавитации, могут быть константами, функциями температуры или задаваться пользователем.

При многофазном подходе к моделированию кавитации базовая модель двухфазной кавитации состоит из использования стандартных уравнений вязкого течения, управляющих переносом смеси (модель Mixture) или фаз (модель Eulerian) и обычной модели турбулентности (например, стандартной $k - \epsilon$ модели). При кавитации массообмен между жидкостью и паром (испарение и конденсация) регулируется уравнением переноса пара:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_v \rho_v) + \nabla \cdot (\alpha_v \rho_v \vec{V}_v) = R_e - R_c \quad (204)$$

где индекс v означает фазу пара, \vec{V}_v – скорость фазы пара, R_e и R_c – источники массопереноса, связанные с ростом и схлопыванием паровых пузырьков, соответственно. В Ansys Fluent они моделируются на основе уравнения Рэлея-Плессета, описывающего рост одиночного пузырька пара в жидкости.

В большинстве практических задач полагается, что в объеме существует достаточное количество ядер для возникновения кавитации, поэтому основное внимание уделяется корректному учету роста и схлопывания пузырьков. В текучей жидкости с нулевой скоростью проскальзывания между жидкостью и пузырьками уравнение динамики пузырьков может быть получено из обобщенного уравнения Рэлея-Плессета в виде [37]:

$$\mathfrak{R}_b \frac{D^2 \mathfrak{R}_b}{Dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{D \mathfrak{R}_b}{Dt} \right)^2 = \left(\frac{P_b - P}{\rho_l} \right) - \frac{4\nu_l}{\mathfrak{R}_b} \dot{\mathfrak{R}}_b - \frac{2\sigma_l}{\rho_l \mathfrak{R}_b} \quad (205)$$

где \mathfrak{R}_b – радиус пузырька, σ_l – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, ρ_l – плотность жидкости, ν_l – кинематическая вязкость жидкости, P_b – поверхностное давление пузырька, P – локальное давление в свободном потоке.

Пренебрегая членами второго порядка и силой поверхностного натяжения, уравнение 205 упрощается до

$$\frac{D \mathfrak{R}_b}{Dt} = \sqrt{\frac{2 P_b - P}{3 \rho_l}} \quad (206)$$

Это уравнение обеспечивает физический подход к введению эффектов динамики пузырьков в модель кавитации. Его также можно рассматривать как уравнение для распространения пустот и, следовательно, плотности смеси.

В модели Zwart-Gerber-Belamri [35] предполагается, что все пузырьки в системе имеют одинаковый размер, и рассчитывается общую скорость межфазного массопереноса на единицу объема (R), используя плотность числа пузырьков (n) и скорость изменения массы одного пузырька:

$$R = n \left(4\pi \mathfrak{R}_b^2 \rho_v \frac{D \mathfrak{R}_b}{Dt} \right) \quad (207)$$

Подставляя значение n из уравнения 207 в уравнение объемной доли пара, получается выражение для чистого массопереноса:

$$R = \frac{3\alpha \rho_v}{\mathfrak{R}_b} \sqrt{\frac{2 P_b - P}{3 \rho_l}} \quad (208)$$

Это уравнение справедливо только для увеличения пузырьков (парообразования). С учетом расширения на процесс конденсации и поправкой на уменьшение числа ядер по мере роста объемной доли пара (путем замены α_v на $\alpha_{\text{nuc}}(1 - \alpha_v)$), окончательная форма модели приобретает следующий вид:

Если $P \leq P_v$:

$$R_e = F_{\text{vap}} \frac{3\alpha_{\text{nuc}}(1 - \alpha_v)\rho_v}{\mathfrak{R}_b} \sqrt{\frac{2 P_v - P}{3 \rho_l}} \quad (209)$$

Если $P \geq P_v$

$$R_c = F_{\text{cond}} \frac{3\alpha_v \rho_v}{\mathfrak{R}_b} \sqrt{\frac{2 P - P_v}{3 \rho_l}} \quad (210)$$

где, $\mathfrak{R}_b = 10^{(-6)}$, $\alpha_{\text{nuc}} = 5 \cdot 10^{-4}$ – объемная доля ядер, $F_{\text{vap}} = 50$ – коэффициент испарения, $F_{\text{cond}} = 0.01$ – коэффициент конденсации.

Также для модели Zwart-Gerbert-Belamgi доступен учет влияния турбулентности на пороговое давление, которое рассчитывается по методу Yang et al. [38]:

$$P_v = P_{\text{sat}} + 0.195 \rho_l k_l \quad (211)$$

где ρ_l и k_l – плотность и кинетическая энергия турбулентности жидкой фазы, соответственно.

4.2.4.9. Моделирование переноса веществ в многофазных течениях

Перенос веществ, описанный в разделе 4.2.3, может быть применен и к многофазным течениям. Ansys Fluent может вычислять локальную массовую долю каждого вещества Y_i^k для каждой фазы k путем решения уравнения конвекции-диффузии для i -го вещества, и затем решать уравнение сохранения веществ в многофазном потоке. Обобщенное уравнение сохранения химических веществ (уравнение 99) в многофазной смеси может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho^q \alpha^q Y_i^q) + \nabla \cdot (\rho^q \alpha^q \vec{v}^q Y_i^q) = -\nabla \cdot \alpha^q \vec{j}_i^q + \alpha^q R_i^q + \alpha^q S_i^q + \sum_{p=1}^n \dot{m}_{p^i q^i} + \mathcal{R}, \quad (212)$$

где R_i^q – чистая скорость производства однородного вещества i в результате химической реакции для фазы q , $\dot{m}_{p^i q^i}$ – источниковый член массопереноса веществ i и j из фазы q в фазу p , \mathcal{R} – скорость гетерогенной реакции, α^q – объемная доля фазы q , S_i^q – скорость образования через прирост из дисперсной фазы, а также прочие пользовательские источники.

Ansys Fluent рассматривает гомогенные химические реакции в газовой фазе так же, как и однофазные химические реакции. Реактивы и продукты принадлежат к одному и тому же материалу смеси, а значит, к одной и той же фазе. Скорость реакции масштабируется объемной долей конкретной фазы в ячейке. Вещества различных фаз совершенно

независимы. Между ними нет неявных соотношений, даже если они имеют одно и то же название. Стехиометрические соотношения между веществами разных фаз могут быть заданы с помощью массопереноса и гетерогенных реакций. Некоторые фазы могут состоять из материала типа «жидкость» вместо материала типа «смесь» – для них уравнение переноса вещества решаться не будет. Для фаз, состоящих из материала типа «жидкость» массоперенос и гетерогенные реакции будут связаны с основным объемом жидкости.

4.2.4.9.1. Уравнения неразрывности и движения

В Ansys Fluent модель массопереноса в многофазной среде учитывает массоперенос между веществами, принадлежащими к разным фазам, что требует определения нескольких механизмов массопереноса. Каждый из них определяет явление массопереноса от одной сущности к другой (здесь сущность – либо определенное вещество в фазе, либо объемная фаза, если данная фаза не имеет связанного с ней материала смеси) и может быть задан либо с помощью встроенной модели однонаправленного переноса с постоянной скоростью, либо с помощью пользовательских функций. Затем Ansys Fluent решает составленные уравнения в цикле, чтобы рассчитать суммарное значение источников, отвечающих за прирост и убыль массы каждого вещества каждой фазы, и распределяет полученные значения по оставшимся уравнениям переноса и движений.

Рассмотрим следующую реакцию:



Предположим, что A и C принадлежат к фазе 1, а B и D – к фазе 2. Тогда источники массы для фаз задаются выражением:

$$S_1 = \mathcal{R}(cM_c - aM_a), \quad S_2 = \mathcal{R}(dM_d - bM_b), \quad (214)$$

где S – источник массы, M – молекулярная масса.

Общий вид источников массы для i -й фазы задается выражением

$$S_{ri} = -\mathcal{R} \sum_{r_i} \gamma_j^r M_j^r, \quad S_{pi} = \mathcal{R} \sum_{p_i} \gamma_j^p M_j^p, \quad S_i = S_{pi} + S_{ri}, \quad (215)$$

где γ – стехиометрический коэффициент, p – продукт, а r – реактив.

Выражения для уравнений движения выводятся из предположения, что реактивы смешиваются с сохранением импульса, а продукты приобретают момент в соотношении со скоростью их образования. Чистая скорость \vec{u}_{net} реактивов определяется выражением:

$$\vec{u}_{\text{net}} = \frac{aM_a\vec{u}_1 + bM_b\vec{u}_2}{aM_a + bM_b} \quad (216)$$

Общее выражение для чистой скорости реактивов задается формулой:

$$\vec{u}_{\text{net}} = \frac{\sum_{r_i} \gamma_j^r M_j^r \vec{u}_{r_j}}{\sum_{r_i} \gamma_j^r M_j^r} \quad (217)$$

где j обозначает либо реактив, либо продукт.

Перенос импульса для фаз тогда задается выражением:

$$S_1^{\vec{u}} = \mathcal{R}(cM_c\vec{u}_{\text{net}} - aM_a\vec{u}_1), \quad S_2^{\vec{u}} = \mathcal{R}(dM_d\vec{u}_{\text{net}} - bM_b\vec{u}_2) \quad (218)$$

или, в общем виде:

$$S_i^{\vec{u}} = S_{pi}\vec{u}_{\text{net}} - \mathcal{R} \sum_{r_i} \gamma_j^r M_j^r \vec{u}_i \quad (219)$$

Если предположить, что перенос импульса отсутствует, то вышеуказанный член будет равен нулю.

Общее выражение для источника k -го вещества в j -й фазе имеет вид:

$$S_{r_i^k} = -\mathcal{R} \sum_{r_i^k} \gamma_j^{r^k} M_j^{r^k}, \quad S_{p_i^k} = \mathcal{R} \sum_{p_i^k} \gamma_j^{p^k} M_j^{p^k}, \quad S_i^k = S_{p_i^k} + S_{r_i^k} \quad (220)$$

Для учета теплопередачи необходимо учитывать энтальпии образования реактивов и продуктов. Чистая энтальпия реактивов определяется выражением:

$$H_{\text{net}} = \frac{aM_a(H_a + h_a^f) + bM_b(H_b + h_b^f)}{aM_a + bM_b}, \quad (221)$$

где h^f – энтальпия образования, а H – полная энтальпия.

Общее выражение для H_{net} имеет вид:

$$H_{\text{net}} = \frac{\sum_r \gamma_j^r M_j^r (H_j^r + h_j^{f^r})}{\sum_r \gamma_j^r M_j^r} \quad (222)$$

Если предположить, что эта энтальпия распределяется между продуктами в соотношении их массовых скоростей производства, то теплопередача для фаз определяется:

$$S_1^H = \mathcal{R}[cM_c(H_{\text{net}} - h_c^e) - aM_a H^a], \quad S_2^H = \mathcal{R}[dM_d(H_{\text{net}} - h_d^d) - bM_b H^b] \quad (223)$$

Общее выражение для источника тепла имеет вид:

$$S_i^H = S_{p_i} H_{\text{net}} - \mathcal{R} \left(\sum_{r_i} \gamma_j^r M_j^r H_j^r + \sum_{p_i} \gamma_j^p M_j^p h_j^{f^p} \right) \quad (224)$$

Если предположить, что теплообмен отсутствует, то можно считать, что различные вещества переносят только свои энтальпии образования. Поэтому выражение для H_{net} примет вид:

$$H_{\text{net}} = \frac{\sum_r \gamma_j^r M_j^r h_j^{f^r}}{\sum_r \gamma_j^r M_j^r}, \quad (225)$$

а для S_i^H –

$$S_i^H = S_{p_i} H_{\text{net}} - \mathcal{R} \sum_{p_i} \gamma_j^p M_j^p h_j^{f^p} \quad (226)$$

4.2.4.9.2. Взаимодействие гетерогенных фаз

Для расчета скоростей взаимодействия гетерогенных фаз используется модифицированное выражение скорости типа Аррениуса, которое имеет вид:

$$\text{Rate} = k \prod_{i=r}^{NR} \left(\frac{Y_{ip} \rho_p \alpha_p}{MW_{ip}} \right)^n, \quad (227)$$

где

$$k = A \left(\frac{T_p}{T_{\text{ref}}} \right)^b e^{\left(\frac{-E}{RT_p} \right)}, \quad (228)$$

Y_{ip} – массовая доля i -го вещества реагента в фазе p , NR – общее количество реагентов в данной межфазной реакции, ρ_p – объемная плотность фазы p , α_p – объемная доля фазы p , MW_{ip} – молекулярная масса реагирующего вещества i в фазе p , n – экспонента скорости, k – константа скорости, T_p – температура фазы, T_{ref} – температура нормализации (для большинства реакций равна 1).

4.2.5. Теплоперенос

Теплоперенос – переток тепловой энергии от вещества, занимающего одну область пространства, к веществу, занимающему другую область. Он может происходить благодаря одному из трех основных механизмов: теплопроводности, конвекции и излучению. Физические модели, учитывающие только теплопроводность и/или конвекцию, являются наиболее простыми, а те, что учитывают конвекцию, плавучесть и излучение – более сложными. Также в Ansys Fluent доступен расчет теплопереноса в периодических течениях, что в некоторых случаях значительно снижает требуемые вычислительные усилия.

Ansys Fluent решает уравнение переноса энергии в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(v \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \right) = \\ = \frac{1}{\rho} \left[\nabla \cdot \left(\lambda_{\text{eff}} \nabla T - \sum_j h_j \vec{J}_j + \tau_{\text{eff}} \cdot \vec{v} \right) + S_h \right], \end{aligned} \quad (229)$$

где $\lambda_{\text{eff}} = \lambda + \lambda_t$ – эффективная теплопроводность, λ_t – турбулентная теплопроводность, определяемая в зависимости от используемой модели турбулентности, а \vec{J}_j – поток диффузии вещества j . Первые три члена в правой части уравнения 237 описывают перенос энергии за счет теплопроводности, диффузии веществ и вязкой диссипации, соответственно. S_h описывает объемные источники тепла.

Энтальпия h определяется с учетом давления:

$$h = \sum_j Y_j h_j + \frac{p}{\rho}, \quad (230)$$

где Y_j – массовая доля вещества j , а явная теплота вещества h_j – часть энтальпии, включающая только изменения энтальпии за счет удельной теплоты:

$$h_j = \int_{T_{\text{ref}}}^T c_{p,j} dT \quad (231)$$

Значение, используемое для T_{ref} при расчете явной энтальпии, зависит от используемого решателя и моделей. Для решателя на основе давления $T_{\text{ref}} = 298.15 \text{ K}$.

Внутренняя энергия e определяется как

$$e = h - \frac{p_{\text{оп}} + p}{\rho}, \quad (232)$$

где p и $p_{\text{оп}}$ – манометрическое и рабочее давление, соответственно.

В твердых телах уравнение переноса энергии принимает следующий вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}h) = \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S_h], \quad (233)$$

где ρ – плотность, $h = \int_{T_{\text{ref}}}^T c_p dT$ – явная энтальпия, λ – теплопроводность, T – температура, S_h – объемный источник тепла.

Второй член в левой части уравнения 241 описывает конвективный перенос энергии из-за вращательного или поступательного движения твердых тел. Поле скоростей \vec{v} вычисляется на основе движения, заданного для зоны твердого тела. Другие члены в правой части описывают тепловой поток, обусловленный теплопроводностью и объемными источниками тепла в твердом теле, соответственно.

Чистый перенос энергии на входе состоит из конвективной и диффузионной составляющих. Конвективная составляющая фиксируется заданной пользователем

температурой на входе, а диффузионная – зависит от градиента вычисленного температурного поля.

По мере нагрева жидкости, ее плотность меняется в зависимости от температуры. Далее возникает течение под действием силы тяжести, действующей на изменения плотности. Такие течения, обусловленные плавучестью, называются естественно-конвективными (или смешанно-конвективными) и также доступны для моделирования в Ansys Fluent.

Важность сил плавучести в смешанном конвективном потоке можно определить по соотношению чисел Грасгофа и Рейнольдса:

$$\frac{Gr}{Re^2} = \frac{g\beta\Delta TL}{\nu^2} \quad (234)$$

Когда это число приближается к единице или превышает ее, следует ожидать сильного вклада плавучести в поток. И наоборот, если оно очень мало, силы плавучести можно не учитывать. При чистой естественной конвекции сила потока, вызванного плавучестью, измеряется числом Рэлея:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\mu\alpha} \quad (235)$$

где β – коэффициент теплового расширения:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (236)$$

и α – тепловая диффузия:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (237)$$

Числа Рэлея менее 10^8 указывают на ламинарное течение, вызванное плавучестью, а переход к турбулентности происходит в диапазоне $10^8 < Ra < 10^{10}$.

4.2.6. Взаимодействие жидкости/газа и конструкции (FSI, Fluid-Structure Interaction)

Моделирование взаимодействия жидкости и конструкции (FSI) представляет собой объединенные случаи CFD (вычислительная гидрогазодинамика) и FEM (метод конечных элементов). FSI является частью мультифизического моделирования. Для решения используются основные уравнения гидрогазодинамики и механики. Передача граничных условий на интерфейсе (граница контакта) является важной особенностью решения FSI [39].

Связь области жидкости Ω_F с границей $\Gamma_F = \partial\Omega_F$ и структурной области Ω_S с границей $\Gamma_S = \partial\Omega_S$ происходит на их общей границе (или интерфейсе / поверхности контакта) (см. рисунок 4.5):

$$\Gamma_{FS} = \Gamma_F \cap \Gamma_S \quad (238)$$

Кинематические и динамические условия применяются на поверхности контакта, как описано ниже.

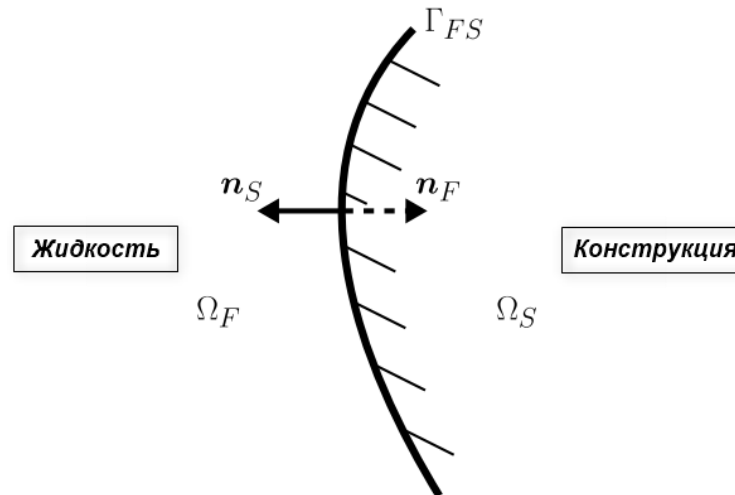


Рисунок 4.5 – Схематическое изображение границы раздела Γ_{FS} на общей границе жидкости и структурной области $\partial\Omega_F$ и $\partial\Omega_S$. Внешние нормали жидкости и структурной области n_F и n_S имеют противоположный знак.

Условия кинематической границы раздела гласят, что перемещения и скорости на Γ_{FS} одинаковы для жидкости и конструкции:

$$x_F = u_S, v_F = \frac{\partial u_S}{\partial t} \text{ на } \Gamma_{FS} \quad (239)$$

Равенство перемещений следует из предположения, что жидкость и структура непрерывно заполняют свои регионы расчетной области до границы раздела, и не может возникнуть ни перекрытий, ни разрывов материала. Равенство скоростей вытекает из предположения, что молекулы жидкости, контактирующие со структурной поверхностью, связаны с ней силами молекулярного притяжения. Для невязких потоков скорость потока, параллельного стенке, не связана со скоростью потока стенки, и, таким образом, второе равенство справедливо только для скоростей потока, нормальных к поверхности контакта

$$v_F \cdot n_F = -\frac{\partial u_S}{\partial t} \cdot n_S \text{ на } \Gamma_{FS} \quad (240)$$

Условие динамической границы раздела требует равенства сил на границе раздела, которое точно выражается поверхностными напряжениями

$$\sigma_F \cdot n_F = \sigma_S \cdot n_S \text{ на } \Gamma_{FS} \quad (241)$$

4.2.7. Динамические сетки

В Ansys Fluent доступны три группы методов движения сетки для обновления объемной сетки в деформируемых областях с учетом движения, определенного на границах:

- методы сглаживания сетки (Smoothing);
- метод динамического добавления/удаления ячеек сетки (Dynamic Layering);
- методы перестроения сетки (Remeshing).

4.2.7.1. Основные уравнения сохранения

Интегральная форма уравнения сохранения с использованием модели динамических сеток для скалярной переменной ϕ , для произвольного объема жидкости с учетом движения границ данного объема V может быть записана как [40]:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \int_{\partial V} \rho \phi (\vec{u} - \vec{u}_g) \cdot d\vec{A} = \int_{\partial V} \Gamma \nabla \phi \cdot d\vec{A} + \int_V S_\phi dV \quad (242)$$

где ρ – плотность среды; \vec{u} – вектор скорости среды; \vec{u}_g – скорость движения сетки; Γ – коэффициент диффузии; S_ϕ – источниковый член; ∂V – граница объема V .

При использовании разностной схемы первого порядка производная по времени определяется:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV = \frac{(\rho \phi V)^{n+1} - (\rho \phi V)^n}{\Delta t} \quad (243)$$

При использовании разностной схемы второго порядка производная по времени определяется:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV = \frac{3(\rho \phi V)^{n+1} - 4(\rho \phi V)^n + (\rho \phi V)^{n-1}}{2\Delta t} \quad (244)$$

4.2.7.2. Методы сглаживания сетки

4.2.7.2.1. Метод сглаживания на основе пружин

В методе сглаживания на основе пружин (Spring-Based) [41] ребра между любыми двумя узлами сетки представлены как совокупность пружин. Начальные расстояния между ребрами до любого движения границы составляют равновесное состояние сетки. Перемещение в заданном граничном узле создаст силу, пропорциональную перемещению вдоль всех пружин, соединенных с узлом. Используя закон Гука, можно записать силу, действующую на сеточный узел как

$$\vec{F}_i = \sum_j^{n_i} k_{ij} (\Delta \vec{x}_j - \Delta \vec{x}_i) \quad (245)$$

где $\Delta \vec{x}_i$ и $\Delta \vec{x}_j$ – перемещение i -го и j -го узлов; n_i – количество узлов, присоединенных к i -му узлу; k_{ij} – коэффициент жесткости пружины между i -м и j -м узлами. Коэффициент жесткости пружины для ребра, соединяющего i -й и j -й узлы, определяется как

$$k_{ij} = \frac{k_{\text{fac}}}{\sqrt{|\Delta \vec{x}_i - \Delta \vec{x}_j|}} \quad (246)$$

k_{fac} – значение, которое задается в качестве показателя коэффициента жесткости пружины (spring constant factor), который изменяется в диапазоне от 0 до 1.

В равновесии, результирующая сила от всех пружин, соединяющих узлы должна быть равна нулю. Это условие приводит к итеративному уравнению

$$\Delta \vec{x}_i^{m+1} = \frac{\sum_j^{n_i} k_{ij} \Delta \vec{x}_j^m}{\sum_j^{n_i} k_{ij}} \quad (247)$$

Поскольку смещения на границах известны (после обновления положений граничных узлов), уравнение 247 решается с использованием метода Якоби для собственных значений по всем внутренним узлам. Положение узла обновляется следующим образом:

$$\vec{x}_i^{n+1} = \vec{x}_i^n + \vec{x}_i^{\text{converged}} \quad (248)$$

где $n+1$ и n используются для обозначения позиций на следующем временном шаге и текущем временном шаге соответственно. Пример сглаживания на основе пружины показано на рисунке 4.6 для цилиндрической расчетной области, где один конец цилиндра движется.

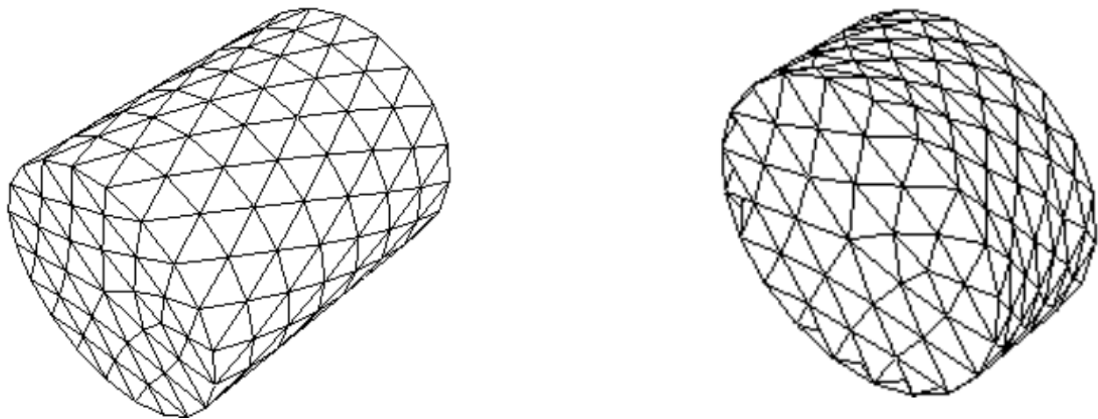


Рисунок 4.6 – Пример сглаживания сетки на основе пружины во внутренних узлах:
Начальный момент (слева) и финальный момент (справа)

4.2.7.2.2. Метод сглаживания на основе диффузии

Для данного метода движение сетки основывается на решении уравнения диффузии [41]:

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla \vec{u}) = 0 \quad (249)$$

где \vec{u} – скорость движения сетки, γ – коэффициент диффузии.

В Ansys Fluent доступны две различные формулировки для коэффициента диффузии γ . Первая формулировка позволяет сделать так, чтобы коэффициент диффузии был функцией расстояния до границы и имел вид

$$\gamma = \frac{1}{d^a} \quad (250)$$

где d^a – нормализованное расстояние до границы.

Вторая формулировка позволяет сделать так, чтобы коэффициент диффузии был функцией объема ячейки и имел вид

$$\gamma = \frac{1}{V^a} \quad (251)$$

где V^a – нормализованный объем ячейки.

Метод на основе диффузии в общем случае является более затратным в отличие от метода на основе пружин, но позволяет сохранить качество сетки на более высоком уровне.

4.2.7.2.3. Метод сглаживания линейно-упругого твердого тела

Данная модель деформирует внутреннюю сетку таким образом, как если бы она обладала свойствами линейно-упругого твердого тела [41].

При сглаживании сетки на основе линейно-упругой модели твердого тела движение сетки определяется следующим набором уравнений:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\vec{y}) &= 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\vec{y}) &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{y}))\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{y}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{y}) &= \frac{1}{2}(\nabla\vec{y} + (\nabla\vec{y})^T)\end{aligned}\quad (252)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжения, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформации, а \vec{y} – смещение сетки. Для решения уравнения имеет значение только отношение между модулем сдвига μ и первым параметром Ламе λ . Это соотношение параметризуется с помощью коэффициента Пуассона:

$$\nu = \frac{1}{2\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)}\quad (253)$$

Данная модель самая затратная по вычислительным ресурсам из всех моделей сглаживания сетки.

4.2.7.2.4. Метод сглаживания пограничного слоя

Метод сглаживания пограничного слоя (Boundary Layer Smoothing) [41] используется для деформации пограничного слоя во время моделирования движущейся сетки. Для случаев, когда для грани с пограничным слоем задается закон движения (с помощью пользовательских функций UDF – user defined functions), пограничный слой будет деформироваться в соответствии с заданным законом. Этот метод сглаживания сохраняет высоту каждого пограничного слоя и может применяться к зонам пограничного слоя всех типов сеток (клинья и шестигранники в 3D, четырехугольники в 2D).

4.2.7.2.5. Метод сглаживания Лапласа

Метод сглаживания Лапласа (Laplacian Smoothing) [41] является наиболее часто используемым и самым простым методом сглаживания сетки. Данная модель регулирует положение каждого сеточного узла относительно геометрического центра соседних узлов. Этот метод является менее затратным из всех представленных, но он не гарантирует улучшение качества сетки. Изменение положения вершин таким методом может привести к ухудшению качества сетки.

Улучшенное сглаживание Лапласа может быть включено только на деформирующихся границах (т.е. зона с треугольными элементами в 3D и зоны с линейными элементами в 2D). Вычисление положений узлов происходит следующим образом:

$$\overline{\vec{x}}_i^m = \frac{\sum_j^{n_i} \Delta\vec{x}_j^m}{n_i}\quad (254)$$

где $\overline{\vec{x}}_i^m$ – усредненное положение узла i на итерации m , $\Delta\vec{x}_j^m$ – положение узла, соседнего к узлу $\Delta\vec{x}_i^m$ на итерации m , а n_i – число узлов, соседних узлу i . Далее новое положение узла $\Delta\vec{x}_i^{m+1}$ вычисляется следующим образом:

$$\vec{x}_i^{m+1} = \vec{x}_i^m(1 - \beta) + \overline{\vec{x}}_i^m\beta\quad (255)$$

где β – коэффициент релаксации граничного узла.

Это обновление происходит только в том случае, если максимальная скошенность (*skewness*) всех граней, смежных с \vec{x}_i^{m+1} , улучшается по сравнению с \vec{x}_i^m .

4.2.7.3. Метод динамического добавления/удаления ячеек сетки

В призматических (шестигранных и/или клиновидных) зонах сетки можно использовать динамическое добавление или удаление слоев ячеек (Dynamic Layering), прилегающих к движущейся границе, на основе высоты слоя, прилегающего к движущейся поверхности ([41]). Динамическая модель сетки в Ansys Fluent позволяет назначить необходимую высоту слоя на каждой движущейся границе. Слои ячеек, прилегающий к движущейся границе (слой j на рисунке 4.7), разделяется или объединяется со слоем ячеек, расположенным рядом с ним (слой i на рисунке 4.7), на основе высоты (h) ячеек в слое j .

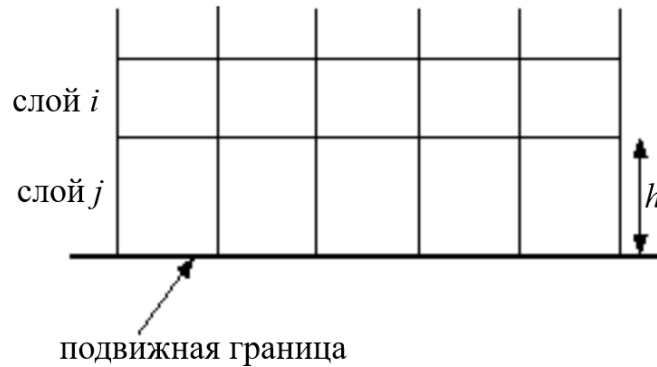


Рисунок 4.7 – Пример сглаживания на основе пружины

Если ячейки в слое j расширяются, высота ячеек может увеличиваться до тех пор, пока

$$h_{\min} > (1 + \alpha_s)h_{\text{ideal}} \quad (256)$$

где h_{\min} – минимальная высота ячейки слоя ячеек j , h_{ideal} – идеальная высота ячейки, а α_s – коэффициент разделения слоя. Обратите внимание, что Ansys Fluent позволяет определить h_{ideal} как постоянное значение или как значение, которое изменяется в зависимости от времени или угла поворота коленчатого вала. При выполнении условия в уравнении 256 ячейки разделяются на основе указанного параметра наложения слоев. Этот параметр может быть основан на высоте или на соотношении.

При выборе варианта на основе высоты ячейки разделяются для создания слоя ячеек с постоянной высотой h_{ideal} и слоя ячеек высотой $h - h_{\text{ideal}}$. При выборе варианта на основе пропорции высот ячейки разделяются таким образом, что локально соотношение новых высот ячеек везде одинаково α_s .

Если клетки в слое j сжимаются, их можно сжимать до тех пор, пока

$$h_{\min} < \alpha_c h_{\text{ideal}} \quad (257)$$

где α_c – фактор схлопывания слоя. При выполнении этого условия сжатый слой ячеек объединяется со слоем ячеек, расположенным над сжатым слоем; т. е. ячейки в слое j объединяются с ячейками в слое i .

4.2.7.4. Методы перестроения сетки

На зонах с треугольной или тетраэдрической сеткой обычно используется метод сглаживания на основе пружин (описанный выше). Когда смещение границ велико по сравнению с локальными размерами ячеек, качество ячеек может ухудшиться или ячейки могут стать вырожденными. Это может привести, например, к отрицательным объемам ячеек и,

следовательно, приведет к проблемам со сходимостью при обновлении решения до следующего временного шага.

Методы перестроения сетки позволяют смоделировать задачи с достаточно большой деформацией границ. Ячейки и поверхности перестраиваются, когда их скошенность (skewness) или размер достигают определенного значения. Число узлов и их связи при этом изменяются по мере удаления или добавления ячеек/поверхностей

В Ansys Fluent существует несколько методов перестроения сетки [41]:

- Local Cell: перестроение внутренних элементов (2D и 3D);
- Zone Remeshing: происходит полное перестроение всей зоны, в случае если Local Cell не смог перестроить сетку должным образом (2D и 3D);
- Local Face: перестроение треугольных элементов сетки на деформируемой поверхности (только для 3D);
- Region Face: перестроение сетки на поверхности, которая примыкает к движущиеся границе (2D и 3D);
- 2.5D: перестроение призматических элементов в 3D зонах (призмы, вытянутые из треугольных элементов);
- Cutcell Zone: перестраивает внутренние и поверхностные элементы полностью для всей зоны.

4.2.7.4.1. Метод локального перестроения сетки

В данном методе локального перестроения оценивается каждая внутренняя ячейка и помечается для дальнейшего перестроения, если она соответствует одному или нескольким из следующих критериев:

- имеет скошенность (skewness), превышающую заданную максимальную;
- меньше заданного минимального масштаба длины;
- больше заданного максимального масштаба длины;
- высота не соответствует заданному масштабу длины (в подвижных торцевых зонах, например, над движущимся поршнем).

4.2.7.4.2. Метод локального перестроения сетки на поверхности

Данный метод позволяет перестраивать и деформировать сетку на границах. В этом методе помечаются поверхности (и прилегающие ячейки) на деформируемых границах, которые основываются только на критерии скошенности. В случае FSI расчета сетка на интерфейсе не перестраивается, так как потребуются перераспределить узлы, на которых производится обмен данными.

4.2.7.4.3. Метод полного перестроения сетки

В данном методе перестраивается сетка полностью во всей зоне. Осуществляется перестроение внутренних и поверхностных элементов сетки на деформируемых границах.

Метод основывается на локальных настройках, когда осуществляется перестроение сетки на поверхности границ. Используются локальные значения параметров для того, чтобы контролировать перестроение сетки на поверхностях.

4.2.7.4.4. Метод перестроения сетки на поверхности, примыкающей к движущейся границе

Метод позволяет настроить дополнительные опции перестроения сетки для деформируемых границ, которые прилегают к движущиеся границе. Определяет

поверхности (и прилегающие ячейки) на деформируемых границах, которые основываются на максимальном и минимальном масштабе длины.

В первую очередь метод предназначен для геометрии с цилиндрической топологией для контроля длины ячеек в случае рассмотрения движения поршня в цилиндре. Может успешно применяться для других задач, например, граница симметрии, прилегающая к движущейся стенке.

Метод может перестраивать сетку в случае, если модель состоит из нескольких расчетных областей.

4.2.7.4.5. Метод перестроения сетки *CutCell*

Метод *CutCell* является альтернативой методу *Zone Remeshing*. При таком методе задача должна решаться в 3D постановке, а также метод не применим для работы с полиэдрическими сетками.

4.2.7.4.6. 2.5D метод перестроения сетки

Этот метод перестроения сетки применяется только к вытянутой 3D-геометрии и аналогичен локальному перестроению сетки в двух измерениях на треугольной поверхностной сетке (не смешанной зоне). Грани на деформируемой границе помечаются для повторного создания сетки на основе критерия скошенности (*skewness*). минимального и максимального масштаба длины.

4.2.8. Решатель (МКО, численные схемы)

Пространственная дискретизация всех решаемых уравнений в программном комплексе Ansys Fluent производится на основе метода конечных объемов (МКО). Временная дискретизация производится на основе конечных разностей.

Наличие временных, конвективных, диффузионных и источниковых членов в решаемых уравнениях, а также особая роль давления, порождают множество возможных вариантов численных схем и их комбинаций. Универсального набора не существует. Выбор подходящих схем, обеспечивающих рациональный баланс точности и скорости счета, для конкретного класса задач основывается на понимании их особенностей и большом опыте численного моделирования.

Так как исходные уравнения движения являются нелинейными, то в конечном итоге их численное решение сводится к итерационному процессу решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В разделе приводится краткое описание применяемых при верификации численных методов:

- основная идея и уравнения МКО;
- схемы дискретизации / интерполяции временных, конвективных, диффузионных и источниковых членов;
- схемы дискретизации / интерполяции градиентов;
- коррекция Ри-Чоу для плотности потока через грани;
- явная релаксация искоемых величин, неявная релаксация решаемых уравнений, неявная релаксация уравнений на основе квазистационарного метода;
- сегрегированные и связанный алгоритмы связи скоростей и давлений: SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations), SIMPLEC (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations-Consistent) и Coupled;
- алгебраический многосеточный метод (AMG) решения СЛАУ.

4.2.8.1. МКО – пространственная дискретизация

Метод конечных объемов [42] – это численный метод решения уравнений в частных производных, основанный на разбиении расчетной области на малые конечные объемы (КО, рисунок 4.8) и формулировке законов сохранения.

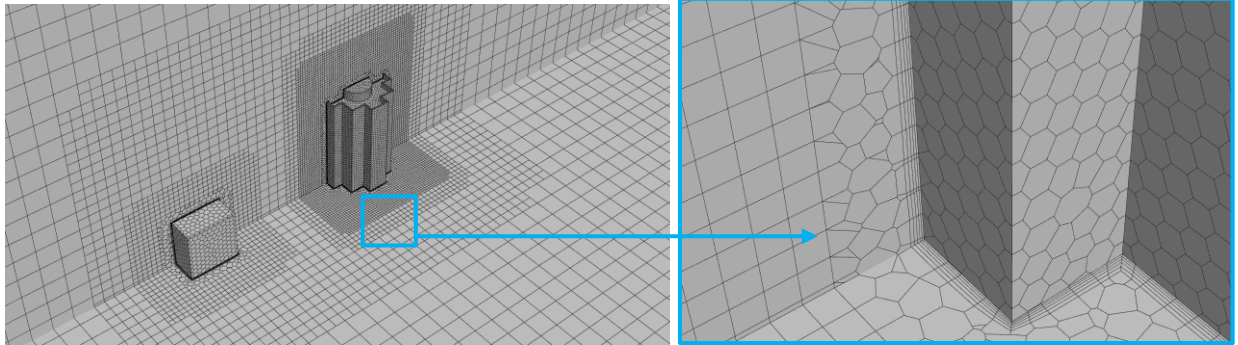


Рисунок 4.8 – Пример дискретизации расчетной области МКО

КО представляют собой выпуклые многогранники (рисунок 4.9)

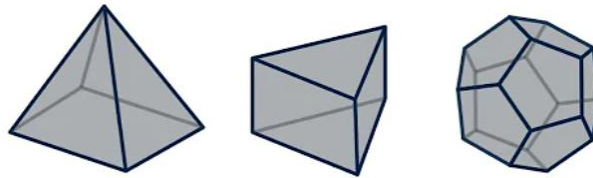


Рисунок 4.9 – Примеры форм конечных объемов

В Ansys Fluent используется метод конечных объемов 2-го порядка (линейное изменение величин внутри КО), а сами величины хранятся в центрах КО.

Проинтегрировав осредненные уравнения движения, переноса и неразрывности по объему произвольного КО, получим интегральную формулировку уравнений сохранения импульса, скаляра и массы (далее верхние черточки осреднения опущены для упрощения записи):

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Gamma_\Phi \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV - \frac{1}{\rho} \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) dV; \quad (258)$$

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial u_j \phi}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dV + \int_V S_\Phi dV; \quad (259)$$

$$\int_V \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dV = 0. \quad (260)$$

Воспользовавшись:

- теоремой Остроградского-Гаусса для диффузионных и конвективных членов уравнений 258-259 и для уравнения 259;
- интегральной теоремой для последнего слагаемого уравнения 258;
- и теоремой о среднем для всех уравнений и слагаемых

можно привести систему уравнений к следующему виду (обозначения пояснены на рисунке 4.10а):

$$\rho \frac{\partial (u_i)_c}{\partial t} V + \rho \sum_f^{N_f} \mathbf{u}_f (u_i)_f \cdot \mathbf{A}_f = \rho \sum_f^{N_f} (\Gamma_\Phi)_f \left[(\nabla u_i)_f + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)_f \right] \cdot \mathbf{A}_f - \sum_f^{N_f} p_f \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{e}_i + \int_V S_\Phi dV; \quad (261)$$

$$\rho \frac{\partial \phi_c}{\partial t} V + \rho \sum_f^{N_f} \mathbf{u}_f \phi_f \cdot \mathbf{A}_f = \sum_f^{N_f} (\Gamma_\Phi)_f (\nabla \phi)_f \cdot \mathbf{A}_f + \int_V S_\Phi dV; \quad (262)$$

$$\sum_f^{N_f} \rho \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{A}_f = 0, \quad (263)$$

где \square_c – значения в центре КО, \square_f – значения в центре грани КО, V – объем КО, \mathbf{A}_f – вектор грани КО (направлен по нормали \mathbf{n} к грани, а длина равна площади), N_f – количество граней КО, Γ_Φ и S_Φ зависят от конкретного уравнения переноса, \mathbf{e}_i – орт системы координат.

В уравнениях 261-263 присутствуют искомые величины в центрах граней ячеек. Т.к. реализация МКО во Fluent хранит значения в центрах КО, то необходимо выразить значения на гранях через значения в центрах с помощью интерполяционных схем.

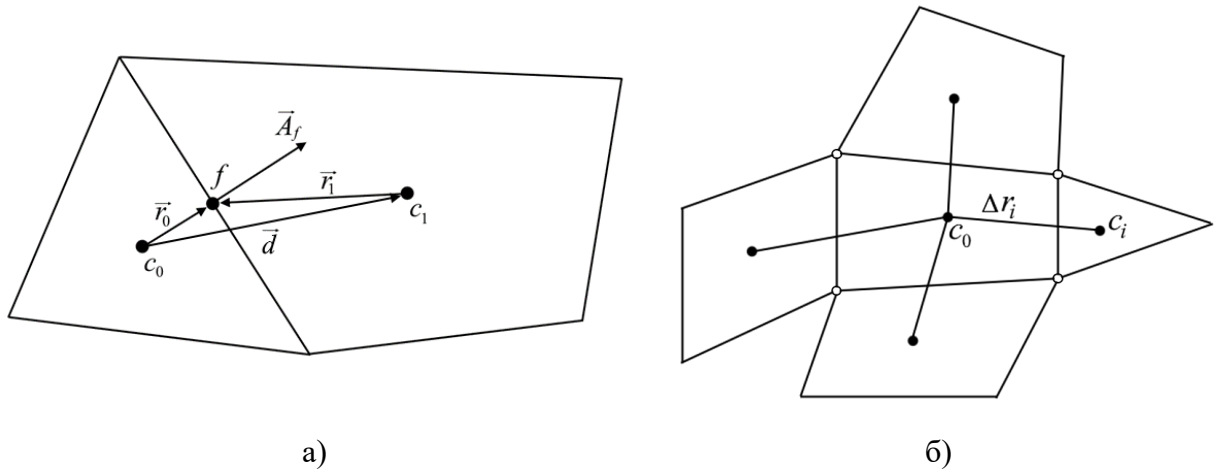


Рисунок 4.10 – Схема-пояснение к формулам подраздела и таблице 4.2.

4.2.8.1.1. Вычисление градиентов в центре КО

Для стационарных RANS расчетов и нестационарных RANS-LES по модели SBES для вычисления градиентов искомых величин в центрах КО используется метод наименьших квадратов (МНК).

Рассмотрим произвольный КО и соседние вокруг (рисунок 4.10б).

Предполагая линейное изменение величин, для i -го соседнего КО получим:

$$(\nabla \Phi)_{c,0} \cdot \Delta r_i = (\Phi_{c,i} - \Phi_{c,0}) \quad (264)$$

Т.к. таких уравнений $i \geq 3$, полученная система оказывается определенной или переопределенной и может быть решена методом наименьших квадратов.

Для нестационарных расчетов по модели SAS SST используется метод Грина-Гаусса [43]:

$$(\nabla \Phi)_{c,0} = \frac{1}{V} \sum_f \bar{\Phi}_f \mathbf{A}_f, \text{ где } \bar{\Phi}_f = \frac{1}{N_{nf}} \sum_n^{N_{nf}} \bar{\Phi}_n, \quad (265)$$

где $\bar{\Phi}_n$ – узловые (вершины граней) значения величин (восстанавливаются из значений в центрах КО с точностью 2-го порядка), N_{nf} – количество узлов грани.

В уравнениях 264-265 вместо ϕ без потери общности могли быть любые другие величины, кроме давления (см. формулу 268).

Использование метода Грина-Гаусса для модели SAS SST связано с необходимой меньшей устойчивостью этой схемы. При использовании метода наименьших квадратов решения SAS SST деградируют до стандартного нестационарного SST.

4.2.8.1.2. Вычисление градиентов в центре грани КО

В диффузионном члене уравнений 261-262 присутствуют градиенты в центре грани КО, которые вычисляются с помощью центрально разностной схемы с корректировкой для неструктурированных сеток [42]:

$$\mathbf{A}_f \cdot (\nabla\phi)_f = \underbrace{|\Delta| \frac{\phi_{c,0} - \phi_{c,1}}{|\mathbf{d}|}}_{\text{ортогональный вклад}} + \underbrace{\mathbf{k} \cdot [\xi(\nabla\phi)_{c,0} + (1 - \xi)(\nabla\phi)_{c,1}]}_{\text{неортогональный вклад}}, \quad (266)$$

где $\mathbf{A}_f = \Delta + \mathbf{k}$, $\Delta \|\mathbf{d}\|$, ξ – коэффициент интерполяции, вектора \mathbf{k} , Δ определяются одним из методов неортогональной коррекции и позволяют вычислить значение градиента $(\nabla\phi)_f$ на неструктурированных (неортогональных) сетках).

Для скорости \mathbf{u} используется формула 266 с точностью до замены обозначений.

Для конвективных членов уравнений 261-262 используется:

- противопоточная схема 2-го порядка в стационарных RANS расчетах;
- ограниченная схема с центральной разностью в нестационарных RANS-LES и SAS-SST расчетах.

Математические формулировки этих схем и сопутствующие комментарии приведены в таблице 4.2. Формулы в таблице 4.2 приведены для ϕ_f , но для скоростей $(u_i)_f$ из уравнения 261 используются те же выражения с точностью до замены обозначений.

4.2.8.1.3. Вычисление давлений в центре грани КО

Для давлений в центрах граней КО применяется схема центральной разности, дающая второй порядок точности:

$$p_f = \frac{1}{2}(p_{c,0} + p_{c,1}) + \frac{1}{2}((\nabla p)_{c,0} \cdot \mathbf{r}_0 + (\nabla p)_{c,1} \cdot \mathbf{r}_1), \quad (267)$$

где градиенты давления $(\nabla \bar{p})_c$ вычисляются:

$$(\nabla p)_{c,0} = \frac{1}{V} \sum_f \bar{p}_f \mathbf{A}_f, \text{ где } \bar{p}_f = \xi p_{c,0} + (1 - \xi)p_{c,1}, \quad (268)$$

В случае сильно искривленных КО дополнительно учитывается неортогональная коррекция по типу 266.

4.2.8.1.4. Вычисление плотности потоков через грани КО

Вводится термин плотности потока через грани КО – $J_f = \rho \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}$. Тогда уравнения 261-263 можно переписать в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial (u_i)_c}{\partial t} V + \sum_f^{N_f} J_f (u_i)_f A_f = \sum_f^{N_f} (\Gamma_\Phi)_f \left[(\nabla u_i)_f + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)_f \right] \cdot \mathbf{A}_f + \sum_f^{N_f} p_f \mathbf{A}_f \mathbf{e}_i + \int_V S_\Phi dV ; \tag{269}$$

$$\rho \frac{\partial \phi_c}{\partial t} V + \sum_f^{N_f} J_f \phi_f A_f = \sum_f^{N_f} (\Gamma_\Phi)_f (\nabla \phi)_f \cdot \mathbf{A}_f + \int_V S_\Phi dV ; \tag{270}$$

$$\sum_f^{N_f} J_f \mathbf{A}_f = 0, \tag{271}$$

где $A_f = |\mathbf{A}_f|$.

Если для интерполяции плотности потоков и давлений использовать приведенные ранее линейные схемы, то возникнут пространственные осцилляции, проявляющиеся на сетке в шахматном порядке (рисунок 4.11). Эффект обусловлен разделением поля давлений на два независимых набора, расположенных в шахматном порядке. Эта проблема решается с помощью коррекции Ри-Чоу [46] для плотности потока J_f в уравнениях 2.61-2.63. При верификации применяется вариант коррекции на основе взвешенных импульсов:

$$J_f = \rho \frac{(a_p)_{c0} \mathbf{u}_{c0} + (a_p)_{c1} \mathbf{u}_{c1}}{(a_p)_{c0} + (a_p)_{c1}} \cdot \mathbf{n} + J_{ho,ap} + d_f [(p_{c,0} + (\nabla p)_{c,0} \cdot \mathbf{r}_0) - (p_{c,1} + (\nabla p)_{c,1} \cdot \mathbf{r}_1)] = \hat{J}_f + d_f (P_{c,0} - P_{c,1}), \tag{272}$$

где a_p – коэффициенты на главной диагонали дискретизированных уравнений сохранения импульса 2.61, $J_{ho,ap}$ – член высокого порядка для неортогональной и неравномерной коррекции, вычисляемый на основе геометрических параметров сетки, d_f – коэффициент, зависящий от $(a_p)_{c0}$ и $(a_p)_{c1}$.

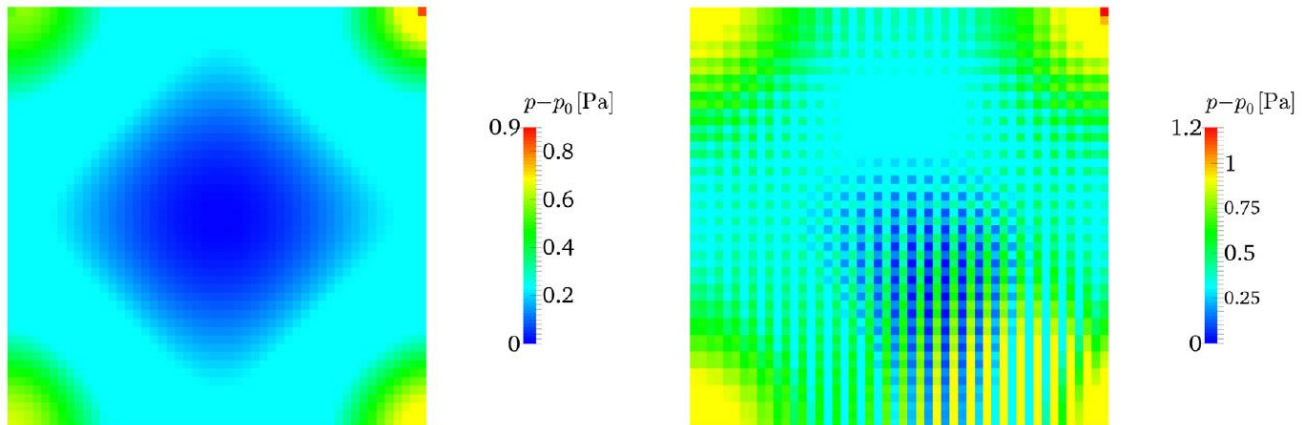


Рисунок 4.11 – Пример распределений давления, полученных с коррекцией Ри-Чоу (слева) и без (справа) [46]

Таблица 4.2 – Схемы пространственной дискретизации / интерполяции (определение ϕ_f, u_f), рассмотренные в рамках верификации

№ схемы	Название схемы	Математическая формулировка	Поведение	Применение
(1)	Схема разности против потока 1-го порядка	$\phi_f = \begin{cases} \phi_{c,0}, F_f > 0 \\ \phi_{c,1}, F_f < 0 \end{cases}$	Устойчивая, но 1-го порядка точности	Напрямую не применяется
(2)	Схема разности против потока 2-го порядка	$\phi_f = \begin{cases} \phi_{c,0} + (\nabla\phi)_{c,0} \cdot r_0, F_f > 0 \\ \phi_{c,1} + (\nabla\phi)_{c,1} \cdot r_1, F_f < 0 \end{cases}$	Точная, но допускает $ \phi_f \geq \phi_{c,0} , \phi_{c,1} $, что приводит к неустойчивости решения	Используется в RANS. В LES не рекомендуется из-за высокой численной вязкости
		$\nabla\phi \rightarrow \psi\nabla\phi, 0 \leq \psi \leq 1 [44]$	Проблема неустойчивости решается функцией-ограничителем градиента	
(3)	Схема центральной разности	$\phi_f = \frac{(\phi_{c,0} + \phi_{c,1})}{2} + \frac{((\nabla\phi)_{c,0} \cdot r_0 + (\nabla\phi)_{c,1} \cdot r_1)}{2}$	Точность 2-го порядка и низкая численная вязкость. Часто не устойчива и продуцирует нефизические осцилляции	Не используется в RANS. Используется в LES и RANS-LES
(4)	Смешанная схема центральной разности	$\phi_f = \underbrace{(2)\phi_f}_{\text{явная схема по времени}} + \underbrace{((3)\phi_f - (2)\phi_f)}_{\text{неявная схема по времени}}$	Позволяет повысить устойчивость по сравнению с (3)	Используется в LES и RANS-LES
(5)	Ограниченная схема центральной разности [45]	<p>Линейная комбинация схем (1)-(4). В Fluent есть управляющий параметр ψ, который «сдвигает» схему ближе к (2) или (3):</p> $\phi_f = \{(3)\phi_f; \psi=0; (2)\phi_f; \psi=1\}$	Сочетает преимущества схем (1)-(4). Гибко комбинируется в разных частях потока	Используется в LES и RANS-LES: $\psi = 0,25 (0,75)$ в глобально стабильных (нестабильных)

4.2.8.1.5. Интегрирование источникового члена плотности потоков через грани КО

Интегрирование источниковых членов S_Φ зависит от его составляющих, но основано на линеаризации $S_\Phi = S_C + \phi S_P$ внутри конечного объема [42]. Например, члены вида $H\phi$ и $H\phi^2$ интегрируются следующим образом:

$$\int_V H\phi dV = H_c \phi_c V;$$

$$\int_V H\phi^2(t_i) dV \approx \int_V H\phi(t_{i-1})\phi(t_i) dV = H_c \phi_c(t_{i-1})\phi_c(t_i),$$
(273)

где $\phi(t_i)$ – искомое решение на текущем шаге времени, $\phi(t_{i-1})$ уже известное решение из предыдущего шага.

4.2.8.2. МКО – временная дискретизация

В стационарных постановках временной член принимается равным нулю, а в нестационарных используется ограниченная неявная схема 2-го порядка ([42]):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \approx \frac{\phi_{n+1/2} - \phi_{n-1/2}}{\Delta t};$$

$$\phi_{n+1/2} = \phi_n + \frac{1}{2}\beta_{n+1/2}(\phi_n - \phi_{n-1});$$

$$\phi_{n-1/2} = \phi_{n-1} + \frac{1}{2}\beta_{n-1/2}(\phi_{n-1} - \phi_{n-2}),$$
(274)

где $\phi_n = \phi(t_n)$, $\beta_{n-1/2}$, $\beta_{n-1/2}$ – ограничивающие коэффициенты.

4.2.8.3. Релаксация неизвестных и уравнений

После проведения пространственной и временной дискретизации уравнений 269-270 получаются системы алгебраических уравнений следующего вида:

$$a_p \phi_p^n + \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb}^n = b_p$$
(275)

где ϕ_p^n – искомая величина в p -ом КО (p -ая строка глобальной матрицы) на n -ой итерации, ϕ_i^n – искомые величины в соседних с p -ым КО, a_p , a_{nb} , b_p – коэффициенты уравнений, которые сами зависят от параметров потока, nb – номера соседних с p -ым КО.

Таким образом, полученная система уравнений оказывается нелинейной, как и исходные дифференциальные уравнения. Её решение возможно только итерационными методами, когда на каждом цикле расчета обновляются не только значения искомых величин, но и коэффициенты матрицы. Применяемые итерационные алгоритмы будут рассмотрены далее.

Нелинейность уравнений приводит к большим трудностям при сходимости итерационных алгоритмов. Поэтому в Ansys Fluent, как и в большинстве других современных программных комплексов, решение уравнений производится с применением явной и неявной нижней релаксации ([32]).

Первое слагаемое в 275 дает диагональную матрицу, а второе – матрицу с нулевой диагональю.

При явной нижней релаксации изменение искомых величин на каждой итерации искусственно ограничивается:

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \alpha(\phi_{\text{calc}}^n - \phi^{n-1})$$
(276)

где ϕ^n – итоговое решение на текущей n -ой итерации (с учетом релаксации), ϕ^{n-1} – итоговое решение на предыдущей итерации, ϕ_{calc}^n – решение СЛАУ до релаксации, $0 < \alpha \leq 1$ – коэффициент нижней релаксации (задается пользователем).

Неявная релаксация применяется к уравнениям и может быть получена подстановкой 276 в 275:

$$\frac{a_p}{\alpha} \phi_p^n + \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb}^n = b_p + \frac{1-\alpha}{\alpha} \phi_p^{n-1} \quad (277)$$

Как явная, так и неявная релаксации не меняют решения, т.к. при достижении сходимости $\phi^n = \phi^{n-1}$ и уравнения 277 возвращаются к исходным 275. Однако применение нижней релаксации ускоряет сходимость осциллирующих переменных, но замедляет монотонную сходимость. Такой эффект достигается за счет усиления диагонального преобладания в системе 277 по сравнению с 275. В конечном счете метод нижней релаксации при условии подбора оптимальных значений коэффициентов значительно ускоряет сходимость решения.

Коэффициенты релаксации α в 276-277 могут быть разными для уравнений переноса скорости и турбулентных характеристик, величин давления, но они имеют одинаковые значения для всех КО. Это затрудняет подбор оптимальных значений α в конкретной задаче.

В [47] показано, что применение неявной релаксации 277 эквивалентно введению в уравнения 275 псевдовременного члена.

$$V_p \frac{\phi_p^n - \phi_p^{n-1}}{\Delta\tau_p} + a_p \phi_p^n + \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb}^n = b_p \quad (278)$$

где $\Delta\tau_p = \frac{\rho V}{a_p} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)$ – псевдошаг по времени.

Формулировка релаксации через псевдошаг по времени имеет принципиальное преимущество. При $\alpha = \text{const}$ (классический подход) $\Delta\tau$ имеет различные значения в разных КО, т.к. отличается a_p . Но если потребовать $\Delta\tau = \text{const}$ (глобальный псевдошаг по времени), то уже коэффициент нижней релаксации будет различен в разных КО. Такая гибкая подстройка снижает сложности с подбором оптимальных значений α для каждой переменной, оставляя только подбор единственного значения псевдошага $\Delta\tau$.

Метод решения задач на основе неявной релаксации, сформулированной через псевдовремя, называется псевдонестационарный метод.

В рамках данной верификации:

- для стационарных расчетов используется псевдонестационарный метод 278 с дополнительной явной релаксацией искомым величин 276;
- для нестационарных расчетов используется неявная релаксация 277 для всех неизвестных, кроме давлений, для которых применяется 276.

В решении стационарных задач псевдонестационарным методом отсутствуют шаги по псевдовремени, а есть только итерации до достижения заданного уровня сходимости. В нестационарных задачах временной член в уравнениях переноса не исчезает, а итерации повторяются до достижения сходимости в рамках каждого шага по времени.

4.2.8.4. Алгоритмы на основе давления

По аналогии с 275 приводятся уравнения сохранения импульса для фиксированного момента времени для $(u_i)_p$ (обозначаются для простоты u_p):

$$a_p u_p = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + \sum_f p_f A_f \cdot \mathbf{e}_i + b_p \quad (279)$$

Проблемой системы уравнений для несжимаемых сред является отсутствие отдельного уравнения для давления. Дополнительную связь скоростей и давлений обеспечивает коррекция Ри-Чоу 272 для плотности потока. Дальнейшее решение полученной системы можно проводить либо алгоритмами коррекции давления, либо связанными алгоритмами. При верификации используются следующие алгоритмы:

- SIMPLE и SIMPLEC – алгоритмы коррекции давления;
- Coupled – связанный алгоритм.

4.2.8.4.1. SIMPLE и SIMPLEC

Рассматриваемые методы реализованы на основе работ [32,48].

Из начальных условий вычисляются коэффициенты и свободные члены уравнений 279, а также некоторое давление p_f^* , которое подставляется в 279. В результате получаются уравнения:

$$a_p u_p^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + \sum_f p_f^* A_f \cdot \mathbf{e}_i + b_p \quad (280)$$

которые решаются для определения u_p^* и J_f^* (см. формулу 272):

$$J_f^* = \hat{J}_f^* + d_f (P_{c,0}^* - P_{c,1}^*), \quad (281)$$

Очевидно, что полученное решение в общем случае не удовлетворяет уравнению непрерывности 271. Коррекция давлений p_f' , скорости u_p' и плотности потока обозначается как J_f' :

$$J_f = J_f^* + J_f'; \quad (282)$$

$$u_p = u_p^* + u_p'; \quad (283)$$

$$p_f = p_f^* + p_f', \quad (284)$$

где J_f , u_p , p_f – искомые значения, удовлетворяющие уравнениям сохранения импульса 280 и массы 271.

Подстановкой 283, 284 в 280 получают уравнение для коррекции скоростей:

$$a_p u_p' = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}' + \sum_f p_f' A_f \cdot \mathbf{e}_i \quad (285)$$

Вычитая $\sum a_{nb} u_p'$ из обеих сторон уравнения 285, получим:

$$\left(a_p - \sum_{nb} a_{nb} \right) u_p' = \sum_{nb} a_{nb} (u_{nb}' - u_p') + \sum_f p_f' A_f \cdot \mathbf{e}_i \quad (286)$$

Так как $u_{nb}' \approx u_p'$, то первым слагаемым в правой части 286 можно пренебречь. В результате получают выражения для коррекции скорости и плотности потока:

$$u_p' = d_p \sum_f p_f' A_f \cdot \mathbf{e}_i; \quad (287)$$

$$J_f' = d_f (P'_{c0} - P'_{c1}), \quad (288)$$

где $d_p = \frac{1}{(a_p - \sum a_{nb})}$, d_f – зависит $a_p - \sum a_{nb}$ в двух соседних КО (SIMPLEC) и зависит только от a_p в SIMPLE.

Чтобы получить уравнение для коррекции давления, необходимо подставить 282 и 283 в уравнение непрерывности 271:

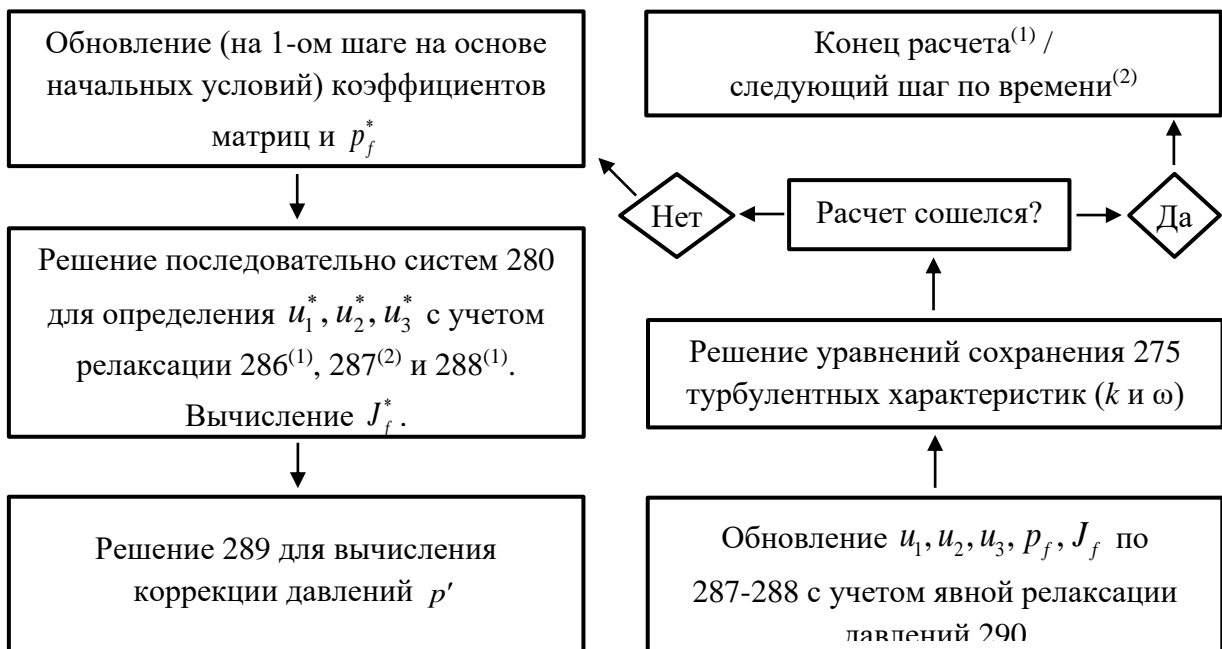
$$a_p p'_p = \sum_{nb} a_{nb} p'_{nb} + b_p, \text{ где } b_p = \sum_{nb} J_f^* A_f \quad (289)$$

После вычисления коррекции давлений, по формулам 282-284 и 287-288 вычисляются новые значения давлений и плотностей потока, пересчитываются коэффициенты уравнений. В SIMPLEC при вычислении нового давления учитывается коэффициент релаксации (в SIMPLE $\alpha = 1$):

$$p = p^* + \alpha p', \quad (290)$$

Затем возвращаются к формуле 280 и повторяют цикл до достижения заданной сходимости.

Метод SIMPLEC отличается быстрой сходимостью, т.к. нет необходимости в назначении низких коэффициентов релаксации (в отличие от SIMPLE), при одинаковых вычислительных затратах. Однако в стационарных задачах эффективней оказывается связанный метод Coupled, т.к. он сходится ещё быстрее, а увеличение вычислительных затрат на итерацию не так принципиально в стационарной постановке.



(1) – для стационарных расчетов,

(2) – для нестационарных расчетов.

Рисунок 4.12 – Блок-схема SIMPLEC

4.2.8.4.2. Coupled

В связанном алгоритме Coupled [49] сначала решается полная система уравнений, содержащая 3 уравнения сохранения импульса и сохранения массы. Затем решаются уравнения сохранения турбулентных характеристик.

Уравнение сохранения импульса 279 переписывается для отдельного КО:

$$a_p u_p - \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} - \sum_f p_f A_f \cdot \mathbf{e}_i = b_p;$$

$$a_p u_p - \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} - p_p \sum_f \xi A_f \cdot \mathbf{e}_i - \sum_{f(nb)} (1 - \xi) p_{nb} A_f \cdot \mathbf{e}_i = b_p \quad (291)$$

$$\underbrace{a_p u_p - \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}}_{A^i U^i} - \underbrace{\sum_{nb} k_{nb} p_{nb}}_{K^i P} = \underbrace{b_p}_{B^i}$$

где коэффициенты интерполяции ξ зависят от принятой схемы.

Затем переписывается уравнение сохранения массы 271 для отдельного КО с учетом коррекции Ри-Чоу 281:

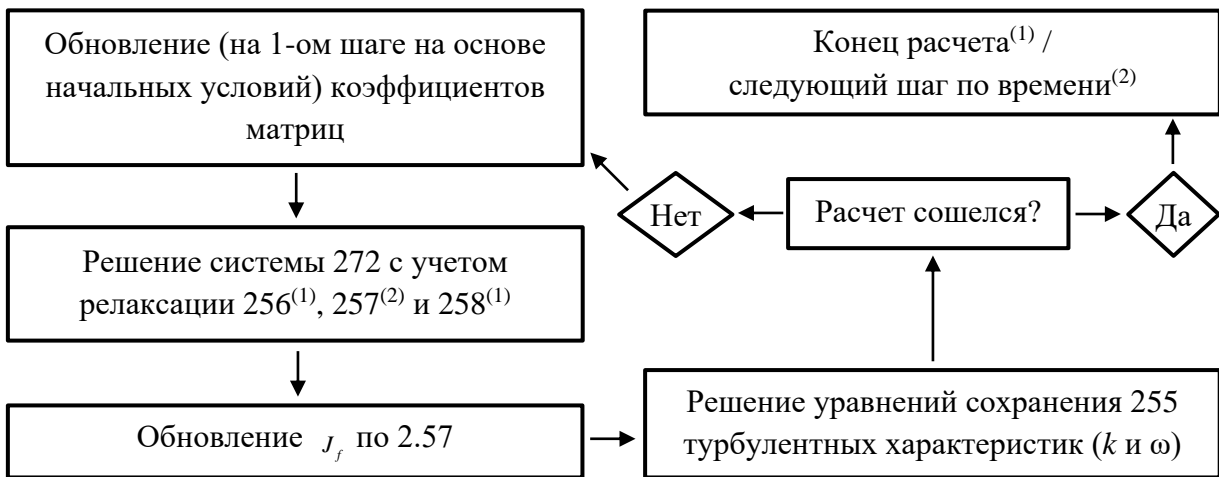
$$\sum_f J_f A_f = 0;$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^3 l_{ip}(u_i)_p + \sum_{i=1}^3 \sum_{nb} l_{nb}(u_i)_{nb}}_{L^i U^i} + \underbrace{g_p p_p + \sum_{nb} g_{nb} p_{nb}}_{G P} = \underbrace{c_p (\nabla p)_p + \sum_{nb} c_{nb} (\nabla p)_{nb}}_{C^p} \quad (292)$$

Систему 291-292 можно представить в виде блочной матрицы:

$$\begin{bmatrix} A^u & O & O & K^1 \\ O & A^u & O & K^2 \\ O & O & A^u & K^3 \\ L^1 & L^2 & L^3 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \\ C^p \end{bmatrix}, \quad (293)$$

где O – нулевые блоки.



(1) – для стационарных расчетов,

(2) – для нестационарных расчетов (в рамках верификации не применяется).

Рисунок 4.13 – Блок-схема Coupled

4.2.8.5. Алгебраический многосеточный метод

Решение систем уравнений 275, 280, 289 и 293 производится на основе алгебраического многосеточного метода (AMG, [50,51]), последняя – на основе блочного варианта.

Вышеперечисленные уравнения можно представить в простейшей записи, достаточной для объяснения метода AMG.

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (294)$$

где A – матрица коэффициентов, \vec{x} – столбец неизвестных, \vec{b} – столбец известных правых частей.

Погрешность при итерационном решении уравнения 294:

$$\vec{e}^i = \vec{x}^i - \vec{x}^{ex} \quad (295)$$

где \vec{x}^{ex} – точное решение системы, \vec{x}^i – решение на i-ой итерации.

Уравнения 294 можно решать итерационным методом Гаусса-Зейделя. Этот метод имеет следующие особенности:

- быстро устраняет высокочастотные пространственные колебания \vec{e}^i ;

– медленно устраняет низкочастотные пространственные колебания \vec{e}^i .

Суммарно метод Гаусса-Зейделя требует слишком много времени для решения систем 275, 280, 289 и 293.

Недостаток метода Гаусса-Зейделя можно обратить в преимущество, если после устранения высокочастотных колебаний перенести решение на более грубую сетку. Тогда низкочастотные колебания конвертируются в высокочастотные и будут быстро устранены при дальнейших итерациях. Если потом, некоторым образом, вернуться обратно на первоначальную сетку и провести несколько завершающих итераций, то можно получить сошедшееся решение очень быстро. Такие подходы называются многосеточными методами.

Упрощенный алгоритм AMG:

1. Применение нескольких итераций метода Гаусса-Зейделя к 294 (так называемое сглаживание);
2. Вычисление невязок (норма невязок $\|\vec{r}\|$ обычно отображается графически в программных комплексах в процессе решения).

$$\vec{r}^i = \vec{b} - A\vec{x}^i. \tag{296}$$

Подстановка 296 в 294 позволяет перейти к решению системы уравнений для коррекции:

$$\begin{aligned} A(\vec{x}^{ex} - \vec{x}^i) &= \vec{r}^i; \\ A\Delta\vec{x} &= \vec{r}. \end{aligned} \tag{297}$$

Переход от 295 к 297 необходим, т.к. $\vec{r}^i \sim \vec{e}^i$ и новая система подходит для подавления высокочастотных колебаний. Однако прежде необходим переход на грубую сетку.

$$A'\Delta\vec{x}' = \vec{r}' \tag{298}$$

3. Переход на грубую сетку и обратно в Ansys Fluent, как и во многих других промышленных программных комплексах, осуществляется следующим образом:

$$\vec{r}' = R\vec{r}; \tag{299}$$

$$\Delta\vec{x} = P\Delta\vec{x}' = R^T\Delta\vec{x}'; \tag{300}$$

$$A' = RAP, \tag{301}$$

где R – оператор сглаживания (рисунок 4.14), P – оператор интерполяции (рисунок 4.15).

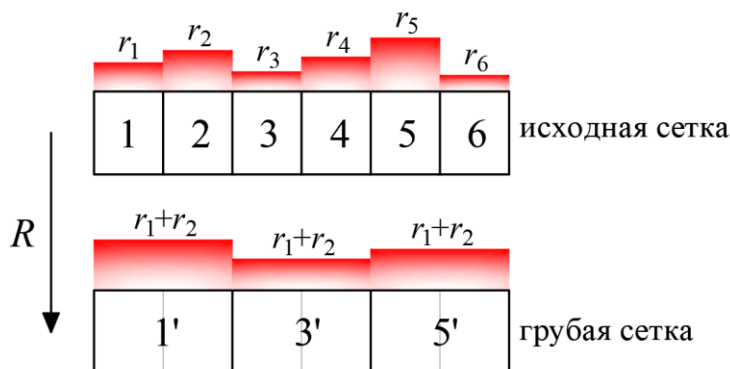


Рисунок 4.14 – Пример действия оператора сглаживания

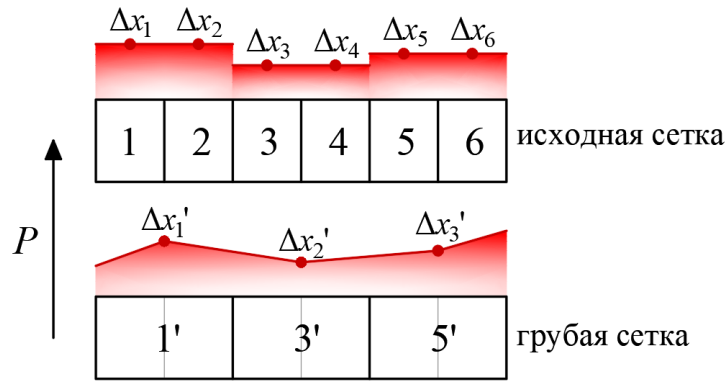


Рисунок 4.15 – Пример действия оператора интерполяции

Операторы R и P представляют из себя прямоугольные матрицы размером $m \times n$ (n – исходная размерность системы, m – новая) следующего вида (пример):

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (302)$$

Таким образом оператор сглаживания действует, как сумматор невязок в «склеиваемых» КО, а оператор интерполяции действует достаточно грубо, интерполируя кусочно-постоянным образом.

Выражение 301, называемое подходом Галеркина, является приближенным и составляет основу алгебраического многосеточного метода.

4. Решение системы 298 методом Гаусса-Зейделя в течении некоторого количества итераций. Затем интерполяция полученного решения на исходную сетку по формуле 300.

5. Вычисление нового значения \vec{x}^{i+1} .

$$\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^i + \Delta \vec{x}. \quad (303)$$

Решение системы 298 методом Гаусса-Зейделя ещё несколько раз для сглаживания огрубления, вызванного 300 и 301.

Представленный выше алгоритм представлен в упрощенном виде с одним переходом к грубой сетке и возвратом обратно. В Ansys Fluent реализованы сложные циклы переходов от исходной к грубым сеткам с несколькими степенями вложения.

Алгебраический многосеточный метод не требует создания и хранения грубых сеток, как в геометрическом варианте метода. Грубые сетки фигурируют только алгебраически при сокращении матриц на основе методов оценки влияния переменных друг на друга [52].

5. Матрицы верификации

5.1. Матрицы верификации (Том 2. Верификационные примеры из Ansys Fluid Dynamics Verification Manual)

Матрица верификации №1

№	Наименование теста	Временная постановка	Размерность	Модель турбулентности	Геометрия	Подвижные граничные условия	Учет дополнительных явлений
1	Течение между вращающимися и стационарным концентрическими цилиндрами	Стационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	Осесимметричная	Вращающиеся стенки	–
2	Ламинарное течение с равномерным тепловым потоком	Стационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	Симметричная	–	Теплообмен
3	Перепад давления в турбулентном потоке	Стационарная	2D	Стандартная $k-\varepsilon$	Осесимметричная	–	–
4	Течение Куэтта	Стационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	Периодическая	Движущиеся стенки	–
5	Течение Пуазейля	Стационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	Осесимметричная	–	–
6	Перенос многокомпонентной смеси	Стационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	Осесимметричная	–	Перенос веществ
7	Течение во вращающейся полости	Стационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	Цилиндрическая	Вращающиеся стенки	–
8	Естественная конвекция в кольцевом сечении	Стационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	Осесимметричная	–	Теплообмен
9	Ламинарное течение в т-образном патрубке	Стационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	–	–	–
10	Ламинарное течение в треугольной полости	Стационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	–	–	–
11	Турбулентное течение вдоль волнистой стенки	Стационарная	2D	Разрешающая $k-\varepsilon$	Периодическая	–	–
12	Смешивание в соосных турбулентных струях	Стационарная	2D	Стандартная $k-\varepsilon$	Соосная	–	Перенос веществ

№	Наименование теста	Временная постановка	Размерность	Модель турбулентности	Геометрия	Подвижные. граничные условия	Учет дополнительных явлений
13	Нестационарное течение вблизи подвижной стенки	Нестационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	–	Движущиеся стенки	–
14	Адиабатическое сжатие воздуха под действием поршня	Нестационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	Dynamic Mesh	–	–
15	Кавитация в диафрагме с острыми краями	Стационарная	2D	Стандартная $k-\varepsilon$	Осесимметричная	–	Многофазное течение (модель смеси Mixture), кавитация (Zwart-Gerber-Belarmi)
16	Осциллирующий ламинарный поток вокруг круглого цилиндра	Нестационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	–	–	–
17	Граница между двумя несмешивающимися жидкостями во вращающемся цилиндре	Нестационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	Цилиндрическая	Вращающиеся стенки	Многофазное течение (модель объема жидкости VOF)
18	Турбулентное обтекание обратной ступеньки	Стационарная	2D	Разрешающая $k-\varepsilon$	–	–	–
19	Турбулентный теплоперенос в расширении трубы	Стационарная	2D	Стандартная $k-\varepsilon$	Осесимметричная	–	Теплообмен
20	Турбулентное обтекание ступеньки	Стационарная	2D	$k-\omega$ SST	–	–	–
21	Отсоединение потока внутри диффузора	Стационарная	2D	$k-\omega$ SST	Осесимметричная	–	–
22	Турбулентное смешивание потоков разной плотности	Стационарная	2D	$k-\omega$ SST	–	–	Многофазное течение (модель объема жидкости VOF)
23	Двухфазное течение Пуазейля	Стационарная	2D	Нет (ламинарное течение)	–	–	Многофазное течение (модель объема жидкости VOF)
24	Ламинарное течение внутри параллелепипеда	Стационарная	3D	Нет (ламинарное течение)	Симметричная	Движущиеся стенки	–

Матрица верификации №2

№	Наименование теста	Тип проверки результатов	Оцениваемые параметры	Погрешность (расхождение), %
1	Течение между вращающимся и стационарным концентрическими цилиндрами	Аналитическое решение	Касательная скорость потока	<2.2
2	Ламинарное течение с равномерным тепловым потоком	Аналитическое решение	Перепад давления	0.1
3	Перепад давления в турбулентном потоке	Аналитическое решение	Перепад давления	1.2
4	Течение Куэтта	Аналитическое решение	Распределение X-компоненты скорости	<0.1
5	Течение Пуазёйля	Аналитическое решение	Перепад давления	0.2
6	Перенос многокомпонентной смеси	Аналитическое решение	Массовая доля компоненты А	<0.1
7	Течение во вращающейся полости	Эксперимент	Радиальная скорость потока	<1.0
8	Естественная конвекция в кольцевом сечении	Эксперимент	Распределение температуры	<0.5
9	Ламинарное течение в т-образном патрубке	Эксперимент	Доля потока, выходящая через канал	0.3
10	Ламинарное течение в треугольной полости	Эксперимент	Распределение X-компоненты скорости	<0.1
11	Турбулентное течение вдоль волнистой стенки	Эксперимент	Распределение X-компоненты скорости	<1.0
12	Смешивание в соосных турбулентных струях	Эксперимент	Распределение массовой доли пропана	<0.1
13	Нестационарное течение вблизи подвижной стенки	Эксперимент	Профиль скорости вблизи выхода	<0.1
14	Адиабатическое сжатие воздуха под действием поршня	Эксперимент	Температура; давление	<0.1; <0.1
15	Кавитация в диафрагме с острыми краями	Эксперимент	Коэффициент расхода массы через сопло	1.8
16	Осциллирующий ламинарный поток вокруг круглого цилиндра	Эксперимент	Число Струхала	10.0
17	Граница между двумя несмешивающимися жидкостями во вращающемся цилиндре	Эксперимент	Обезразмеренная скорость завихрения	<0.3
18	Турбулентное обтекание обратной ступеньки	Эксперимент	Коэф. турбулентного поверхностного трения	<1.0
19	Турбулентный теплоперенос в расширении трубы	Эксперимент	Число Нуссельта	<5.0
20	Турбулентное обтекание ступеньки	Эксперимент	Коэффициент давления	<2.0
21	Отсоединение потока внутри диффузора	Эксперимент	Коэф. турбулентного поверхностного трения	<2.0
22	Турбулентное смешивание потоков разной плотности	Эксперимент	Массовая доля жидкости	<5.0
23	Двухфазное течение Пуазёйля	Эксперимент	Профиль скорости	<0.1
24	Ламинарное течение внутри параллелепипеда	Эксперимент	Распределение X-компоненты скорости	<0.1

6. Описание принципов верификации

Раздел в разработке.

7. Результаты верификации программного комплекса

Раздел будет написан по итогам верификации и обобщит выводы томов 2 (верификационные примеры Ansys), 3 (задачи от экспертов) и 4 (примеры из реальной практики).

8. Проект Свидетельства РААСН о верификации программного комплекса (с приложением)

Раздел будет написан по итогам верификации.

9. Список используемой литературы (Перечень источников)

1. G. K. Batchelor. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge Univ. Press. Cambridge, England. 1967.
2. B. E. Launder and D. B. Spalding. Lectures in Mathematical Models of Turbulence. Academic Press, London, England. 1972.
3. T.-H. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, and J. Zhu. “A New k-ε Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows - Model Development and Validation”. *Computers Fluids*. 24(3). 227–238. 1995.
4. S. A. Orszag, V. Yakhot, W. S. Flannery, F. Boysan, D. Choudhury, J. Maruzewski, and B. Patel. “Renormalization Group Modeling and Turbulence Simulations”. In *International Conference on Near-Wall Turbulent Flows*, Tempe, Arizona. 1993.
5. S.-E. Kim, D. Choudhury, and B. Patel. “Computations of Complex Turbulent Flows Using the Commercial Code Ansys Fluent”. In *Proceedings of the ICASE/LaRC/AFOSR Symposium on Modeling Complex Turbulent Flows*. Hampton, Virginia 1997.
6. F. R. Menter. “Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications”. *AIAA Journal*. 32(8). 1598–1605. August 1994.
7. F. Menter and Y. Egorov. “The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description. *Journal Flow Turbulence and Combustion*”. 85. 113–138. 2010.
8. C. P. Fenimore. “Formation of Nitric Oxide in Premixed Hydrocarbon Flames”. In *13th Symp.(Int'l.) on Combustion*. The Combustion Institute. 373. 1971.
9. F. Nicoud and F. Ducros. “Subgrid-Scale Stress Modelling Based on the Square of the Velocity Gradient Tensor. *Flow, Turbulence, and Combustion*. 62(3). 183–200. 1999.
10. B. E. Launder and D. B. Spalding. “The Numerical Computation of Turbulent Flows”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 3. 269–289. 1974.
11. P. R. Spalart and M. L. Shur. “On the Sensitization of Turbulence Models to Rotation and Curvature”. *Aerospace Sci. Tech*. 1(5). 297–302. 1997.
12. L. Prandtl. “Über die ausgebildete Turbulenz”. *ZAMM*. 5. 136–139. 1952.
13. P. R. Spalart. “Strategies for Turbulence Modelling and Simulations”. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 21. 3. 252–263. 2000.
14. M. Kato and B. E. Launder. “The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders”. *Ninth Symposium on "Turbulent Shear Flows"*. Kyoto, Japan: August 16-18, 1993.
15. Y. Egorov. “Contact Condensation in Stratified Steam-Water Flow”. *EVOL-ECORDA-D 07*. 2004.
16. M. Manninen, V. Taivassalo, and S. Kallio. “On the mixture model for multiphase flow”. *VTT Publications 288*, Technical Research Centre of Finland. 1996.
17. L. Schiller and Z. Naumann. “A drag coefficient correlation”. *Z. Ver. Deutsch. Ing*. 77. 318. 1935.
18. D. Gidaspow, R. Bezburuah, and J. Ding. “Hydrodynamics of Circulating Fluidized Beds, Kinetic Theory Approach”. In *Fluidization VII, Proceedings of the 7th Engineering Foundation Conference on Fluidization*. 75–82. 1992.
19. M. Syamlal, W. Rogers and T. J. O’Brien. *MFIX Documentation: Volume 1, Theory Guide*. National Technical Information Service, Springfield, VA. DOE/METC-9411004, NTIS/DE9400087, 1993.

20. C. K. K. Lun, S. B. Savage, D. J. Jeffrey, and N. Chepurniy. "Kinetic Theories for Granular Flow: Inelastic Particles in Couette Flow and Slightly Inelastic Particles in a General Flow Field". *J. Fluid Mech.* 140. 223–256. 1984.
21. B. J. Alder and T. E. Wainwright. "Studies in Molecular Dynamics II: Behaviour of a Small Number of Elastic Spheres". *J. Chem. Phys.* 33. 1439. 1960.
22. S. Chapman and T. G. Cowling. *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. 3rd edition. Cambridge University Press, Cambridge, England. 1990.
23. J. Ding and D. Gidaspow. "A Bubbling Fluidization Model Using Kinetic Theory of Granular Flow". *AIChE J.* 36(4). 523–538. 1990.
24. J. L. Lebowitz. "Exact Solution of Generalized Percus-Yevick Equation for a Mixture of Hard Spheres". *The Phy. Rev.* 133(4A). A895–A899. 1964.
25. S. Ogawa, A. Umemura, and N. Oshima. "On the Equation of Fully Fluidized Granular Materials". *J. Appl. Math. Phys.* 31. 483. 1980.
26. D.R. Shaver, M.Z. Podowski. "Modeling of interfacial forces for bubbly flows in subcooled boiling conditions". *Transactions of the American Nuclear Society (Proc. of ANS Winter Meeting)*. 113(1). 1368–1371. 2015.
27. D. A. Drew and R. T. Lahey. *In Particulate Two-Phase Flow*. Butterworth-Heinemann. Boston, MA 509–566. 1993.
28. R. Ocone, S. Sundaresan, and R. Jackson. "Gas-particle flow in a duct of arbitrary inclination with particle-particle interaction". *AIChE J.* 39. 1261–1271. 1993.
29. W. E. Ranz and W. R. Marshall, Jr. "Vaporation from Drops, Part I". *Chem. Eng. Prog.* 48(3). 141–146. March 1952.
30. W. E. Ranz and W. R. Marshall, Jr. "Evaporation from Drops, Part I and Part II". *Chem. Eng. Prog.* 48(4). 173–180. April 1952.
31. S. A. Vasquez and V. A. Ivanov. "A Phase Coupled Method for Solving Multiphase Problems on Unstructured Meshes". In *Proceedings of ASME FEDSM'00*. ASME 2000 Fluids Engineering Division Summer Meeting, Boston. June 2000.
32. S. V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington, DC. 1980.
33. B. Popoff and M. Braun. "A Lagrangian Approach to Dense Particulate Flows". In *International Conference on Multiphase Flow*. Leipzig, Germany. 200
34. A. K. Singhal, H. Y. Li, M. M. Athavale, and Y. Jiang. "Mathematical Basis and Validation of the Full Cavitation Model". *ASME FEDSM'01*. New Orleans, Louisiana 2001.
35. P. J. Zwart, A. G. Gerber, and T. Belamri. "A Two-Phase Flow Model for Predicting Cavitation Dynamics". In *Fifth International Conference on Multiphase Flow*, Yokohama, Japan. 2004.
36. G. H. Schnerr and J. Sauer. "Physical and Numerical Modeling of Unsteady Cavitation Dynamics". In *Fourth International Conference on Multiphase Flow*, New Orleans, USA. 2001.
37. C. E. Brennen. *Cavitation and Bubble Dynamics*. Oxford University Press. 1995.
38. Yang H.Q., Shinghal A.K., Megahed M. "The Full Cavitation Model". VKI, Lecture Series 2005-04, Industrial Two-Phase Flow CFD. May 23-27, 2005.
39. Bungartz H. J., Schäfer M. (ed.). *Fluid-structure interaction: modelling, simulation, optimisation*. – Springer Science & Business Media, 2006. – T. 53.
40. *Ansys Theory Guide*. Canonsburg, 2021
41. *Ansys Fluent User's Guide*. Canonsburg, 2021
42. Jasak H. *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*. Thesis submitted for the Degree of Doctor of Philosophy of the

University of London and Diploma of Imperial College. Department of Mechanical Engineering Imperial College of Science, Technology and Medicine. 1996. P. 394

43. Rauch R.D., Batira J.T., Yang N.T.Y. Spatial Adaption Procedures on Unstructured Meshes for Accurate Unsteady Aerodynamic Flow Computations. Technical Report AIAA-91-1106. AIAA. 1991.

44. T. J. Barth and D. Jespersen. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. Technical Report AIAA-89-0366. AIAA 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada. 1989

45. Leonard, B. P. (1991). The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 88(1), 17-74.

46. Bartholomew, P., Denner, F., Abdol-Azis, M.H., Marquis, A. and van Wachem, B.G., 2018. Unified formulation of the momentum-weighted interpolation for collocated variable arrangements. *Journal of Computational Physics*, 375, pp.177-208.

47. Ferziger & Peric, 'Computational Methods for Fluid Dynamics', 3rd Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.

48. Van Doormaal J. P., Raithby G.D. "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows". *Numer. Heat Transfer*. 7. 147–163. 1984

49. M. Darwish, I. Sraj, F. Moukalled, 'A coupled finite volume solver for the solution of incompressible flows on unstructured grids', *Journal of Computational Physics* 228 (2009) 180–201.

50. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Тетерина И.В. Геометрические и алгебраические многосеточные методы решения задач газовой динамики на неструктурированных сетках, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016, том 56, номер 2, 283–300

51. Weiss J.M., Maruszewski J.P., Smith W.A. Implicit Solution of Preconditioned Navier-Stokes Equations Using Algebraic Multigrid. *AIAA Journal*. 37(1). 29–36. 1999

52. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Тетерина И.В. Геометрические и алгебраические многосеточные методы решения задач газовой динамики на неструктурированных сетках, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016, том 56, номер 2, 283–300

Приложение А

Свидетельства

